

Website: <http://dethithu.net>

Fanpage: <http://facebook.com/dethithu.net>

Group: **ÔN THI ĐH TOÁN - ANH :**

<http://facebook.com/groups/onthidhtoanhanhvan>

**Bài giảng số 1: THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG DẠNG  
TỔNG QUÁT VÀ THAM SỐ**

**A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM**

➤ **Tọa độ, véc tơ**

✓  $(a, b) \pm (a', b') = (a \pm a', b \pm b')$ ,  $k(a, b) = (ka, kb)$

✓  $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

DeThiThu.Net

✓  $(a, b) \cdot (a', b') = a.a' + b.b'$ ,  $|(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\cos(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}'|}$

✓  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ ,  $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

✓  $M$  chia  $AB$  theo tỷ số  $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow x_M = \frac{x_A - k \cdot x_B}{1 - k}$ ,  $y_M = \frac{y_A - k \cdot y_B}{1 - k}$  ( $k \neq 1$ )

✓ Đặc biệt nếu  $M$  là trung điểm  $AB$  ta có:  $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ ,  $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

✓  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC \Leftrightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ ,  $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

➤ **Véc tơ pháp tuyến, véc tơ chỉ phương**

+) Véc tơ  $\vec{n}(A; B)$  khác  $\vec{0}$  và có giá vuông góc với đường thẳng  $(d)$  được gọi là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng  $(d)$ .

+) Véc tơ  $\vec{u}(a; b)$  khác  $\vec{0}$  và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng  $(d)$  được gọi là véc tơ chỉ phương của đường thẳng  $(d)$ .

+) Nếu  $a \neq 0$  thì  $k = \frac{b}{a}$  được gọi là hệ số góc của đường thẳng  $(d)$ .

• **Chú ý:**

+) Các véc tơ pháp tuyến (véc tơ chỉ phương) của một đường thẳng thì cùng phương. Nếu  $\vec{n}(A; B)$  là véc tơ pháp tuyến của  $(d)$  thì  $k \cdot \vec{n} = (k \cdot A; k \cdot B)$  cũng là véc tơ pháp tuyến của  $(d)$ .

+) Véc tơ pháp tuyến và véc tơ chỉ phương của một đường thẳng thì vuông góc với nhau. Nếu  $\vec{n}(A;B)$  là véc tơ pháp tuyến thì  $\vec{u}(B;-A)$  là véc tơ chỉ phương.

➤ **Phương trình đường thẳng (d) qua điểm  $M(x_0; y_0)$ , có  $\vec{u_d} = (a; b)$  hoặc  $\vec{n_d} = (A; B)$**

+) Phương trình tham số (d): 
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

+) Phương trình chính tắc (d): 
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

+) Phương trình tổng quát (d):  $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

DeThiThu.Net

➤ **Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$ :** 
$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

➤ **Phương trình đoạn chắn:** (d) đi qua 2 điểm  $A(a; 0)$ ,  $B(0; b)$  ( $a, b \neq 0$ ): 
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

➤ **Nhận xét:**

Phương trình đường thẳng  $(d_1)$  song song với  $(d)$  có dạng  $(d_1): Ax + By + C' = 0$

Phương trình đường thẳng  $(d_2)$  vuông góc với  $(d)$  có dạng  $(d_2): Bx - Ay + C'' = 0$

Phương trình đường thẳng có hệ số góc  $k$  và đi qua điểm  $M(x_0; y_0)$  là:  $y = k(x - x_0) + y_0$

➤ **Vị trí tương đối của hai đường thẳng**

Cho 2 đường thẳng  $(d_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0$  và  $(d_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0$ . Khi đó số giao điểm của

$(d_1)$  và  $(d_2)$  là số nghiệm của hệ phương trình: 
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Trong trường hợp  $(d_1)$  và  $(d_2)$  cắt nhau thì nghiệm của (I) chính là tọa độ giao điểm.

## B. CÁC VÍ DỤ MẪU

**Dạng 1: Tìm tọa độ các điểm thỏa mãn điều kiện cho trước**

DeThiThu.Net

❖ Sử dụng quan hệ thuộc để rút bớt ẩn.

❖ Sử dụng quan hệ thuộc, cũng như các quan hệ khác để thành lập phương trình.

**Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC có  $A(6; 4)$ ,  $B(-4; -1)$ ,  $C(2; -4)$

- a) Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của  $\triangle ABC$  và trung điểm  $M$  của  $BC$ .  
 b) Tìm tọa độ  $D$  sao cho  $M$  là trọng tâm  $\triangle ABD$  và điểm  $E$  sao cho  $D$  là trung điểm  $EM$ .  
 c) Tìm tọa độ điểm  $I$  sao cho tứ giác  $ABCI$  là hình bình hành.

**Lời giải**

a) Ta có:  $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = -1$ ,  $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = -\frac{5}{2}$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{4}{3}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow M\left(-1; -\frac{5}{2}\right) \text{ và } G\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

b) Ta có:  $x_M = \frac{x_A + x_B + x_D}{3} \Rightarrow x_D = 3x_M - x_A - x_B = -3 - 6 + 4 = -5$ ,

$$y_D = 3y_M - y_A - y_B = -\frac{15}{2} - 4 + 1 = -\frac{21}{2}$$

Ta có:

$$x_D = \frac{x_E + x_M}{2} \Rightarrow x_E = 2x_D - x_M = 2(-5) - (-1) = -9, \quad y_E = 2y_D - y_M = -2 \cdot \frac{21}{2} + \frac{5}{2} = -\frac{37}{2}$$

$$\Rightarrow D\left(-5; -\frac{21}{2}\right) \text{ và } E\left(-9; -\frac{37}{2}\right)$$

c) Tứ giác  $ABCI$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{IC} \Leftrightarrow (-10; -5) = (2 - x_I; -4 - y_I)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x_I = -10 \\ -4 - y_I = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 12 \\ y_I = 1 \end{cases} \Rightarrow I(12; 1)$$

**Ví dụ 2:** Cho 2 điểm  $A(1; 2)$  và  $B(-3; 3)$  và đường thẳng  $(d): x - y = 0$ .

- a) Tìm tọa độ hình chiếu của  $A$  trên  $(d)$ .  
 b) Tìm tọa độ điểm  $D$  đối xứng với  $A$  qua  $(d)$ .

- c) Tìm giao điểm của  $BD$  và  $(d)$ .

**Lời giải**

a) Gọi  $A'$  là hình chiếu của  $A$  trên  $(d)$ . Ta có:  $\overrightarrow{n_d} = (1; -1) \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = (1; 1)$

Do  $AA' \perp (d)$  nên  $\overrightarrow{n_{AA'}} = \overrightarrow{u_d} = (1; 1)$ . Khi đó phương trình  $AA'$  là:  $(x - 1) + (y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$

Do  $A' = AA' \cap (d)$  nên tọa độ  $A'$  là nghiệm hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{3}{2}$$

Vậy  $A' \left( \frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right)$ .

b) Do  $D \in AA'$  nên  $D(a; 3-a)$ , ( $a \neq 1$ )

$D$  đối xứng với  $A$  qua  $(d) \Rightarrow d(A, d) = d(D, d) \Leftrightarrow \frac{|1-2|}{\sqrt{2}} = \frac{|a-(3-a)|}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow |2a-3| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \text{ (tm)} \\ a = 1 \text{ (l)} \end{cases}$$

Vậy  $D(2; 1)$ .

c) Ta có:  $\overrightarrow{BD} = (5; -2) \Rightarrow \overrightarrow{n_{BD}} = (2; 5)$ .

Khi đó phương trình  $BD$  là:  $2(x-2) + 5(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y - 9 = 0$

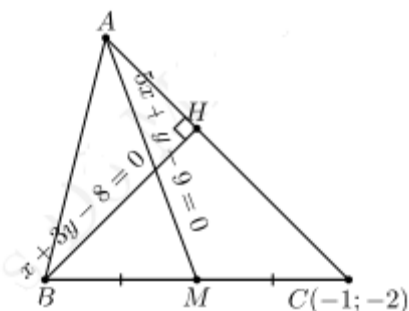
Gọi  $M = BD \cap (d)$ . Khi đó tọa độ  $M$  thỏa mãn: 
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 5y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{9}{7}$$

Vậy  $M \left( \frac{9}{7}; \frac{9}{7} \right)$ .

**Ví dụ 3:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $\triangle ABC$  có  $C(-1; -2)$ , đường trung tuyến kẻ từ  $A$  và đường cao kẻ từ  $B$  lần lượt có phương trình là  $5x + y - 9 = 0$  và  $x + 3y - 5 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh  $A$  và  $B$ .

### Lời giải

Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  và  $H$  là chân đường cao hạ từ đỉnh  $B$  xuống  $AC$ .



$$\overrightarrow{n_{BH}} = (1; 3) \Rightarrow \overrightarrow{u_{BH}} = (3; -1).$$

$$\text{Do } AC \perp BH \Rightarrow \overrightarrow{n_{AC}} = \overrightarrow{u_{BH}} = (3; -1)$$

Vì  $AC: \begin{cases} C(-1; -2) \\ \overrightarrow{n_{AC}} = (3; -1) \end{cases}$  nên phương trình  $AC$  là:

$$3(x+1) - (y+2) = 0 \Leftrightarrow 3x - y + 1 = 0$$

Vì  $A = AC \cap AM$  nên tọa độ  $A$  là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 5x + y - 9 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(1; 4)$$

Vì  $B \in BH \Rightarrow B(5-3b; b) \Rightarrow M\left(\frac{4-3b}{2}; \frac{b-2}{2}\right)$  (Vì M là trung điểm của BC)

Mặt khác ta có:  $M \in AM \Rightarrow 5 \cdot \frac{4-3b}{2} + \frac{b-2}{2} - 9 = 0 \Leftrightarrow 20 - 15b + b - 2 - 18 = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow B(5; 0)$

**Ví dụ 4:** Cho tam giác ABC có  $B(1; 5)$  và đường cao  $AH: x + 2y - 2 = 0$ , đường phân giác trong  $CI: x - y - 1 = 0$ . Tìm tọa độ đỉnh A và C.

#### Lời giải

Vì BC qua B và vuông góc với AH nên đường thẳng

BC qua  $B(1; 5)$ , có VTPT  $\vec{n} = (2; -1)$

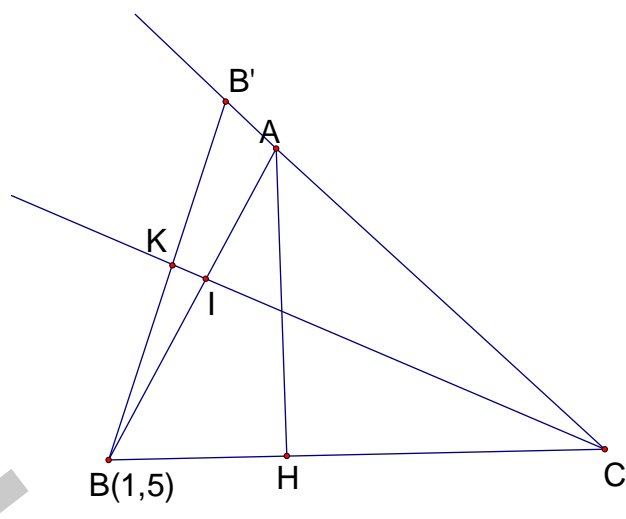
$\Rightarrow BC: 2(x-1) - (y-5) = 0 \Rightarrow BC: 2x - y + 3 = 0$ .

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow C(-4; -5).$$

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua CI thì đường thẳng BB' qua  $B(1; 5)$ ,

có VTPT:  $\vec{n}_1 = (1; 1) \Rightarrow BB': x + y - 6 = 0$ .



Gọi K là giao điểm của BB' với CI thì tọa độ K là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Vì K là trung điểm của BB' nên  $B'(6; 0)$ ,

Phương trình AC là B'C  $\Rightarrow B'C: x - 2y - 6 = 0$ .

Tọa độ A là nghiệm:  $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow A(4; -1)$ .

Vậy:  $A(4; -1)$ ,  $C(-4; -5)$ .

#### **Dạng 2: Phương trình đường thẳng:**

- ❖ Viết phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm và 1 phương (phương vuông góc là véc tơ pháp tuyến hoặc phương song song là véc tơ chỉ phương).
- ❖ Tìm 2 điểm của đường thẳng đó. Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm. Trường hợp này có thể quy về trường hợp trên bằng cách: điểm đi qua là 1 trong 2 điểm và véc tơ chỉ phương là véc tơ nối 2 điểm.

**Ví dụ 5:** Viết phương trình đường thẳng  $(d)$  thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

- $(d)$  đi qua điểm  $A(1; -2)$  có véc tơ chỉ phương  $\vec{u} = (3; -1)$ .
- $(d)$  đi qua điểm  $A(3; -4)$  và vuông góc với đường thẳng  $(\Delta): x - 4y + 2000 = 0$ .
- $(d)$  đi qua điểm  $A(1; 4)$  và song song với đường thẳng  $(\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3}$ .

#### Lời giải

a)  $\vec{u} = (3; -1) \Rightarrow \vec{n} = (1; 3)$

Vì  $(d): \begin{cases} A(1; -2) \\ \vec{n} = (1; 3) \end{cases}$  nên  $(d)$  có phương trình:  $(x-1) + 3(y+2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y + 5 = 0$ .

b) Ta có:  $\vec{n}_\Delta = (1; -4) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (4; 1)$ . Vì  $(d) \perp (\Delta) \Rightarrow \vec{n}_d = \vec{u}_\Delta = (4; 1)$

Ta có:  $(d): \begin{cases} A(3; -4) \\ \vec{n}_d = (4; 1) \end{cases}$  nên phương trình  $(d)$  là:  $4(x-3) + (y+4) = 0 \Leftrightarrow 4x + y - 8 = 0$

c) Ta có:  $(\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3}$  nên  $\vec{u}_\Delta = (2; -3) \Rightarrow \vec{n}_\Delta = (3; 2)$

Vì  $(d) \parallel (\Delta) \Rightarrow \vec{n}_d = \vec{n}_\Delta = (3; 2)$ . Từ đó ta có:  $(d): \begin{cases} A(1; 4) \\ \vec{n}_d = (3; 2) \end{cases}$  nên phương trình  $(d)$  là:

$$3(x-1) + 2(y-4) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 11 = 0.$$

**Ví dụ 6:** Cho tam giác  $ABC$  có tọa độ các đỉnh là  $A(1; -1)$ ,  $B(2; 0)$ ,  $C(-1; 1)$ . Viết phương trình đường phân giác trong của góc  $A$ .

#### Lời giải

Ta có  $\vec{AB}(1; 1)$ ,  $\vec{AC}(-2; 2)$ . Đặt  $\vec{i} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $\vec{j} = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = (\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$

Khi đó ta có véc tơ  $\vec{i} + \vec{j} = (0; \sqrt{2})$  là véc tơ chỉ phương của đường phân giác trong góc A.

Vậy phương trình tham số của đường phân giác trong góc A có dạng

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

**Ví dụ 7:** Cho hình chữ nhật ABCD có điểm  $I(6;2)$  là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD. Điểm  $M(1;5)$  thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng  $(\Delta): x + y - 5 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng AB.

### Lời giải

Do ABCD là hình chữ nhật nên  $I(6;2)$  là trung điểm AC, BD và  $AC = BD$ . Do đó,  $\triangle ICD$  cân tại I, đường trung tuyến IE đồng thời là đường cao  $\Rightarrow IE \perp CD$

Gọi N là điểm đối xứng với M qua I  $\Rightarrow I$  là trung điểm của hai đường AC, MN nên tứ giác AMCN là hình bình hành  $\Rightarrow AM \parallel CN$  mà  $AM \parallel CD$  nên C, N, D thẳng hàng.

Do  $IE \perp CD$  nên  $IE \perp EN \Leftrightarrow \vec{IE} \cdot \vec{EN} = 0$ .

$$E \in (\Delta): x + y - 5 = 0 \Rightarrow E(a; 5-a)$$

Do I là trung điểm của MN nên  $x_I = \frac{x_M + x_N}{2}$

$$\Rightarrow x_N = 2x_I - x_M = 2 \cdot 6 - 1 = 11,$$

$$y_N = 2y_I - y_M = 2 \cdot 2 - 5 = -1 \Rightarrow N(11; -1)$$

$$\text{Vì } \vec{IE} \cdot \vec{NE} = 0 \Leftrightarrow (a-6; 5-a-2) \cdot (a-11; 5-a+1) = 0$$

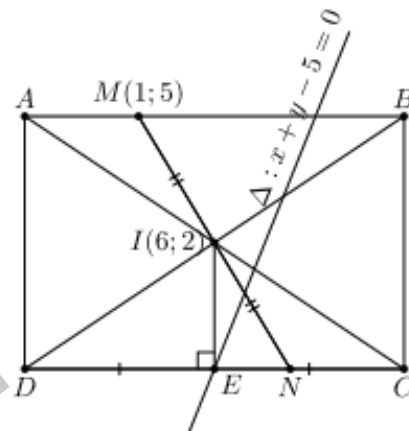
$$\Leftrightarrow (a-6) \cdot (a-11) + (3-a) \cdot (6-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 17a + 66 + a^2 - 9a + 18 = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 26a + 84 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 13a + 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = 7 \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } a = 6: \vec{IE} = (a-6; 3-a) = (0; -3) = -3(0; 1)$$

$$\begin{cases} IE \perp CD \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp IE \Rightarrow \vec{n}_{AB} = \vec{u}_{IE} = (0; 1)$$

Ta được AB:  $\begin{cases} M(1;5) \\ \vec{n}_{AB} = (0;1) \end{cases}$  nên phương trình của AB là:  $0 \cdot (x-1) + (y-5) = 0 \Leftrightarrow y-5 = 0$



+) Với  $a = 7$ :  $\overrightarrow{IE} = (1; -4) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}} = \overrightarrow{IE} = (1; -4)$

Từ đó ta được  $AB$ :  $\begin{cases} M(1; 5) \\ \overrightarrow{n_{AB}} = (1; -4) \end{cases}$  nên phương trình của  $AB$  là:

$$(x-1) - 4(y-5) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 19 = 0.$$

**Ví dụ 8:** Cho hình thoi  $ABCD$  có hai cạnh  $AB$  và  $CD$  lần lượt nằm trên hai đường  $d_1: x - 2y + 5 = 0$ ;  $d_2: x - 2y + 1 = 0$ . Biết rằng  $M(-3; 3)$  thuộc  $AD$  và điểm  $N(-1; 4)$  thuộc  $BC$ . Viết phương trình các đường thẳng  $AD$  và  $BC$ .

**Lời giải**

Gọi  $\vec{n} = (a; b)$  là vtpt của  $BC$

$$\Rightarrow BC: a(x+1) + b(y-4) = 0 \text{ với } a^2 + b^2 > 0.$$

Có  $F(-5; 0) \in AB$ .

$$S_{ABCD} = AB \cdot d(AB, CD) = BD \cdot d(AD, BC)$$

$$\Rightarrow d(AB, CD) = d(AD, BC)$$

$$\Leftrightarrow d(F, d_2) = d(M, BC) \Leftrightarrow \frac{|-4|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|-2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

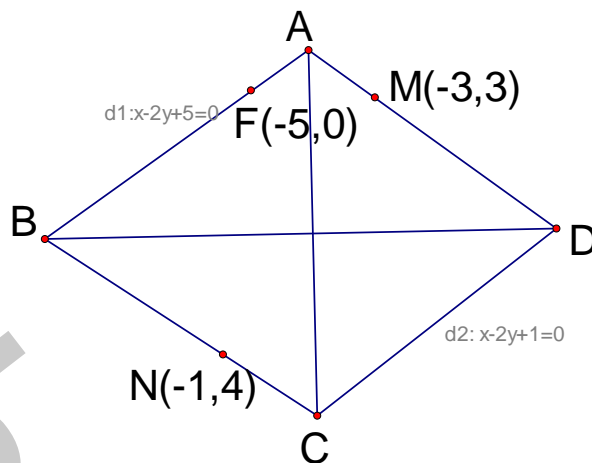
$$\Leftrightarrow 11b^2 - 20ab - 4a^2 = 0 \Leftrightarrow (b-2a)(11b+2a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ 11b = -2a \end{cases}$$

Với  $b = 2a$ , chọn  $a = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow BC: x + 2y - 7 = 0$ .

Vì  $AD$  qua  $M(-3; 3)$  và song song với  $BC$  nên:  $AD: x + 2y - 3 = 0$ .

Với  $11b = -2a$ , chọn  $a = 11 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow BC: 11x - 2y + 19 = 0$ .

Vì  $AD$  qua  $M(-3; 3)$  và song song với  $BC$  nên:  $AD: 11x - 2y + 39 = 0$ .





### C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;2)$ ,  $B(-3;4)$  và  $C(2;0)$

a) Viết phương trình đường trung tuyến  $AM$ .

ĐS:  $AM : y = 2$

b) Viết phương trình đường cao  $BK$ .

ĐS:  $BK : x - 2y + 3 = 0$

$(d_{AB}) : 2x - y + 5 = 0$

c) Viết phương trình đường trung trực của  $AB$ .

ĐS:  $(d_{AC}) : 2x - 4y + 1 = 0$

$(d_{BC}) : 10x - 8y + 21 = 0$

**Bài 2:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(0;1)$ ,  $B(-2;3)$  và  $C(2;0)$

a) Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của  $\triangle ABC$ .

ĐS:  $H(-9; -11)$

b) Tìm tọa độ tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

ĐS:  $I\left(\frac{9}{2}; \frac{15}{2}\right)$

c) Viết phương trình đường thẳng qua  $I, H$  và chứng minh rằng  $IH$  đi qua trọng tâm  $G$  của  $\triangle ABC$ .

ĐS:  $IH : 37x - 27y + 36 = 0, G\left(0; \frac{4}{3}\right)$

**Bài 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(4;1)$ ,  $B(1;7)$ ,  $C(-1;0)$ . Viết phương trình tổng quát của:

a) Đường cao  $AH$ .

ĐS:  $AH : 2x + 7y - 15 = 0$

b) Đường thẳng  $BC$ .

ĐS:  $BC : 7x - 2y + 7 = 0$

c) Trung tuyến  $AM$ .

ĐS:  $AM : 5x + 8y - 28 = 0$

d) Trung trực của  $AB$ .

ĐS:  $d_{AB} : 6x - 12y + 33 = 0$

**Bài 4:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB : x - 3 = 0$ ,  $BC : 4x - 7y + 23 = 0$ ,  $AC : 3x + 7y + 5 = 0$ .

$A(3; -2), B(3; 5), C(-4; 1)$

a) Tìm tọa độ 3 đỉnh  $A, B, C$  và diện tích  $\triangle ABC$ .

ĐS:  $S_{\triangle ABC} = \frac{49}{2}$

b) Tìm tọa độ điểm  $A'$  đối xứng với  $A$  qua  $BC$ .

ĐS:  $A'\left(-\frac{197}{65}; \frac{556}{65}\right)$

c) Tìm tọa độ trực tâm  $H$  và trọng tâm  $G$  của  $\triangle ABC$ .

ĐS:  $H\left(\frac{9}{7}; 1\right), G\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$

**Bài 5:** Cho 2 điểm  $A(5;-2)$ ,  $B(3;4)$ . Viết phương trình đường thẳng  $(d)$  qua điểm  $C(1;1)$  và cách đều 2 điểm  $A, B$ .

$$\text{ĐS: } \begin{cases} (d): 3x + y - 4 = 0 \\ (d): y = 1 \end{cases}$$

**Bài 6:** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng  $(d)$  thỏa mãn điều kiện:

a) Đi qua điểm  $A(1;-2)$  và có hệ số góc bằng 3.  $\text{ĐS: } 3x - y - 5 = 0$

b) Qua điểm  $B(5;-2)$  và vuông góc với đường thẳng  $2x - 5y + 4 = 0$ .  $\text{ĐS: } 5x + 2y - 21 = 0$

c) Qua gốc  $O$  và vuông góc với đường thẳng  $y = \frac{2-3x}{4}$ .  $\text{ĐS: } 4x - 3y = 0$

d) Qua điểm  $I(4;5)$  và hợp với 2 trục tọa độ một tam giác vuông cân.  $\text{ĐS: } \begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$

e) Qua điểm  $A(3;5)$  và cách điểm  $H(1;2)$  xa nhất.  $\text{ĐS: } 2x + 3y - 21 = 0$

**Bài 7:** Cho tam giác  $ABC$  có phương trình các cạnh  $BC: 2x - y - 4 = 0$ , đường cao  $BH: x + y - 2 = 0$ , đường cao  $CK: x + 3y + 5 = 0$ . Viết phương trình các cạnh còn lại của tam giác.

$$\text{ĐS: } \begin{cases} AB: 3x - y - 6 = 0 \\ AC: x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

**Bài 8:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có phương trình cạnh  $AB: 2x - y - 1 = 0$ ,  $AD$  qua điểm  $M(3;1)$  và tâm

$I\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ . Viết phương trình các cạnh  $AD, BC, CD$ .

$$\begin{aligned} AD: x + 2y - 5 &= 0 \\ \text{ĐS: } BC: x + 2y + 5 &= 0 \\ CD: 2x - y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

**Bài 9:** Cho tam giác  $ABC$  có trung điểm  $M$  của  $AB$  có tọa độ  $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ , đường cao  $CH$  với  $H(-1;1)$ , đường cao  $BK$  với  $K(1;3)$  và biết  $B$  có hoành độ dương.

a) Viết phương trình cạnh  $AB$ .  $\text{ĐS: } AB: 2x + y + 1 = 0$

b) Tìm tọa độ  $A, B, C$ .  $\text{ĐS: } A(-2;3), B(1;-3), C(3;3)$

**Bài 10:** Chuyển  $(d)$  về dạng tổng quát biết  $(d)$  có phương trình tham số:

a)  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + t \end{cases}$   $\text{ĐS: } x - 2 = 0$

b)  $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$   $\text{ĐS: } 3x + y - 11 = 0$

c)  $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 5t - 1 \end{cases}$

ĐS:  $5x - 2y - 22 = 0$

**Bài 11:** Trong các điểm  $A_1(2;1)$ ,  $A_2(-1;2)$ ,  $A_3(1;3)$ ,  $A_4(1;-1)$ ,  $A_5\left(\frac{1}{2};2\right)$ ,  $A_6\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$ ,  $A_7(3;1)$ , điểm nào nằm trên đường thẳng  $(d): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ .

ĐS:  $A_1, A_3, A_6 \in (d)$

**Bài 12:** Lập phương trình tổng quát, tham số của đường thẳng  $(\Delta)$  đi qua  $A$  vuông góc với  $(d)$  biết:

$PTTQ: 5x + 2y - 9 = 0$

a)  $A(3;-3)$ ,  $(d): 2x - 5y + 1 = 0$ .

ĐS:  $PTTS: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 - 5t \end{cases}$

$PTTQ: y = 2$

b)  $A(4;2)$ ,  $(d) \equiv Oy$ .

ĐS:  $PTTS: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 \end{cases}$

$PTTQ: x + 2y + 11 = 0$

c)  $A(1;-6)$ ,  $(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

ĐS:  $PTTS: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -6 + t \end{cases}$

$PTTQ: 2x - y - 1 = 0$

d)  $A(-2;-5)$ ,  $(d): \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1}$ .

ĐS:  $PTTS: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -5 + 2t \end{cases}$

**Bài 13:** Cho các điểm  $A(2;1)$ ,  $B(3;5)$ ,  $C(-1;2)$

a) Chứng minh rằng  $A, B, C$  là 3 đỉnh của một tam giác.

ĐS:  $\overline{AB}$  khác phương  $\overline{AC}$

$h_A: 4x + 3y - 11 = 0$

b) Lập phương trình các đường cao của  $\Delta ABC$ .

ĐS:  $h_B: 3x - y - 4 = 0$

$h_C: x + 4y - 7 = 0$

$AB: 4x - y - 7 = 0$

c) Lập phương trình các cạnh của  $\Delta ABC$ .

ĐS:  $AC: x + 3y - 5 = 0$

$BC: 3x - 4y + 11 = 0$

$k_A: 5x + 2y - 12 = 0$

d) Lập phương trình các đường trung tuyến của  $\Delta ABC$ .

ĐS:  $k_B: 7x - 5y + 4 = 0$

$k_C: 2x - 7y + 16 = 0$

e) Lập phương trình các đường trung trực của  $\Delta ABC$ .

$$d_{AB}: 2x + 8y - 29 = 0$$

$$\text{ĐS: } d_{BC}: 8x + 6y - 29 = 0$$

$$d_{AC}: 3x - y = 0$$

**Bài 14:** Lập phương trình tổng quát của đường thẳng  $(\Delta)$  đi qua  $A$  và song song với  $(d)$  biết:

a)  $A(1;3), (d): x - y + 1 = 0$ .

$$\text{ĐS: } x - y + 2 = 0$$

b)  $A(-2;5), (d) \equiv Ox$ .

$$\text{ĐS: } y = 5$$

c)  $A(-1;1), (d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$ .

$$\text{ĐS: } 2x + y + 1 = 0$$

d)  $A(-3;-5), (d): \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-5}$ .

$$\text{ĐS: } 5x + 2y + 25 = 0$$

**Bài 15:** Cho tam giác  $ABC$  với  $B(1;2)$  và  $C(4;-2)$ , diện tích tam giác bằng 10.

a) Viết phương trình đường thẳng  $BC$  và tính độ dài đường cao  $AH$ .

$$\text{ĐS: } BC: 4x + 3y - 10 = 0, AH = 4$$

b) Tìm tọa độ điểm  $A$  biết  $A$  thuộc trục tung.

$$\text{ĐS: } A(0;10), A\left(0; -\frac{10}{3}\right)$$

**Bài 16:** Cho hình vuông  $ABCD$  có  $AB: 3x - 2y - 1 = 0$ ,  $CD: 3x - 2y + 5 = 0$ , và tâm  $I$  thuộc đường thẳng  $(d): x + y - 1 = 0$ .

a) Tìm tọa độ  $I$ .

$$\text{ĐS: } I(0;1)$$

b) Viết phương trình đường thẳng  $AD, BC$ .

$$\text{ĐS: } 2x + 3y = 0; 2x + 3y - 6 = 0$$

**Bài 17:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\Delta ABC$  có  $A(2;-3)$ ,  $B(3;-2)$ , diện tích tam giác bằng  $\frac{3}{2}$  và trọng tâm  $G$  thuộc đường thẳng  $(d): 3x - y - 8 = 0$ . Tìm tọa độ đỉnh  $C$ .  $\text{ĐS: } C(1;-1), C(-2;-10)$

**Bài 18:** Lập phương trình tổng quát, tham số của đường thẳng  $(d)$  biết:

a) Đi qua điểm  $M(1;-2)$  và có véc tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (-3;2)$ .

$$PTTQ: 3x - 2y - 7 = 0$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$$

$$PTTQ: x - 4y + 1 = 0$$

b) Đi qua điểm  $M(3;1)$  và có véc tơ pháp tuyến  $\vec{u} = (-4;-1)$ .

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 - t \end{cases}$$

c) Đi qua 2 điểm  $A(1; -4)$ ,  $B(-2; 1)$ .

$$PTTQ: 5x + 3y + 7 = 0$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -4 - 5t \end{cases}$$

d)  $(d)$  là trung trực của  $AB$  với  $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$  và  $B(2; -1)$ .

$$PTTQ: 12x - 16y - 15 = 0$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{5}{4} + 4t \\ y = 3t \end{cases}$$

e) Đi qua điểm  $M(7; 3)$  và có hệ số góc  $k = -\frac{2}{3}$ .

$$PTTQ: 2x + 3y - 23 = 0$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = 7 - 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$$

**Bài 19:** Chuyển  $(d)$  về dạng tham số biết  $(d)$  có phương trình tổng quát:

a)  $2x - 3y = 0$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \end{cases}$$

b)  $2x - 3 = 0$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = t \end{cases}$$

c)  $3x - 4y + 5 = 0$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

**Bài 20:** Cho  $\triangle ABC$  có  $A(-1; 2)$ ,  $B(4; -3)$ ,  $C(2; 3)$ .

a) Lập phương trình đường trung trực của  $AB$ .

$$\text{ĐS: } x - y - 2 = 0$$

b) Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm  $M(3; 7)$  và vuông góc với đường trung tuyến kẻ từ  $A$  của  $\triangle ABC$ .

$$\text{ĐS: } 2x - y + 1 = 0$$

**Bài 21:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\triangle ABC$  có  $C(-1; -2)$ , đường trung tuyến kẻ từ  $A$  và đường cao kẻ từ  $B$  lần lượt có phương trình là  $5x + y - 9 = 0$  và  $x + 3y - 5 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh  $A$  và  $B$ .

$$\text{ĐS: } A(1; 4), B(5; 0)$$

**Bài 22:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $\triangle ABC$  có  $M(2; 0)$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh  $A$  lần lượt có phương trình là  $7x - 2y - 3 = 0$  và  $6x - y - 4 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $AC$ .

$$\text{ĐS: } AC: 3x - 4y + 5 = 0$$

**Bài 23:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hình chữ nhật  $ABCD$  có điểm  $I(6;2)$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Điểm  $M(1;5)$  thuộc đường thẳng  $AB$  và trung điểm  $E$  của cạnh  $CD$  thuộc đường thẳng  $(\Delta): x + y - 5 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $AB$ .

$$\text{ĐS: } AB: y - 5 = 0; x - 4y + 19 = 0$$

**Bài 24:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai đường thẳng  $(d_1): x - y = 0$  và  $(d_2): 2x + y - 1 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông  $ABCD$  biết rằng đỉnh  $A$  thuộc  $(d_1)$ , đỉnh  $C$  thuộc  $(d_2)$  và các đỉnh  $B, D$  thuộc trục hoành.

$$\text{ĐS: } \begin{cases} A(1;1), B(0;0), C(1;-1), D(2;0) \\ A(1;1), B(2;0), C(1;-1), D(0;0) \end{cases}$$

**Bài 25:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\triangle ABC$  có  $AB = AC$ ,  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ . Biết  $M(1;-1)$  là trung điểm cạnh  $BC$  và  $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Tìm tọa độ các đỉnh  $A, B, C$ . ĐS:  $A(0;2), B(4;0), C(-2;-2)$

**Bài 26:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(0;-2)$ , phương trình đường cao  $BH: x - 2y + 1 = 0$ , trung tuyến  $CK: 2x - y + 2 = 0$ . Tìm tọa độ hai đỉnh  $B$  và  $C$ .

$$\text{Đáp số: } B\left(\frac{-11}{3}; \frac{-4}{3}\right), C(-1; 0); AC: 2x + y + 2 = 0, K(t, 2t + 2), B(2t; 4t + 6), BC: x - 2y + 1 = 0$$

## Bài giảng số 2: KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

- Góc giữa hai đường thẳng  $(d_1)$  và  $(d_2)$  được thay bằng góc giữa 2 véc tơ chỉ phương hoặc 2 véc tơ pháp tuyến:  $\cos \phi = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right|$ , ở đó  $\phi = (\widehat{d_1, d_2})$ .

Chú ý: Trường hợp 2 đường thẳng không song song với Oy và chúng không vuông góc với nhau thì ta có thể tính bằng công thức:  $\tan \phi = \frac{|k_1 - k_2|}{1 + k_1 k_2}$ , ở đó  $k_1, k_2$  tương ứng là hệ số góc của 2 đường thẳng.

- Khoảng cách từ điểm  $M(x_0; y_0)$  đến đường thẳng  $(d): Ax + By + C = 0$

$$\text{Ta có: } d(M, d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Chú ý: Ta thường sử dụng phương trình tổng quát khi phải tính góc, khoảng cách. Còn ta dùng phương trình tham số khi có mối quan hệ thuộc.

- Phương trình đường phân giác của 2 đường thẳng  $(d_1): Ax + By + C = 0$  và  $(d_2): A'x + B'y + C' = 0$

$$\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|A'x + B'y + C'|}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

### B. CÁC VÍ DỤ MẪU

#### Dạng 1: Dạng bài toán sử dụng công thức khoảng cách

**Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC có  $A(6; 4)$ ,  $B(-4; -1)$ ,  $C(2; -4)$ . Tìm tọa độ điểm  $F \in BC$  sao cho  $d(F, AB) = 2d(F, AC)$ .

**Lời giải**

$$\overrightarrow{AC} = (-4; -8) = -4(1; 2). \text{ Vì } AC: \begin{cases} \overrightarrow{n_{AC}} = (2; -1) \\ A(6; 4) \end{cases} \text{ nên phương trình } AC \text{ là:}$$

$$2(x-6) - (y-4) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 8 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} = (-10; -5) = -5(2; 1). \text{ Vì } AB: \begin{cases} \overrightarrow{n_{AB}} = (1; -2) \\ A(6; 4) \end{cases} \text{ nên phương trình } AB \text{ là:}$$

$$(x-6) - 2(y-4) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0$$

$$\overrightarrow{BC} = (6; -3) = 3(2; -1). \text{ Vì } BC: \begin{cases} \overrightarrow{u_{BC}} = (2; -1) \\ C(2; -4) \end{cases} \text{ nên phương trình tham số } BC \text{ là: } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -4 - t \end{cases}$$

$$F \in BC \Rightarrow F(2 + 2a; -4 - a)$$

$$\text{Ta có: } d(F, AB) = 2d(F, AC) \Leftrightarrow \frac{|2 + 2a - 2(-4 - a) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 2 \cdot \frac{|2(2 + 2a) - (-4 - a) - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow |4a + 12| = 2|5a| \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 6 = 5a \\ 2a + 6 = -5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 6 \\ 7a = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -\frac{6}{7} \end{cases}$$

$$\text{Với } a = 2: F(6; -6)$$

$$\text{Với } a = -\frac{6}{7}: F\left(\frac{2}{7}; -\frac{22}{7}\right)$$

**Ví dụ 2:** Cho 2 đường thẳng  $(d_1): 2x - 3y + 1 = 0$ ,  $(d_2): -4x + 6y - 3 = 0$ .

a) Chứng minh  $(d_1) \parallel (d_2)$ .

b) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng đó.

**Lời giải**

$$\text{a) Ta có } \overrightarrow{n_{d_1}} = (2; -3), \overrightarrow{n_{d_2}} = (-4; 6) \Rightarrow \overrightarrow{n_{d_2}} = -2\overrightarrow{n_{d_1}} \Rightarrow \overrightarrow{n_{d_2}} \parallel \overrightarrow{n_{d_1}}$$

Trên  $(d_1)$  lấy  $A(2; 1)$ , và ta thấy  $A \notin (d_2) \Rightarrow (d_1) \neq (d_2)$ .

Do đó  $(d_1) \parallel (d_2)$ .

$$\text{b) Do } (d_1) \parallel (d_2) \text{ nên } d(d_1, d_2) = d(A, d_2) \Rightarrow d(d_1, d_2) = \frac{|-4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = \frac{5\sqrt{13}}{26}.$$



**Ví dụ 3:** Lập phương trình đường phân giác của các góc tạo bởi  $(d_1)$  và  $(d_2)$  biết  $(d_1): 2x + 3y - 1 = 0$  và  $(d_2): 3x + 2y + 2 = 0$ .

### Lời giải

Phương trình các đường phân giác của 2 đường thẳng  $(d_1)$  và  $(d_2)$ :  $\frac{|2x + 3y - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|3x + 2y + 2|}{\sqrt{3^2 + 2^2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 1 = 3x + 2y + 2 \\ 2x + 3y - 1 = -3x - 2y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 5x + 5y + 1 = 0 \end{cases}$$

**Ví dụ 4:** (ĐH Khối B-2009). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A có tọa độ  $A(-1; 4)$  và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng  $\Delta: x - y - 4 = 0$ . Xác định tọa độ các điểm B và C biết diện tích tam giác ABC là 18.

### Lời giải

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng  $\Delta$ , khi đó tọa độ của điểm H(t; t - 4).

Véc tơ  $\overrightarrow{AH}(t + 1; t - 8)$

Véc tơ chỉ phương của  $\Delta$  là  $\vec{u}_\Delta(1; 1)$ , vì AH vuông góc với  $\Delta$  nên ta có

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow t + 1 + t - 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{2}.$$

Suy ra  $\overrightarrow{AH}(\frac{9}{2}; -\frac{9}{2})$ . Vậy  $AH = \frac{9}{\sqrt{2}}$ . Theo công thức tính diện tích tam giác ABC ta có

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow BC = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AH} = 4\sqrt{2}.$$

Đường tròn tâm  $H(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2})$ , bán kính  $R = \frac{BC}{2} = 2\sqrt{2}$  có dạng

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 8.$$

Khi đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 8. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình suy ra  $B(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}), C(\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$  hoặc ngược lại.

## **Dạng 2: Dạng bài toán sử dụng công thức góc giữa hai đường thẳng**

**Ví dụ 5:** Viết phương trình đường thẳng  $(d)$  đi qua giao điểm của 2 đường thẳng  $(\Delta_1): \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3}$ ,

$(\Delta_2): \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-3t \end{cases}$  và tạo với đường thẳng  $(\Delta_3): 3x+4y-10=0$  một góc  $45^\circ$ .

### **Lời giải**

Ta có:  $M = (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$  nên tọa độ  $M$  là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-3t \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{2+t+1}{2} = \frac{3-3t-3}{3} \Leftrightarrow t+3 = -2t \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow M(1;6)$$

Ta có:  $\vec{n}_{\Delta_3} = (3;4)$ . Gọi  $\vec{n}_d = (A;B)$ .

$$\text{Vì } (\widehat{d, \Delta_3}) = 45^\circ \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{|\vec{n}_d \cdot \vec{n}_{\Delta_3}|}{|\vec{n}_d| \cdot |\vec{n}_{\Delta_3}|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|3A+4B|}{\sqrt{A^2+B^2} \cdot \sqrt{3^2+4^2}}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{2} \cdot |3A+4B| \Leftrightarrow 25(A^2+B^2) = 2(9A^2+24AB+16B^2)$$

$$\Leftrightarrow 7A^2 - 48AB - 7B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 7B \\ A = -\frac{1}{7}B \end{cases}$$

+) Với  $A = 7B$ : Chọn  $B = 1 \Rightarrow A = 7$ . Phương trình  $(d)$  là:  $7(x-1) + (y-6) = 0 \Leftrightarrow 7x + y - 13 = 0$

+) Với  $A = -\frac{1}{7}B$ : Chọn  $B = -7 \Rightarrow A = 1$ . Phương trình  $(d)$  là:  $(x-1) - 7(y-6) = 0 \Leftrightarrow x - 7y + 41 = 0$

**Ví dụ 6:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có cạnh AB:  $x-2y-1=0$ , đường chéo BD:  $x-7y+14=0$  và đường chéo AC đi qua điểm  $M(2;1)$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

### **Lời giải**

Gọi véc tơ pháp tuyến của AC là  $\vec{n}_{AC}(a;b)$ , vì góc  $(AB, AC) = (AB, BD)$  nên suy ra

$$\frac{\left| \overrightarrow{n_{AB}} \overrightarrow{n_{BD}} \right|}{\left| \overrightarrow{n_{AB}} \right| \left| \overrightarrow{n_{BD}} \right|} = \frac{\left| \overrightarrow{n_{AC}} \overrightarrow{n_{AB}} \right|}{\left| \overrightarrow{n_{AC}} \right| \left| \overrightarrow{n_{BD}} \right|} \Leftrightarrow \frac{15}{\sqrt{5}\sqrt{50}} = \frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 7a^2 + 8ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow 7\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 8\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = -1 \Rightarrow a = 1, b = -1 \\ \frac{a}{b} = -\frac{1}{7} \Rightarrow a = -1, b = 7 \quad (L) \end{cases}$$

Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng AC qua M(2; 1) có véc tơ pháp tuyến (1; -1) có dạng  $x - y - 1 = 0$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ  $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x - 7y + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(7; 3)$

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ  $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 0)$

Tọa độ giao điểm I của AC, BD là nghiệm của hệ  $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 7y + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Do I là trung điểm của AC, BD nên suy ra tọa độ C(4; 3) và D(-2; 0).

### C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1:** Cho đường thẳng  $(\Delta): \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$  và điểm M(3;1).

a) Tìm trên  $(\Delta)$  điểm A sao cho  $AM = \sqrt{13}$ .

ĐS: M(0; -1), M(1; -2)

b) Tìm trên  $(\Delta)$  điểm B sao cho MB là ngắn nhất.

ĐS:  $MB_{\min} = \frac{\sqrt{50}}{2} \Leftrightarrow B\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

**Bài 2:** Cho điểm A(1;1) và điểm B(-2;2). Viết phương trình đường thẳng (d) qua A và cách B một khoảng bằng  $\sqrt{5}$ .

ĐS:  $\begin{cases} (d): 2x + y - 3 = 0 \\ (d): x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

**Bài 3:** Cho đường thẳng  $(\Delta): x + y - 1 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A(1;1) và hợp với  $(\Delta)$  một góc:

a)  $90^0$

b)  $45^0$

c)  $60^0$

d)  $30^0$

ĐS:  $x - y = 0$

ĐS:  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

ĐS:  $\begin{cases} x + (\sqrt{3} - 2)y + 1 - \sqrt{3} = 0 \\ x - (\sqrt{3} + 2)y + 1 + \sqrt{3} = 0 \end{cases}$

ĐS:  $\begin{cases} x - (\sqrt{3} - 2)y - 3 + \sqrt{3} = 0 \\ x + (\sqrt{3} + 2)y - 3 - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$

**Bài 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho 2 điểm  $A(1;1)$  và  $B(4;-3)$ . Tìm điểm  $C$  thuộc đường thẳng  $x - 2y - 1 = 0$  sao cho khoảng cách từ  $C$  đến đường thẳng  $AB$  bằng 6.

ĐS:  $C(7;3), C\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right)$

**Bài 5:** Trong mặt phẳng tọa độ cho các đường thẳng:  $(d_1): x + y + 3 = 0$ ,  $(d_2): x - y - 4 = 0$ ,  $(d_3): x - 2y = 0$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên  $(d_3)$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến đường thẳng  $(d_1)$  bằng 2 lần khoảng cách từ  $M$  đến  $(d_2)$ .

ĐS:  $M(-22;-11), M(2;1)$

**Bài 6:** Tìm góc giữa các cặp đường thẳng sau:

a)  $(d_1): 5x + 3y - 4 = 0$ ,  $(d_2): x + 2y + 2 = 0$ .

ĐS:  $32^0 28'$

b)  $(d_1): 3x - 4y - 14 = 0$ ,  $(d_2): \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1}$ .

ĐS:  $63^0 26'$

c)  $(d_1): \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$ ,  $(d_2): 3x + 2y - 2 = 0$ .

ĐS:  $37^0 52'$

d)  $(d_1): x + y + m - 1 = 0$ ,  $(d_2): x - y + 2m - 1 = 0$ .

ĐS:  $90^0$

**Bài 7:** Tính khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường thẳng  $(d)$  trong các trường hợp sau:

a)  $M(-3;2)$ ,  $(d): 3x + 4y - 1 = 0$ .

ĐS:  $d(M, d) = \frac{2}{5}$

b)  $M(2;-5)$ ,  $(d): y = 2x + 3$ .

ĐS:  $d(M, d) = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

c)  $M(-4;-1)$ ,  $(d) \equiv Ox$ .

ĐS:  $d(M, d) = 1$

d)  $M(-3;2), (d): 2x = 3.$

ĐS:  $d(M, d) = \frac{9}{2}$

e)  $M(5;-2), (d): \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 5 - t \end{cases}.$

ĐS:  $d(M, d) = \frac{7\sqrt{5}}{5}$

f)  $M(3;2), (d): \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{2}.$

ĐS:  $d(M, d) = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

**Bài 8:** Lập phương trình đường thẳng  $(d)$  đi qua  $M$  và tạo với  $(\Delta)$  một góc  $\phi$  biết:

a)  $M(-1;2), (\Delta): x - 2y + 3 = 0, \phi = 45^\circ.$

ĐS:  $\begin{cases} (d): x + 3y - 5 = 0 \\ (d): 3x - y + 5 = 0 \end{cases}$

b)  $M(2;0), (\Delta): \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 + t \end{cases}, \phi = 45^\circ.$

ĐS:  $\begin{cases} (d): x - 2y - 2 = 0 \\ (d): 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$

**Bài 9:** Lập phương trình đường phân giác của các góc tạo bởi  $(d_1)$  và  $(d_2)$  biết:

a)  $(d_1): 4x + 3y - 4 = 0, (d_2): \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = -3 + 12t \end{cases}.$

ĐS:  $\begin{cases} 8x - 14y + 67 = 0 \\ 112x + 64y - 37 = 0 \end{cases}$

b)  $(d_1): 5x + 3y - 4 = 0, (d_2): \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{5}.$

ĐS:  $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ 5x - 1 = 0 \end{cases}$

c)  $(d_1): 3x - 4y + 5 = 0, (d_2) \equiv Ox.$

ĐS:  $\begin{cases} 3x - 9y + 5 = 0 \\ 3x + y + 5 = 0 \end{cases}$

**Bài 10:** Lập phương trình đường thẳng  $(d_1)$  đối xứng với đường thẳng  $(d)$  qua đường thẳng  $(\Delta)$  biết:

a)  $(d): x + 2y - 1 = 0, (\Delta): 2x - y + 3 = 0.$

ĐS:  $(d_1) \equiv (d)$

b)  $(d): 2x + 3y + 5 = 0, (\Delta): 5x - y + 4 = 0.$

ĐS:  $(d_1): 9x - 46y - 37 = 0$

c)  $(d): 5x + y - 6 = 0, (\Delta): \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{3}.$

ĐS:  $(d_1): 37x + 55y - 24 = 0$

d)  $(d): -2x + y + 3 = 0, (\Delta): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}.$

ĐS:  $(d_1): 2x + 11y - 71 = 0$

**Bài 11:** Lập phương trình các cạnh của  $\Delta ABC$  biết  $A(0;3)$ , phương trình 2 đường phân giác trong xuất

$AB: 2x + y - 3 = 0$

phát từ  $B$  và  $C$  lần lượt là  $(d_B): x - y = 0, (d_C): x + 2y - 8 = 0.$

ĐS:  $AC: 22x - 19y + 57 = 0$

$BC: 34x + 5y - 39 = 0$

**Bài 12:** Lập phương trình các cạnh của  $\triangle ABC$  biết  $A(-4;3)$ ,  $B(9;2)$  và phương trình đường phân giác trong xuất phát từ  $C$  là  $(d): x - y + 3 = 0$ .

$$AB: x + 13y - 35 = 0 \quad AB: x + 13y - 35 = 0$$

$$\text{ĐS: } AC: x + 3y - 5 = 0 \quad \text{hoặc } AC: 3x - y + 15 = 0$$

$$BC: y - 2 = 0 \quad BC: x - 3y - 3 = 0$$

**Bài 13:** Lập phương trình các cạnh của  $\triangle ABC$  biết phương trình cạnh  $BC: x + 4y - 8 = 0$  và phương trình 2 đường phân giác trong xuất phát từ  $B$  và  $C$  lần lượt là  $(d_B): y = 0$ ,  $(d_C): 5x + 3y - 6 = 0$ .

$$AB: x - 4y - 8 = 0$$

$$\text{ĐS: } AC: (94 + \sqrt{1921})x + 4(26 - \sqrt{1921})(y - 2) = 0$$

**Bài 14:** Lập phương trình các cạnh của  $\triangle ABC$  biết  $C(3;-3)$ , phương trình đường cao và đường phân giác trong xuất phát từ  $A$  lần lượt là:  $(d_1): x = 2$ ,  $(d_2): 3x + 8y - 14 = 0$ .

$$AC: 4x + y - 9 = 0$$

$$\text{ĐS: } BC: y = -3$$

$$AB: x + \frac{204 \pm \sqrt{8787}}{62}y - \frac{204 \pm \sqrt{8787}}{62} - 2 = 0$$

**Bài 15:** Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của  $\triangle ABC$  và xác định tọa độ điểm  $K$  đối xứng với  $H$  qua  $BC$  biết  $A(0;3)$ ,  $B(3;0)$ ,  $C(-1;-1)$ .

$$\text{ĐS: } H\left(\frac{3}{5}; \frac{3}{5}\right), K\left(\frac{99}{85}; -\frac{141}{85}\right)$$

**Bài 16:** Lập phương trình đường thẳng  $(\Delta)$  đối xứng với đường thẳng  $(d)$  qua điểm  $I$  biết:

a)  $I(-3;1)$ ,  $(d): 2x + y - 3 = 0$ .

$$\text{ĐS: } 2x + y + 13 = 0$$

b)  $I(1;1)$ ,  $(d): 3x - 2y + 1 = 0$ .

$$\text{ĐS: } 3x - 2y - 3 = 0$$

c)  $I(-1;3)$ ,  $(d): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$ .

$$\text{ĐS: } 2x - y + 15 = 0$$

d)  $I(0;2)$ ,  $(d): \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 - 4t \end{cases}$ .

$$\text{ĐS: } 4x + y - 11 = 0$$

**Bài 17:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB: 2x + y - 3 = 0$ ,  $AC: 2x - y + 7 = 0$ ,  $BC: x - y = 0$ .

a) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

$$\text{ĐS: } (-6;0)$$

b) Viết phương trình đường thẳng đối xứng với  $AB$  qua  $BC$ .

$$\text{ĐS: } x + 2y - 3 = 0$$

**Bài 18:** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $I(2;-3)$ , phương trình  $AB: 3x + 4y - 4 = 0$ .

a) Tính cạnh hình vuông.

$$\text{ĐS: } AB = BC = CD = AD = 4$$

$$CD: 3x + 4y + 16 = 0$$

b) Viết phương trình các cạnh  $CD, AD, BC$ .

$$\text{ĐS: } AD: 4x - 3y - 7 = 0$$

$$BC: 4x - 3y - 27 = 0$$

**Bài 19:** Cho đường thẳng  $(d): x + 2y - 4 = 0$  và 2 điểm  $A(1;4), B(6;4)$ .

a) Chứng minh  $A, B$  nằm cùng phía đối với  $(d)$ . Tìm tọa độ điểm  $A'$  đối xứng với  $A$  qua  $(d)$ .

$$\text{ĐS: } A'(-1;0)$$

b) Tìm điểm  $M \in (d)$  sao cho  $d(M, AB) = \sqrt{2}$ .

$$\text{ĐS: } \begin{cases} M(-2\sqrt{2}-4; \sqrt{2}+4) \\ M(2\sqrt{2}-4; -\sqrt{2}+4) \end{cases}$$

**Bài 20:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , tìm điểm  $A$  thuộc trục hoành và điểm  $B$  thuộc trục tung sao cho  $A$  và  $B$  đối xứng với nhau qua đường thẳng  $(d): x - 2y + 3 = 0$ .

$$\text{ĐS: } A(2;0), B(0;4)$$

**Bài 21:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $A(0;2)$  và  $B(-\sqrt{3};-1)$ . Tìm tọa độ trục tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OAB$ .

$$\text{ĐS: } H(\sqrt{3};-1), I(-\sqrt{3};1)$$

**Bài 22:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , hãy xác định tọa độ đỉnh  $C$  của  $\triangle ABC$  biết rằng hình chiếu vuông góc của  $C$  trên đường thẳng  $AB$  là điểm  $H(-1;-1)$ , đường phân giác trong của góc  $A$  có phương trình  $x - y + 2 = 0$  và đường cao kẻ từ  $B$  có phương trình  $4x + 3y - 1 = 0$ .

$$\text{ĐS: } C\left(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4}\right)$$

**Bài 23:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(2;2)$  và các đường thẳng  $(d_1): x + y - 2 = 0$ ,  $(d_2): x + y - 8 = 0$ . Tìm tọa độ các điểm  $B$  và  $C$  lần lượt thuộc  $(d_1)$  và  $(d_2)$  sao cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$ .

$$\text{ĐS: } \begin{cases} B(-1;3), C(3;5) \\ B(3;-1), C(5;3) \end{cases}$$

**Bài 24:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $A(1;1)$  và  $B(4;-3)$ . Tìm điểm  $C$  thuộc đường thẳng  $x - 2y - 1 = 0$  sao cho khoảng cách từ  $C$  đến đường thẳng  $AB$  bằng 6.

$$\text{ĐS: } C_1(7;3), C_2\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right)$$

**Bài 25:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$  cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ , phương trình đường thẳng  $AB$  là  $x - 2y + 2 = 0$  và  $AB = 2AD$ . Tìm tọa độ các đỉnh  $A, B, C, D$  biết rằng đỉnh  $A$  có hoành độ âm.

$$\text{ĐS: } A(-2;0), B(2;2), C(3;0), D(-1;-2)$$

**Bài 26:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho các đường thẳng:  $d_1: x + y + 3 = 0$ ,  $d_2: x - y - 4 = 0$ ,  $d_3: x - 2y = 0$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  nằm trên đường thẳng  $d_3$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến đường thẳng  $d_1$  bằng hai lần khoảng cách từ  $M$  đến đường thẳng  $d_2$ . (ĐH - Khối A 2006)

**Bài 27:** Cho đường thẳng  $d: 2x + 3y + 1 = 0$  và điểm  $M(1; 1)$ . Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm  $M$  và tạo với  $d$  một góc  $45^\circ$ .

$$\text{Đs: } x - 5y + 4 = 0 \text{ và } 5x + y - 6 = 0$$

**Bài 28:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$  cho hình chữ nhật  $ABCD$  có diện tích bằng 12, tâm  $I$  là giao điểm của đường thẳng  $d_1: x - y - 3 = 0$  và  $d_2: x + y - 6 = 0$ . Trung điểm của một cạnh là giao điểm của  $d_1$  với trục  $Ox$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

$$\text{Đs: } (2; 1), (5; 4), (7; 2), (4; -1)$$

**Bài 29:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(3; -2); B(2; -3)$ ; trọng tâm  $G$  nằm trên  $(\Delta): 3x - y - 8 = 0$

và  $S_{\Delta ABC} = \frac{3}{2}$ . Tìm tọa độ  $C$ .

$$\text{Đáp số: } C_1(-2; -10), C_2(1; -1)$$



### Bài giảng số 3: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

#### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

##### ➤ Phương trình

- Phương trình chính tắc của đường tròn tâm  $I(a;b)$ , bán kính  $R$ :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

- Phương trình tổng quát của đường tròn:

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

Ở đó tâm  $I(-A;-B)$ , bán kính  $R = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$ .

- Phương trình tham số của đường tròn tâm  $I(a;b)$ , bán kính  $R$ :

$$\begin{cases} x = a + R \cos t \\ y = b + R \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

##### ➤ Phương tích

- Định nghĩa: Cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ . Khi đó  $P_{M/(C)} = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$  không phụ thuộc vào phương của cát tuyến  $MAB$  của đường tròn mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm  $M$ .  
Cụ thể nếu điểm  $M(x_0; y_0)$  thì  $P_{M/(C)} = x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + 2By_0 + C = 0$ .

- Trục đẳng phương: Cho 2 đường tròn  $(C_1)$  và  $(C_2)$ , khi đó:

Tập  $d = \{M \mid P_{M/(C_1)} = P_{M/(C_2)}\}$  là một đường thẳng và đó gọi là trục đẳng phương của 2 đường tròn.

Nếu  $(C_1): x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = 0$  và  $(C_2): x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2 = 0$  thì phương trình trục đẳng phương là:  $2(A_1 - A_2)x + 2(B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0$ .

**Chú ý:** Khi 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm  $A, B$  thì  $AB$  chính là trục đẳng phương của 2 đường tròn. Nếu 2 đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm  $A$  thì trục đẳng phương của 2 đường tròn chính là đường tiếp tuyến chung của 2 đường tròn tại điểm  $A$ .

#### B. CÁC VÍ DỤ MẪU

##### Dạng 1: Xác định tâm và bán kính của đường tròn

**Ví dụ 1:** Tìm tâm và bán kính của các đường tròn sau:

$$a) (C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$$

$$b) (C): x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$$

**Lời giải:**

$$a) \text{ Tâm } I(1; -3), \text{ bán kính } R = \sqrt{5}.$$

$$b) \text{ Tâm } I\left(\frac{3}{2}; -1\right), \text{ bán kính } R = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 - (-1)} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

**Ví dụ 2:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình sau

$2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y + 1 + m^2 = 0$  (1) là phương trình đường tròn. Khi đó hãy tìm tâm và bán kính của đường tròn

**Lời giải**

$$\text{Phương trình (1) viết lại dưới dạng: } x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - 2y - \frac{1+m^2}{2} = 0$$

Điều kiện để (1) là phương trình đường tròn là

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c > 0 &\Leftrightarrow \frac{25}{16} + 1 - \frac{1+m^2}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{41-8-8m^2}{16} > 0 \\ &\Leftrightarrow 33-8m^2 > 0 \Leftrightarrow |m| < \sqrt{\frac{33}{8}} \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó tâm và bán kính đường tròn là } I\left(\frac{5}{4}; 1\right), R = \frac{1}{4}\sqrt{33-8m^2}.$$

**Dạng 2: Viết phương trình đường tròn**

**Ví dụ 3:** Viết phương trình đường tròn  $(C)$ , tìm tâm và bán kính biết:

$$a) (C) \text{ đi qua 3 điểm } A(4;2), B(1;3), C(-3;1).$$

$$b) (C) \text{ đi qua 2 điểm } A(-1;5), B(0;2) \text{ và tiếp xúc với đường thẳng } (\Delta): 2x - y + 2 = 0.$$

$$c) (C) \text{ đi qua điểm } A(4;-7) \text{ và tiếp xúc với 2 đường thẳng } (\Delta_1): 3x - 4y - 42 = 0 \text{ và } (\Delta_2): y + 8 = 0.$$

$$d) (C) \text{ tiếp xúc ngoài với đường tròn } (C_1): x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0 \text{ và đi qua 2 điểm } A(1;5), B(0;-2).$$

**Lời giải:**

$$a) \text{ Gọi phương trình đường tròn } (C): x^2 + y^2 + ax + by + c = 0. \text{ Do } (C) \text{ đi qua 3 điểm } A, B, C \text{ nên ta có}$$

$$\text{hệ phương trình: } \begin{cases} 4^2 + 2^2 + 4a + 2b + c = 0 \\ 1^2 + 3^2 + a + 3b + c = 0 \\ (-3)^2 + 1^2 - 3a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = -20 \\ a + 3b + c = -10 \\ -3a + b + c = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \\ c = -20 \end{cases}$$

Từ đó ta được phương trình đường tròn là:  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ .

Tâm  $I(1; -2)$ , bán kính  $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 - (-20)} = 5$ .

b) Gọi phương trình đường tròn  $(C)$ :  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ .

$(C)$  đi qua 2 điểm  $A(-1; 5)$ ,  $B(0; 2)$  nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (-1)^2 + 5^2 - 2a + 10b + c = 0 \\ 0^2 + 2^2 + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 10b + c + 26 = 0 \\ c = -4b - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -4b - 4 \\ a = \frac{10b + c + 26}{2} = 3b + 11 \end{cases}$$

Do  $(C)$  tiếp xúc với  $(\Delta)$  nên ta có:  $d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|-2a + b + 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + 4 - 4ab + 4b - 8a = 5(a^2 + b^2 - c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4b^2 + 4ab - 4b + 8a - 5c - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3b + 11)^2 + 4b^2 + 4b(3b + 11) - 4b + 8(3b + 11) - 5(-4b - 4) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25b^2 + 150b + 225 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 6b + 9 = 0 \Leftrightarrow b = -3 \Rightarrow a = 2 \text{ và } c = 8$$

Vậy phương trình đường tròn  $(C)$  là:  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$ .

c) Gọi phương trình đường tròn  $(C)$ :  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ .

Do điểm  $A(4; -7) \in (C)$  nên ta có:

$$4^2 + (-7)^2 + 8a - 14b + c = 0 \Leftrightarrow c = -8a + 14b - 65 \quad (1)$$

Tâm và bán kính của  $(C)$ :  $I(-a; -b)$ ,  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

Vì  $(\Delta_1)$  và  $(\Delta_2)$  tiếp xúc với  $(C)$  nên ta được:  $d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) = R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|-3a + 4b - 42|}{5} = \frac{|-b + 8|}{1} & (2) \\ \frac{|-b + 8|}{1} = \sqrt{a^2 + b^2 - c} & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 4b - 42 = -5b + 40 \\ -3a + 4b - 42 = 5b - 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 9b - 82 = 0 \\ 3a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3a + 82}{9} \\ b = -3a - 2 \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow b^2 - 16b + 64 = a^2 + b^2 - c \Leftrightarrow c = a^2 + 16b - 64 \quad (4)$$

Từ (1), (4)  $\Rightarrow a^2 + 16b - 64 = -8a + 14b - 65 \Leftrightarrow a^2 + 8a + 2b + 1 = 0$  (5)

+) Với  $b = \frac{3a+82}{9}$  thay vào (5) ta được:  $a^2 + \frac{26}{3}a + \frac{173}{9} = 0$  (vô nghiệm)

+) Với  $b = -3a - 2$  thay vào (5) ta được:  $a^2 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = -5 \Rightarrow c = -143 \\ a = -3 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow c = 57 \end{cases}$

Vậy ta được 2 đường tròn thỏa mãn là:

$(C_1): x^2 + y^2 + 2x - 10y - 143 = 0$  với  $I_1(-1; 5)$ ,  $R_1 = 13$

$(C_2): x^2 + y^2 - 6x + 14y + 57 = 0$  với  $I_2(3; -7)$ ,  $R_2 = 1$ .

d) Gọi phương trình đường tròn  $(C): x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ .

Do  $(C)$  đi qua 2 điểm  $A, B$  nên ta có:

$$\begin{cases} 1^2 + 5^2 + 2a + 10b + c = 0 \\ (-2)^2 - 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4b - 4 \\ a = \frac{-10b - c - 26}{2} = -7b - 11 \end{cases}$$

Tâm và bán kính của  $(C_1)$  là:  $I_1(-2; 1)$ ,  $R_1 = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 - 4} = 1$ .

Tâm và bán kính của  $(C)$  là:  $I(-a; -b)$ ,  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

Vì 2 đường tròn tiếp xúc ngoài nên

$$II_1 = R_1 + R \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2} = 1 + \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4a + 2b + 5 = a^2 + b^2 - c + 1 + 2\sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

$$\Leftrightarrow -4a + 2b + c + 4 = 2\sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

Thay  $a, c$  giải được ở trên vào ta có:

$$-4(-7b - 11) + 2b + 4b - 4 = 2\sqrt{(-7b - 11)^2 + b^2 - (-4b - 4)}$$

$$\Leftrightarrow 34b + 44 = 2\sqrt{50b^2 + 150b + 125} \Leftrightarrow \begin{cases} (17b + 22)^2 = 50b^2 + 150b + 125 \\ b \geq -\frac{22}{17} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 239b^2 + 598b + 359 = 0 \\ b \geq -\frac{22}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1(tm) \Rightarrow a = -4 \Rightarrow c = -8 \\ b = -\frac{359}{239} (loại) \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn  $(C)$  là:  $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$  với tâm  $I(4; 1)$ , bán kính  $R = 5$ .

**Ví dụ 4:** Viết phương trình đường tròn đi qua  $A(-1;2)$  và cắt  $\Delta: 3x-4y+7=0$  theo đường kính  $BC$  sao cho tam giác  $ABC$  có diện tích bằng  $\frac{4}{5}$ .

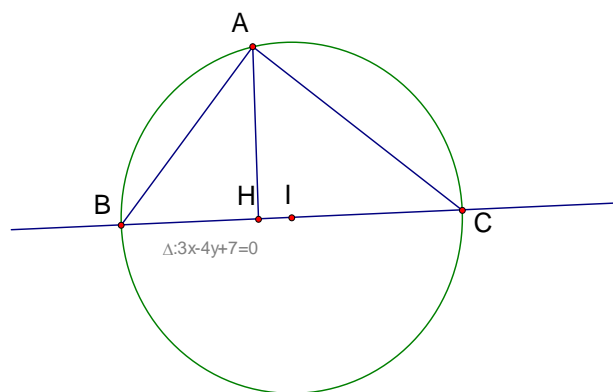
**Lời giải**

$$\text{Ta có: } d(A; \Delta) = \frac{|3(-1) - 4 \cdot 2 + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} d(A, \Delta) \cdot BC \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot BC \Leftrightarrow BC = 2$$

$$\text{Gọi } R \text{ là bán kính đường tròn} \Rightarrow R = AI = \frac{BC}{2} = 1.$$

$$\text{Vì } I \in \Delta: 3x - 4y + 7 = 0 \Rightarrow I\left(a; \frac{3a+7}{4}\right)$$



$$\Rightarrow \overline{IA} = \left(-1-a; \frac{1-3a}{4}\right) \Leftrightarrow (1+a)^2 + \left(\frac{1-3a}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 25a^2 + 26a + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -\frac{1}{25} \end{cases}$$

$$\text{Với: } a = -1 \Rightarrow I(-1; 1) \Rightarrow (C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

$$\text{Với: } a = -\frac{1}{25} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{25}; \frac{43}{25}\right) \Rightarrow (C): \left(x + \frac{1}{25}\right)^2 + \left(y - \frac{43}{25}\right)^2 = 1.$$

**Ví dụ 5:** Viết phương trình đường tròn tiếp xúc ngoài với hai đường tròn  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$  và  $(x-4)^2 + y^2 = 4$  và có tâm nằm trên đường thẳng  $x-y=0$ .

**Lời giải:**

Đường tròn  $(C_1)$  có tâm  $I_1(1; 3)$ ,  $R = 1$ , đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $I_2(4; 0)$ ,  $R_2 = 2$ .

Hai đường tròn này nằm ngoài nhau.

Vì tâm đường tròn cần tìm  $I$  thuộc đường thẳng  $x-y=0$  nên  $I(t; t)$ , gọi bán kính đường tròn là  $r > 0$ .

Đường tròn  $(I)$  tiếp xúc ngoài với cả hai đường tròn trên. Ta có:

$$\begin{cases} II_1 = r + 1 \\ II_2 = r + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - 8t + 10 = r^2 + 2r + 1 \\ 2t^2 - 8t + 16 = r^2 + 4r + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{3}{2} \\ t = 2 \pm \frac{\sqrt{34}}{4} \end{cases}$$

Vậy ta có hai đường tròn:

$$\begin{aligned} \left(x - 2 + \frac{\sqrt{34}}{4}\right)^2 + \left(y - 2 + \frac{\sqrt{34}}{4}\right)^2 &= \frac{9}{4} \\ \left(x - 2 - \frac{\sqrt{34}}{4}\right)^2 + \left(y - 2 - \frac{\sqrt{34}}{4}\right)^2 &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

### Dạng 3: Tìm điểm thỏa mãn điều kiện cho trước

**Ví dụ 6:** Cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$  có tâm  $I$  và đường thẳng  $d: x - y + 1 = 0$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc  $d$  sao cho từ  $M$  kẻ được hai tiếp tuyến với  $(C)$  và tứ giác  $IMAB$  là hình vuông với  $A$  và  $B$  là hai tiếp điểm.

#### Lời giải

Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(2;1)$  và bán kính  $R=3$ .

Vì tứ giác  $IMAB$  là hình vuông nên  $MI = 3\sqrt{2}$ .

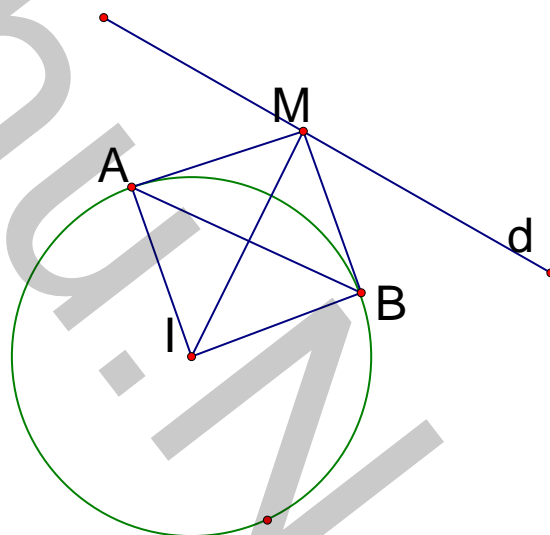
Gọi  $(C')$  là đường tròn tâm  $I$  bán kính  $R' = IM$

$$\Rightarrow (C'): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 18.$$

$M$  là giao điểm của đường thẳng  $d$  và  $(C')$  nên tọa độ  $M$  là nghiệm của hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 18 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\sqrt{2} \\ y = 2 - 2\sqrt{2} \\ x = 1 + 2\sqrt{2} \\ y = 2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy :  $M(1 - 2\sqrt{2}; 2 - 2\sqrt{2})$  hoặc  $M(1 + 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2})$



**Ví dụ 7:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm A(3; -7) và trực tâm H(3; -1), tâm đường tròn ngoại tiếp I(-2; 0). Xác định tọa độ điểm C biết C có hoành độ dương.

### Lời giải

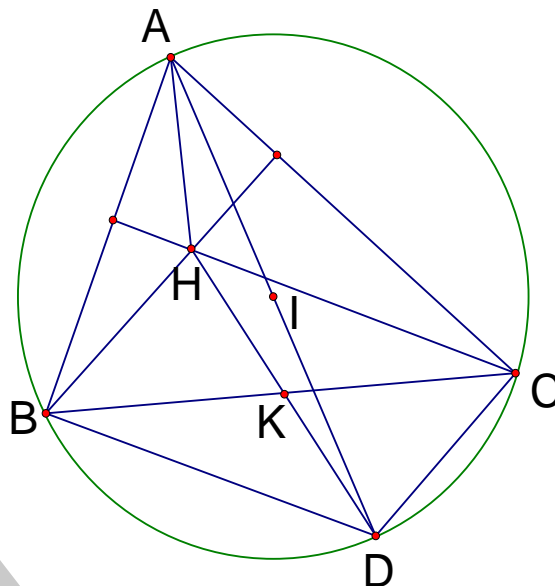
Kéo dài AI cắt đường tròn tại D, do I là trung điểm của AD nên tọa độ của D(-7; 7)

Theo tính chất hình học 9 dễ thấy tứ giác BHCD là hình bình hành. Gọi K là giao điểm của HD và BC suy ra K là trung điểm của HD, vậy tọa độ của K(-2; 3).

Do tính chất của đường kính và dây cung ta có IK vuông góc với BC vậy phương trình đường thẳng BC đi qua K(-2; 3) và nhận véc tơ  $\overrightarrow{IK}(0; 3)$  có dạng:  $y - 3 = 0$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có dạng:

$$(x+2)^2 + y^2 = IA^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 74$$



Tọa độ B và C là nghiệm của hệ phương trình 
$$\begin{cases} y - 3 = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 = 74 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta có  $B(-2 - \sqrt{65}; 3)$ ,  $C(-2 + \sqrt{65}; 3)$ .

## **C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1:** Xác định tâm và bán kính của các đường tròn sau:

a)  $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 1$

ĐS:  $I(-1; 4)$ ,  $R = 1$

b)  $(x+2)^2 + y^2 = 5$

ĐS:  $I(-2; 0)$ ,  $R = \sqrt{5}$

c)  $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$

ĐS:  $I(-4; 2)$ ,  $R = 5$

d)  $3x^2 + 3y^2 + 4x + 1 = 0$

ĐS:  $I\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ ,  $R = 1$

e)  $(2x+5)^2 + (2y-3)^2 = 4$

ĐS:  $I\left(-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right), R=1$

**Bài 2:** Viết phương trình đường tròn:

a) Đường kính  $AB$  với  $A(3;1), B(2;-2)$ .

ĐS:  $(2x-5)^2 + (2y+1)^2 = 10$

b) Có tâm  $I(1;-2)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $(\Delta): x+y-2=0$ . ĐS:  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{9}{2}$

c) Có bán kính 5, tâm thuộc  $Ox$  và qua điểm  $A(2;4)$ .

ĐS:  $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 25 \\ (x-5)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

d) Có tâm  $I(2;-1)$  và tiếp xúc ngoài với đường tròn  $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$ .

ĐS:  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$

e) Tiếp xúc với 2 trục tọa độ và có tâm nằm trên đường thẳng  $(\Delta): 2x-y-3=0$ .

ĐS:  $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \end{cases}$

**Bài 3:** Viết phương trình đường tròn:

a) Qua 3 điểm  $A(-2;-1), B(-1;4), C(4;3)$ .

ĐS:  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$

b) Qua  $A(0;2), B(-1;1)$  và có tâm nằm trên đường thẳng  $2x+3y=0$ .

ĐS:  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

c) Qua điểm  $A(5;3)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $(d): x+3y+2=0$  tại điểm  $T(1;-1)$ .

ĐS:  $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$

**Bài 4:**

a) Viết phương trình đường tròn đi qua 2 điểm  $A(0;1), B(2;-2)$  và có tâm nằm trên đường thẳng  $(d): x-y-2=0$ .

ĐS:  $x^2 + y^2 - 5x - y = 0$

b) Viết phương trình đường tròn đi qua  $A(0;1)$  và  $B(2;-3)$ , có bán kính  $R=5$ .

ĐS:  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 6y - 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$



c) Viết phương trình đường tròn đi qua gốc tọa độ, có bán kính  $R = \sqrt{5}$  và có tâm nằm trên đường thẳng

$$(d): x + y - 1 = 0.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

**Bài 5:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $\triangle ABC$  có  $A(0;2)$ ,  $B(-2;-2)$  và  $C(4;-2)$ . Gọi  $H$  là chân đường cao kẻ từ  $B$ ;  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $BC$ . Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm  $H, M, N$ .

$$\text{ĐS: } x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$$

**Bài 6:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , phương trình đường thẳng  $BC$  là:  $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$ , các đỉnh  $A$  và  $B$  thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của  $\triangle ABC$ .

$$\text{ĐS: } \begin{cases} G\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right) \\ G\left(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3}; \frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right) \end{cases}$$

**Bài 7:** Cho hai đường thẳng  $d_1: 4x - 3y + 14 = 0$ ,  $d_2: 3x + 4y + 13 = 0$  và điểm  $M(-2;2)$ . Viết phương trình đường tròn  $(C)$  qua  $M$  tiếp xúc với  $d_1$  và cắt  $d_2$  theo dây cung  $AB = 8$ .

$$\text{Đáp số: } (C): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25 \text{ hoặc } (C): (x+6)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

**Bài 8:** Cho hai đường thẳng  $d_1: \sqrt{3}x + y = 0$ ,  $d_2: \sqrt{3}x - y = 0$ . Gọi  $(C)$  là đường tròn tiếp xúc với  $d_1$  tại  $A$ , cắt  $d_2$  tại  $B$  và  $C$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Viết phương trình đường tròn  $(C)$  biết tam giác  $ABC$  có diện tích bằng  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  và điểm  $A$  có hoành độ dương.

$$\text{Đáp số: } \left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1.$$

**Bài 9:** Cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$ . Gọi  $(C')$  là đường tròn có tâm  $I(5;1)$  và cắt  $(C)$  tại hai điểm  $M, N$  sao cho  $MN = \sqrt{5}$ . Hãy viết phương trình của  $(C')$ .

$$\text{Đáp số: } (C'): (x-5)^2 + (y-1)^2 = 28 - 5\sqrt{7}.$$

**Bài 10:** Lập phương trình đường tròn có bán kính bằng 2, tâm I thuộc đường thẳng  $d_1: x + y - 3 = 0$  và cắt đường thẳng  $d_2: 3x + 4y - 6 = 0$  tại hai điểm A, B sao cho  $\widehat{AIB} = 120^\circ$ .

Đáp số:  $(C): (x-11)^2 + (y+8)^2 = 4$  hoặc  $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ .

**Bài 11:** Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A có: B(-3;0), C(3;0). Biết tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thuộc đường thẳng  $y = x$ . Tìm tâm I và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết I có tung độ dương.

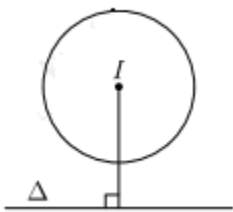
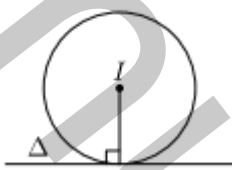
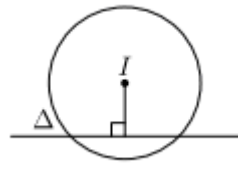
Đáp số:  $I(\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}; \frac{-3+3\sqrt{3}}{2}), I(\frac{-3-3\sqrt{3}}{2}; \frac{-3-3\sqrt{3}}{2})$

**Bài giảng số 4: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN****A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM****➤ Phương tích**

- **Định nghĩa:** Cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ . Khi đó  $P_{M/(C)} = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$  không phụ thuộc vào phương của cát tuyến  $MAB$  của đường tròn mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm  $M$ . Cụ thể nếu điểm  $M(x_0; y_0)$  thì  $P_{M/(C)} = x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + 2By_0 + C = 0$ .
- **Ý nghĩa:** Phương tích của điểm  $M$  cho biết vị trí tương đối của điểm đó với đường tròn.  
 Nếu  $P_{M/(C)} < 0$  thì điểm  $M$  nằm bên trong đường tròn.  
 Nếu  $P_{M/(C)} = 0$  thì điểm  $M$  nằm trên đường tròn.  
 Nếu  $P_{M/(C)} > 0$  thì điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn.

**➤ Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn**

Giả sử ta có đường thẳng  $(\Delta)$  và đường tròn  $(C)$  tâm  $I$ , bán kính  $R$ . Kí hiệu  $d = d(I; \Delta)$ .

Vị trí	Không cắt nhau	Tiếp xúc	Cắt nhau
Điều kiện	$d > R$	$d = R$	$d < R$
Hình vẽ			

**Cách viết phương trình tiếp tuyến:** Cho đường tròn  $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ .

- Tiếp tuyến tại một điểm  $A(x_0; y_0)$  là phương trình đường thẳng đi qua  $A$  có véc tơ pháp tuyến là  $\overrightarrow{IA} = (x_0 - a; y_0 - b)$  nên có phương trình:  $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$ .
- Tiếp tuyến của đường tròn đi qua điểm  $P(x_0; y_0)$  nằm ngoài đường tròn là đường thẳng qua  $P$  và cách  $I(a; b)$  một khoảng bằng bán kính  $R$ .

**B. CÁC VÍ DỤ MẪU**

**Ví dụ 1:** Cho đường thẳng  $(d): 2x + y - 4 = 0$  và đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ .

a) Chứng minh  $(d)$  cắt  $(C)$  tại 2 điểm phân biệt  $A, B$ .

b) Viết phương trình đường tròn  $(C_1)$  đi qua 2 điểm  $A, B$  có bán kính  $R = 5$ .

c) Viết phương trình đường tròn  $(C_2)$  đi qua 2 điểm  $A, B$  có tâm thuộc đường thẳng  $(\Delta): 3x - 4y - 2 = 0$ .

**Lời giải:**

a) **Cách 1:** Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1;1)$ , bán kính  $R = 1$ .

$$\text{Ta có: } d(I; d) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1 = R$$

Vậy  $(d)$  cắt  $(C)$  tại 2 điểm phân biệt.

**Cách 2:** Tọa độ giao điểm của  $(d)$  và  $(C)$  là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có:  $y = 4 - 2x$  thế vào (2) ta được:

$$x^2 + (4 - 2x)^2 - 2x - 2(4 - 2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 14x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = \frac{9}{5} \Rightarrow y = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow A(1; 2), B\left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

Vậy  $(d)$  cắt  $(C)$  tại 2 điểm phân biệt  $A, B$ .

b) Do  $(C_1)$  đi qua giao điểm của  $(C)$  và  $(d)$  nên phương trình  $(C_1)$  có dạng:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + m(2x + y - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (2m - 2)x + (m - 2)y + 1 - 4m = 0$$

$$\Rightarrow I\left(1 - m; \frac{2 - m}{2}\right), R = \sqrt{(1 - m)^2 + \left(\frac{2 - m}{2}\right)^2 - (1 - 4m)} = \frac{\sqrt{5m^2 + 4m + 4}}{2}$$

$$\text{Theo giả thiết: } R = 5 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5m^2 + 4m + 4}}{2} = 5 \Leftrightarrow 5m^2 + 4m + 4 = 100$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 4m - 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -\frac{24}{5} \end{cases}$$

Với  $m = 4$ : Phương trình  $(C_1)$  là:  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$ .

Với  $m = -\frac{24}{5}$ : Phương trình  $(C_1)$  là:  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - \frac{19}{5} = 0$ .

c) Do  $(C_2)$  đi qua giao điểm của  $(C)$  và  $(d)$  nên phương trình  $(C_2)$  có dạng:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + m(2x + y - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (2m - 2)x + (m - 2)y + 1 - 4m &= 0 \\ \Rightarrow I\left(1 - m; \frac{2 - m}{2}\right) \end{aligned}$$

Do điểm  $I \in (\Delta)$  nên ta có:  $3(1 - m) - 4\left(\frac{2 - m}{2}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow -3 - m = 0 \Leftrightarrow m = -3$

Thay vào ta được phương trình  $(C_2)$  là:  $x^2 + y^2 - 8x - 5y + 13 = 0$ .

**Ví dụ 2:** Cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$  và đường thẳng  $(d): 4x - 3y - 11 = 0$ .

a) Tìm tâm và bán kính của đường tròn.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với  $(C)$  tại điểm  $M_0\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$ .

c) Viết phương trình tiếp tuyến với  $(C)$  song song với đường thẳng  $(d)$

d) Viết phương trình tiếp tuyến với  $(C)$  vuông góc với đường thẳng  $(d)$ . Tìm tọa độ tiếp điểm khi đó.

e) Viết phương trình tiếp tuyến với  $(C)$  đi qua điểm  $A(4;1)$ .

f) Gọi  $T_1, T_2$  là tiếp điểm của 2 tiếp tuyến kẻ từ điểm  $B(2;3)$  với  $(C)$ . Viết phương trình đường thẳng  $T_1T_2$ .

**Lời giải:**

a) Tâm  $I(1; -2)$ , bán kính  $R = 3$ .

b) Phương trình tiếp tuyến với  $(C)$  tại điểm  $M_0\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$  nhận véc tơ  $\overrightarrow{IM_0}\left(-\frac{9}{5}; \frac{12}{5}\right)$  có dạng:

$$-3\left(x + \frac{4}{5}\right) + 4\left(y - \frac{2}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 4 = 0$$

c) Ta có  $(\Delta) \parallel (d) \Rightarrow (\Delta): 4x - 3y + m = 0$

Do  $(\Delta)$  là tiếp tuyến của  $(C)$  nên ta có:

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + m|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 3 \Leftrightarrow |m + 10| = 15 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -25 \end{cases}$$

Thay vào phương trình  $(\Delta)$  ta được 2 đường thẳng thỏa mãn là:  $(\Delta_1): 4x - 3y + 5 = 0$  và  $(\Delta_2): 4x - 3y - 25 = 0$ .

d) Ta có:  $\overrightarrow{n_d} = (4; -3) \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = (3; 4)$ . Vì  $(\Delta) \perp (d) \Rightarrow \overrightarrow{n_\Delta} = \overrightarrow{u_d} = (3; 4)$ .

Từ đó phương trình  $(\Delta)$  có dạng:  $3x + 4y + m = 0$ .

Do  $(\Delta)$  là tiếp tuyến của  $(C)$  nên ta có:  $d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|3 \cdot 1 + 4(-2) + m|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$

$$\Leftrightarrow |m - 5| = 15 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 20 \\ m = -10 \end{cases}$$

Thay vào phương trình  $(\Delta)$  ta được 2 đường thẳng thỏa mãn là:

$$(\Delta_1): 3x + 4y + 20 = 0 \text{ và } (\Delta_2): 3x + 4y - 10 = 0.$$

Khi đó 2 tiếp điểm lần lượt là:  $\left(\frac{4}{5}; -\frac{28}{5}\right), \left(\frac{14}{5}; \frac{2}{5}\right).$

e) Gọi  $(\Delta): ax + by + c = 0.$

Do  $A \in (\Delta)$  nên ta có:  $4a + b + c = 0 \Rightarrow c = -4a - b$

Do  $(\Delta)$  là tiếp tuyến của  $(C)$  nên ta có:  $d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|a - 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3$

$$\Leftrightarrow |a - 2b - 4a - b| = 3\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow |3a + 3b| = 3\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 2ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

+) Với  $b = 0$ : Chọn  $a = 1 \Rightarrow c = -4 \Rightarrow (\Delta_1): x - 4 = 0$

+) Với  $a = 0$ : Chọn  $b = 1 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow (\Delta_2): y - 1 = 0$

f)

**Cách 1:** Ta có  $BI = \sqrt{26}$ , theo định lý pitago ta có

$$BT_1 = BT_2 = \sqrt{BI^2 - R^2} = \sqrt{17}$$

Đường tròn tâm B bán kính  $BT_1$  có dạng

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 17 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 4 = 0 \quad (C')$$

Khi đó đường thẳng đi qua  $T_1, T_2$  là giao của hai đường tròn  $(C)$  và  $(C')$  có dạng

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = x^2 + y^2 - 4x - 6y - 4$$

$$\Leftrightarrow x + 5y = 0$$

**Cách 2:** Gọi  $T_1(x_1; y_1), T_2(x_2; y_2).$

$BT_1$  là tiếp tuyến với  $(C)$  tại  $T_1$  nên ta có phương trình  $BT_1$  là:

$$x_1x + y_1y - (x + x_1) + 2(y + y_1) - 4 = 0$$

Do  $B(2; 3) \in BT_1 \Rightarrow 2x_1 + 3y_1 - 2 - x_1 + 6 + 2y_1 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 + 5y_1 = 0$

Tương tự với điểm  $T_2$  ta cũng được hệ thức:  $x_2 + 5y_2 = 0.$

Do đó  $T_1, T_2$  cùng thuộc đường thẳng  $x + 5y = 0.$

Vậy phương trình  $T_1T_2$  là:  $x + 5y = 0.$

**Ví dụ 3:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):  $x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 - 24 = 0$  có tâm I và đường thẳng  $\Delta: mx + 4y = 0$ . Tìm m biết đường thẳng  $\Delta$  cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 12.

**Lời giải:**

Đường tròn (C) có tâm là  $I(1; m)$ ,  $R = 5$ .

Điều kiện để đường thẳng  $\Delta$  cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B là

$$d(I; \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|5m|}{\sqrt{m^2 + 16}} < 5 \Leftrightarrow 0 < 16$$

(Đúng với mọi m)

Giả sử IH là đường cao của tam giác IAB, ta có  $IH = d(I; \Delta)$ .

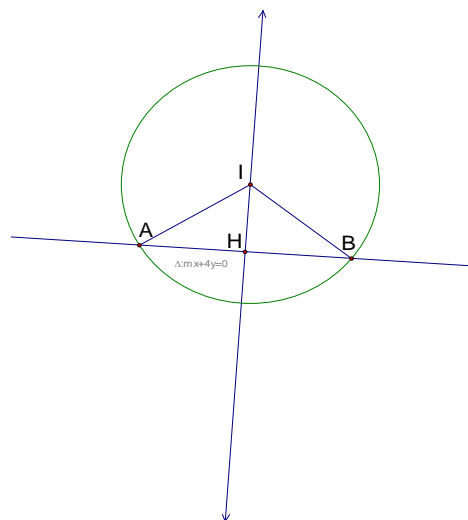
Theo giả thiết

$$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB = 12 \Leftrightarrow \frac{|5m|}{\sqrt{16 + m^2}} \cdot 2 \cdot AH = 24$$

$$\Leftrightarrow \frac{|5m|}{\sqrt{16 + m^2}} \cdot 2 \cdot \sqrt{R^2 - IH^2} = 24$$

$$\Leftrightarrow \frac{|5m|}{\sqrt{16 + m^2}} \cdot \frac{20}{\sqrt{16 + m^2}} = 12 \Leftrightarrow 9m^4 - 337m^2 + 2304 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm \frac{16}{3} \\ m = \pm 3 \end{cases}$$



**Ví dụ 4:** (ĐH-A 2008) Trong mặt phẳng tọa độ cho đường tròn (C) có phương trình  $(x - 4)^2 + y^2 = 4$  và điểm  $E(4; 1)$ . Tìm tọa độ điểm M trên trục tung sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (C) trong đó A, B là tiếp điểm và đường thẳng AB đi qua E.

**Lời giải:**

Gọi  $M(0; m)$  thuộc trục tung Oy. Gọi  $I(4; 0)$  là tâm của (C) và  $R = 2$ .

$$\text{Ta có } MI^2 = MA^2 + R^2 \Leftrightarrow MA^2 = MI^2 - R^2 = 16 + m^2 - 4 = m^2 + 12$$

Vậy  $MA = MB = \sqrt{m^2 + 12}$ .

Khi đó đường tròn tâm M bán kính MA có dạng:

$$x^2 + (y - m)^2 = m^2 + 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2my - 12 = 0 \quad (C')$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là giao của (C) và (C') có dạng

$$x^2 + y^2 - 8x + 12 = x^2 + y^2 - 2my - 12 \Leftrightarrow 4x - my - 12 = 0 \quad (d)$$

Vì điểm E(4; 1) thuộc (d) nên suy ra:  $16 - m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 4$

Vậy điểm M(0; 4) là điểm cần tìm.

**Ví dụ 5:** Cho đường tròn (C):  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$ . Lập phương trình đường thẳng d qua M(7;3) cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho  $MA = 3MB$ .

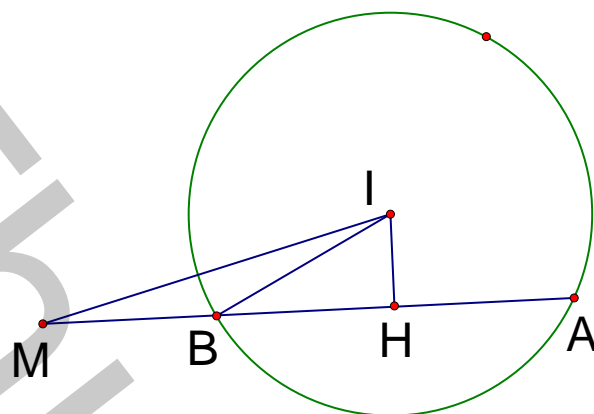
**Lời giải**

Gọi H là trung điểm của BC, vì  $MA = 3MB$  nên suy ra  $MB = AH = HB$ .

Tâm đường tròn I(1; -1). Xét tam giác vuông  $\triangle IHM$  tại H, ta có

$$\begin{aligned} IM^2 &= MH^2 + IH^2 \\ \Leftrightarrow IM^2 &= 4BH^2 + IH^2 \\ \Leftrightarrow 52 &= 4(R^2 - IH^2) + IH^2 \\ \Leftrightarrow 52 &= 100 - 3IH^2 \end{aligned}$$

Suy ra  $IH = 4$ .



Gọi véc tơ pháp tuyến của đường thẳng cần lập là (a; b), khi đó phương trình tổng quát có dạng

$$\begin{aligned} a(x-7) + b(y-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow ax + by - 7a - 3b &= 0 \quad (d) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } IH = d(I, (d)) = \frac{|a - b - 7a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow |3a + 2b| = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 + 12ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b = 1 \\ a = 12, b = -5 \end{cases}$$



TH1: Nếu  $a = 0, b = 1$  thì đường thẳng cần lập có dạng:  $y - 3 = 0$

TH2: Nếu  $a = 12, b = -5$  thì đường thẳng cần lập có dạng:  $12x - 5y - 69 = 0$

**Ví dụ 6:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A, B(1; 1)$  và phương trình đường thẳng  $AC: 4x + 3y - 32 = 0$ . Tia  $BC$  chứa điểm  $M$  sao cho  $BM \cdot BC = 75$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMC$  bằng  $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

### Lời giải

Ta có  $BA = d(B, AC) = \frac{|4 + 3 - 32|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$

Theo tính chất của cát tuyến kẻ từ  $B$ , ta có

$$BE \cdot BA = BM \cdot BC = 75 \Rightarrow BE = \frac{BM \cdot BC}{BA} = 15$$

Suy ra  $AE = 10$ , theo định lý pitago ta có

$$AC^2 = CE^2 - AE^2 = (5\sqrt{5})^2 - 10^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

Cũng theo pitago trong tam giác  $ABC$ , ta có

$$BC = 5\sqrt{2}.$$

Đường tròn tâm  $B$  đường kính  $BC$  có dạng

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 50 \quad (C)$$

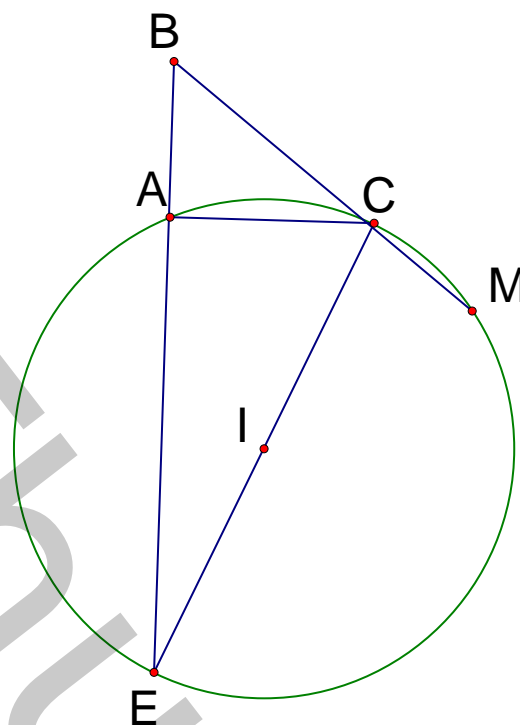
Vậy tọa độ điểm  $C$  là nghiệm của hệ 
$$\begin{cases} 4x + 3y - 32 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C(2; 8) \\ C(8; 0) \end{cases}$$

### C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

#### Bài 1:

a) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn  $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$  tại điểm nằm trên đường tròn có hoành độ bằng  $-1$ .  
ĐS:  $4x - 3y + 10 = 0; 4x + 3y + 16 = 0$

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn  $(C): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$  tại giao điểm của đường tròn với trục  $Ox$ .  
ĐS:  $3x - y - 3 = 0; 3x + y + 15 = 0$



**Bài 2:**

a) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn  $x^2 + y^2 = 2$  biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 1.

$$\text{ĐS: } y = x \pm 2$$

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn  $x^2 + (y-1)^2 = 25$  biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $3x - 4y + 7 = 0$ .

$$\text{ĐS: } 4x + 3y + 22 = 0; 4x + 3y - 28 = 0$$

**Bài 3:** Cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ .

a) Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  vuông góc với đường thẳng  $3x + y = 0$ .

$$\text{ĐS: } x - 3y + 15 = 0; x - 3y - 5 = 0$$

b) Viết phương trình tiếp tuyến với  $(C)$  đi qua điểm  $A(3; -2)$ . Gọi  $T_1, T_2$  là các tiếp điểm. Viết phương trình đường thẳng  $T_1T_2$  và viết phương trình đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AT_1T_2$ .

$$\text{ĐS: } x - 2y - 2 = 0; x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$$

**Bài 4:** Lập phương trình đường tròn:

a) Qua điểm  $A(1; 2)$  và tiếp xúc với 2 trục tọa độ.

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0 \end{cases}$$

b) Tiếp xúc hai đường thẳng song song  $(\Delta_1): 2x - y - 3 = 0$  và  $(\Delta_2): 2x - y + 5 = 0$  và có tâm nằm trên  $Oy$ .

$$\text{ĐS: } x^2 + y^2 - 2y - \frac{11}{5} = 0$$

c) Tiếp xúc với đường thẳng  $(\Delta): 2x + y - 5 = 0$  tại điểm  $T(2; 1)$  và có bán kính bằng  $2\sqrt{5}$ .

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x - 6y + 25 = 0 \end{cases}$$

d) Tiếp xúc hai đường thẳng  $x - 2y + 5 = 0$  và  $x + 2y + 1 = 0$  và qua gốc tọa độ.

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x^2 + y^2 + x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

**Bài 5:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$  và đường thẳng  $(d): 3x - 4y + m = 0$ . Tìm  $m$  để trên  $(d)$  có duy nhất một điểm  $P$  mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến  $PA, PB$  tới  $(C)$ , với  $A, B$  là các tiếp điểm, sao cho  $\triangle PAB$  đều.

$$\text{ĐS: } m = 19; m = -41$$

**Bài 6:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$  và điểm  $M(-3; 1)$ . Gọi  $T_1$  và  $T_2$  là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ  $M$  đến  $(C)$ . Viết phương trình đường thẳng  $T_1T_2$ .

$$\text{ĐS: } (T_1T_2): 2x + y - 3 = 0$$

**Bài 7:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(2; 0)$  và  $B(6; 4)$ . Viết phương trình đường tròn  $(C)$  tiếp xúc với trục hoành tại điểm  $A$  và khoảng cách từ tâm của  $(C)$  đến điểm  $B$  bằng 5.

$$\text{ĐS: } \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ (x-2)^2 + (y-7)^2 = 49 \end{cases}$$

**Bài 8:** Cho đường tròn  $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ . Lập phương trình đường thẳng  $d$  qua  $M(4;3)$  cắt  $(C)$  tại hai điểm  $A, B$  phân biệt sao cho  $\overline{MA} = 2\overline{MB}$ .

*Đáp số:*

**Bài 9:** Cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$  và điểm  $M(3;-1)$ . Viết phương trình đường thẳng  $d$  qua  $M$  cắt  $(C)$  theo một dây cung ngắn nhất.

*Đáp số:  $d: 2x - 3y - 9 = 0$ .*

**Bài 10:** Cho hai đường tròn  $(C): x^2 + (y+1)^2 = 4$  và  $(C'): (x-1)^2 + y^2 = 2$ . Viết phương trình đường thẳng  $d$  tiếp xúc với  $(C)$  và cắt  $(C')$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho  $AB = 2$ .

*Đáp số:  $d: x - 2 = 0$  hoặc  $d: y - 1 = 0$ .*

**Bài 11:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho 2 đường tròn  $(C_1): x^2 + (y+1)^2 = 4; (C_2): (x-1)^2 + y^2 = 2$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$ , biết  $\Delta$  tiếp xúc với  $(C_1)$  và  $\Delta$  cắt  $(C_2)$  tại 2 điểm phân biệt  $A$  và  $B$  sao cho:  $AB = 2$ .

*Đáp số:  $\Delta_1: y - 1 = 0; \Delta_2: x - 2 = 0$*

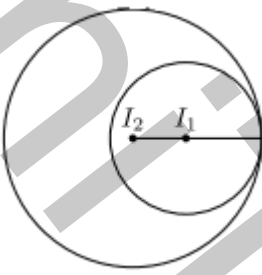
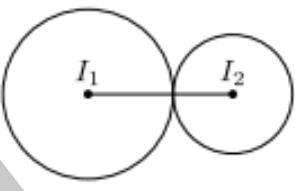
## Bài giảng số 5: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

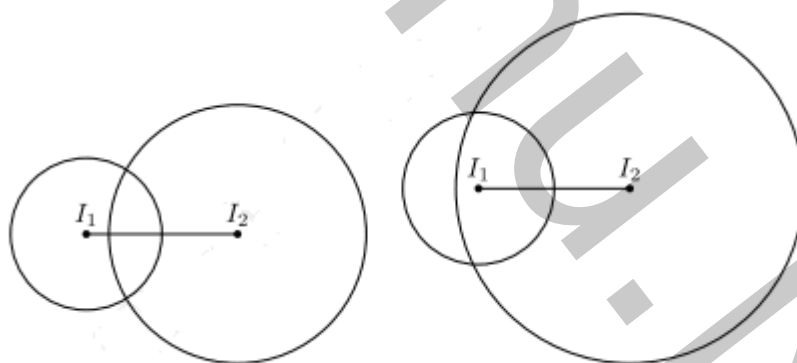
Cho 2 đường tròn  $(C_1)$  tâm  $I_1$ , bán kính  $R_1$  và đường tròn  $(C_2)$  tâm  $I_2$ , bán kính  $R_2$ .

Ký hiệu:  $d = I_1I_2$  là độ dài đường nối tâm.

➤ **Tiếp xúc:** Có 2 trường hợp

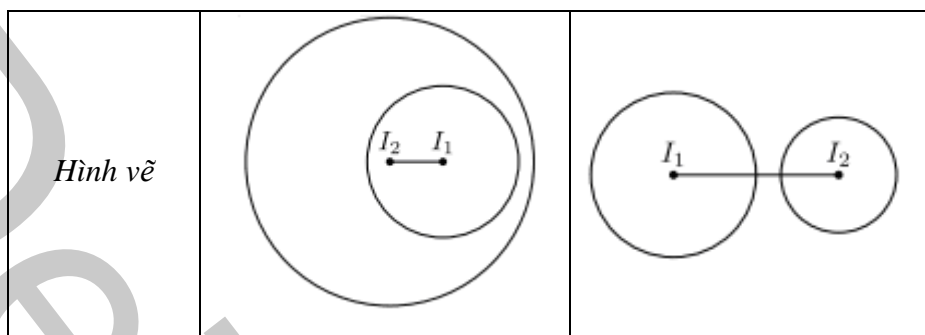
Vị trí	Tiếp xúc trong	Tiếp xúc ngoài
Điều kiện	$d =  R_1 - R_2 $	$d = R_1 + R_2$
Hình vẽ		

➤ **Cắt nhau:** Điều kiện  $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$



➤ **Không giao nhau:** Có 2 trường hợp

Vị trí	Đựng nhau	Ở ngoài nhau
Điều kiện	$d <  R_1 - R_2 $	$d > R_1 + R_2$



## B. CÁC VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn  $(C_1): x^2 + y^2 = 1$  và  $(C_2): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ .  
Tìm tọa độ giao điểm nếu có.

**Lời giải:**

Ta có:  $(C_1)$  có tâm trùng với gốc tọa độ  $O$ , bán kính  $R_1 = 1$ .

$(C_2)$  có tâm  $I_2(1;1)$ , bán kính  $R_2 = 1$ .

$$I_1 I_2 = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} < R_1 + R_2$$

$\Rightarrow (C_1)$  cắt  $(C_2)$ .

Tọa độ giao điểm của  $(C_1)$  và  $(C_2)$  là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta có tọa độ giao điểm của hai đường tròn là  $M(1; 0)$  và  $N(0; 1)$ .

**Ví dụ 2:** Cho 2 đường tròn  $(C_1): x^2 + y^2 + 6x - 16y + 9 = 0$  và  $(C_2): x^2 + y^2 + 14x - 30y + 18 = 0$ .

a) Tìm tâm và bán kính của 2 đường tròn. Chứng minh 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt  $A, B$ .  
Viết phương trình đường thẳng  $AB$ .

b) Viết phương trình đường tròn đi qua 2 điểm  $A, B$  và có tâm nằm trên đường thẳng  $(\Delta): 3x + 2y - 8 = 0$

c) Viết phương trình đường tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

**Lời giải:**

a)  $I_1(-3;8)$ ,  $R_1 = \sqrt{(-3)^2 + 8^2 - 9} = 8$ ,  $I_2(-7;15)$ ,  $R_2 = \sqrt{(-7)^2 + 15^2 - 18} = 16$

$$\overrightarrow{I_1 I_2} = (-4; 7) \Rightarrow I_1 I_2 = \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = \sqrt{65}$$

Như vậy  $R_2 - R_1 = 8 < I_1 I_2 = \sqrt{65} < R_1 + R_2 = 24$  nên 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt. Phương trình  $AB$  chính là phương trình trục đẳng phương của 2 đường tròn. Do đó phương trình  $AB$  có dạng:

$$x^2 + y^2 + 6x - 16y + 9 = x^2 + y^2 + 14x - 30y + 18 \Leftrightarrow 8x - 14y + 9 = 0$$

b) Phương trình đường tròn  $(C)$  đi qua 2 điểm  $A, B$  có dạng:

$$m(x^2 + y^2 + 6x - 16y + 9) + n(x^2 + y^2 + 14x - 30y + 18) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+n)x^2 + (m+n)y^2 + (6m+14n)x - (16m+30n)y + 9m+18n = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{3m+7n}{m+n}x - 2 \cdot \frac{8m+15n}{m+n}y + \frac{9m+18n}{m+n} = 0$$

$$\Rightarrow I \left( -\frac{3m+7n}{m+n}; \frac{8m+15n}{m+n} \right)$$

$$\text{Vì } I \in (\Delta): 3x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow -9m - 21n + 16m + 30n - 8m - 8n = 0 \Leftrightarrow -m + n = 0 \Leftrightarrow m = n$$

Chọn  $n = 1 \Rightarrow m = 1$ . Phương trình đường tròn  $(C)$  là:  $x^2 + y^2 + 6x - 16y + 9 + x^2 + y^2 + 14x - 30y + 18 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 20x - 36y + 27 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10x - 18y + \frac{27}{2} = 0$$

c)

**Cách 1:** Giả sử tiếp tuyến chung  $(\Delta)$  cắt đường thẳng nối tâm  $I_1 I_2$  tại  $K(x, y)$

Do hai đường tròn cắt nhau khi đó ta có

$$\frac{I_1 K}{I_2 K} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \overrightarrow{I_2 K} = 2\overrightarrow{I_1 K}. \text{ Từ đó suy ra tọa độ } K(1; 1)$$

Gọi véc tơ pháp tuyến của tiếp tuyến  $(\Delta)$  là  $\vec{n}(a; b)$ , khi đó phương trình tổng quát của  $(\Delta)$  có dạng

$$a(x-1) + b(y-1) = 0 \Leftrightarrow ax + by - a - b = 0 \quad (*)$$

Do  $\Delta$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(C_1)$  nên ta có

$$d(I_1, \Delta) = R_1 \Leftrightarrow \frac{|-3a+8b-a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 8 \Leftrightarrow |7b-4a| = 8\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2 + 56ab + 16b^2 = 0 \Leftrightarrow 48\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 56\frac{a}{b} + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = -\frac{5}{12} \\ \frac{a}{b} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5, b = -12 \\ a = 3, b = -4 \end{cases}$$

Thay a, b vào (\*) ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm là  $5x - 12y + 7 = 0$  và  $3x - 4y + 1 = 0$ .

**Cách 2:** Gọi  $(\Delta): Ax + By + C = 0$  là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

Do đó ta có hệ: 
$$\begin{cases} d(I_1, \Delta) = R_1 \\ d(I_2, \Delta) = R_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|-3A+8B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 8 \\ \frac{|-7A+15B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|-3A+8B+C|}{8} = \sqrt{A^2+B^2} \\ \frac{|-7A+15B+C|}{16} = \sqrt{A^2+B^2} \end{cases} \Rightarrow 2|-3A+8B+C| = |-7A+15B+C|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6A+16B+2C = -7A+15B+C \\ -6A+16B+2C = 7A-15B-C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -A-B \\ C = \frac{13A-31B}{3} \end{cases}$$

+)  $C = -A - B$ , ta có:  $|-3A+8B-A-B| = 8\sqrt{A^2+B^2} \Leftrightarrow |-4A+7B| = 8\sqrt{A^2+B^2}$

$$\Leftrightarrow 16A^2 - 56AB + 49B^2 = 64A^2 + 64B^2 \Leftrightarrow 48A^2 + 56AB + 15B^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{5}{12}B \\ A = -\frac{3}{4}B \end{cases}$$

Với  $A = -\frac{5}{12}B$ : Chọn  $B = -12 \Rightarrow A = 5 \Rightarrow C = 7 \Rightarrow (\Delta): 5x - 12y + 7 = 0$

Với  $A = -\frac{3}{4}B$ : Chọn  $B = -4 \Rightarrow A = 3 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow (\Delta): 3x - 4y + 1 = 0$

+)  $C = \frac{13A-31B}{3}$ , ta có:  $|-3A+8B+\frac{13A-31B}{3}| = 8\sqrt{A^2+B^2} \Leftrightarrow |4A-7B| = 24\sqrt{A^2+B^2}$

$$\Leftrightarrow 16A^2 - 56AB + 49B^2 = 576A^2 + 576B^2 \Leftrightarrow 560A^2 + 527B^2 + 56AB = 0 \text{ (vô lý).}$$

Vậy có 2 tiếp tuyến chung là:  $5x - 12y + 7 = 0$  và  $3x - 4y + 1 = 0$ .

**Ví dụ 3:** Cho 2 đường tròn  $(C_1): x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$  và  $(C_2): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ .

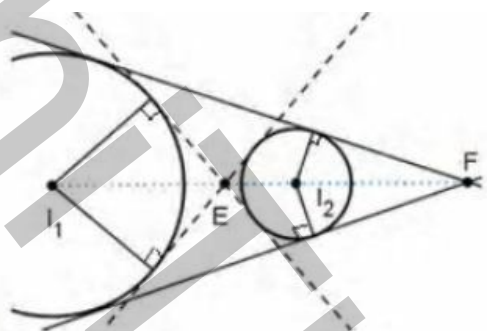
Viết phương trình tiếp tuyến chung của  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $(C_1)$  có tâm  $I_1(2;4)$ , bán kính  $R_1 = 3$ .

$(C_2)$  có tâm  $I_2(1;-1)$ , bán kính  $R_2 = 2$ .

Mà  $I_1I_2 = \sqrt{(1-2)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{26} \Rightarrow I_1I_2 > R_1 + R_2 \Rightarrow (C_1)$  và  $(C_2)$  ngoài nhau.



+) Xét các tiếp tuyến có dạng  $(\Delta): x = b \Leftrightarrow x - b = 0$

Vì  $(\Delta)$  là tiếp tuyến của cả hai đường tròn nên 
$$\begin{cases} d(I_1, \Delta) = R_1 \\ d(I_2, \Delta) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2-b| = 3 \\ |1-b| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow b = -1$$

Vậy  $(\Delta_1): x + 1 = 0$  là một tiếp tuyến chung của  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .

+) Xét các tiếp tuyến có dạng  $(\Delta): y = kx + m$  hay  $(\Delta): kx - y + m = 0$ .

Vì  $(\Delta)$  là tiếp tuyến của cả hai đường tròn nên 
$$\begin{cases} d(I_1, \Delta) = R_1 \\ d(I_2, \Delta) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|2k - 4 + m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3 \\ \frac{|k + 1 + m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2k - 4 + m| = 3\sqrt{k^2 + 1} \\ |k + 1 + m| = 2\sqrt{k^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|2k - 4 + m| = 3|k + 1 + m| \\ |k + 1 + m| = 2\sqrt{k^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2k - 4 + m) = 3(k + 1 + m) \\ 2(2k - 4 + m) = -3(k + 1 + m) \\ (k + 1 + m)^2 = 4(k^2 + 1) \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{7}{5}k + 1 \\ k = m - 11 \\ (k+1+m)^2 = 4(k^2+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{12}{5} \\ m = -\frac{43}{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k = -\frac{10}{24} \\ m = -\frac{19}{12} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Với  $\begin{cases} k = 0 \\ m = 1 \end{cases}$  thì  $(\Delta_2): y - 1 = 0$ .

Với  $\begin{cases} k = -\frac{10}{24} \\ m = -\frac{19}{12} \end{cases}$  thì  $(\Delta_3): 5x + 12y - 19 = 0$ .

Với  $\begin{cases} k = \frac{12}{5} \\ m = -\frac{43}{5} \end{cases}$  thì  $(\Delta_4): 12x - 5y - 43 = 0$ .

Vậy  $(C_1)$  và  $(C_2)$  có 4 tiếp tuyến chung:  $(\Delta_1): x + 1 = 0$ ,  $(\Delta_2): y - 1 = 0$ ,  
 $(\Delta_3): 5x + 12y - 19 = 0$ ,  $(\Delta_4): 12x - 5y - 43 = 0$ .

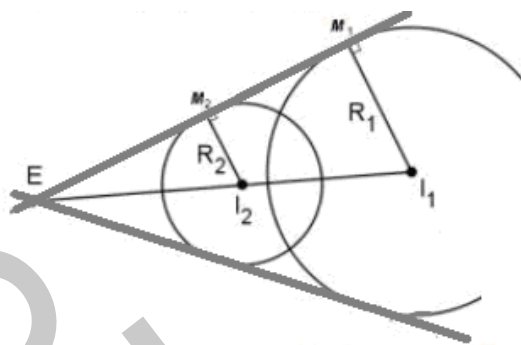
**Ví dụ 4:** Cho 2 đường tròn  $(C_1): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$  và  $(C_2): x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ . Viết phương trình tiếp tuyến chung của  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .

**Lời giải:**

$(C_1)$  có tâm  $I_1(1; -1)$ , bán kính  $R_1 = 2$ .

$(C_2)$  có tâm  $I_2(3; 1)$ , bán kính  $R_2 = 1$ .

Ta có:  $I_1I_2 = \sqrt{(3-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{8} \Rightarrow |R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Rightarrow (C_1)$  và  $(C_2)$  cắt nhau.



Gọi  $M_1$  và  $M_2$  lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến với  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .  $E$  là giao của  $I_1I_2$  với  $M_1M_2$ .

$$\text{Khi đó } \triangle EI_1M_1 \text{ đồng dạng với } \triangle EI_2M_2 \Rightarrow EI_1 = \frac{R_1}{R_2} \cdot EI_2 \Rightarrow \overline{EI_1} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \overline{EI_2} \Leftrightarrow \overline{EI_1} = 2\overline{EI_2}$$

$\Rightarrow I_2$  là trung điểm của  $EI_1$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} x_E = 2x_{I_2} - x_{I_1} \\ y_E = 2y_{I_2} - y_{I_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_E = 5 \\ y_E = 3 \end{cases} \Rightarrow E(5;3)$$

Giả sử tiếp tuyến qua  $E(5;3)$  có dạng

$$(d): a(x-5) + b(y-3) = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0) \text{ hay } ax + by - 5a - 3b = 0$$

$$\text{Vì } (d) \text{ là tiếp tuyến } (C_1) \text{ nên } d(I_1, d) = R_1 \Leftrightarrow \frac{|a - b - 5a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b)^2 = (a^2 + b^2) \Leftrightarrow 3a^2 + 8ab + 3b^2 = 0 \quad (*)$$

Nếu  $b = 0 \Rightarrow a = 0$  (không thỏa mãn vì  $a^2 + b^2 \neq 0$ )

$$\text{Nếu } b \neq 0: (*) \Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 8\frac{a}{b} + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$\text{Với } \frac{a}{b} = \frac{-4 + \sqrt{7}}{3}: \text{Chọn } b = 3 \Rightarrow a = -4 + \sqrt{7} \Rightarrow (d_1): (-4 + \sqrt{7})x + 3y + 11 - 5\sqrt{7} = 0.$$

$$\text{Với } \frac{a}{b} = \frac{-4 - \sqrt{7}}{3}: \text{Chọn } b = 3 \Rightarrow a = -4 - \sqrt{7} \Rightarrow (d_2): (-4 - \sqrt{7})x + 3y + 11 + 5\sqrt{7} = 0.$$

**Ví dụ 5:** Cho hai đường tròn  $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 2(m+1)y - 1 = 0$  và  $(C): x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ .

Tìm điều kiện để  $(C)$  và  $(C_m)$  tiếp xúc nhau.

**Giải**

Tâm và bán kính đường tròn  $(C_m)$  là  $I(m; -m-1)$ ,  $R = \sqrt{2m^2 + 2m + 2}$

Tâm và bán kính đường tròn (C) là  $I'(-1; 1)$ ,  $R' = 1$ , khoảng cách  $II' = \sqrt{2m^2 + 6m + 5}$

Xét hai trường hợp

**Trường hợp 1:** (C) và  $(C_m)$  tiếp xúc ngoài nhau khi và chỉ khi

$$II' = R + R' \Leftrightarrow \sqrt{2m^2 + 6m + 5} = \sqrt{2m^2 + 2m + 2} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2m^2 + 2m + 2} = 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 1 = 0 \quad (m \geq -\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \\ m = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (L)$$

**Trường hợp 2:** (C) và  $(C_m)$  tiếp xúc trong khi và chỉ khi

$$II' = |R - R'| \Leftrightarrow \sqrt{2m^2 + 6m + 5} = |\sqrt{2m^2 + 2m + 2} - 1|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2m^2 + 2m + 2} = -2m - 1$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 1 = 0 \quad (m \leq -\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \\ m = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (L)$$

**Ví dụ 6:** Cho tam giác ABC có đỉnh  $A(-2, -1)$  và  $H(2, 1)$  là trực tâm của tam giác. Cạnh  $BC = \sqrt{20}$ ,  $B_1, C_1$  lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh B, C. M là trung điểm của BC thuộc đường thẳng  $x - 2y - 1 = 0$  và tung độ của điểm M dương. Đường thẳng  $B_1C_1$  đi qua E có tọa độ  $E(3; -4)$ . Viết phương trình cạnh BC.

**Lời giải**

Phương trình đường tròn đi qua 4 đỉnh A, B<sub>1</sub>, H, C<sub>1</sub> có đường kính AH tâm I là trung điểm của AH có dạng:  $x^2 + y^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5 = 0$ . (C)

Vì M thuộc đường thẳng  $x - 2y - 1 = 0$  nên suy ra tọa độ của M(2b+1; b)

Đường tròn tâm M đường kính BC có dạng

$$(x - 2b - 1)^2 + (y - b)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(2b+1)x - 2by + (2b+1)^2 + b^2 - 5 = 0. (C')$$

Dễ thấy B<sub>1</sub> và C<sub>1</sub> thuộc đường tròn đường kính BC.

Vậy tọa độ B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> là giao của hai đường tròn (C) và (C') nên phương trình đường thẳng đi qua B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> có dạng:

$$x^2 + y^2 - 2(2b+1)x - 2by + (2b+1)^2 + b^2 - 5 = x^2 + y^2 - 5$$

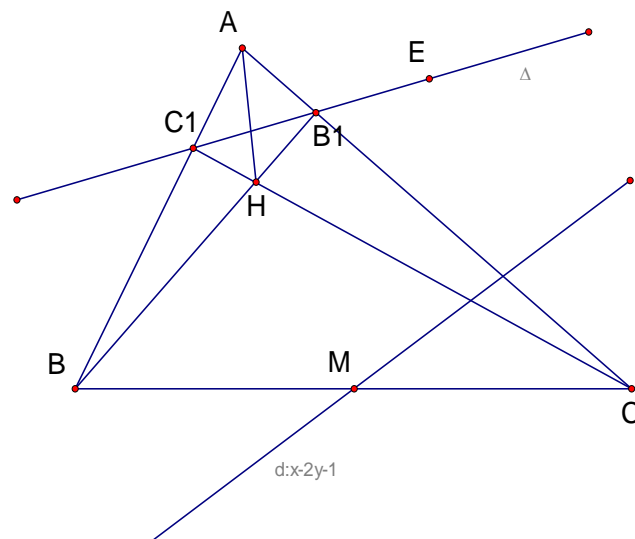
$$\Leftrightarrow 2(2b+1)x + 2by - (2b+1)^2 - b^2 = 0 \quad (\Delta)$$

Vì  $\Delta$  đi qua điểm E(3; -4) nên ta có  $b^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=-1(L) \end{cases}$

Vậy M(3; 1). Khi đó phương trình đường thẳng BC đi qua M và nhận véc tơ  $\overrightarrow{AH}$  là véc tơ pháp tuyến có dạng:  $2x + y - 7 = 0$ .

**Nhận xét:** Một lớp các bài toán về phương trình đường thẳng được viết dưới dạng giao của hai đường tròn, điều này giúp chúng ta giải quyết bài toán khá đơn giản như ví dụ 6 nói trên.

**Ví dụ 7:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):  $(x-1)^2 + y^2 = 9$  có tâm I và đường thẳng  $\Delta: x + y = 0$ . Lập phương trình đường tròn (C') có tâm J thuộc đường thẳng  $\Delta$  sao cho (C') cắt (C) tại 2 điểm A, B thỏa mãn  $\triangle IAJ$  vuông tại A, đồng thời bán kính vòng tròn nội tiếp tam giác IAJ bằng 1.



**Lời giải**

Đường tròn (C) có tâm I(1; 0) bán kính R = 3.

Theo bài ra tam giác IAJ vuông góc tại A, và có  $r = 1$ , ta được.

$$S_{\Delta IAJ} = \frac{1}{2} AI \cdot AJ = pr$$

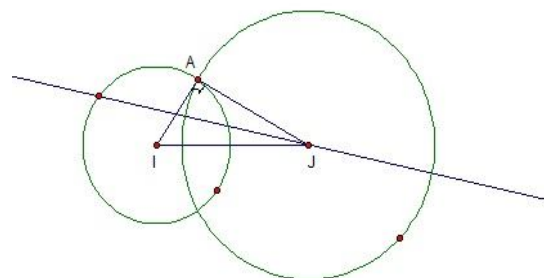
$$\Rightarrow 3AJ = 2pr = 3 + AJ + IJ$$

$$\Rightarrow 2AJ = 3IJ$$

Đặt  $IJ = x > 0$ , ta có

$$2\sqrt{x^2 - 9} = 3 + x \Leftrightarrow 4(x^2 - 9) = (x + 3)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ (L)} \\ x = 5 \end{cases}$$



Với  $x = 5$ , ta được  $R' = 4$ . Vì tâm J thuộc đường thẳng  $\Delta$  nên tọa độ của J là  $J(t; -t)$

suy ra:

$$\sqrt{(t-1)^2 + (-t)^2} = 5 \Leftrightarrow t^2 - t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -3 \end{cases}$$

Với  $t = 4$ , ta được  $J(4; -4)$  và  $(C') : (x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$

Với  $t = -4$ , ta được  $J(-3; 3)$  và  $(C') : (x+3)^2 + (y-3)^2 = 16$

**C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1:** Cho 2 đường tròn  $(C_1) : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ ,  $(C_2) : x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ .

a) Chứng minh 2 đường tròn bằng nhau và cắt nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng qua giao điểm của 2 đường tròn.

$$\text{ĐS: } x - y + 9 = 0$$

c) Tìm phương trình tiếp tuyến chung của chúng.

$$\text{ĐS: } x - 3y + 2 \pm 2\sqrt{10} = 0$$

d) Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm  $(C_1)$ ,  $(C_2)$  trên và có tâm nằm trên đường thẳng

$$x + 2y - 4 = 0.$$

$$\text{ĐS: } 5x^2 + 5y^2 - 16x - 12y + 8 = 0$$

**Bài 2:** Cho 2 đường tròn  $(C_1) : x^2 + y^2 - 10x = 0$  và  $(C_2) : x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ .

a) Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm  $(C_1)$  và  $(C_2)$  và có tâm nằm trên đường thẳng  $(d): x + 6y - 6 = 0$ . ĐS:  $x^2 + y^2 - 24x + 2y + 20 = 0$

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của  $(C_1)$  và  $(C_2)$ . ĐS:  $x + 7y - 5 \pm 25\sqrt{2} = 0$

**Bài 3:** Cho 2 đường tròn  $(C_1): x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$  và  $(C_2): x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$ . Viết phương trình

tiếp tuyến chung của  $(C_1)$  và  $(C_2)$ . ĐS: 
$$\begin{cases} 2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0 \\ y + 1 = 0 \\ 4x - 3y - 9 = 0 \end{cases}$$

**Bài 4:** Cho 2 đường tròn  $(C_1): x^2 + y^2 - 10x - 4y - 7 = 0$ ,  $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ . Viết phương

trình tiếp tuyến chung của  $(C_1)$  và  $(C_2)$ . ĐS: 
$$\begin{cases} y + 4 = 0 \\ 7x + 24y + 355 = 0 \\ 11y - 16 = 0 \\ 77x + 264y - 475 = 0 \end{cases}$$

**Bài 5:** Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn  $(C_1): x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$  và  $(C_2): x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$ . ĐS: Ở ngoài nhau

**Bài 6:** Cho 2 đường tròn có tâm lần lượt là  $I$  và  $J$  và có phương trình  $(C_1): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ ,  $(C_2): x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$ .

a) Chứng minh  $(C_1)$  tiếp xúc ngoài với  $(C_2)$  và tìm tọa độ tiếp điểm  $H$ .

$$\text{ĐS: } H\left(\frac{19}{5}; \frac{7}{5}\right)$$

b) Gọi  $(d)$  là một tiếp tuyến chung không đi qua  $H$ . Tìm tọa độ giao điểm  $K$  của  $(d)$  và đường thẳng  $IJ$ . Viết phương trình đường tròn  $(C)$  đi qua  $K$  và tiếp xúc với 2 đường tròn  $(C_1)$ ,  $(C_2)$  tại  $H$ .

$$\text{ĐS: } K(11; 11), (C): 5x^2 + 5y^2 - 74x - 62y + 286 = 0$$

**Bài 7:** Cho 2 đường tròn  $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 9y + 19 = 0$ ,  $(C_2): x^2 + y^2 - 8x - 9y + 16 = 0$ .

a) Chứng minh  $(C_1)$  và  $(C_2)$  tiếp xúc nhau.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .      ĐS:  $2x+1=0$

**Bài 8:** Cho 2 đường tròn  $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$  và  $(C_2): x^2 + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$ .

a) Chứng minh 2 đường tròn tiếp xúc ngoài. Tìm tọa độ tiếp điểm  $T$ .

$$\text{ĐS: } H\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung tại  $T$ .      ĐS:  $3x + 4y - 1 = 0$

**Bài 9:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$  và đường thẳng  $(d): x - y - 1 = 0$ . Viết phương trình đường tròn  $(C')$  đối xứng với đường tròn  $(C)$  qua đường thẳng  $(d)$ . Tìm tọa độ các giao điểm của  $(C)$  và  $(C')$ .      ĐS:  $A(1;0), B(3;2)$

**Bài 10:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$  và đường thẳng  $(d): x - y + 3 = 0$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  nằm trên  $(d)$  sao cho đường tròn tâm  $M$ , có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn  $(C)$ , tiếp xúc ngoài với đường tròn  $(C)$ .      ĐS:  $M_1(1;4), M_2(-2;1)$

**Bài 11:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C): (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$  và hai đường thẳng  $(\Delta_1): x - y = 0$ ,  $(\Delta_2): x - 7y = 0$ . Xác định tọa độ tâm  $K$  và bán kính đường tròn  $(C_1)$ , biết đường tròn  $(C_1)$  tiếp xúc với các đường thẳng  $(\Delta_1)$ ,  $(\Delta_2)$  và tâm  $K$  thuộc đường tròn  $(C)$ .

$$\text{ĐS: } K\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right), R = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

## Bài giảng số 6: PHƯƠNG TRÌNH ELIP VÀ MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP

### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

- **Định nghĩa:** Elip ( $E$ ) là tập hợp các điểm  $M$  có tổng khoảng cách đến hai điểm cố định  $F_1, F_2$  bằng hằng số.

Hai điểm  $F_1, F_2$  được gọi là các tiêu điểm.

$F_1F_2 = 2c$  ( $c > 0$ ) được gọi là tiêu cự.

$(E) = \{M / MF_1 + MF_2 = 2a\}$  ( $a > 0; a > c; a = \text{const}$ )

- **Phương trình chính tắc**

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1) \quad \text{với } b^2 = a^2 - c^2 \quad (a > b)$$

- **Các yếu tố của elip**

Elip xác định bởi phương trình (1) có các đặc điểm:

- Tâm đối xứng  $O$ , trục đối xứng  $Ox, Oy$ .
- Tiêu điểm  $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ .
- Tiêu cự  $F_1F_2 = 2c$ .
- Trục lớn nằm trên  $Ox$ , độ dài trục lớn  $2a$  ( $= A_1A_2$ ).
- Trục nhỏ nằm trên  $Oy$ , độ dài trục nhỏ  $2b$  ( $= B_1B_2$ ).
- Đỉnh trên trục lớn:  $A_1(-a; 0), A_2(a; 0)$ .
- Đỉnh trên trục nhỏ:  $B_1(0; -b), B_2(0; b)$ .

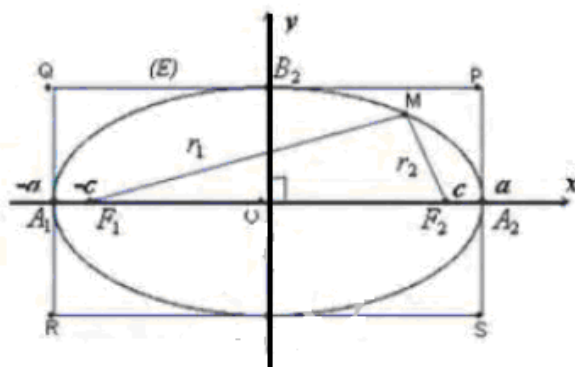
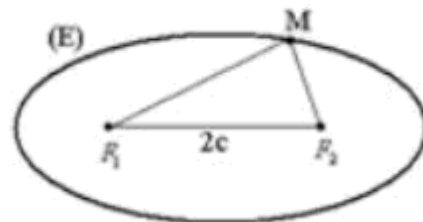
- Bán kính qua tiêu điểm: Với  $M(x; y) \in (E)$  thì
 
$$\begin{cases} r_1 = MF_1 = a + \frac{c}{a}x = a + ex \\ r_2 = MF_2 = a - \frac{c}{a}x = a - ex \end{cases}$$

- Tâm sai:  $e = \frac{c}{a}$  ( $0 < e < 1$ )

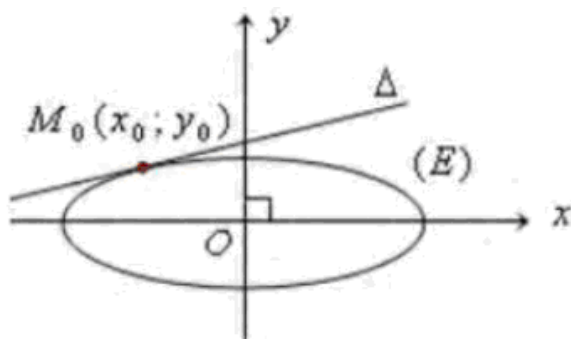
- Đường chuẩn:  $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$

- **Tiếp tuyến của elip**

**Định lý:** Phương trình tiếp tuyến với  $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  tại  $M_0(x_0; y_0) \in (E)$  là  $(\Delta): \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ .







➤ **Điều kiện để đường thẳng tiếp xúc với elip**

**Định lý:** Cho Elip  $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  và đường thẳng  $(\Delta): Ax + By + C = 0$  ( $A^2 + B^2 > 0$ ). Khi đó:  $(\Delta)$  tiếp xúc với  $(E) \Leftrightarrow A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2$ .

## B. CÁC VÍ DỤ MẪU

### Dạng 1: Viết phương trình chính tắc của elip

**Ví dụ 1:** Xác định độ dài trục lớn, trục bé, tiêu cự, tâm sai, tọa độ tiêu điểm, phương trình các đường chuẩn của elip.

a)  $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

b)  $9x^2 + 4y^2 = 5$

**Lời giải:**

a) Ta có:  $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$\Rightarrow a^2 = 9, b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow a = 3, b = 2, c = \sqrt{5}$

- Tâm sai:  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

- Độ dài trục lớn:  $2a = 6$

- Độ dài trục bé:  $2b = 4$

- Tiêu cự:  $2c = 2\sqrt{5}$

- Tiêu điểm:  $F_1(-\sqrt{5}; 0), F_2(\sqrt{5}; 0)$

- Đường chuẩn:  $x = \pm \frac{a}{e} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{9}{\sqrt{5}}$

b) Ta có:  $9x^2 + 4y^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{5}{9}} + \frac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$

Vì  $\frac{5}{9} < \frac{5}{4}$  nên đây không phải là phương trình chính tắc.

$$\Rightarrow a^2 = \frac{5}{4}, b^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = \frac{5}{4} - \frac{5}{9} = \frac{25}{36} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2}, b = \frac{\sqrt{5}}{3}, c = \frac{5}{6}$$

- Tâm sai:  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
- Độ dài trục lớn:  $2a = \sqrt{5}$
- Độ dài trục bé:  $2b = \frac{2\sqrt{5}}{3}$
- Tiêu cự:  $2c = \frac{5}{3}$
- Tiêu điểm:  $F_1\left(-\frac{5}{6}; 0\right), F_2\left(\frac{5}{6}; 0\right)$
- Đường chuẩn:  $x = \pm \frac{a}{e} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$

**Ví dụ 2:** Cho elip với tâm sai  $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$  và hình chữ nhật cơ sở của nó có chu vi bằng 20. Viết phương trình chính tắc của elip.

**Lời giải:**

Elip có phương trình chính tắc là:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (2)

Từ giả thiết ta có:  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$  (do  $a > 0, b > 0$ )

Hình chữ nhật cơ sở của elip có 2 cạnh là  $2a, 2b$ . Từ giả thiết, ta có:  $4a + 4b = 20 \Rightarrow a + b = 5$

Vậy có hệ phương trình sau để xác định  $a, b$ : 
$$\begin{cases} a + b = 5 \\ \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Thay vào (2) ta thấy elip có phương trình chính tắc là:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Ví dụ 3:** Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng elip có tâm O, tiêu điểm trên Ox, qua  $M(-\sqrt{3}; 1)$  và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 6.

**Giải:**

Giả sử elip (E) có phương trình chính tắc là:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Vì  $M(-\sqrt{3}; 1) \in (E)$  nên ta có:  $\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$  (4)

Khoảng cách giữa hai đường chuẩn là:  $\left(\frac{a}{e}\right) - \left(-\frac{a}{e}\right) = \frac{2a}{e} = 6$

Từ đó ta có:  $\frac{a}{e} = 3 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = 3 \quad (4')$

Do đó  $b^2 = a^2 - c^2 = 3c - c^2 \quad (4'')$

Từ (4), (4'), (4'') suy ra hệ sau: 
$$\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^2 - c^2} = 1 & (*) \\ a^2 = 3c & (**) \end{cases}$$

Thay (\*\*) vào (\*) ta có:  $c^2 - 4c + 4 = 0 \Leftrightarrow c = 2$

Vậy (E) có phương trình:  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ .

## Dạng 2: Tìm điểm trên Elip thỏa mãn điều kiện cho trước

**Ví dụ 4:** Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm  $C(2;0)$  và elip (E):  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ . Tìm hai điểm  $A, B \in (E)$ ,

biết rằng  $A, B$  đối xứng nhau qua trục hoành và  $\triangle ABC$  là tam giác đều.

**Giải:**

Giả sử  $A(x_0; y_0)$  và  $B(x_0; -y_0)$  là 2 điểm trên (E) và đối xứng nhau qua trục hoành (có thể giả sử  $y_0 > 0$ ). Khi đó  $AB = 2y_0$ .

Vì  $\triangle ABC$  là tam giác đều nên ta có:  $AB = AC$

$$\Leftrightarrow y_0^2 + (2 - x_0)^2 = 4y_0^2 \Leftrightarrow (2 - x_0)^2 = 3y_0^2 \quad (3)$$

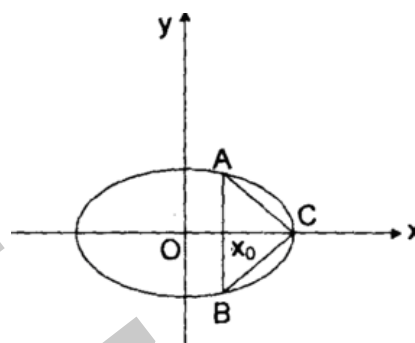
Vì  $A(x_0; y_0) \in (E)$  nên ta có:  $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \quad (3')$

Từ hệ (3), (3') ta dễ dàng suy ra  $x_0 = 2, y_0 = 0$  và

$$x_0 = \frac{2}{7}, y_0 = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

Do  $y_0 > 0$  nên  $x_0 = \frac{2}{7}, y_0 = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ .

Vậy hai điểm cần tìm có tọa độ là:  $A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$  và  $B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ .



**Ví dụ 5:** Cho elip có phương trình:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . Tìm điểm  $M$  trên  $(E)$  sao cho  $MF_2 = 2MF_1$ , ở đây  $F_1, F_2$  lần lượt là tiêu điểm trái và tiêu điểm phải của  $(E)$ .

**Lời giải:**

Theo công thức tính bán kính qua tiêu điểm và giả sử  $M(x_0; y_0)$  ta có:  $MF_2 = 2MF_1$

$$\Leftrightarrow a - \frac{cx_0}{a} = 2\left(a + \frac{cx_0}{a}\right) \Leftrightarrow a = -\frac{3cx_0}{a} \Leftrightarrow x_0 = \frac{-a^2}{3c}, \text{ ở đây } a^2 = 25, c = 3 \text{ nên } x_0 = -\frac{25}{9}$$

$$\text{Từ đó do: } \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1 \Leftrightarrow y_0 = \pm \frac{4\sqrt{56}}{9}$$

Vậy trên  $(E)$  có hai điểm phải tìm là:  $M_1\left(-\frac{25}{9}; \frac{4\sqrt{56}}{9}\right)$  và  $M_2\left(-\frac{25}{9}; -\frac{4\sqrt{56}}{9}\right)$ .

**Dạng 3: Bài toán liên quan đến giá trị lớn nhất, nhỏ nhất**

**Ví dụ 6:** (ĐH KA năm 2011). Cho elip  $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ . Tìm tọa độ các điểm  $A$  và  $B$  thuộc  $(E)$ , có hoành độ dương sao cho tam giác  $OAB$  cân tại  $O$  và có diện tích lớn nhất.

**Lời giải.**

Gọi  $A(x; y) \Rightarrow B(x; -y); x > 0$ . Ta có  $AB = 2|y| = \sqrt{4 - x^2}$

Gọi  $H$  là trung điểm  $AB$  thì  $OH = x \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot AB = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{4 - x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2(4 - x^2)} \leq 1$ .

Đẳng thức xảy ra khi  $x = \sqrt{2}$ . Vậy  $A\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right); B\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  hoặc  $A\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); B\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

**Nhận xét:** Việc đánh giá  $\max S$  khá thuận lợi vì hoành độ của  $A$  và  $B$  dương. Trong những trường hợp khác ta có thể đưa về khảo sát hàm số. Ta minh họa điều này bằng một bài toán tương tự sau:

**Ví dụ 7:** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$  và điểm  $C(2; 0)$ . Tìm tọa độ các điểm  $A$  và  $B$  thuộc  $(E)$  sao cho tam giác  $CAB$  cân tại  $C$  và có diện tích lớn nhất.

**Hướng dẫn.**

Gọi  $A(x; y) \Rightarrow B(x; -y)$ . Tính được  $S_{ABC} = |(2 - x)y|$

Ta có  $S_{ABC}^2 = (2 - x)^2 y^2 = (2 - x)^2 \cdot \frac{4 - x^2}{4}$ . Sau đó xét hàm số  $f(x) = (2 - x)^2 \cdot \frac{4 - x^2}{4}; -2 < x < 2$

Khảo sát hàm  $f(x)$  suy ra  $f(x)$  đạt  $\max$  tại  $x = 1$ . Từ đó suy ra tọa độ các điểm cần tìm  $A, B$ .

Trong hai thí dụ 3 và 4 ta đều sử dụng tính chất đối xứng của elip, cụ thể là gọi  $A(x; y)$  thì ta suy ra  $B(x; -y)$ .

Tuy nhiên nếu không sử dụng được tính chất này nữa thì vấn đề sẽ khó khăn hơn rất nhiều. Ta tiếp tục xét bài toán sau.

**Ví dụ 8.** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ . Tìm tọa độ hai điểm  $A, B$  trên  $(E)$  sao cho tam giác  $OAB$  vuông tại  $O$  và có diện tích nhỏ nhất.

### Hướng dẫn.

Ta hoàn toàn không thể xử lý bài toán như trong Ví dụ 6 và 7. Tuy nhiên dấu hiệu tam giác  $OAB$  vuông tại  $O$  gợi ta nhớ đến một kết quả cơ bản trong elip:

Nếu  $A$  và  $B$  là hai điểm di động trên elip  $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  sao cho  $OA \perp OB$  thì  $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$  không đổi (Kết quả này xin dành cho bạn đọc).

Áp dụng kết quả này ta được:  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \geq \frac{2}{OA \cdot OB} = \frac{1}{S_{OAB}} \Rightarrow S_{OAB} \geq \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ .

**Nhận xét:** Cũng từ kết quả  $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$  không đổi ta suy ra đường thẳng  $AB$  luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định. Thật vậy, kẻ  $OH \perp AB$  thì  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Rightarrow OH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , tức là  $AB$  luôn tiếp xúc với đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Bài toán 7.b trong đề thi ĐH khối B năm 2012 cũng dựa trên tư tưởng này.

### Dạng 4: Bài toán giao điểm của đường thẳng và Elip

**Ví dụ 9:** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  và điểm  $M(2; 1)$ . Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm  $M$  cắt  $(E)$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  nằm trên đường thẳng  $y = 2x$ .

### Lời giải:

**Nhận xét:**  $M$  nằm trong  $(E)$ , do đó mọi đường thẳng đi qua  $M$  đều cắt  $(E)$  tại 2 điểm.

Gọi  $(d)$  là đường thẳng cần tìm.

Nếu  $(d) \perp Ox$  thì  $(d): x = 2$ . Khi đó trung điểm của  $AB$  là  $I(2; 0)$  không thuộc đường thẳng  $y = 2x$ .

Nếu  $(d)$  có hệ số góc  $a$  thì  $(d): y = ax - 2a + 1$ .

Tọa độ  $A, B$  là nghiệm của hệ: 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = ax - 2a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax - 2a + 1 \\ (25a^2 + 9)x^2 - 50a(2a - 1)x + 25(2a - 1)^2 - 25 \cdot 9 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_A + x_B = \frac{50(2a^2 - a)}{25a^2 + 9} \Rightarrow AB$  có trung điểm là:  $I \left( \frac{25(2a^2 - a)}{25a^2 + 9}; \frac{9 - 18a}{25a^2 + 9} \right)$ .

Do  $I$  thuộc đường thẳng  $y = 2x$  nên ta có:  $50(2a^2 - a) = 9(1 - 2a) \Leftrightarrow (2a - 1)(50a + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{9}{50} \end{cases}$

Vậy đường thẳng  $\begin{cases} (d): y = \frac{1}{2}x \\ (d): y = -\frac{9}{50}x + \frac{34}{25} \end{cases}$ .

**Ví dụ 10.** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$  và đường thẳng  $d: x - \sqrt{2}y + 2 = 0$ . Chứng minh rằng  $d$  cắt  $(E)$  tại hai điểm phân biệt  $B$  và  $C$ . Tìm điểm  $A$  thuộc  $(E)$  sao cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ .

**Lời giải.**

Tọa độ  $B, C$  là nghiệm của hệ: 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x - \sqrt{2}y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 8 \\ x = \sqrt{2}y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - \sqrt{2}y - 1 = 0 \\ x = \sqrt{2}y - 2 \end{cases}$$

Giải hệ ta có  $B(-1 - \sqrt{3}; \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2})$ ,  $C(-1 + \sqrt{3}; \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2})$

Gọi  $I(x_I; y_I)$  là trung điểm  $BC$ , ta có ngay  $y_I = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (định lý Viét).

Từ đó tìm ra  $x_I = -1$ . Vậy  $I \left( -1; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ .

Đường thẳng trung trực của  $BC$  đi qua  $I$  và nhận véc tơ  $\vec{u}_d(\sqrt{2}; 1)$  làm véc tơ pháp tuyến suy ra phương trình tổng quát có dạng:  $\sqrt{2}(x + 1) + (y - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \Leftrightarrow 2x + \sqrt{2}y + 1 = 0$

**Ví dụ 11:** a) Tìm trên elip  $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$  những điểm  $K$  sao cho  $\widehat{F_1KF_2} = 60^\circ$ .

b)  $P$  là một điểm tùy ý trên  $(E)$ . Chứng minh rằng:  $PF_1 \cdot PF_2 + OP^2 = \text{const}$ .

**Lời giải:**

a)  $a^2 = 100, b^2 = 36 \Rightarrow a = 10, b = 6 \Rightarrow c = 8$

Ta có:  $\widehat{F_1KF_2} = 60^\circ \Leftrightarrow F_1F_2^2 = KF_1^2 + KF_2^2 - 2KF_1 \cdot KF_2 \cdot \cos 60^\circ$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = (a + e.x_K)^2 + (a - e.x_K)^2 - 2(a + e.x_K)(a - e.x_K) \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4c^2 = 2a^2 + 2e^2x_K^2 - a^2 + e^2x_K^2$$

$$\Leftrightarrow 3e^2x_K^2 = 4c^2 - a^2 \Leftrightarrow x_K^2 = \frac{4c^2 - a^2}{3c^2} \cdot a^2$$

$$y_K^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_K^2) = \frac{b^2}{a^2} \left( a^2 - \frac{4c^2 - a^2}{3c^2} \cdot a^2 \right) = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{3c^2} = \frac{b^4}{3c^2}$$

$$\Rightarrow x_K = \pm \frac{5\sqrt{13}}{2}, y_K = \pm \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

Ta được 4 điểm  $K$  thỏa mãn:

$$K_1\left(\frac{5\sqrt{13}}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{16}\right), K_2\left(\frac{5\sqrt{13}}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{16}\right), K_3\left(-\frac{5\sqrt{13}}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{16}\right), K_4\left(-\frac{5\sqrt{13}}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{16}\right).$$

b) Ta có:  $PF_1 \cdot PF_2 + OP^2 = (a + e.x_P)(a - e.x_P) + (x_P^2 + y_P^2) = a^2 - e^2x_P^2 + x_P^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_P^2)$   
 $= a^2 + b^2 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2} \cdot x_P^2 = a^2 + b^2 = 136 = \text{const}$

### C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1:** Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai, phương trình đường chuẩn của các elip sau:

a)  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$

b)  $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

**Bài 2:** Tìm trên  $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

a) Điểm  $M$  có tung độ  $\frac{1}{2}$ .

ĐS:  $M\left(\pm\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$

b) Điểm  $N$  có tung độ gấp đôi hoành độ.

$$\text{ĐS: } \begin{bmatrix} N\left(\frac{2}{\sqrt{17}}; \frac{4}{\sqrt{17}}\right) \\ N\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}; -\frac{4}{\sqrt{17}}\right) \end{bmatrix}$$

c) Điểm  $P$  sao cho  $2PF_1 = 3PF_2$ .

$$\text{ĐS: } P\left(\frac{4\sqrt{3}}{15}; \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

d) Điểm  $Q$  sao cho  $\widehat{F_1QF_2} = 120^\circ$ .

$$\text{ĐS: } Q(0; \pm 1)$$

**Bài 3:** Viết phương trình chính tắc của elip  $(E)$  biết:

a) Tiêu điểm  $F_1(-6; 0)$ , tâm sai  $e = \frac{2}{3}$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$$

b) Độ dài trục lớn là 6, tiêu cự  $2\sqrt{5}$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

c) Độ dài trục lớn là 3, tâm sai  $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{\frac{9}{3}} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1$$

d) Tâm sai  $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$  và hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

e) Đi qua 2 điểm  $A(4; -\sqrt{3})$ ,  $B(2\sqrt{2}; 3)$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1$$

f) Đi qua điểm  $A\left(2; -\frac{5}{3}\right)$  và tâm sai  $e = \frac{2}{3}$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

g) Phương trình đường chuẩn là  $3x \pm 8\sqrt{3} = 0$  và độ dài trục bé bằng 4.

$$\text{ĐS: } \begin{bmatrix} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ \frac{x^2}{\frac{16}{3}} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{bmatrix}$$

**Bài 4:** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ .

a) Tìm trên  $(E)$  những điểm  $M$  sao cho  $MF_1 = 4MF_2$ .

$$\text{ĐS: } M\left(\frac{15}{2}; \pm \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$$



b) Tìm trên  $(E)$  những điểm  $N$  sao cho  $\widehat{F_1NF_2} = 90^\circ$ .

$$\text{ĐS: } N\left(\pm \frac{5\sqrt{7}}{2}; \pm \frac{9}{2}\right)$$

**Bài 5:** Lập phương trình elip  $(E)$  biết:

a) Độ dài trục lớn bằng 8 và qua điểm  $(2\sqrt{2}; 2)$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$$

b) Qua hai điểm  $P\left(2\sqrt{2}; \frac{1}{3}\right), Q\left(2; \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

c) Có tiêu cự bằng 4 và qua điểm  $\left(1; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$$

d) Qua điểm  $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$  và  $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{16} = 1$$

e) Độ dài trục nhỏ bằng 4 và một tiêu điểm có tọa độ  $(2; 0)$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

**Bài 6:** Cho 2 elip  $(E_1): x^2 + 8y^2 = 16$  và  $(E_2): 4x^2 + 9y^2 = 36$ . Viết phương trình đường tròn qua các giao điểm của hai elip.

$$\text{ĐS: } x^2 + y^2 - \frac{172}{23} = 0$$

**Bài 7:** Tìm đỉnh, tiêu điểm, tâm sai, đường chuẩn, tiêu cự, độ dài hai trục.

a)  $8x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

b)  $25x^2 + 36y^2 = 225$

**Bài 8:** Tìm tâm sai của elip biết:

a) Độ dài trục lớn bằng hai lần độ dài trục bé.

$$\text{ĐS: } e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Các đỉnh trên trục bé nhìn đoạn  $F_1F_2$  dưới một góc vuông.

$$\text{ĐS: } e = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) Mỗi tiêu điểm nhìn trục bé dưới một góc vuông.

$$\text{ĐS: } e = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d) Khoảng cách giữa một đỉnh trên trục lớn và một đỉnh trên trục bé bằng tiêu cự.

$$\text{ĐS: } e = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

**Bài 9:** Tìm phương trình chính tắc của elip biết rằng:

a) Độ dài trục lớn bằng 4, tiêu cự bằng  $2\sqrt{2}$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

b) Độ dài trục bé bằng 4 và tâm sai bằng  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

c) Một tiêu điểm  $F_2(1;0)$  và tổng khoảng cách từ một điểm trên elip đến  $F_1, F_2$  bằng  $2\sqrt{5}$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

d) Độ dài  $F_1F_2 = 2\sqrt{3}$  và  $(E)$  đi qua điểm  $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

**Bài 10:** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

a) Cho điểm  $M \in (E)$  có  $x_M = 4$ . Tính khoảng cách từ điểm  $M$  đến hai tiêu điểm.

$$\text{ĐS: } MF_1 = \frac{41}{5}, MF_2 = \frac{9}{5}$$

b) Tính độ dài dây cung vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm.

$$\text{ĐS: } AB = \frac{18}{5}$$

**Bài 11:** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ . Một đường thẳng vuông góc với trục lớn tại  $F_1$  và cắt  $(E)$  tại  $M$  và

$N$ . Tính  $MF_1$ ,  $MF_2$  và  $MN$ .

$$\text{ĐS: } MF_1 = \frac{7}{4}, MF_2 = \frac{25}{4}, MN = \frac{7}{2}$$

**Bài 12:** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ . Tìm  $N \in (E)$  sao cho  $NF_1 - NF_2 = 2$ .

$$\text{ĐS: } N\left(\frac{3}{2}; \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

**Bài 13:** Cho elip  $(E): 16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$  và  $M$  là một điểm tùy ý trên  $(E)$ . Chứng minh rằng:

a)  $MF_1 \cdot MF_2 + OM^2 = \text{const}$

$$\text{ĐS: } a^2 + b^2$$

b)  $4OM^2 - (MF_1 - MF_2)^2 = \text{const}$

$$\text{ĐS: } 4b^2$$

**Bài 14:** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Tìm những điểm  $M$  trên  $(E)$  sao cho  $M$  nhìn đoạn  $F_1F_2$  dưới một góc vuông. Khi đó tính diện tích tam giác  $\triangle MF_1F_2$ .

$$\text{ĐS: } M\left(\pm \frac{5\sqrt{7}}{4}; \pm \frac{9}{4}\right), S = 9$$

**Bài 15:** Cho  $M$  trên  $(E)$  có  $x_M = 2$ . Tìm phương trình chính tắc của elip  $(E)$  đó biết  $MF_1 = \frac{13}{3}$  và  $MF_2 = \frac{5}{3}$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

**Bài 16:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc  $Oxy$ , cho elip  $(E)$  có phương trình  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Xét điểm  $M$  chuyển động trên tia  $Ox$  và điểm  $N$  chuyển động trên tia  $Oy$  sao cho đường thẳng  $MN$  luôn tiếp xúc với  $(E)$ . Xác định tọa độ điểm  $M, N$  để đoạn  $MN$  có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

$$\text{ĐS: } M(2\sqrt{7}; 0), N(0; \sqrt{21}), MN_{\min} = 7$$

**Bài 17:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc  $Oxy$ , cho điểm  $C(2; 0)$  và elip  $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . Tìm tọa độ các điểm  $A, B$  thuộc  $(E)$ , biết rằng hai điểm  $A, B$  đối xứng với nhau qua trục hoành và  $\triangle ABC$  đều.

$$\text{ĐS: } A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ hoặc } A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$$

**Bài 18:** Trên mặt phẳng cho elip  $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ,  $F_1, F_2$  lần lượt là tiêu điểm trái và phải của  $(E)$ . Tìm điểm  $M$  trên  $(E)$  sao cho  $MF_1 - MF_2 = 2$ .

$$\text{ĐS: } M(\sqrt{2}; \sqrt{3}) \text{ và } M(-\sqrt{2}; -\sqrt{3})$$

**Bài 19:** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , hãy lập phương trình chính tắc của elip  $(E)$  có độ dài trục lớn bằng  $4\sqrt{2}$ , các đỉnh trên trục nhỏ và hai tiêu điểm cùng nằm trên một đường tròn.

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

**Bài 20:** Cho đường tròn  $(C): (x+2)^2 + y^2 = 36$  và điểm  $F_2(2; 0)$ . Xét các đường tròn tâm  $M$  đi qua  $F_2$  và tiếp xúc với  $(C)$ . Tìm quỹ tích tâm  $M$ .

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

**Bài 21:** (ĐH KB- 2010). Cho elip  $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  và điểm  $A(2; \sqrt{3})$ . Gọi M là giao điểm có tung độ dương của  $AF_1$  với  $(E)$ . N đối xứng với  $F_2$  qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ANF_2$ .

**Bài 22:** Cho hai elip  $(E_1): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  và  $(E_2): \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ . Biết hai elip có tiêu điểm chung là  $F_1, F_2$  và cùng đi qua điểm M nằm trên đường thẳng  $x - y + 6 = 0$ . Tìm vị trí điểm M để độ dài trục lớn của  $(E_1)$  là nhỏ nhất.

**Bài 23:** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$  và điểm  $A(3; 0)$ . Tìm tọa độ B và C thuộc  $(E)$  sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

**Bài giảng số 7: CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP VỀ HÌNH HỌC PHẪNG TRONG TỨ GIÁC****A. CÁC VÍ DỤ MẪU**

Để làm tốt các bài tập trong phần này, các tính chất hình học THCS các em học sinh cần nắm vững. Bản chất của phần này là kiến thức hình phẳng dung tọa độ để giải toán.

**Ví dụ 1:** (Khối A-2012) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho  $CN = 2.ND$ . Giả sử  $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$  và đường thẳng AN có phương trình  $2x - y - 3 = 0$ . Tìm tọa độ điểm A.

**Lời giải:**

Đặt  $\widehat{BAM} = \alpha$ ,  $\widehat{DAN} = \beta \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\tan \beta = \frac{1}{3}$ . Khi đó

$$\begin{aligned}\tan \widehat{MAN} &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cot(\alpha + \beta) \\ &= \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)} = \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} \\ &= 1\end{aligned}$$

Vậy góc  $\widehat{MAN} = 45^\circ$ .

Gọi véc tơ pháp tuyến của đường thẳng đi qua A, M là  $\vec{n}(a; b)$ , khi đó ta có

$$\frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_{AN}|}{|\vec{n}| |\vec{n}_{AN}|} = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|2a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2|2a - b| = \sqrt{10a^2 + 10b^2}$$

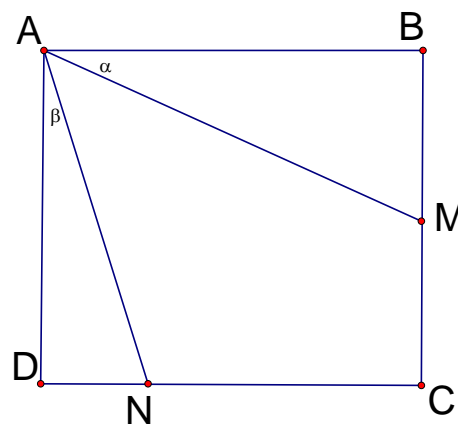
$$\Leftrightarrow 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8\left(\frac{a}{b}\right) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = -1, b = 3 \\ \frac{a}{b} = 3 \Rightarrow a = 3, b = 1 \end{cases}$$

**TH1:** Véc tơ  $\vec{n}(-1; 3)$  phương trình tổng quát của AM có dạng:  $-x + 3y + 4 = 0$

Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ  $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ -x + 3y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(1; -1)$

**TH2:** Véc tơ  $\vec{n}(3; 1)$  phương trình tổng quát của AM có dạng:  $3x + y - 17 = 0$



Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ  $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + y - 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(4; 5)$

**Ví dụ 2:** Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 12, tâm  $I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$  và trung điểm của cạnh AD là  $M(3; 0)$ . Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

### Lời giải

Ta có:  $AB = 2MI = 3\sqrt{2}$  và  $AD = \frac{S_{ABCD}}{AB} = 2\sqrt{2}$

$$MA = MD = \sqrt{2}.$$

Đường thẳng AD đi qua M và có vtpt là  $\overrightarrow{MI} = \frac{3}{2}(1; 1)$

$$\Rightarrow AD: x + y - 3 = 0.$$

Đường tròn tâm M đường kính AD có dạng  $(x - 3)^2 + y^2 = 2$  (C)

Ta có A, D là giao điểm của đường thẳng qua A, D và đường tròn (C) nên tọa độ A và D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, y = 1 \\ x = 4, y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(2; 1), D(4; -1).$$

Vì I là trung điểm của AC và BD nên ta có  $C(7; 2), B(5; 4)$ .

Vậy các đỉnh của hình chữ nhật là:  $A(2; 1); B(5; 4); C(7; 2); D(4; -1)$ .

**Ví dụ 3:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm  $A(-5; 11), B(7; 7)$  và hai đường thẳng  $d_1: 2x - y - 1 = 0, d_2: x + 3y - 4 = 0$ . Tìm tọa độ điểm C thuộc  $d_1$ , điểm D thuộc  $d_2$  sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

### Lời giải

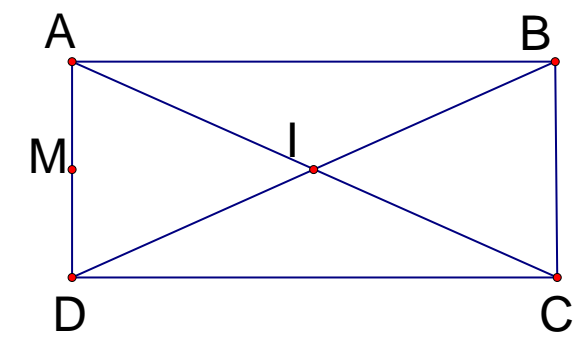
Vì điểm  $C \in d_1 \Rightarrow C(t; 2t - 1)$ , và điểm  $D \in d_2 \Rightarrow D(4 - 3s; s)$ .

Ta có  $\overrightarrow{AB}(12; -4), \overrightarrow{DC}(t + 3s - 4; 2t - s - 1)$

Tứ giác ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 3s - 4 = 12 \\ 2t - s - 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 5 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm C, D cần tìm là  $C(1; 1), D(-11; 5)$ .



**Ví dụ 4:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có phương trình đường thẳng  $AC: x+7y-31=0$ , hai đỉnh B, D lần lượt thuộc các đường thẳng  $d_1: x+y-8=0$ ,  $d_2: x-2y+3=0$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi, biết diện tích hình thoi bằng 75 (dvdt) và đỉnh A có hoành độ âm.

### Lời giải

$$\text{Vì } B \in d_1 \Rightarrow B(b; 8-b),$$

$$D \in d_2 \Rightarrow D(2d-3; d).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BD}(2d-b-3; d+b-8)$$

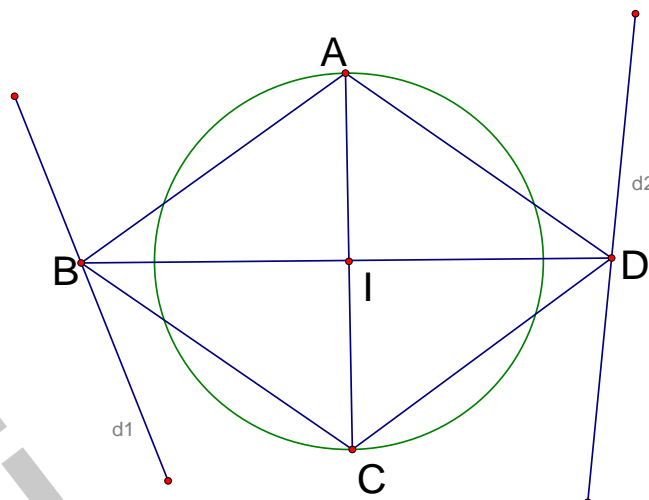
$$, \overrightarrow{u_{AC}}(7; -1).$$

Gọi I là trung điểm của BD thì

$$I\left(\frac{b+2d-3}{2}; \frac{8+d-b}{2}\right)$$

Vì ABCD là hình thoi nên ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{u_{AC}} = 0 \\ I \in (AC) \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7(2d-b-3) - (b+d-8) = 0 \\ \frac{b+2d-3}{2} + \frac{7(8+d-b)}{2} - 31 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13d - 8b - 13 = 0 \\ 9d - 6b - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } B(0; 8), D(-1; 1) \Rightarrow BD = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \Rightarrow AC = \frac{2S_{ABCD}}{5\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2}.$$

Phương trình đường tròn tâm  $I(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2})$  đường kính AC có dạng

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{225}{2}$$

Khi đó tọa độ A, C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+7y-31=0 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{225}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=17 \\ y=7 \\ x=-18 \end{cases}$$

Vì A có hoành độ âm nên  $A(-18;7), C(17;2)$

**Ví dụ 5:** Lập phương trình các cạnh của hình vuông ABCD biết đỉnh  $A(-4;5)$  và đường chéo BD :  
 $7x - y + 8 = 0$ .

**Lời giải:**

Gọi véc tơ pháp tuyến của đường thẳng đi qua A và tạo với BD góc  $45^\circ$  là  $\vec{n}(a;b)$  khi đó ta có

$$\frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_{BD}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_{BD}|} = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|7a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2|7a - b| = 10\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow |7a - b| = 5\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow 24a^2 - 14ab - 24b^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 12a^2 - 7ab - 12b^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 12\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\left(\frac{a}{b}\right) - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = -\frac{3}{4} \\ \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}(3; -4) \\ \vec{n}(4; 3) \end{cases}$$

+) Phương trình đường thẳng đi qua A(-4; 5) nhận  $\vec{n}(3; -4)$  có dạng

$$3(x + 4) - 4(y - 5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 32 = 0$$

+) Phương trình đường thẳng đi qua A(-4; 5) nhận  $\vec{n}(4; 3)$  có dạng

$$4(x + 4) + 3(y - 5) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + 1 = 0$$

Vậy hai đường thẳng AB, AD đi qua A tạo với BD góc  $45^\circ$  lần lượt có phương trình là

$$3x - 4y + 32 = 0 \text{ và } 4x + 3y + 1 = 0.$$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 7x - y + 8 = 0 \\ 3x - 4y + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow B(0;8)$$

Phương trình đường thẳng qua B, C song song với AD có dạng

$$4(x - 0) + 3(y - 8) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 24 = 0.$$



Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 7x - y + 8 = 0 \\ 4x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow D(-1; 1)$$

Phương trình đường thẳng qua C, D song song với AB có dạng

$$3(x+1) - 4(y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 7 = 0.$$

**Ví dụ 6:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau và  $AD = 3BC$ . Đường thẳng BD có phương trình  $x + 2y - 6 = 0$  và tam giác ABD có trực tâm là  $H(-3; 2)$ . Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

**Lời giải:**

Gọi I là giao điểm của AC và BD  $\Rightarrow IB = IC$

Mà  $IB \perp IC$  nên  $\triangle IBC$  vuông cân tại I

$$\Rightarrow \angle ICB = 45^\circ$$

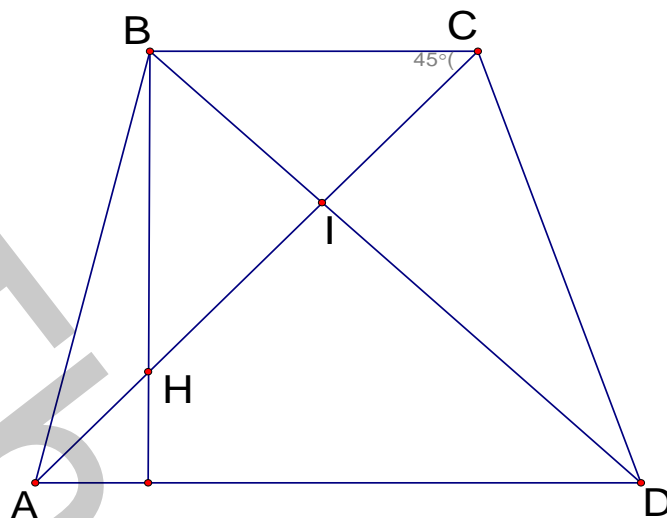
$BH \perp AD \Rightarrow BH \perp BC \Rightarrow \triangle HBC$  vuông cân tại B

$\Rightarrow I$  là trung điểm của đoạn HC

Do  $CH \perp BD$  và trung điểm I của CH thuộc BD nên tọa độ điểm C thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 2(x+3) - (y-2) = 0 \\ \frac{x-3}{2} + 2\left(\frac{y+2}{2}\right) - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \end{cases}.$$

Do đó  $C(-1; 6)$



$$\text{Ta có: } \frac{IC}{ID} = \frac{IB}{ID} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow ID = 3IC \Rightarrow CD = \sqrt{IC^2 + ID^2} = IC\sqrt{10} = \frac{CH\sqrt{10}}{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{Ta có } D(6-2t; t) \text{ và } CD = 5\sqrt{2} \text{ suy ra } (7-2t)^2 + (t-6)^2 = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 7 \end{cases}$$

Do đó  $D(4; 1)$  hoặc  $D(-8; 7)$

**Ví dụ 7:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có  $A(2; 0)$ ,  $C(7; 5)$ . Về phía nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng đi qua 2 đỉnh A, C không chứa B. Vẽ tam giác vuông ACE (vuông tại E). Biết diện tích của tứ giác ABCE bằng 15 và đường thẳng đi qua 2 điểm B, E có phương trình  $5x + y - 8 = 0$ . Tìm tọa độ điểm B, biết điểm E có hoành độ nhỏ hơn  $\frac{4}{3}$

**Lời giải**

Từ phương trình đường thẳng

$$BE: 5x + y - 8 = 0, \text{ ta gọi } E(t; 8 - 5t)$$

Theo bài ra, tam giác ACE vuông tại E nên

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC} = 0, \text{ ta được: } 26t^2 - 64t + 38 = 0.$$

Giải ra ta được  $t = 1; t = \frac{19}{13}$  (loại do giả thiết  $x_E < \frac{4}{3}$ )

Với  $t = 1$ , ta được  $E(1; 3)$ . Phương trình đường thẳng AC:

$$S_{AEC} = \frac{1}{2} AC \cdot d(E, AC) = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = 10$$

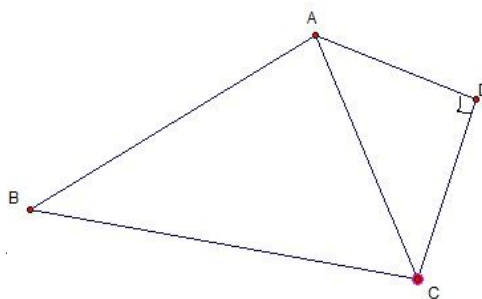
Theo gt:  $S_{ABC} = 5$ . Gọi  $B(m; 8 - 5m)$  ta có  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot d(B, AC) = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{|6m - 10|}{\sqrt{2}} = 5$

$$\text{Suy ra: } |3m - 5| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Với  $m = 2$ , suy ra  $B(2; -2)$  (thỏa mãn)

Với  $m = \frac{4}{3}$ , suy ra  $B\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$  (loại do ta thấy B, E cùng phía đối với đường thẳng AC)

Vậy  $B(2; -2)$ .

**B. BÀI TẬP LUYỆN TẬP**

1. Cho hình chữ nhật ABCD có tâm  $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ . Đường thẳng chứa AB có phương trình  $x - 2y + 2 = 0$ ,  $AB = 2AD$ , biết  $x_A < 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Đáp số:  $A(-2; 0); B(2; 2); C(3; 0); D(-1; -2)$ .

2. Cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 4. Biết  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 2)$ , I là giao điểm của hai đường chéo thuộc đường thẳng:  $y = x$ . Tìm tọa độ C và D.

Đáp số:  $C\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$  hoặc  $C(-1; 0), D(0; -2)$ .

3. Cho hình chữ nhật ABCD có điểm  $I(6; 2)$  là giao điểm của hai đường chéo. Điểm  $M(1; 5)$  thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng  $\Delta: x + y - 5 = 0$ . Viết phương trình cạnh AB.

Đáp số:  $AB: x - 4y + 17 = 0$  hoặc  $AB: y - 5 = 0$ .

4. Cho hình thoi ABCD có cạnh bằng 5. Biết tọa độ đỉnh  $A(1;5)$ , hai đỉnh B và D nằm trên đường thẳng  $d: x - 2y + 4 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

Đáp số:  $B(-2;1); C(3;1); D(6;5)$ .

5. Cho hình chữ nhật ABCD có  $AB: x - 2y + 1 = 0$ ,  $BD: x - 7y + 14 = 0$ , đường thẳng AC qua điểm  $M(2;1)$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Đáp số:  $A(3;2); B\left(\frac{21}{5}; \frac{13}{5}\right); C(4;3); D\left(\frac{14}{5}; \frac{12}{5}\right)$ .

6. Cho đường thẳng  $\Delta: x + y - 1 = 0$  và các điểm  $A(0;-1)$ ,  $B(2;1)$ . Biết tứ giác ABCD là hình thoi có tâm nằm trên đường thẳng  $\Delta$ . Tìm tọa độ đỉnh C và D.

Đáp số:  $C(0;2), D(-2;1)$  hoặc  $C(4;-1), D(2;-3)$ .

7. Cho ba đường thẳng  $d_1: x - y = 0$ ;  $d_2: 2x + y - 1 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết rằng A thuộc  $d_1$ , C thuộc  $d_2$  và B, D thuộc trục hoành.

Đáp số:  $A(1;1); B(0;0); C(1;-1); D(2;0)$  hoặc  $A(1;1); B(2;0); C(1;-1); D(0;0)$ .

8. Cho hình thoi ABCD có tâm  $I(2;1)$ ,  $AC = 2BD$ , điểm  $M\left(0; \frac{1}{3}\right) \in AB$  và  $N(0;7) \in CD$ . Biết điểm B có tung độ dương, tìm tọa độ điểm B.

Đáp số:  $B\left(\frac{2}{11}; \frac{1}{11}\right)$ .

9. Cho hình chữ nhật ABCD có  $AB: 2x - y - 3 = 0$ , tâm I thuộc đường thẳng  $\Delta: 3x - y - 2 = 0$ , điểm  $M(1;1)$  là điểm thuộc đường chéo AC. Biết hai đường chéo hợp với nhau một góc  $\alpha$  mà  $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đó.

Đáp số:  $A(3;3), B\left(\frac{9}{5}; \frac{3}{5}\right), C(-1;-1), D\left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)$ .

10. Cho ba đường thẳng;  $d_2: x + y - 6 = 0$ ,  $d_3: x - 3 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết rằng A và C thuộc  $d_3$ , B thuộc  $d_1$  và D thuộc  $d_2$ .

Đáp số:  $A(3;3), B(2;2); C(1;3); D(4;2)$  hoặc  $A(1;3), B(2;2); C(3;3); D(4;2)$ .

11. Cho hình thoi ABCD có hai cạnh AB và CD lần lượt nằm trên hai đường  $d_1: x - 2y + 5 = 0$ ;  $d_2: x - 2y + 1 = 0$ . Biết rằng  $M(-3; 3)$  thuộc AD và điểm  $N(-1; 4)$  thuộc BC. Viết phương trình các đường thẳng AD và BC.

Đáp số: AD:  $x + 2y - 3 = 0$ ,  $11x - 2y + 39 = 0$ .

12. Cho ba điểm  $A(3; 0)$ ,  $B(0; 3)$ ,  $C(0; 5)$ . Tìm điểm D sao cho ABCD là hình thang cân

ĐS:  $D(5; 0)$  hoặc  $D(3; 5)$

13. Cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 2, tọa độ các đỉnh  $A(1; 0)$ ,  $B(2; 0)$  và tâm I nằm trên đường thẳng d:  $x - y = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh C và D

ĐS:  $C(3; 4)$ ,  $D(2; 4)$  hoặc  $C(-5; -4)$ ,  $D(-6; -4)$

14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh  $A(0; 5)$  và một đường chéo nằm trên đường thẳng có phương trình  $2x - y = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh B, C và D

ĐS:  $B(1; 2)$ ,  $C(4; 3)$ ,  $D(3; 6)$  hoặc  $B(3; 6)$ ,  $C(4; 3)$ ,  $D(1; 2)$

15. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba đường thẳng  $d_1: 3x - y - 4 = 0$ ,  $d_2: x + y - 6 = 0$ ,  $d_3: x - 3 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD, biết rằng  $\angle BAD = 120^\circ$ ; các đỉnh  $A, C \in d_3$ ,  $B \in d_1$ ,  $D \in d_2$

ĐS:  $B(2; 2)$ ,  $D(4; 2)$ ,  $A\left(3; 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ,  $C\left(3; 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

16. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm  $A(2; 1)$ ,  $B(-1; -3)$  và hai đường thẳng  $d_1: x + y + 3 = 0$  và  $d_2: x - 5y - 16 = 0$ . Tìm tọa độ các điểm C và D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành

ĐS:  $C(3; -6)$ ,  $D(6; -2)$

17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD tâm I, biết  $A(0; 1)$ ,  $B(3; 4)$  nằm trên (P) có phương trình  $y = x^2 - 2x + 1$ , I nằm trên cung AB của (P) sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Tìm tọa độ C, D

ĐS:  $C\left(3; -\frac{1}{2}\right)$ ,  $D\left(0; -\frac{7}{2}\right)$

18. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình bình hành ABCD với G là trọng tâm tam giác BCD, phương trình đường thẳng DG:  $4x - 2y + 2 = 0$ , phương trình BD:  $5x - 3y + 2 = 0$  và  $C(0; 2)$ . Tìm tọa độ các đỉnh A, B, D của hình bình hành

ĐS:  $A(1; 1)$ ,  $B(2; 4)$ ,  $D(-1; -1)$

19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 12, tâm I là giao điểm của đường thẳng  $d: x - y - 3 = 0$  và  $d': x + y - 6 = 0$ . Trung điểm một cạnh là giao điểm của đường thẳng d với trục Ox. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật

ĐS:  $A(2;1), D(4;-1), C(7;2), B(5;4)$

## TUYỂN TẬP HÌNH HỌC PHẪNG TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC CÁC NĂM GẦN ĐÂY

### Đề khối A

#### Bài 1: (2013)

- a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng  $d: 2x + y + 5 = 0$  và  $A(-4; 8)$ . Gọi M là điểm đối xứng của B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Tìm tọa độ các điểm B và C, biết rằng  $N(5; -4)$
- b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng  $\Delta: x - y = 0$ . Đường tròn (C) có bán kính  $R = \sqrt{10}$  cắt  $\Delta$  tại hai điểm A và B sao cho  $AB = 4\sqrt{2}$ . Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).

**ĐS:** a)  $C(1; -7), B(-4; -7)$

$$b) (C): (x-5)^2 + (y-3)^2 = 10$$

#### Bài 2: (2012)

- a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm cả cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho  $CN = 2.ND$ . Giả sử  $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$  và đường thẳng AN có phương trình  $2x - y - 3 = 0$ . Tìm tọa độ điểm A
- b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):  $x^2 + y^2 = 8$ . Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông

**ĐS:** a)  $A(1; -1)$  hoặc  $A(4; 5)$

$$b) (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$$

#### Bài 3: (2011)

- a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng  $\Delta: x + y + 2 = 0$  và đường tròn (C):  $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ . Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc  $\Delta$ . Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết tứ giác MAIB có diện tích bằng 10
- b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E):  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ . Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E), có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất

**ĐS:** a)  $M(2; -4), M(-3; 1)$

$$b) A\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ hoặc } A\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

**Bài 4: (2010)**

- a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng  $d_1: \sqrt{3}x + y = 0$  và  $d_2: \sqrt{3}x - y = 0$ . Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với  $d_1$  tại A, cắt  $d_2$  tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B.

Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  và điểm A có hoành độ dương

- b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(6; 6), đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình  $x + y - 4 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh B và C, biết điểm  $E(1; -3)$  nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

**ĐS:** a) (T):  $\left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$

b)  $B(0; -4), C(-4; 0)$  hoặc  $B(-6; 2), C(2; -6)$

**Bài 5: (2009)**

- a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm I(6; 2) là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm M(1; 5) thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng  $\Delta: x + y - 5 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng AB.

- b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):  $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$  và đường thẳng  $\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$ , với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Tìm m để  $\Delta$  cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất

**ĐS:** a)  $y - 5 = 0$  hoặc  $x - 4y + 19 = 0$

b)  $m = 0$  hoặc  $m = \frac{8}{15}$

**Bài 6: (2008)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20

**ĐS:** (E):  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

**Đề khối B****Bài 7: (2013)**



- a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau và  $AD = 3BC$ . Đường thẳng BD có phương trình  $x + 2y - 6 = 0$  và tam giác ABD có trực tâm là  $H(-3; 2)$ . Tìm tọa độ các đỉnh C và D
- b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A là  $H\left(\frac{17}{5}; \frac{-1}{5}\right)$ , chân đường phân giác trong của góc A là  $D(5; 3)$  và trung điểm của cạnh AB là  $M(0; 1)$ . Tìm tọa độ đỉnh C

**ĐS:** a)  $D(4; 1)$  hoặc  $D(-8; 7)$                       b)  $C(9; 11)$

#### Bài 8: (2012)

- a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các đường tròn  $(C_1): x^2 + y^2 = 4$ ,  $(C_2): x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$  và đường thẳng  $d: x - y - 4 = 0$ . Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc  $(C_2)$ , tiếp xúc với  $d$  và cắt  $(C_1)$  tại hai điểm phân biệt A và B sao cho AB vuông góc với  $d$
- b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có  $AC = 2BD$  và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình  $x^2 + y^2 = 4$ . Viết phương trình chính tắc của (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D của hình thoi, biết  $A \in Ox$

**ĐS:** a)  $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$                       b)  $(E): \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

#### Bài 9: (2011)

- a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng  $\Delta: x - y - 4 = 0$  và  $d: 2x - y - 2 = 0$ . Tìm tọa độ điểm N thuộc đường thẳng  $d$  sao cho đường thẳng ON cắt đường thẳng  $\Delta$  tại điểm M thỏa mãn  $OM.ON = 8$
- b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh  $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ . Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Cho  $D(3; 1)$  và đường thẳng EF có phương trình  $y - 3 = 0$ . Tìm tọa độ đỉnh A, biết A có tung độ dương

**ĐS:** a)  $N(0; -2)$  hoặc  $N\left(\frac{6}{5}; \frac{2}{5}\right)$                       b)  $A\left(3; \frac{13}{3}\right)$

#### Bài 10: (2010)

- a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A có đỉnh  $C(-4; 1)$ , phân giác trong góc A có phương trình  $x + y - 5 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương



- b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm  $A(2; \sqrt{3})$  và elip  $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ . Gọi  $F_1$  và  $F_2$  là các tiêu điểm của  $(E)$  ( $F_1$  có hoành độ âm);  $M$  là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng  $AF_1$  với  $(E)$ ;  $N$  là điểm đối xứng của  $F_2$  qua  $M$ . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ANF_2$

**ĐS:** a)  $3x - 4y + 16 = 0$       b)  $(T): (x-1)^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$

### Bài 11: (2009)

- a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn  $(C): (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$  và hai đường thẳng  $\Delta_1: x - y = 0, \Delta_2: x - 7y = 0$ . Xác định tọa độ tâm  $K$  và tính bán kính của đường tròn  $(C_1)$ , biết đường tròn  $(C_1)$  tiếp xúc với các đường thẳng  $\Delta_1, \Delta_2$  và tâm  $K$  thuộc đường tròn  $(C)$
- b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có đỉnh  $A(-1; 4)$  và các đỉnh  $B, C$  thuộc đường thẳng  $\Delta: x - y - 4 = 0$ . Xác định tọa độ các điểm  $B$  và  $C$ , biết diện tích tam giác  $ABC$  bằng 18

**ĐS:** a)  $K\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$  và  $R = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

b)  $B\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right), C\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$  hoặc  $B\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right), C\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$

### Bài 12: (2008)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh  $C$  của tam giác  $ABC$  biết rằng hình chiếu vuông góc của  $C$  trên đường thẳng  $AB$  là điểm  $H(-1; -1)$ , đường phân giác trong của góc  $A$  có phương trình  $x - y + 2 = 0$  và đường cao kẻ từ  $B$  có phương trình  $4x + 3y - 1 = 0$

**ĐS:**  $C\left(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4}\right)$

### Đề khối D

### Bài 13: (2013)

- a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác  $ABC$  có điểm  $M\left(\frac{-9}{2}; \frac{3}{2}\right)$  là trung điểm của cạnh  $AB$ , điểm  $H(-2; 4)$  và điểm  $I(-1; 1)$  lần lượt là chân đường cao kẻ từ  $B$  và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Tìm tọa độ điểm  $C$

- b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn  $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$  và đường thẳng  $\Delta: y-3=0$ . Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm của  $(C)$ , các đỉnh N và P thuộc  $\Delta$ , đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc  $(C)$ . Tìm tọa độ điểm P.

**ĐS:** a)  $C(4;1)$  hoặc  $C(-1;6)$

b)  $P(-1;3)$  hoặc  $P(3;3)$

#### Bài 14: (2012)

- a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là  $x+3y=0$  và  $x-y+4=0$ , đường thẳng BD đi qua điểm  $M\left(\frac{-1}{3};1\right)$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD

- b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng  $d: 2x-y+3=0$ . Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc  $d$ , cắt trục Ox tại A và B, cắt trục Oy tại C và D sao cho  $AB=CD=2$

**ĐS:** a)  $A(-3;1), B(1;-3), C(3;-1), D(-1;3)$

b)  $(C): (x+3)^2 + (y+3)^2 = 10$

#### Bài 15: (2011)

- a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh  $B(-4;1)$ , trọng tâm  $G(1;1)$  và đường thẳng chứa phân giác trong của góc A có phương trình  $x-y-1=0$ . Tìm tọa độ các đỉnh A và C

- b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm  $A(1;0)$  và đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  cắt  $(C)$  tại hai điểm M và N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A

**ĐS:** a)  $A(4;3), C(3;-1)$

$\Delta: y=1$  hoặc  $y=-3$

#### Bài 16: (2010)

- a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm  $A(3; -7)$  và trực tâm  $H(3; -1)$ , tâm đường tròn ngoại tiếp  $I(-2; 0)$ . Xác định tọa độ điểm C biết C có hoành độ dương.

- b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm  $A(0; 2)$  và là đường thẳng đi qua O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên  $\Delta$ . Viết phương trình đường thẳng, biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH

**ĐS:** a)  $C(-2+\sqrt{65};3)$

b)  $(\sqrt{5}-1)x \pm 2\sqrt{\sqrt{5}-2}y = 0$

**Bài 17: (2009)**

- a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm M(2; 0) của AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là  $7x - 2y - 3 = 0$  và  $6x - y - 4 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng AC.
- b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, Trong mặt phẳng tọa độ cho đường tròn (C) có phương trình:  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ . Gọi I là tâm của (C). Xác định tọa độ của M thuộc (C) sao cho  $\angle IMO = 30^\circ$

**ĐS:** a)  $AC : 3x - 4y + 5 = 0$       b)  $M \left( \frac{3}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

**Bài 18: (2008)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P):  $y^2 = 16x$  và điểm A(1; 4). Hai điểm phân biệt B và C (B và C khác A) di động trên (P) sao cho góc  $BAC = 90^\circ$ . Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định

**ĐS:**  $M(17; -4)$

Truy cập <http://dethithu.net> mỗi ngày để tải các đề thi thử THPT Quốc Gia (Đại Học) các môn TOÁN – ANH – VĂN – LÝ – HÓA – SINH mới nhất, nhanh nhất từ các trường THPT và trung tâm luyện thi đại học trong nước. Chúng tôi luôn cập nhật đề thi thử mỗi ngày vậy nên các bạn yên, luôn có các đề thi thử mới nhất để các bạn tham khảo.

Tham gia nhóm : **ÔN THI ĐH TOÁN – ANH** trên Facebook để cùng hỏi đáp, học tập : <http://facebook.com/groups/onthidhtoananhvan>

Like Fanpage : **Đề Thi Thử THPT Quốc Gia – Tài Liệu Ôn Thi** để cập nhật nhiều hơn qua Facebook.

<http://facebook.com/dethithu.net>