

THOMSON

Earl W. Swokowski y Jeffery A. Cole

Álgebra y trigonometría

con geometría analítica

Undécima edición

UNDÉCIMA EDICIÓN

ÁLGEBRA Y
TRIGONOMETRÍA
CON GEOMETRÍA ANALÍTICA

UNDÉCIMA EDICIÓN

ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA

CON GEOMETRÍA ANALÍTICA

EARL W. SWOKOWSKI

JEFFERY A. COLE

Anoka-Ramsey Community College

Revisión técnica:

Dr. Gerardo P. Aguilar Sánchez

Director del Departamento de Matemáticas

División de Ingeniería y Arquitectura

Tecnológico de Monterrey, campus Ciudad de México

THOMSON



Australia • Brasil • Canadá • España • Estados Unidos • México • Reino Unido • Singapur

Álgebra y trigonometría con geometría analítica, 11a. edición

Earl Swokowski y Jeffery A. Cole

Presidente de Thomson Learning Iberoamérica:
Javier Arellano Gutiérrez

Director editorial Iberoamérica:
José Tomás Pérez Bonilla

Gerente editorial y de producción:
Lilia Moreno Olvera

Editora de desarrollo:
Rocío Cabañas Chávez

Editor de producción:
Rodolfo Alberto Tinoco Huicochea

Coordinador de pre prensa:
Alejandro A. Gómez Ruiz

Coordinador de manufactura:
Israel Robles Martínez

Diseño de portada:
Daniel Aguilar Bolaños

Composición tipográfica:
Servicios Editoriales 6Ns, S.A. de C.V.

Traducción:
Fis. Ángel Carlos González Ruiz
Traductor profesional y catedrático

Hugo Villagómez
Traductor profesional

Correctora de estilo:
Guadalupe Cevallos de Rosillo

Lectores de pruebas:
Elisa Núñez Ramos

COPYRIGHT © 2006 por International Thomson Editores, S.A. de C.V., una división de Thomson Learning, Inc. Thomson Learning™ es una marca registrada usada bajo permiso.

Impreso en México
Printed in Mexico
1 2 3 4 10 08 07 06

Para mayor información contáctenos en:
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe, núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, Delegación Cuajimalpa
México, D.F.

Puede visitar nuestro sitio en:
<http://www.thomson.com.mx>

DERECHOS RESERVADOS. Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del texto de la presente obra bajo cualesquiera formas, electrónica o mecánica, incluyendo fotocopiado, almacenamiento en algún sistema de recuperación de información, o grabado sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

Traducido del libro *Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry*, 11th ed. Publicado en inglés por Thomson/Wadsworth © 2005
ISBN 0-534-49449-8
Datos para catalogación bibliográfica:
Swokowski, Earl W. Y Jeffery A. Cole:
Álgebra y trigonometría con geometría analítica, 11a. ed.
ISBN-10: 970-686-540-3
ISBN-13: 978-970-686-540-3

Contenido:
1. Conceptos fundamentales de álgebra.
2. Ecuaciones y desigualdades.
3. Funciones y gráficas. 4. Funciones polinomiales y racionales. 5. Funciones inversas, exponenciales y logarítmicas.
6. Funciones trigonométricas de números reales. 7. Trigonometría analítica.
8. Aplicaciones de la trigonometría.
9. Sistemas de ecuaciones y desigualdades.
10. Sucesiones, series y probabilidad.
11. Temas de geometría analítica.
Apéndices. Respuestas a los ejercicios seleccionados. Índice de aplicaciones. Índice.

División Iberoamericana

México y América Central:
Thomson Learning
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe, núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, Delegación Cuajimalpa
México, D.F.
Tel. (5255) 1500 6000
Fax (5255) 1500 6019
editor@thomsonlearning.com.mx

Cono Sur:
Thomson Learning
Rojas núm. 2128
Buenos Aires, Argentina
Tel. (5411) 4582 0601
Fax (5411) 4582 0087
thomson@thomsonconosur.com

El Caribe:
Thomson Learning Caribe
Metro Office Park 3
Suite 201 St. 1
Lot. 3
Zip Code 00968-1705
Guaynabo, Puerto Rico
Tel. (787) 641 1112
Fax (787) 641 1119
lasha.ruiz@thomson.com

España:
Thomson Learning
Calle Magallanes, núm. 25
28015 Madrid, España
Tel. (3491) 446 3350
Fax (3491) 445 6218
clientes@parainfo.es

Pacto Andino:
Thomson Learning
Carrera 55, núm. 67 A-05
Bogotá, Colombia
Tel. (571) 630 8212
Fax (571) 630 7999
cliente@thomsonlearning.com

A la memoria de Earl W. Swokowski

CONTENIDO

<i>Lista de temas sobre la calculadora graficadora</i>	xi
--	----

<i>Prefacio</i>	xiii
-----------------	------

CAPÍTULO 1	<i>Conceptos fundamentales de álgebra</i>	1
-------------------	--	----------

1.1	Números reales	2
1.2	Exponentes y radicales	19
1.3	Expresiones algebraicas	31
1.4	Expresiones fraccionarias	45
	<i>Ejercicios de repaso del capítulo 1</i>	56
	<i>Ejercicios de análisis del capítulo 1</i>	58

CAPÍTULO 2	<i>Ecuaciones y desigualdades</i>	59
-------------------	--	-----------

2.1	Ecuaciones	60
2.2	Problemas aplicados	69
2.3	Ecuaciones cuadráticas	80
2.4	Números complejos	95
2.5	Otros tipos de ecuaciones	103
2.6	Desigualdades	112
2.7	Más sobre desigualdades	121
	<i>Ejercicios de repaso del capítulo 2</i>	129
	<i>Ejercicios de análisis del capítulo 2</i>	132

CAPÍTULO 3	<i>Funciones y gráficas</i>	133
-------------------	------------------------------------	------------

3.1	Sistemas de coordenadas rectangulares	134
3.2	Gráficas de ecuaciones	143
3.3	Rectas	159
3.4	Definición de función	178
3.5	Gráficas de funciones	196
3.6	Funciones cuadráticas	213
3.7	Operaciones sobre funciones	229
	<i>Ejercicios de repaso del capítulo 3</i>	239
	<i>Ejercicios de análisis del capítulo 3</i>	245

CAPÍTULO 4	<i>Funciones polinomiales y racionales</i>	247
4.1	Funciones polinomiales de grado mayor que 2	248
4.2	Propiedades de la división	259
4.3	Ceros de polinomios	267
4.4	Ceros complejos y racionales de polinomios	281
4.5	Funciones racionales	289
4.6	Variación	307
	<i>Ejercicios de repaso del capítulo 4</i>	315
	<i>Ejercicios de análisis del capítulo 4</i>	317
CAPÍTULO 5	<i>Funciones inversas, exponenciales y logarítmicas</i>	319
5.1	Funciones inversas	320
5.2	Funciones exponenciales	331
5.3	Función exponencial natural	344
5.4	Funciones logarítmicas	355
5.5	Propiedades de los logaritmos	370
5.6	Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	378
	<i>Ejercicios de repaso del capítulo 5</i>	392
	<i>Ejercicios de análisis del capítulo 5</i>	395
CAPÍTULO 6	<i>Funciones trigonométricas de números reales</i>	399
6.1	Ángulos	400
6.2	Funciones trigonométricas de ángulos	411
6.3	Funciones trigonométricas de números reales	429
6.4	Valores de las funciones trigonométricas	448
6.5	Gráficas trigonométricas	456
6.6	Otras gráficas trigonométricas	471
6.7	Problemas de aplicación	479
	<i>Ejercicios de repaso del capítulo 6</i>	492
	<i>Ejercicios de análisis del capítulo 6</i>	499
CAPÍTULO 7	<i>Trigonometría analítica</i>	501
7.1	Verificación de identidades trigonométricas	502
7.2	Ecuaciones trigonométricas	508
7.3	Fórmulas de suma y resta	523
7.4	Fórmulas de ángulos múltiples	534

7.5	Fórmulas de producto a suma y de suma a producto	544
7.6	Funciones trigonométricas inversas	549
	<i>Ejercicios de repaso del capítulo 7</i>	565
	<i>Ejercicios de análisis del capítulo 7</i>	568

CAPÍTULO 8 *Aplicaciones de la trigonometría* 569

8.1	Ley de los senos	570
8.2	Ley de los cosenos	580
8.3	Vectores	590
8.4	Producto punto	605
8.5	Forma trigonométrica para números complejos	616
8.6	Teorema de De Moivre y raíces enésimas de números complejos	623
	<i>Ejercicios de repaso del capítulo 8</i>	629
	<i>Ejercicios de análisis del capítulo 8</i>	633

CAPÍTULO 9 *Sistemas de ecuaciones y desigualdades* 635

9.1	Sistemas de ecuaciones	636
9.2	Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables	646
9.3	Sistemas de desigualdades	654
9.4	Programación lineal	664
9.5	Sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables	672
9.6	Álgebra de matrices	688
9.7	Inversa de una matriz	698
9.8	Determinantes	704
9.9	Propiedades de los determinantes	711
9.10	Fracciones parciales	719
	<i>Ejercicios de repaso del capítulo 9</i>	725
	<i>Ejercicios de análisis del capítulo 9</i>	728

CAPÍTULO 10 *Sucesiones, series y probabilidad* 731

10.1	Sucesiones infinitas y notación de sumatoria	732
10.2	Sucesiones aritméticas	748
10.3	Sucesiones geométricas	755
10.4	Inducción matemática	764

10.5	Teorema del binomio	771
10.6	Permutaciones	780
10.7	Permutaciones y combinaciones distinguibles	787
10.8	Probabilidad	796
	<i>Ejercicios de repaso del capítulo 10</i>	810
	<i>Ejercicios de análisis del capítulo 10</i>	813
CAPÍTULO 11	<i>Temas de geometría analítica</i>	815
11.1	Parábolas	816
11.2	Elipses	826
11.3	Hipérbolas	840
11.4	Curvas planas y ecuaciones paramétricas	852
11.5	Coordenadas polares	867
11.6	Ecuaciones polares de cónicas	884
	<i>Ejercicios de repaso del capítulo 11</i>	890
	<i>Ejercicios de análisis del capítulo 11</i>	892
	<i>Apéndices</i>	895
I	Gráficas comunes y sus ecuaciones	896
II	Resumen de transformaciones de gráficas	898
III	Gráficas de las funciones trigonométricas y sus inversas	900
IV	Valores de las funciones trigonométricas de ángulos especiales sobre una circunferencia unitaria	902
	<i>Respuestas a los ejercicios seleccionados</i>	R1
	<i>Índice de aplicaciones</i>	IA90
	<i>Índice</i>	I95

LISTA DE TEMAS SOBRE LA CALCULADORA GRAFICADORA

Hay muchos otros sitios en los que se usa una calculadora graficadora. A continuación se muestran los que incluyen secuencias específicas de tecleo.

CAPÍTULO 1 *Conceptos fundamentales de álgebra*

Almacenamiento de valores y evaluación de expresiones	5
Recíprocos	7
Sustracción y negativos	7
Prueba de desigualdades y la ley de la tricotomía	10
Valor absoluto	12
Notación científica	15
Notación exponencial	19
Raíz principal n -ésima	23
Exponentes racionales	27
Comprobación del resultado de una factorización	40
Cálculo del MCM	48
Suma de fracciones	48
Creación de una tabla	49

CAPÍTULO 2 *Ecuaciones y desigualdades*

Comprobación de ecuaciones	62
Operaciones con números complejos	98
Operaciones con números complejos	100

CAPÍTULO 3 *Funciones y gráficas*

Trazado de puntos en una calculadora graficadora	139
Trazo de la gráfica de una ecuación y determinación de las intersecciones x y y	146
Cálculo de los puntos de intersección de gráficas	153
Cálculo de los puntos de intersección de las gráficas	154
Determinación de la recta del mejor ajuste (recta de regresión lineal)	170
Análisis de la gráfica de una función	189
Trazo de la gráfica de una función definida por pedazos	203
Determinación de un valor máximo (o mínimo)	218

CAPÍTULO 4 *Funciones polinomiales y racionales*

Uso de la función POLY de la TI-86	255
------------------------------------	-----

CAPÍTULO 5 *Funciones inversas, exponenciales y logarítmicas*

Trazado de la gráfica de la inversa de una función	327
--	-----

CAPÍTULO 6	<i>Funciones trigonométricas de números reales</i>	
	Conversión de radianes en grados	405
	Expresar minutos y segundos como grados decimales	406
CAPÍTULO 7	<i>Trigonometría analítica</i>	
	Aproximación de las soluciones de una ecuación trigonométrica	515
CAPÍTULO 8	<i>Aplicaciones de la trigonometría</i>	
	Suma de dos vectores	597
	Hallar el producto punto	606
	Operaciones con números complejos	619
	Hallar una raíz de un número complejo	626
	Uso de la característica POLY de la TI-86	628
CAPÍTULO 9	<i>Sistemas de ecuaciones y desigualdades</i>	
	Graficado de una desigualdad	659
	Introducción de una matriz	680
	Resolución de un sistema usando la forma escalonada reducida	680
	Multipliación de matrices	693
	Hallar el inverso de una matriz	701
	Encontrar el determinante de una matriz	708
CAPÍTULO 10	<i>Sucesiones, series y probabilidad</i>	
	Generación de una sucesión	734
	Gráfica de una sucesión	735
	Generación de una sucesión definida recursivamente	737
	Encontrar la suma de una sucesión	738
	Búsqueda de los términos de una sucesión de sumas parciales	740
	Uso del modo de sucesión de la TI-83 Plus	743
	Cálculo de factoriales	773
	Cálculo de permutaciones	785
	Cálculo de combinaciones	792
CAPÍTULO 11	<i>Temas de geometría analítica</i>	
	Graficado de elipses	833
	Trazado de gráficas en modo paramétrico	855
	Conversión de coordenadas polares a rectangulares	869
	Conversión de coordenadas rectangulares a polares	871
	Trazado de la gráfica de una ecuación polar	874

PREFACIO

La undécima edición de *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* incluye más de 100 nuevos ejemplos y ejercicios, muchos de los cuales son resultado de las sugerencias de los usuarios y los revisores de la décima edición. Todos se han incorporado sin sacrificar la solidez matemática que ha sido fundamental para el éxito de esta obra.

Se ha comprobado que la inclusión en el texto de ejemplos y recuadros sobre la calculadora graficadora, que presentan secuencias específicas de tecleo con códigos de color y pantallas para la TI-83 Plus y la TI-86, ha sido de valor agregado para los estudiantes, sobre todo para los que trabajan por primera vez con una calculadora graficadora. Además, ofrece a los profesores más flexibilidad en términos de la forma en que pueden hallar una solución. El diseño del texto hace que las secciones de tecnología sean fáciles de identificar y éstas aparecen en una tabla de contenido especial sobre tecnología para que su localización sea más sencilla.

A continuación aparece una breve semblanza de los capítulos, seguida de una somera descripción del curso de álgebra universitaria que imparto en el Anoka-Ramsey Community College y, finalmente, una lista de las características generales de la obra.

Panorama general

- Capítulo 1** Este capítulo contiene un resumen de algunos temas básicos de álgebra. Los estudiantes ya deben estar familiarizados con gran parte de este material, pero también considerarán un reto algunos de los ejercicios que los prepararán para el cálculo. Para la comprobación de las operaciones algebraicas se presentan y utilizan operaciones con la calculadora graficadora.
- Capítulo 2** En este capítulo, las ecuaciones y las desigualdades se resuelven por métodos algebraicos y numéricos, con apoyo de la tecnología; en capítulos posteriores se les solucionará con el uso de gráficas. Los estudiantes ampliarán sus conocimientos de estos temas; por ejemplo, ya han trabajado con la fórmula cuadrática, pero se les pedirá que la relacionen con la factorización y que trabajen con coeficientes que no son números reales (consulta los ejemplos 10 y 11 de la sección 2.3).
- Capítulo 3** En este capítulo se presentan gráficas y funciones en dos dimensiones. Se proporcionan instrucciones específicas para la mayor parte de las características básicas de graficado, como determinar ceros y puntos de intersección, así como para algunos temas más difíciles, como encontrar un modelo de regresión y graficar una función definida por tramos. Consulta el nuevo ejemplo 10 de la sección 3.5 y hallarás una aplicación temática (sobre impuestos) que relaciona tablas, fórmulas y gráficas.

- Capítulo 4** Este capítulo empieza con una exposición de las funciones polinomiales y un poco de teoría de polinomios. En la sección 4.5 se analizan en profundidad las funciones racionales. A esto sigue una sección sobre la variación (anteriormente sección 3.9), que ahora incluye las gráficas de funciones racionales.
- Capítulo 5** Las funciones inversas (anteriormente sección 3.8) son el primer tema de análisis; le siguen varias secciones acerca de las funciones exponenciales y logarítmicas. A la representación de una función exponencial por medio de modelos se le concede atención adicional en este capítulo (consulta el ejemplo 8 de la sección 5.2) y también en el capítulo 9.
- Capítulo 6** El primer tema de ese capítulo son los ángulos. A continuación se presentan las funciones trigonométricas a partir del enfoque de un triángulo rectángulo y finalmente se definen en términos de una circunferencia unitaria. En todo el capítulo se presentan identidades trigonométricas básicas. El capítulo termina con secciones sobre gráficas trigonométricas y problemas de aplicación.
- Capítulo 7** Este capítulo consiste sobre todo en identidades, fórmulas y ecuaciones trigonométricas. La última sección contiene definiciones, propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas inversas.
- Capítulo 8** La ley de los senos y la ley de los cosenos se utilizan para resolver triángulos oblicuos. A continuación se presentan los vectores y se usan en aplicaciones. En las dos últimas secciones se encuentra la relación entre funciones trigonométricas y números complejos.
- Capítulo 9** Los sistemas de desigualdades y la programación lineal se presentan inmediatamente después de resolver sistemas por sustitución y por eliminación. A continuación se presentan las matrices y éstas se usan para resolver sistemas. Este capítulo termina con un análisis de las determinantes y las fracciones parciales.
- Capítulo 10** Este capítulo empieza con una exposición de las sucesiones e incluye un considerable apoyo de la tecnología. La inducción matemática y el teorema del binomio se presentan a continuación, seguidos de temas sobre la forma de contar (consulta el ejemplo 3 de la sección 10.7, el cual es una ilustración que incluye tanto combinaciones como permutaciones). La última sección se refiere a las probabilidades e incluye temas como probabilidades y valor esperado.
- Capítulo 11** Este capítulo se inicia con secciones sobre la parábola, la elipse y la hipérbola. En las siguientes secciones se presentan dos formas diferentes de representar las funciones en ecuaciones paramétricas y coordenadas polares.

Mi curso

En el Anoka-Ramsey Community College de Coon Rapids, Minnesota, Álgebra universitaria I es un curso de un semestre que representa 3 créditos. Los alumnos que pretenden estudiar cálculo deben proseguir con otro curso de un semestre que vale 4 créditos: Álgebra universitaria II y Trigonometría. Para muchos estudiantes, este curso es también el curso terminal de matemáticas.

Las secciones incluidas en Álgebra universitaria I son:

3.1–3.7, 4.1, 4.5 (en parte), 4.6, 5.1–5.6, 9.1–9.4, 10.1–10.3 y 10.5–10.8.

Los capítulos 1 y 2 se usan en algunas clases como material de repaso y las secciones restantes se imparten en el siguiente curso. La calculadora graficadora es obligatoria en algunas secciones y opcional en otras.

Características

Una lista separada de temas para la calculadora graficadora En las páginas xi y xii aparece una lista de temas referentes a la calculadora graficadora para referencia rápida.

Ilustraciones Se proporcionan, en forma de ilustraciones, breves demostraciones del uso de definiciones, leyes y teoremas.

Tablas Ofrecen fácil acceso a resúmenes de propiedades, leyes, gráficas, relaciones y definiciones. A menudo contienen ejemplos sencillos de los conceptos que presentan.

Ejemplos Titulados para una referencia rápida, todos los ejemplos proporcionan soluciones minuciosas de problemas similares a los que están en las secciones de ejercicios. Muchos incluyen gráficas y tablas para hacer más comprensibles los procedimientos y las soluciones.

Explicaciones paso a paso A fin de ayudar al estudiante a seguir la solución de diversos ejemplos con más facilidad, se les ha dotado de explicaciones detalladas, paso por paso.

Ejercicios de análisis Cada capítulo termina con diversos ejercicios idóneos para la discusión en pequeños grupos. Aquéllos van de fáciles a difíciles y de teóricos a aplicados.

Comprobaciones Las soluciones de varios ejercicios se comprueban explícitamente, con objeto de recordar al alumno que revise si sus respuestas satisfacen las condiciones de los problemas.



Ejemplos con calculadora graficadora Siempre que se consideró apropiado, se añadieron ejemplos que requieren el uso de este dispositivo. Se identifican con el icono que aparece a la izquierda y se ilustran con una imagen reproducida de la pantalla de la calculadora.

Recuadros sobre calculadora graficadora Además de los ejemplos con calculadora graficadora, se incluyen recuadros para resaltar algunas capacidades de las calculadoras graficadoras e ilustrar su uso para realizar las operaciones que se analizan. Consulta, por ejemplo, "Uso de la característica POLY de la TI-86" en la sección 4.1 y "Uso del modo de sucesión de la TI-83 Plus" en la sección 10.1.



Ejercicios con calculadora graficadora En las secciones apropiadas se incluyen ejercicios especialmente diseñados para su resolución mediante este dispositivo. Éstos también se señalan con un icono de calculadora (que se muestra a la izquierda).

Aplicaciones Con objeto de incrementar el interés de los estudiantes y ayudarlos a relacionar los ejercicios con situaciones reales, se le ha puesto título a cada uno de ellos. Una revisión del índice de aplicaciones al final del libro muestra la amplia gama de situaciones abordadas. Muchos profesores han comentado que estas aplicaciones constituyen una de las características más importantes de la obra.

Ejercicios Las secciones de ejercicios comienzan con problemas simples y progresan gradualmente hasta presentar situaciones más difíciles. Muchos ejercicios contienen gráficas y datos tabulares; otros requieren que el estudiante encuentre un modelo matemático para los datos dados. Muchos de los nuevos ejercicios requieren que el estudiante comprenda la relación conceptual entre una ecuación y su gráfica.

Los problemas de aplicación suelen hallarse al final de un conjunto de ejercicios, para permitir que el estudiante adquiera confianza al trabajar con las nuevas ideas que se han presentado, antes de intentar resolver problemas que necesitan un análisis más profundo y capacidad de síntesis. Los ejercicios de repaso al final de cada capítulo pueden servir para preparar exámenes.

Guías Las guías dentro de un recuadro enumeran los pasos dentro de un procedimiento o técnica para ayudar al lector a resolver problemas de manera sistemática.

Advertencias Intercaladas a lo largo de todo el material hay notas precautorias que alertan al alumno acerca de errores comunes.

Figuras Como parte de un paquete global de primer nivel, las figuras y gráficas se diseñaron con métodos computarizados de vanguardia para darles la mayor precisión posible.

Diseño del texto El material se ha diseñado para facilitar el seguimiento de la exposición y destaca los conceptos más importantes. El diseño a dos colores, con sus múltiples matices, tiene un valor pedagógico, pues se usa para aclarar gráficas complicadas y ayudar a los estudiantes a visualizar problemas aplicados. Los anteriores usuarios de este texto han confirmado que ofrece un agradable equilibrio en el uso del color.

Al final del libro se proporcionan sumarios útiles de álgebra, geometría y trigonometría.

Apéndices El apéndice I, "Gráficas comunes y sus ecuaciones", es un resumen de las gráficas y ecuaciones que el estudiante suele encontrar en los cursos de matemáticas previos al cálculo. El apéndice II, "Resumen de transformaciones de gráficas", ofrece una sinopsis ilustrativa de las transformaciones básicas consideradas en el texto: desplazamiento, elongación, compresión y reflexión. El apéndice III, "Gráficas de las funciones trigonométricas y sus inversas", contiene gráficas, dominios y rangos de las seis funciones trigonométricas y sus inversas. El apéndice IV, "Valores de las funciones trigonométricas de ángulos especiales sobre una circunferencia unitaria", constituye una referencia de una página entera de los ángulos más comunes en una circunferencia uni-

taria, valiosa para los estudiantes que están aprendiendo los valores de las funciones trigonométricas fundamentales.

Sección de respuestas Se encuentra al final de la obra y proporciona las respuestas a la mayor parte de los ejercicios con número impar, así como las respuestas a todos los ejercicios de repaso de los capítulos. Esta sección requirió un considerable esfuerzo mental para convertirlo en un verdadero dispositivo de aprendizaje para el alumno, en lugar de reducirlo a un formato de comprobación de respuestas; por ejemplo, cuenta con demostraciones para problemas de inducción matemática. Las respuestas numéricas para diversos ejercicios se han calculado de manera tanto exacta como aproximada. Siempre que se consideró apropiado se incluyeron gráficas, demostraciones y sugerencias. Las soluciones y respuestas, preparadas por el autor, aseguran un alto grado de consistencia entre el texto, los manuales de soluciones y las respuestas.

Agradecimientos

Una buena cantidad de los cambios que se hicieron a esta edición pueden atribuirse a las siguientes personas, quienes revisaron el manuscrito e hicieron diversas sugerencias para incrementar la utilidad del texto para el alumno: Jean H. Bevis, Georgia State University; David Boliver, University of Central Oklahoma; Randall Dorman, Cochise College; Karen Hinz, Anoka-Ramsey Community College; Sudhir Goel, Valdosta State University; John W. Horton, Sr., St. Petersburg College; Robert Jajcay, Indiana State University; Conrad D. Krueger, San Antonio College; Susan McLoughlin, Union County College; Lakshmi Nigam, Quinnipiac University; Wesley J. Orser, Clark College; Don E. Soash, Hillsborough Community College; Thomas A. Tredon, Lord Fairfax Community College; y Fred Worth, Henderson State University. Mi agradecimiento también a Mike Rosenborg de Canyonville (Oregon) Christian Academy y a Anna Fox, quienes revisaron la precisión del *Manual de soluciones para el profesor*.

Quiero expresarle mi gratitud, por su excelente contribución, al personal de Brooks/Cole, en especial al editor de adquisiciones John-Paul Ramin, por su valiosa asesoría y su apoyo a lo largo de todo el proyecto. Rachael Sturgeon y Lisa Chow se hicieron cargo del excelente paquete auxiliar que acompaña a esta obra. Sally Lifland, Gail Magin, Denise Throckmorton y Jeannie Yost, miembros de Lifland *et al.*, Bookmakers, examinaron el libro en cada una de las etapas de producción, tuvieron un cuidado excepcional para cerciorarse de que no hubiera incongruencias e hicieron muchas sugerencias útiles. El finado George Morris, de Scientific Illustrators, creó el paquete gráfico con excelente precisión matemática y actualizó todo el material gráfico de varias ediciones. Actualmente su hijo Brian se encarga de mantener esa misma tradición de excelencia.

Además de las personas nombradas aquí, quiero expresar mi sincera gratitud a todos aquellos estudiantes y profesores que me han ayudado a aguzar mi perspectiva acerca de la enseñanza de las matemáticas. Por favor, siéntase en total libertad de escribirme respecto de cualquier punto de la obra, sabré valorar su opinión.

Jeffery A. Cole

Agradecimientos de la edición en español

Agradecemos la colaboración del maestro Armando Santamaría Borja, profesor de asignatura del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Ciudad de México, en la revisión técnica del capítulo 2.

Conceptos fundamentales de álgebra

1.1 Números reales

1.2 Exponentes y radicales

1.3 Expresiones algebraicas

1.4 Expresiones fraccionarias

La palabra *álgebra* proviene de *ilm al-jabr w'al muqabala*, que es el título de un libro escrito en el siglo IX por el matemático árabe Al Juarismi. El título se ha traducido como la ciencia de la reposición y la reducción, lo que significa trasponer y combinar términos semejantes (de una ecuación). La traducción fonética de *al-jabr* en el latín popular, condujo al nombre de la rama de las matemáticas que ahora se conoce como álgebra.

En esta disciplina usamos símbolos o letras como a , b , c , d , x , y para denotar números arbitrarios. La gran cantidad de fórmulas que se usan en las ciencias y en la industria pone de manifiesto la naturaleza general del álgebra. A medida que sigas adelante en el estudio de este texto y pases a cursos más avanzados de matemáticas o a campos donde éstas se utilizan, estarás cada vez más consciente de la importancia y el poder de las técnicas algebraicas.

1.1

Números reales

Los números reales se emplean en todas las ramas de las matemáticas y es importante estar familiarizado con los símbolos que los representan, como

$$1, 73, -5, \frac{49}{12}, \sqrt{2}, 0, \sqrt{-85}, 0.33333\ldots, 596.25,$$

etcétera. Los **enteros positivos**, o **números naturales**, son

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

Los **números enteros no negativos** son los números naturales junto con el número 0. A menudo, los números **enteros** se expresan de la siguiente manera:

$$\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

En todo este texto, las letras minúsculas a, b, c, x, y, \dots representan números reales arbitrarios (también llamados *variables*). Si a y b denotan el mismo número real, escribimos $a = b$, que se lee " a es igual a b " y se llama **igualdad**. La notación $a \neq b$ se lee " a no es igual a b ".

Si a, b y c son enteros y $c = ab$, entonces a y b son **factores** o **divisores** de c ; por ejemplo, ya que

$$6 = 2 \cdot 3 = (-2)(-3) = 1 \cdot 6 = (-1)(-6),$$

sabemos que 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 y -6 son factores de 6.

Un entero positivo p diferente de 1 es **primo** si sus únicos factores positivos son 1 y p . Algunos de los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. El **teorema fundamental de la aritmética** asevera que todo entero positivo diferente de 1 se puede expresar como el producto de números primos según una y sólo una forma (excepto por el orden de los factores). Algunos ejemplos son

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, \quad 540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Un **número racional** es un número real que puede expresarse en la forma a/b , en donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Notarás que todo entero a es un número racional, puesto que se puede expresar en la forma $a/1$. Es posible expresar todo número real como un decimal; por otro lado, las representaciones decimales para números racionales son *finitas*, o *infinitas y repetitivas*; por ejemplo, por el proceso aritmético de división podemos demostrar que

$$\frac{5}{4} = 1.25 \quad \text{y} \quad \frac{177}{35} = 3.2181818\ldots$$

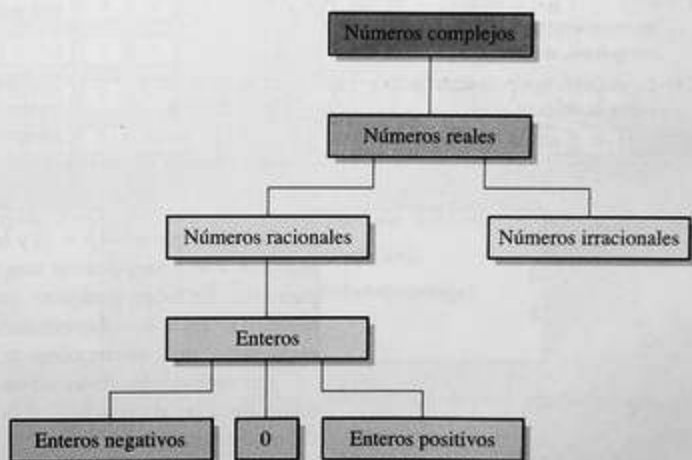
en donde los dígitos 1 y 8 en la representación de $\frac{177}{35}$ se repiten en forma indefinida (a veces se anota $3.2\overline{18}$).

Los números reales que no son racionales son **números irracionales**; las representaciones decimales para estos últimos son siempre *infinitas y no repetitivas*. Un número irracional común, denotado por π , es la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. La notación $\pi \approx 3.1416$ se usa a veces para indicar que π es **aproximadamente igual** a 3.1416.

No existe número *racional* b alguno tal que $b^2 = 2$, en donde b^2 denota a $b \cdot b$; pero sí existe un número *irracional* denotado por $\sqrt{2}$ (la **raíz cuadrada** de 2), tal que $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Todos los números racionales e irracionales forman el sistema de **números reales**. Las relaciones entre los tipos de números que se usan en álgebra se ilustran en el diagrama de la figura 1, donde una línea que enlaza dos rectángulos significa que los números del rectángulo más alto incluyen los de más bajo. Los números complejos (sección 2.4) contienen a todos los números reales.

Figura 1 Tipos de números usados en álgebra



Los números reales son **cerrados respecto de la operación de adición** (denotada por $+$); esto es, a todo par a, b de números reales corresponde exactamente un número real $a + b$, llamado **suma** de a y b . Los números reales también son **cerrados en relación con la multiplicación** (denotada por \cdot); o sea, a todo par a, b de números reales corresponde exactamente un número real $a \cdot b$ (también denotado por ab), denominado **producto** de a y b .

Éstas y otras propiedades importantes de la adición y multiplicación de números reales se incluyen en la siguiente tabla.

Propiedades de los números reales

Terminología	Caso general	Significado
(1) La adición es conmutativa .	$a + b = b + a$	El orden es intrascendente cuando se suman dos números. (El orden de los sumandos no altera la suma.)
(2) La adición es asociativa .	$a + (b + c) = (a + b) + c$	La agrupación es intrascendente cuando se suman tres cifras.
(3) 0 es el neutro aditivo .	$a + 0 = a$	Sumar 0 a cualquier cantidad produce la misma cantidad.
(4) $-a$ es el inverso aditivo , o negativo , de a .	$a + (-a) = 0$	Sumar una cifra y su inverso da 0.
(5) La multiplicación es conmutativa .	$ab = ba$	El orden no tiene importancia al multiplicar dos números. (El orden de los factores no altera el producto.)
(6) La multiplicación es asociativa .	$a(bc) = (ab)c$	La agrupación carece de importancia al multiplicar tres cifras.
(7) 1 es el neutro multiplicativo .	$a \cdot 1 = a$	Multiplicar cualquier número por 1 da el mismo número.
(8) Si $a \neq 0$, $\frac{1}{a}$ es el inverso multiplicativo , o recíproco , de a .	$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$	Multiplicar un número diferente de 0 por su recíproco da 1.
(9) La multiplicación es distributiva sobre la adición.	$a(b + c) = ab + ac$ $(a + b)c = ac + bc$	Multiplicar un número y la suma de dos cifras equivale a multiplicar cada cifra por el número y luego sumar los resultados.

Debido a que $a + (b + c)$ y $(a + b) + c$ siempre son iguales, podemos usar $a + b + c$ para denotar este número real. Utilizamos abc para $a(bc)$ o para $(ab)c$. En forma semejante, cuando se suman o multiplican cuatro o más números reales a, b, c, d , escribimos $a + b + c + d$ para la suma y $abcd$ para el producto, sin importar cómo se agrupen o intercambien los números.

Las propiedades distributivas son útiles para hallar productos de diferentes tipos de expresiones en que aparecen sumas. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

EJEMPLO 1 Uso de propiedades distributivas

Si p, q, r y s denotan números reales, muestre que

$$(p + q)(r + s) = pr + ps + qr + qs.$$

SOLUCIÓN Utilizamos ambas propiedades distributivas incluidas en (9) de la tabla anterior:

$$\begin{aligned}
 (p + q)(r + s) &= p(r + s) + q(r + s) && \text{segunda propiedad distributiva, con } c = r + s \\
 &= (pr + ps) + (qr + qs) && \text{primera propiedad distributiva} \\
 &= pr + ps + qr + qs && \text{eliminar paréntesis.}
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Almacenamiento de valores y evaluación de expresiones

Evalúa el lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación del ejemplo 1 para

$$p = 5, \quad q = 3, \quad r = -6 \quad \text{y} \quad s = 7.$$

SOLUCIÓN**TI-83 Plus**

Almacenar los valores en P, Q, R y S.

5 **STO** \rightarrow **ALPHA** **P** **ALPHA** **:**
 3 **STO** \rightarrow **ALPHA** **Q** **ALPHA** **:**
 (-) 6 **STO** \rightarrow **ALPHA** **R** **ALPHA** **:**
 7 **STO** \rightarrow **ALPHA** **S** **ENTER**

Evaluar el lado izquierdo (LI).

(**ALPHA** **P** + **ALPHA** **Q**)
 (**ALPHA** **R** + **ALPHA** **S**)
ENTER

Evaluar el lado derecho (LD).

ALPHA **P** **ALPHA** **R** +
ALPHA **P** **ALPHA** **S** +
ALPHA **Q** **ALPHA** **R** +
ALPHA **Q** **ALPHA** **S** **ENTER**

5+P:3+Q: -6+R:7+S	
(P+Q)(R+S)	7
PR+PS+QR+QS	8
	8

TI-86

5 **STO** \rightarrow **P** **2nd** **:**
ALPHA 3 **STO** \rightarrow **Q** **2nd** **:**
ALPHA (-) 6 **STO** \rightarrow **R** **2nd** **:**
ALPHA 7 **STO** \rightarrow **S** **ENTER**

(**ALPHA** **P** + **ALPHA** **Q**)
 (**ALPHA** **R** + **ALPHA** **S**)
ENTER

ALPHA **P** \times **ALPHA** **R** +
ALPHA **P** \times **ALPHA** **S** +
ALPHA **Q** \times **ALPHA** **R** +
ALPHA **Q** \times **ALPHA** **S** **ENTER**

5+P:3+Q: -6+R:7+S	
(P+Q)(R+S)	7
P+R+P+S+Q+R+Q+S	8
	8

Ambos lados son iguales a 8, lo que otorga credibilidad a nuestro resultado, aunque no demuestra que es correcto.

Las siguientes son propiedades básicas de una igualdad.

Propiedades de igualdad

Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces

(1) $a + c = b + c.$

(2) $ac = bc.$

Las propiedades 1 y 2 indican que el mismo número se puede sumar a ambos lados de una igualdad, y que ambos lados de la igualdad se pueden

multiplicar por el mismo número. Usaremos estas propiedades ampliamente a todo lo largo del texto para ayudarnos a resolver las ecuaciones. Se puede demostrar este resultado:

Productos donde interviene el cero

(1) $a \cdot 0 = 0$ para todo número real a .

(2) Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o bien $b = 0$.

Cuando usamos la expresión *o bien* como en (2), queremos decir que *al menos* uno de los factores a o b es 0. Más adelante nos referiremos a (2) como el **teorema del factor cero**.

En la siguiente tabla se expresan algunas propiedades de los negativos.

Propiedades de los negativos

Propiedad	Ejemplo
(1) $-(-a) = a$	$-(-3) = 3$
(2) $(-a)b = -(ab) = a(-b)$	$(-2)3 = -(2 \cdot 3) = 2(-3)$
(3) $(-a)(-b) = ab$	$(-2)(-3) = 2 \cdot 3$
(4) $(-1)a = -a$	$(-1)3 = -3$

El recíproco $\frac{1}{a}$ de un número real a diferente de cero se denota muchas veces con a^{-1} , como en la siguiente tabla.

Notación para recíprocos

Definición	Ejemplos
Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} = \frac{1}{a}$.	$2^{-1} = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$

Notarás que si $a \neq 0$, entonces

$$a \cdot a^{-1} = a \left(\frac{1}{a} \right) = 1.$$

Recíprocos

TI-83 Plus

2 **STO>** **ALPHA** **A** **ENTER****x⁻¹** **ENTER****ALPHA** **A** **x⁻¹** **ENTER**

2→A	2
Ans ⁻¹	.5
A ⁻¹	.5

TI-86

2 **STO>** **A** **ENTER****2nd** **x⁻¹** **ENTER****ALPHA** **A** **2nd** **x⁻¹** **ENTER**

2→A	2
Ans ⁻¹	.5
A ⁻¹	.5

A partir de cualquiera de las figuras observamos dos formas para calcular los recíprocos:

(1) Simplemente oprimiendo **x⁻¹**, obtenemos el recíproco de la última respuesta, que se almacena en **ANS**. (2) Podemos teclear una variable (o simplemente un número) y luego encontrar su recíproco.

Las operaciones de **sustracción** (**-**) y **división** (**÷**) se definen como sigue.

Sustracción y división

Definición	Significado	Ejemplo
$a - b = a + (-b)$	Para restar un número de otro, se suma el negativo.	$3 - 7 = 3 + (-7)$
$a \div b = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$ $= a \cdot b^{-1}; b \neq 0$	Para dividir un número de otro diferente de cero, se multiplica por el recíproco.	$3 \div 7 = 3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)$ $= 3 \cdot 7^{-1}$

Sustracción y negativos

TI-83 Plus

5 **-** 3 **ENTER**5 **+** **(-)** 3 **ENTER**5 **(-)** 3 **ENTER**

5-3	2
5+ -3	2
5-3	

TI-86

5 **-** 3 **ENTER**5 **+** **(-)** 3 **ENTER**5 **(-)** 3 **ENTER**

5-3	2
5+ -3	2
5-3	-15

(continúa)

Al ejecutar la última proposición se produce un error SYNTAX en TI-83 Plus y un producto en TI-86. Usa la tecla menos $\boxed{-}$ para realizar la operación de sustracción y, para los números negativos, usa la tecla de negativo $\boxed{(-)}$. De ahora en adelante, a menudo omitiremos la tecla de negativo y simplemente escribiremos -3 .

El símbolo a/b o bien $\frac{a}{b}$ se utiliza con frecuencia en lugar de $a \div b$ y nos referimos a él como el **cociente de a entre b** o la **fracción de a sobre b** . Los números a y b se llaman **numerador** y **denominador**, respectivamente, de a/b . Puesto que el 0 carece de inverso multiplicativo, a/b no está definido para $b = 0$; esto es, la *división entre cero no está definida*. Es por esta razón que los números reales no son cerrados en relación con la división. Advertirás que

$$1 \div b = \frac{1}{b} = b^{-1} \quad \text{si } b \neq 0.$$

Se pueden establecer las siguientes propiedades de los cocientes, en donde todos los denominadores son números reales distintos de cero.

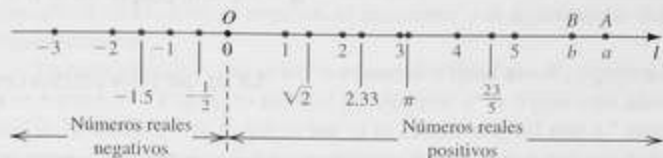
Propiedades de los cocientes

Propiedad	Ejemplo
(1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$	$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ porque $2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$
(2) $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5}$
(3) $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{2}{-5} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$
(4) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{2}{5} + \frac{9}{5} = \frac{2+9}{5} = \frac{11}{5}$
(5) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{26}{15}$
(6) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$
(7) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2}{5} \div \frac{7}{3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$

Los números reales pueden representarse por puntos sobre una recta l , de modo que a cada número real a corresponda exactamente un punto sobre l y a cada punto P sobre la recta l corresponda un número real; esto se denomina **correspondencia biunívoca**. En primer lugar se escoge un punto arbitrario O , llamado **origen**, y se asocia con el número real 0. Los puntos

asociados con los enteros se establecen al marcar segmentos de recta sucesivos de igual longitud a cada lado de O (figura 2). El punto correspondiente a un número racional, como $\frac{23}{5}$, se obtiene subdividiendo estos segmentos de recta. Los puntos relacionados con ciertos números irracionales, como $\sqrt{2}$, se pueden encontrar por construcción geométrica (ejercicio 45).

Figura 2



El número a asociado al punto A sobre l se llama **coordenada** de A ; estas coordenadas se conocen como **sistema coordenado** y l se denomina **línea coordenada** o **recta numérica** o **recta real**. Se puede asignar una dirección a l considerando la **dirección positiva** a la derecha y la **dirección negativa** a la izquierda. La dirección positiva se identifica por la flecha en el extremo de l (figura 2).

Los números que corresponden a puntos del lado derecho de O en la figura 2 son **números reales positivos**, y los que corresponden a puntos a la izquierda de O son **números reales negativos**. El número real 0 no es ni positivo ni negativo.

Advierta la diferencia entre un número real negativo y el *negativo* de un número real. En particular, el negativo de un número real a puede ser positivo; por ejemplo, si a es negativo, digamos $a = -3$, entonces el negativo de a es $-a = -(-3) = 3$, que es positivo. En general, tenemos las siguientes relaciones.

**Relaciones entre a
y $-a$**

- (1) Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo.
- (2) Si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.

En la tabla adjunta definimos las nociones de **mayor que** y **menor que** para números reales a y b . Los símbolos $>$ y $<$ son **signos de desigualdad**, y las expresiones $a > b$ y $a < b$ se conocen como **desigualdades**.

Mayor que o menor que

Notación	Definición	Terminología
$a > b$	$a - b$ es positivo	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ es negativo	a es menor que b

Si los puntos A y B de una recta coordenada tienen coordenadas a y b , respectivamente, entonces $a > b$ equivale a la expresión “ A está a la derecha de B ”, mientras que $a < b$ equivale a “ A está a la izquierda de B ”.

ILUSTRACIÓN Mayor que ($>$) y menor que ($<$)

- $5 > 3$, porque $5 - 3 = 2$ es positivo.
- $-6 < -2$, porque $-6 - (-2) = -6 + 2 = -4$ es negativo.
- $\frac{1}{3} > 0.33$, porque $\frac{1}{3} - 0.33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$ es positivo.
- $7 > 0$, porque $7 - 0 = 7$ es positivo.
- $-4 < 0$, porque $-4 - 0 = -4$ es negativo.

La ley que sigue permite comparar, u *ordenar*, dos números reales.

Ley de la tricotomía

Si a y b son números reales, entonces exactamente una de las expresiones siguientes es verdadera:

$$a = b, \quad a > b, \text{ o bien } a < b.$$

TI-83 Plus

Prueba de desigualdades y la ley de la tricotomía

5 [2nd] [TEST] [3] 3 [ENTER]
 5 [2nd] [TEST] [5] 3 [ENTER]
 5 [2nd] [TEST] [1] 3 [ENTER]

```

5>3      1
5<3      0
5=3      0
  
```

TI-86

5 [2nd] [TEST] [> (F3)] 3 [ENTER]
 5 [2nd] [TEST] [< (F2)] 3 [ENTER]
 5 [2nd] [TEST] [= (F1)] 3 [ENTER]

```

5>3      1
5<3      0
5==3     0
  
```

Los resultados indican que "1" representa *verdadera* y "0" *falsa*. Por la ley de la tricotomía, sólo una de las afirmaciones anteriores puede ser cierta. Como se muestra arriba, para elecciones de menú en TI-83 Plus usaremos la notación n y en TI-86 usaremos symbol (Fn) . Notará que en TI-86 se usa el símbolo $=$ para indicar un operador relacional (prueba de igualdades), ya que para un operador de asignación (almacenamiento de valores) se utiliza $=$.

Consideramos que el **signo** de un número real es positivo si la cifra es positiva, o negativo si es negativa. Dos números reales tienen *el mismo signo* si ambos son positivos o ambos son negativos. Los números tienen *signos opuestos* si uno es positivo y el otro negativo. Se pueden demostrar los siguientes resultados respecto de los signos de productos y cocientes de dos números reales a y b a partir de propiedades de los negativos y los cocientes.

Leyes de los signos

- (1) Si a y b tienen el mismo signo, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son positivos.
- (2) Si a y b tienen signos opuestos, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son negativos.

Los **recíprocos*** de las leyes de los signos también son verdaderos; por ejemplo, si un cociente es negativo, el numerador y el denominador tienen signos opuestos.

La notación $a \geq b$, que se lee " a es mayor o igual que b ", significa que $a > b$ o que $a = b$ (pero no ambos); por ejemplo, $a^2 \geq 0$ para todo número real a . El símbolo $a \leq b$, que se lee " a es menor o igual que b ", significa que $a < b$ o que $a = b$. Las expresiones de la forma $a \geq b$ y $a \leq b$ reciben el nombre de **desigualdades no estrictas**, porque a puede ser igual a b . Lo mismo que en el caso del símbolo de igualdad, podemos negar cualquier símbolo de desigualdad si lo tachamos con una diagonal: es decir, \nless significa no es mayor que.

Una expresión del tipo $a < b < c$ se denomina **desigualdad continua** y quiere decir que $a < b$ y que $b < c$; se dice que " b está entre a y c ". Del mismo modo, la expresión $c > b > a$ significa que $c > b$ y que $b > a$.

ILUSTRACIÓN Ordenamiento de tres números reales

$$\blacksquare 1 < 5 < \frac{11}{2} \quad \blacksquare -4 < \frac{2}{3} < \sqrt{2} \quad \blacksquare 3 > -6 > -10$$

Hay otros tipos de desigualdades; por ejemplo, $a < b \leq c$ quiere decir que $a < b$ y que $b \leq c$. Del mismo modo, $a \leq b < c$ significa que $a \leq b$ y que $b < c$. Por último, $a \leq b \leq c$ quiere decir que $a \leq b$ y que $b \leq c$.



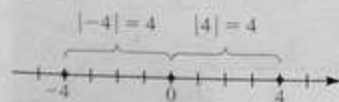
EJEMPLO 3 Determinación del signo de un número real

Si $x > 0$ y $y < 0$, determina el signo de $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

SOLUCIÓN Como x es un número positivo y y es un número negativo, x y y tienen signos opuestos. Así, x/y y y/x son ambos negativos. La suma de dos números negativos es un número negativo, de modo que

el signo de $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ es negativo.

Figura 3



Si a es un entero, entonces es la coordenada de algún punto A de una recta coordenada, y el símbolo $|a|$ denota el número de unidades entre A y el origen, sin tomar en cuenta la dirección. El número no negativo $|a|$ se conoce como **valor absoluto de a** . En la figura 3, vemos que para el punto con coordenada -4 tenemos $|-4| = 4$. De igual forma, $|4| = 4$. En general, si a es negativo, su signo se cambia para encontrar $|a|$; si a es no negativo, entonces $|a| = a$. La próxima definición amplía este concepto a todo número.

*Si un teorema está escrito en la forma "si P , entonces Q ", donde P y Q son expresiones matemáticas llamadas *hipótesis* y *conclusión*, respectivamente, entonces el **recíproco** del teorema tiene la forma "si Q , entonces P ". Si el teorema y su recíproco son verdaderos, muchas veces se escribe " P si y sólo si Q " (lo cual se escribe P sii Q).

Definición de valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real a , denotado por $|a|$, se define como sigue.

- (1) Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$.
 (2) Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$.

Dado que a es negativo en la parte (2) de la definición, $-a$ representa un número real *positivo*. Algunos casos particulares de esta definición están dados en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN Notación de valor absoluto $|a|$

- $|3| = 3$, porque $3 > 0$.
- $|-3| = -(-3)$, porque $-3 < 0$. Así, $|-3| = 3$.
- $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$, porque $2 - \sqrt{2} > 0$.
- $|\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2)$, porque $\sqrt{2} - 2 < 0$.
 Así, $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$.

En la ilustración anterior, $|3| = |-3|$ y $|2 - \sqrt{2}| = |\sqrt{2} - 2|$. En general, tenemos:

$$|a| = |-a|, \text{ para todo número real } a$$

Valor absoluto**TI-83 Plus**

MATH \triangleright 1 -3 $)$ ENTER

576 $\text{STO} \rightarrow$ ALPHA A ALPHA $:$

927 $\text{STO} \rightarrow$ ALPHA B ENTER

MATH \triangleright 1 ALPHA

A $-$ ALPHA B $)$ ENTER

```
abs(-3)      3
576+A: 927+B  927
abs(A-B)     351
```

TI-86

2nd MATH NUM(F1) abs(F5) -3

ENTER

ALPHA A ALPHA $=$ 576 2nd $:$

ALPHA B ALPHA $=$ 927 ENTER

2nd MATH NUM(F1) abs(F5) $($

ALPHA A $-$ ALPHA B $)$

ENTER

```
abs -3      3
A=576:B=927
abs (A-B)   Done
           351
```

Advierte que en TI-86 ALPHA A ALPHA $=$ 576 y 576 $\text{STO} \rightarrow$ A son equivalentes.

EJEMPLO 4 Supresión de un símbolo de valor absoluto

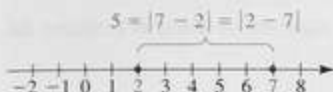
Si $x < 1$, reescribe $|x - 1|$ sin usar el símbolo de valor absoluto.

SOLUCIÓN Si $x < 1$, entonces $x - 1 < 0$; esto es, $x - 1$ es negativo, por lo tanto, por la parte (2) de la definición de valor absoluto,

$$|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1 = 1 - x.$$

Usaremos el concepto de valor absoluto para definir la distancia entre dos puntos de una recta coordenada. Comencemos por observar que la distancia entre los puntos con coordenadas 2 y 7 (figura 4) es igual a 5 unidades. Esta distancia es la diferencia obtenida al restar la coordenada menor (a la izquierda) de la mayor (a la derecha) ($7 - 2 = 5$). Si empleamos valores absolutos, entonces, puesto que $|7 - 2| = |2 - 7|$, no es necesario que nos preocupemos por el orden de la resta. Esto motiva la siguiente definición.

Figura 4



Definición de la distancia entre puntos sobre una recta coordenada

Sean a y b las coordenadas de dos puntos A y B , respectivamente, sobre una recta coordenada. La **distancia entre A y B** , denotada por $d(A, B)$, se define como

$$d(A, B) = |b - a|.$$

El número $d(A, B)$ es la longitud del segmento de recta AB .

Como $d(B, A) = |a - b|$ y $|b - a| = |a - b|$, vemos que

$$d(A, B) = d(B, A).$$

Observa que la distancia entre el origen O y el punto A es

$$d(O, A) = |a - 0| = |a|,$$

lo cual coincide con la interpretación geométrica de valor absoluto ilustrada en la figura 4. La fórmula $d(A, B) = |b - a|$ es válida, cualesquiera que sean los signos de a y b , como se ilustra en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 5** Determinación de distancias entre puntos

Sean A, B, C y D puntos con coordenadas $-5, -3, 1$ y 6 , respectivamente, en una recta coordenada, como se muestra en la figura 5. Encuentra $d(A, B)$, $d(C, B)$, $d(O, A)$ y $d(C, D)$.

SOLUCIÓN Por la definición de la distancia entre puntos de una recta coordenada, se obtienen las distancias:

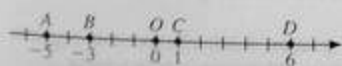
$$d(A, B) = |-3 - (-5)| = |-3 + 5| = |2| = 2$$

$$d(C, B) = |-3 - 1| = |-4| = 4$$

$$d(O, A) = |-5 - 0| = |-5| = 5$$

$$d(C, D) = |6 - 1| = |5| = 5$$

Figura 5



El concepto de valor absoluto tiene otros usos, además de hallar distancias entre puntos; lo utilizamos siempre que estemos interesados en la magnitud o valor numérico de un número real, cualquiera que sea su signo.

En la siguiente sección estudiaremos la *notación exponencial* a^n , donde a es un número real (denominado *base*) y n es un entero (llamado *exponente*). En particular, para la base 10 tenemos

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 10 \cdot 10 = 100, \quad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000,$$

y así sucesivamente. Para exponentes negativos se utiliza el recíproco del exponente positivo correspondiente:

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}, \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}, \quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

Esta notación permite escribir cualquier representación decimal finita de un número real como una suma del tipo siguiente:

$$\begin{aligned} 437.56 &= 4(100) + 3(10) + 7(1) + 5\left(\frac{1}{10}\right) + 6\left(\frac{1}{100}\right) \\ &= 4(10^2) + 3(10^1) + 7(10^0) + 5(10^{-1}) + 6(10^{-2}) \end{aligned}$$

En ciencias a menudo es necesario trabajar con números muy grandes o muy pequeños, y comparar las magnitudes relativas de cantidades muy grandes o muy pequeñas. Por lo general, se representa un número positivo grande o pequeño a en *notación científica*, con el símbolo \times para denotar multiplicación.

Notación científica

$a = c \times 10^n$, donde $1 \leq c < 10$ y n es un entero.

La distancia que recorre un rayo de luz en un año es aproximadamente 5 900 000 000 000 millas. Este número se puede escribir en notación científica como 5.9×10^{12} , donde el exponente positivo 12 indica que el punto decimal debe moverse 12 lugares a la *derecha*; la notación opera igualmente bien para cifras pequeñas. El peso de una molécula de oxígeno se estima en

0.000 000 000 000 000 000 000 053 gramos,

o, en notación científica, 5.3×10^{-23} gramos, donde el exponente negativo indica que el punto decimal ha de moverse 23 lugares a la *izquierda*.

ILUSTRACIÓN Notación científica

$$\blacksquare 513 = 5.13 \times 10^2$$

$$\blacksquare 93\,000\,000 = 9.3 \times 10^7$$

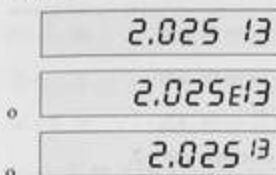
$$\blacksquare 0.000\,000\,000\,43 = 4.3 \times 10^{-10}$$

$$\blacksquare 7.3 = 7.3 \times 10^0$$

$$\blacksquare 20\,700 = 2.07 \times 10^4$$

$$\blacksquare 0.000\,648 = 6.48 \times 10^{-4}$$

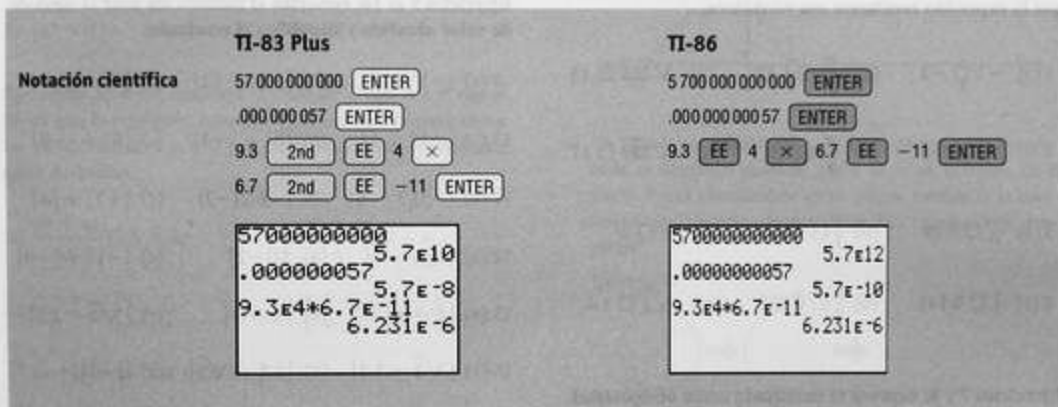
Figura 6



Muchas calculadoras usan la notación científica en sus pantallas; para el número $c \times 10^n$, se suprime el 10 y el exponente se muestra precedido por la letra E; por ejemplo, a fin de hallar $(4\,500\,000)^2$ en una calculadora científica, podemos teclear el entero 4 500 000 y presionar la tecla x^2 (o elevar al cuadrado), con lo cual obtenemos un resultado semejante al de la figura 6. Podríamos traducir esto como 2.025×10^{13} . Por tanto,

$$(4\,500\,000)^2 = 20\,250\,000\,000\,000.$$

Las calculadoras también podrían utilizar la notación científica en el teclado de números; por lo general, el manual del usuario contiene detalles específicos.



Antes de concluir esta sección, consideraremos brevemente lo relativo al redondeo de resultados. A menudo, en problemas prácticos aparecen números provenientes de diversos tipos de mediciones y, por tanto, son *aproximaciones* a los valores exactos. Dichas respuestas deben redondearse porque el resultado final de un cálculo no puede ser más preciso que los datos que se hayan usado; por ejemplo, si el largo y el ancho de un rectángulo se miden con una precisión de dos lugares decimales, no es posible esperar una precisión de más de dos lugares decimales en el valor calculado del área del rectángulo. Ahora bien, para trabajos puramente *matemáticos*, si se dan los valores de longitud y ancho de un rectángulo supondremos que las dimensiones son *exactas* y no precisaremos redondeo alguno.

Si un número a se escribe en forma científica como $a = c \times 10^k$ para $1 \leq c < 10$ y si c se redondea a k lugares decimales, decimos que a es preciso (o ha sido redondeado) a $k + 1$ cifras significativas o dígitos. Por ejemplo, 37.2638 redondeado a 5 cifras significativas es 3.7264×10^1 , (es decir, 37.264); a 3 cifras significativas, 3.73×10^1 (o sea, 37.3), y a una cifra significativa, 4×10^1 (esto es, 40).

1.1 Ejercicios

Ejercicios 1 y 2: si $x < 0$ y $y > 0$, determina el signo del número real.

1 (a) xy (b) x^2y (c) $\frac{x}{y} + x$ (d) $y - x$

2 (a) $\frac{x}{y}$ (b) xy^2 (c) $\frac{x-y}{xy}$ (d) $y(y-x)$

Ejercicios 3 al 6: sustituye el símbolo \square con $<$, $>$, o $=$ para que la expresión resultante sea verdadera.

3 (a) $-7 \square -4$ (b) $\frac{\pi}{2} \square 1.57$ (c) $\sqrt{225} \square 15$

4 (a) $-3 \square -5$ (b) $\frac{\pi}{4} \square 0.8$ (c) $\sqrt{289} \square 17$

5 (a) $\frac{1}{11} \square 0.09$ (b) $\frac{2}{3} \square 0.6666$ (c) $\frac{22}{7} \square \pi$

6 (a) $\frac{1}{7} \square 0.143$ (b) $\frac{5}{6} \square 0.833$ (c) $\sqrt{2} \square 1.4$

Ejercicios 7 y 8: expresa el enunciado como desigualdad.

7 (a) x es negativo.

(b) y es no negativo.

(c) q es menor o igual que π .

(d) d está entre 4 y 2.

(e) t no es menor que 5.

(f) El negativo de z no es mayor que 3.

(g) El cociente de p y q es a lo sumo 7.

(h) El recíproco de w es al menos 9.

(i) El valor absoluto de x es mayor que 7.

8 (a) b es positivo.

(b) s es no positivo.

(c) w es mayor o igual que -4 .

(d) c está entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$.

(e) p no es mayor que -2 .

(f) El negativo de m no es menor que -2 .

(g) El cociente de r y s es al menos $\frac{1}{3}$.

(h) El recíproco de f es a lo sumo 14.

(i) El valor absoluto de x es menor que 4.

Ejercicios 9 al 14: reescribe el número sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifica el resultado.

9 (a) $|-3 - 2|$ (b) $|-5| - |2|$ (c) $|7| + |-4|$

10 (a) $|-11 + 1|$ (b) $|6| - |-3|$ (c) $|8| + |-9|$

11 (a) $(-5)|3 - 6|$ (b) $|-6|/(-2)$ (c) $|-7| + |4|$

12 (a) $(4)|6 - 7|$ (b) $5/|-2|$ (c) $|-1| + |-9|$

13 (a) $|4 - \pi|$ (b) $|\pi - 4|$ (c) $|\sqrt{2} - 1.5|$

14 (a) $|\sqrt{3} - 1.7|$ (b) $|1.7 - \sqrt{3}|$ (c) $|\frac{1}{5} - \frac{1}{3}|$

Ejercicios 15 al 18: los números dados son coordenadas de los puntos A , B y C , respectivamente, sobre una recta coordenada. Encuentra la distancia.

(a) $d(A, B)$ (b) $d(B, C)$

(c) $d(C, B)$ (d) $d(A, C)$

15 3, 7, -5 16 -6 , -2 , 4

17 -9 , 1, 10 18 8, -4 , -1

Ejercicios del 19 al 24: los dos números dados son coordenadas de los puntos A y B , respectivamente, sobre una recta coordenada. Expresa el enunciado indicado como desigualdad usando el símbolo de valor absoluto.

19 x , 7; $d(A, B)$ es menor que 5

20 x , $-\sqrt{2}$; $d(A, B)$ es mayor que 1

- 21 $x, -3$; $d(A, B)$ es al menos 8
 22 $x, -4$; $d(A, B)$ es a lo sumo 2
 23 $4, x$; $d(A, B)$ no es mayor que 3
 24 $-2, x$; $d(A, B)$ no es menor que 2

Ejercicios 25 al 32: reescribe la expresión sin utilizar el símbolo de valor absoluto y simplifica el resultado.

- 25 $|3 + x|$ si $x < -3$ 26 $|5 - x|$ si $x > 5$
 27 $|2 - x|$ si $x < 2$ 28 $|7 + x|$ si $x \geq -7$
 29 $|a - b|$ si $a < b$ 30 $|a - b|$ si $a > b$
 31 $|x^2 + 4|$ 32 $|-x^2 - 1|$

Ejercicios 33 al 40: sustituye el símbolo \square con $=$ o \neq con el fin de que la expresión resultante sea verdadera para todos los números reales a, b, c y d , siempre que las expresiones estén definidas.

- 33 $\frac{ab+ac}{a} \square b+ac$ 34 $\frac{ab+ac}{a} \square b+c$
 35 $\frac{b+c}{a} \square \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$ 36 $\frac{a+c}{b+d} \square \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$
 37 $(a+b)+c \square a+(b+c)$
 38 $(a-b)-c \square a-(b-c)$
 39 $\frac{a-b}{b-a} \square -1$ 40 $-(a+b) \square -a+b$

Ejercicios 41 y 42: aproxima la expresión de número real a cuatro lugares decimales.

- 41 (a) $|3.2^2 - \sqrt{3.15}|$
 (b) $\sqrt{(15.6 - 1.5)^2 + (4.3 - 5.4)^2}$
 42 (a) $\frac{3.42 - 1.29}{5.83 + 2.64}$
 (b) π^3

Ejercicios 43 y 44: aproxima la expresión de número real. Expresa la respuesta en notación científica precisa a cuatro cifras significativas.

- 43 (a) $\frac{1.2 \times 10^2}{3.1 \times 10^2 + 1.52 \times 10^3}$

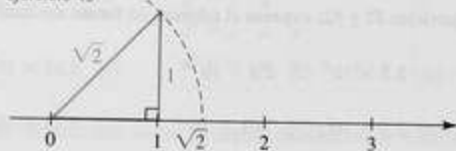
(b) $(1.23 \times 10^{-4}) + \sqrt{4.5 \times 10^3}$

44 (a) $\sqrt{3.45 - 1.2 \times 10^4} + 10^3$

(b) $(1.791 \times 10^2) \times (9.84 \times 10^3)$

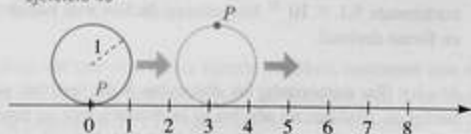
- 45 El punto sobre una recta coordenada correspondiente a $\sqrt{2}$ se puede hallar dibujando un triángulo rectángulo con lados de longitud 1, como se muestra en la figura. Encuentra los puntos que corresponden a $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$, respectivamente. (Sugerencia: usa el teorema de Pitágoras.)

Ejercicio 45



- 46 Un círculo de radio 1 gira a lo largo de una recta coordenada en dirección positiva, según se ve en la figura. Si el punto P está inicialmente en el origen, encuentra la coordenada de P después de una, dos y diez revoluciones completas.

Ejercicio 46



- 47 Los antiguos griegos fueron los primeros en demostrar las propiedades de los números reales con pruebas geométricas. Con objeto de establecer la propiedad distributiva $a(b+c) = ab+ac$ para los números reales positivos a, b y c , halla el área del rectángulo que se presenta de dos modos en la figura.

Ejercicio 47



- 48 Las aproximaciones racionales a raíces cuadradas se pueden hallar con una fórmula descubierta por los antiguos babilonios. Sea x_1 la primera aproximación racional para \sqrt{n} . Si hacemos

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{n}{x_1} \right),$$

entonces x_2 será una aproximación mejor para \sqrt{n} , y podemos repetir el cálculo con x_2 en lugar de x_1 . Comienza con $x_1 = \frac{3}{2}$, y encuentra las siguientes dos aproximaciones racionales para $\sqrt{2}$.

Ejercicios 49 y 50: expresa el número en notación científica.

49 (a) 427 000 (b) 0.000 000 098 (c) 810 000 000

50 (a) 85 200 (b) 0.000 005 5 (c) 24 900 000

Ejercicios 51 y 52: expresa el número en forma decimal.

51 (a) 8.3×10^3 (b) 2.9×10^{-12} (c) 5.63×10^8

52 (a) 2.3×10^7 (b) 7.01×10^{-9} (c) 1.23×10^{10}

53 Masa de un átomo de hidrógeno La masa de un átomo de hidrógeno es aproximadamente

0.000 000 000 000 000 000 000 001 7 gramos.

Expresa este número con notación científica.

54 Masa de un electrón La masa de un electrón es aproximadamente 9.1×10^{-31} kilogramos. Escribe este número en forma decimal.

55 Año luz En astronomía, las distancias a las estrellas se miden en años luz; un año luz es la distancia que un rayo de luz recorre en un año. Si la velocidad de la luz es de unas 186 000 millas por segundo, calcula el número de millas recorridas en un año luz.

56 Vía Láctea

(a) Los astrónomos han calculado que nuestra galaxia contiene 100 millones de estrellas. Expresa este número en notación científica.

(b) El diámetro d de la galaxia se estima en 100 000 años luz. Expresa d en millas (consulta el ejercicio 55).

57 Número de Avogadro La cantidad de átomos de hidrógeno en un mol es el número de Avogadro, 6.02×10^{23} . Si un mol del gas tiene una masa de 1.01 gramos, calcula la masa de un átomo de hidrógeno.

58 Población de peces La dinámica poblacional de muchos peces se caracteriza por tasas de fertilidad en extremo al-

tas en adultos y tasas de supervivencia muy bajas en jóvenes. Un lenguaje desarrollado puede poner hasta 2.5 millones de huevos, pero sólo 0.00035% de su descendencia rebasará los tres años de edad. Utiliza la notación científica para calcular el número de descendientes que llega a los tres años.

59 Cuadros en una película La película más larga que se ha hecho fue filmada en Inglaterra en 1970 y dura nada menos que 48 horas. Supón que la velocidad de la película es de 24 cuadros por segundo, calcula el número total de cuadros en esta película y expresa tu respuesta en notación científica.

60 Números primos grandes El número $2^{44,497} - 1$ es primo. En la época en que se determinó dicha característica, una de las computadoras más rápidas del mundo trabajó durante unos 60 días para comprobarla; esta computadora podía realizar 2×10^{11} cálculos por segundo. Con notación científica, estima el número de cálculos necesarios para este cómputo. (En fecha más reciente en 1992, $2^{756839} - 1$, se encontró un número primo que contiene 227832 dígitos.)

61 Presión de un tornado Cuando un tornado pasa cerca de un edificio, hay una rápida caída de la presión exterior y la presión interior no tiene tiempo para cambiar. La diferencia resultante es capaz de ocasionar una presión, hacia el exterior, de 1.4 lb/pulg² en las paredes y en el techo del inmueble.

(a) Calcula la fuerza en libras ejercida en un pie cuadrado de una pared.

(b) Calcula las toneladas de fuerza ejercida en una pared que mide 8 pies de alto y 40 pies de ancho.

62 Población de ganado Un ganadero tiene 750 cabezas de ganado vacuno, entre las cuales hay 400 adultos (de 2 años de edad o más), 150 animales añejos y 200 becerros. Se conoce la siguiente información acerca de esta especie en particular. Cada primavera, una hembra adulta da a luz un solo becerro y 75% de esos becerros sobrevive al primer año. Los porcentajes de supervivencia anual para los añejos y los adultos son de 80 y 90% respectivamente. La relación machos/hembras es de uno en todos los grupos de edades. Estima cuál es la población de cada grupo de edad

(a) la próxima primavera (b) la primavera pasada

1.2

Exponentes y radicales

Si n es un entero positivo, la notación exponencial a^n , que se define en la tabla adjunta representa el producto del número real a multiplicado n veces por sí mismo. La expresión a^n se lee **a a la n -ésima potencia** o, simplemente, **a a la n** . El entero positivo n se llama **exponente**, y el número real a , **base**.

Notación exponencial

Caso general (n es cualquier entero positivo)	Casos especiales
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores de } a}$	$a^1 = a$ $a^2 = a \cdot a$ $a^3 = a \cdot a \cdot a$ $a^6 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

La próxima ilustración contiene varios ejemplos numéricos de notación exponencial.

ILUSTRACIÓN Notación exponencial a^n

- $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$
- $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$
- $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{81}$

Es importante observar que si n es un entero positivo, entonces una expresión como $3a^n$ significa $3(a^n)$, pero *no* $(3a)^n$. El número real 3 se llama **coeficiente** de a^n en la expresión $3a^n$. De igual forma, $-3a^n$ significa $(-3)a^n$, pero *no* $(-3a)^n$.

ILUSTRACIÓN Notación ca^n

- $5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$
- $-5 \cdot 2^3 = -5 \cdot 8 = -40$
- $-2^4 = -(2^4) = -16$
- $3(-2)^3 = 3(-2)(-2)(-2) = 3(-8) = -24$

TI-83 Plus y TI-86

Notación exponencial

($-$ 3) \wedge \wedge ENTER
 -3 \wedge ENTER
 (1 \div 2) \wedge 5 ENTER

$(-3)^2$ 9
 -3^2 -9
 $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \rightarrow (1/2)^5$.03125

Observa que la expresión en el segundo renglón, -3^2 , equivale a $-1 \cdot 3^2$.

Ahora ampliamos la definición de a^n a exponentes no positivos.

Exponentes cero y negativo (no positivo)

Definición ($a \neq 0$)	Ejemplos
$a^0 = 1$	$3^0 = 1, \quad (-\sqrt{2})^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$5^{-3} = \frac{1}{5^3}, \quad (-3)^{-5} = \frac{1}{(-3)^5}$

Si m y n son enteros positivos, entonces

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_m \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_n$$

m factores de a n factores de a

En vista de que el número total de factores de a a la derecha es $m+n$, esta expresión es igual a a^{m+n} ; es decir,

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Es posible ampliar esta fórmula a $m \leq 0$ o $n \leq 0$ con las definiciones del exponente cero y exponentes negativos, lo cual dará la ley 1 indicada en la siguiente tabla.

Con objeto de probar la ley 2, para m y n positivos anotamos:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \cdots \cdot a^m}_n$$

n factores de a^m

y contamos el número de veces que a aparece como factor del lado derecho. Dado que $a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$, donde a aparece m veces, como factor, y en virtud de que el número de tales grupos de m factores es n , el número total de factores de a es $m \cdot n$, por tanto,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Los casos $m \leq 0$ y $n \leq 0$ se pueden demostrar con la definición de exponentes no positivos. Las tres leyes restantes se establecen de modo semejante contando factores. En las leyes 4 y 5 suponemos que los denominadores no son 0.

Leyes de exponentes para los números reales a y b y los enteros m y n

Ley	Ejemplo
(1) $a^m a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 128$
(2) $(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$
(3) $(ab)^n = a^n b^n$	$(20)^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3 = 8 \cdot 1000 = 8000$
(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$
(5) (a) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
(b) $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	$\frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^{5-3}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Por lo general, se usa 5(a) si $m > n$ y 5(b) si $m < n$.

Las leyes de los exponentes pueden generalizarse para obtener reglas como $(abc)^n = a^n b^n c^n$ y $a^m a^n a^p = a^{m+n+p}$. Otros ejemplos de las leyes de los exponentes se dan en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN Leyes de los exponentes

$$\blacksquare x^5 x^6 x^2 = x^{5+6+2} = x^{13}$$

$$\blacksquare (y^5)^7 = y^{5 \cdot 7} = y^{35}$$

$$\blacksquare (3st)^4 = 3^4 s^4 t^4 = 81 s^4 t^4$$

$$\blacksquare \left(\frac{p}{2}\right)^5 = \frac{p^5}{2^5} = \frac{p^5}{32}$$

$$\blacksquare \frac{c^8}{c^3} = c^{8-3} = c^5$$

$$\blacksquare \frac{u^3}{u^8} = \frac{1}{u^{8-3}} = \frac{1}{u^5}$$

Simplificar una expresión donde hay exponentes de números reales, significa cambiarla a otra en que cada número real aparece sólo una vez y todos los exponentes son positivos. Debemos asumir que los denominadores siempre representan números reales diferentes de cero.

EJEMPLO 1 Simplificación de expresiones con exponentes

Utiliza las leyes de los exponentes para simplificar la expresión:

$$(a) (3x^3y^4)(4xy^5) \quad (b) (2a^2b^3c)^4 \quad (c) \left(\frac{2r^3}{s}\right)^2 \left(\frac{s}{r^3}\right)^3 \quad (d) (u^{-2}v^3)^{-3}$$

SOLUCIÓN

$$(a) (3x^3y^4)(4xy^5) = (3)(4)x^3x^1y^4y^5 \quad \text{reordenar factores}$$

$$= 12x^4y^9 \quad \text{ley 1}$$

$$(b) (2a^2b^3c)^4 = 2^4(a^2)^4(b^3)^4c^4 \quad \text{ley 3}$$

$$= 16a^8b^{12}c^4 \quad \text{ley 2}$$

$$(c) \left(\frac{2r^3}{s}\right)^2 \left(\frac{s}{r^3}\right)^3 = \frac{(2r^3)^2}{s^2} \cdot \frac{s^3}{(r^3)^3} \quad \text{ley 4}$$

$$= \frac{2^2(r^3)^2}{s^2} \cdot \frac{s^3}{(r^3)^3} \quad \text{ley 3}$$

$$= \left(\frac{4r^6}{s^2}\right) \left(\frac{s^3}{r^9}\right) \quad \text{ley 2}$$

$$= 4 \left(\frac{r^6}{r^9}\right) \left(\frac{s^3}{s^2}\right) \quad \text{reordenar factores}$$

$$= 4 \left(\frac{1}{r^3}\right) (s) \quad \text{leyes 5(b) y 5(a)}$$

$$= \frac{4s}{r^3} \quad \text{reordenar factores}$$

(continúa)

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad (u^{-2}v^3)^{-3} &= (u^{-2})^{-3}(v^3)^{-3} && \text{ley 3} \\
 &= u^6v^{-9} && \text{ley 2} \\
 &= \frac{u^6}{v^9} && \text{definición de } a^{-n}
 \end{aligned}$$

El teorema siguiente es útil para la solución de problemas con exponentes negativos.

Teorema sobre exponentes negativos

$$(1) \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n}$$

$$(2) \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

DEMOSTRACIÓN Con las propiedades de exponentes y cocientes negativos se obtiene

$$(1) \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{1/a^n}{1/b^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{b^n}{1} = \frac{b^n}{a^n}$$

$$(2) \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$



EJEMPLO 2 Simplificación de expresiones con exponentes negativos

Simplifica:

$$(a) \frac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2} \quad (b) \left(\frac{u^2}{2v}\right)^{-3}$$

SOLUCIÓN Se aplica el teorema sobre exponentes negativos y las leyes de los exponentes.

$$(a) \frac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2} = \frac{8x^3}{4y^2} \cdot \frac{y^{-5}}{x^{-1}} \quad \text{disponer cocientes de modo que los exponentes negativos aparezcan en una fracción}$$

$$= \frac{8x^3}{4y^2} \cdot \frac{x^1}{y^5} \quad \text{teorema sobre exponentes negativos (1)}$$

$$= \frac{2x^4}{y^7} \quad \text{ley 1 de exponentes}$$

$$(b) \left(\frac{u^2}{2v}\right)^{-3} = \left(\frac{2v}{u^2}\right)^3 \quad \text{teorema sobre exponentes negativos (2)}$$

$$= \frac{2^3v^3}{(u^2)^3} \quad \text{leyes 4 y 3 de los exponentes}$$

$$= \frac{8v^3}{u^6} \quad \text{ley 2 de los exponentes}$$

A continuación definiremos la **principal n -ésima $\sqrt[n]{a}$** de un número real a .

Definición de $\sqrt[n]{a}$

Sean n un entero positivo mayor de 1, y a un número real.

- (1) Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$.
- (2) Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real *positivo* b tal que $b^n = a$.
- (3) (a) Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real *negativo* b tal que $b^n = a$.
- (b) Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.

Los números complejos (que se estudian en la sección 2.4) se necesitan para definir $\sqrt[n]{a}$ si $a < 0$ y n es entero positivo *par* porque para todos los números reales b , $b^n \geq 0$ siempre que n sea par.

Si $n = 2$, se escribe \sqrt{a} en lugar de $\sqrt[2]{a}$ y \sqrt{a} se llama **raíz cuadrada principal** de a o, simplemente, **raíz cuadrada** de a . El número $\sqrt[3]{a}$ es la **raíz cúbica** (principal) de a .

ILUSTRACIÓN Principal raíz n -ésima $\sqrt[n]{a}$

- $\sqrt{16} = 4$, porque $4^2 = 16$.
- $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$, porque $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$.
- $\sqrt[3]{-8} = -2$, porque $(-2)^3 = -8$.
- $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real.

Observa que $\sqrt{16} \neq \pm 4$, porque, por definición, las raíces de números reales positivos son positivas. El símbolo \pm se lee "más o menos".

TI-83 Plus

Raíz principal n -ésima

2nd $\sqrt{}$ 16) ENTER

5 MATH 5 (1 + 32) ENTER

2nd $\sqrt{}$ -16) ENTER

```

f(16)          4
5*f(1/32)      .5
f(-16)
  
```

TI-86

2nd $\sqrt{}$ 16 ENTER

5 2nd MATH MISC(F5) MORE

$\sqrt{}$ (F4) (1 + 32) ENTER

2nd $\sqrt{}$ -16 ENTER

```

f16          4
5*f(1/32)    .5
f-16         (0,4)
  
```

Cuando en TI-83 se ejecuta la última línea, aparece el mensaje de error NONREAL ANS porque esta expresión representa un número complejo, no uno real (este tema se abordará en la sección 2.4). La respuesta en TI-86, (0, 4), representa $0 + 4i$.

Para completar nuestra terminología, la expresión $\sqrt[n]{a}$ es un **radical**, el número a se llama **radicando**, y n es el **índice** del radical. El símbolo $\sqrt{}$ es el **signo radical**.

Si $\sqrt[n]{a} = b$, entonces $b^n = a$; esto es, $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Si $\sqrt[n]{a} = b$, entonces $b^n = a$, o $(\sqrt[n]{a})^n = a$. La generalización de este modelo nos dará la propiedad 1 de la tabla siguiente.

Propiedades de $\sqrt[n]{a}$ (n es un entero positivo)

Propiedad	Ejemplos
(1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$ si $\sqrt[n]{a}$ es un número real	$(\sqrt{5})^2 = 5$, $(\sqrt[3]{-8})^3 = -8$
(2) $\sqrt[n]{a^n} = a$ si $a \geq 0$	$\sqrt{5^2} = 5$, $\sqrt[3]{2^3} = 2$
(3) $\sqrt[n]{a^n} = a$ si $a < 0$ y n es impar	$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$, $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$
(4) $\sqrt[n]{a^n} = a $ si $a < 0$ y n es par	$\sqrt{(-3)^2} = -3 = 3$, $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2 = 2$

Si $a \geq 0$, entonces la propiedad 4 se reduce a la 2. A partir de la propiedad 4 también vemos que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$



para todo número real x . En particular, si $x \geq 0$, entonces $\sqrt{x^2} = x$; sin embargo, si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$, que es positiva.

Las tres leyes expresadas en la tabla que sigue son verdaderas para los enteros positivos m y n , siempre que *existan las raíces indicadas*, es decir, siempre que las raíces sean números reales.

Leyes de radicales

Ley	Ejemplos
(1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{-108} = \sqrt[3]{(-27)(4)} = \sqrt[3]{-27} \sqrt[3]{4} = -3\sqrt[3]{4}$
(2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
(3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

En los radicandos de las leyes 1 y 2 intervienen productos y cocientes. Debes tener cuidado si se presentan sumas o restas en el radicando. La siguiente tabla contiene dos advertencias específicas respecto de errores comunes.

 **¡Precaución!** 

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$	Ejemplo
(1) $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$	$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4 = 7$
(2) $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$

Si c es un número real y c^n aparece como factor en un radical de índice n , podemos eliminar la c del radicando si consideramos el signo de c , por ejemplo, si $c > 0$ o si $c < 0$ y n es impar, entonces

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n} \sqrt[n]{d} = c \sqrt[n]{d},$$

siempre que exista $\sqrt[n]{d}$. Si $c < 0$ y n es par, entonces

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n} \sqrt[n]{d} = |c| \sqrt[n]{d},$$

siempre que exista $\sqrt[n]{d}$.

ILUSTRACIÓN Supresión de n -ésimas potencias de $\sqrt[n]{}$

$$\sqrt[5]{x^5} = \sqrt[5]{x^5 \cdot x^2} = \sqrt[5]{x^5} \sqrt[5]{x^2} = x \sqrt[5]{x^2}$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{(x^2)^3 x} = \sqrt[3]{(x^2)^3} \sqrt[3]{x} = x^2 \sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2} \sqrt{y} = |x| \sqrt{y}$$

$$\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3|$$

$$\sqrt[4]{x^4 y^3} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x^2 y^3} = \sqrt[4]{x^4} \sqrt[4]{x^2 y^3} = |x| \sqrt[4]{x^2 y^3}$$

Nota: para evitar valores absolutos, en ejemplos y ejercicios con radicales en este capítulo, supondremos que todas las letras a, b, c, d, x, y , etc., que aparecen en radicandos, representan números reales positivos, a menos que indiquemos otra cosa.

Según se muestra en la ilustración anterior y en los ejemplos siguientes, si el índice de un radical es n , reacomodamos el radicando aislando un factor de la forma p^n , donde p puede estar formado por varias letras. Entonces eliminamos $\sqrt[n]{p^n} = p$ del radical, como ya se indicó; por tanto, en el ejemplo 3(b) el índice del radical es 3 y reacomodamos el radicando en cubos, con lo cual obtenemos el factor p^3 , con $p = 2xy^2z$. En la parte (c) el índice del radical es 2; así pues, reacomodamos el radicando en cuadrados y obtenemos un factor p^2 , con $p = 3a^2b^2$.

Simplificar un radical quiere decir eliminar factores del radical hasta que el radicando contenga sólo un exponente igual o mayor que el índice del radical y el índice sea tan pequeño como sea posible.

EJEMPLO 3 Eliminación de factores de radicales

Simplifica el radical (todas las letras denotan números reales positivos):

$$(a) \sqrt[3]{320} \quad (b) \sqrt[3]{16x^3y^8z^4} \quad (c) \sqrt{3a^2b^3} \sqrt{6a^5b}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} (a) \sqrt[3]{320} &= \sqrt[3]{64 \cdot 5} && \text{factorizar el cubo mayor en 320} \\ &= \sqrt[3]{4^3} \sqrt[3]{5} && \text{ley 1 de los radicales} \\ &= 4 \sqrt[3]{5} && \text{propiedad 2 de } \sqrt[n]{} \end{aligned}$$

(continúa)

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \sqrt[3]{16x^3y^6z^4} &= \sqrt[3]{(2^3x^3y^6z^3)(2y^2z)} && \text{reacomodar el radicando en cubos} \\
 &= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3(2y^2z)} && \text{leyes 2 y 3 de los exponentes} \\
 &= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3} \sqrt[3]{2y^2z} && \text{ley 1 de los radicales} \\
 &= 2xy^2z \sqrt[3]{2y^2z} && \text{propiedad 2 de } \sqrt[n]{} \\
 \text{(c)} \quad \sqrt{3a^2b^3} \sqrt{6a^5b} &= \sqrt{3a^2b^3 \cdot 2 \cdot 3a^3b} && \text{ley 1 de los radicales} \\
 &= \sqrt{(3^2a^5b^4)(2a)} && \text{reacomodar el radicando en cuadrados} \\
 &= \sqrt{(3a^2b^2)^2(2a)} && \text{leyes 2 y 3 de los exponentes} \\
 &= \sqrt{(3a^2b^2)^2} \sqrt{2a} && \text{ley 1 de los radicales} \\
 &= 3a^2b^2 \sqrt{2a} && \text{propiedad 2 de } \sqrt[n]{}
 \end{aligned}$$

Si el denominador de un cociente contiene un factor de la forma $\sqrt[n]{a^k}$, con $k < n$ y $a > 0$, entonces al multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ eliminaremos el radical del denominador porque

$$\sqrt[n]{a^k} \sqrt[n]{a^{n-k}} = \sqrt[n]{a^{k+n-k}} = \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Este proceso se llama **racionalización del denominador**. Algunos casos especiales se expresan en la próxima tabla.

Racionalización de denominadores de cocientes ($a > 0$)

Factor en el denominador	Multiplicar numerador y denominador por	Factor resultante
\sqrt{a}	\sqrt{a}	$\sqrt{a} \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$
$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$
$\sqrt[4]{a^3}$	$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[4]{a^3} \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^4} = a$

El siguiente ejemplo ilustra esta técnica.

EJEMPLO 4 Racionalización de denominadores

Racionaliza el denominador:

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{(b)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad \text{(c)} \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{(d)} \quad \sqrt[5]{\frac{x}{y^2}}$$

SOLUCIÓN

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{(b)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x}$$

$$\text{(c)} \quad \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{(d)} \quad \sqrt[5]{\frac{x}{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}} \frac{\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[5]{y^5}} = \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{y}$$

Si usamos una calculadora para encontrar aproximaciones decimales de los radicales, no se obtendrá beneficio alguno de racionalizar denominadores tales como $1/\sqrt{5} = \sqrt{5}/5$ o $\sqrt{2/3} = \sqrt{6}/3$, según se hizo en los ejemplos 4(a) y 4(c). Sin embargo, ante simplificaciones *algebraicas* en ocasiones es deseable cambiar las expresiones a estas formas. De manera semejante, en cursos avanzados de matemáticas (como cálculo integral), convertir $1/\sqrt{x}$ a $\sqrt{x^3}/x$, como en el ejemplo 4(b), puede complicar *más* un problema. En dichos cursos es más fácil trabajar con la expresión $1/\sqrt{x}$ que con su forma racionalizada.

A continuación usaremos radicales para definir *exponentes racionales*.

Definición de exponentes racionales

Sea m/n un número racional, donde n es un entero positivo mayor que 1. Si a es un número real tal que existe $\sqrt[n]{a}$ entonces

- (1) $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
- (2) $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- (3) $a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^n)^{1/n}$

Al evaluar $a^{m/n}$ en (2), por lo general usamos $(\sqrt[n]{a})^m$; es decir, primero tomamos la raíz n -ésima de a y luego elevamos el resultado a la m -ésima potencia, como en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN Notación exponencial $a^{m/n}$

- $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ ■ $x^{3/5} = (\sqrt[5]{x})^3 = \sqrt[5]{x^3}$
- $125^{2/3} = (\sqrt[3]{125})^2 = (\sqrt[3]{5^3})^2 = 5^2 = 25$
- $(\frac{32}{243})^{5/3} = (\sqrt[3]{\frac{32}{243}})^5 = (\sqrt[3]{(\frac{2}{3})^5})^3 = (\frac{2}{3})^5 = \frac{8}{27}$

TI-83 Plus

Exponentes racionales

8 \wedge (1 \div 3) ENTER
 -8 \wedge (1 \div 3) ENTER
 (32 \div 243) \wedge (3 \div 5)
 5)
 MATH 1 ENTER

8^(1/3) 2
 -8^(1/3) -2
 (32/243)^(3/5) = 8/27
 rac

TI-86

8 \wedge (1 \div 3) ENTER
 -8 \wedge (1 \div 3) ENTER
 (32 \div 243) \wedge (3 \div 5)
 5)
 2nd MATH MISC(F5)
 MORE Frac(F1) ENTER

8^(1/3) 2
 -8^(1/3) -2
 (32/243)^(3/5) = 8/27
 8/27

El comando Frac cambia una representación decimal a una fraccionaria.

Las leyes de los exponentes son ciertas para exponentes racionales e irracionales, como $3^{\sqrt{2}}$ o 5^{π} , los que se estudian en el capítulo 5.

A fin de simplificar una expresión que contiene potencias racionales de letras que representan números reales, la convertimos en una expresión en que cada letra aparece sólo una vez y todos los exponentes son positivos. Como hicimos con los radicales, supondremos que todas las letras representan números reales positivos, a menos que se indique de otra manera.



EJEMPLO 5 Simplificación de potencias racionales

Simplifica:

$$(a) (-27)^{2/3}(4)^{-5/2} \quad (b) (r^2s^6)^{1/3} \quad (c) \left(\frac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2 \left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right)$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} (a) \quad (-27)^{2/3}(4)^{-5/2} &= (\sqrt[3]{-27})^2(\sqrt{4})^{-5} && \text{definición de exponentes racionales} \\ &= (-3)^2(2)^{-5} && \text{tomar raíces} \\ &= \frac{(-3)^2}{2^5} && \text{definición de exponentes negativos} \\ &= \frac{9}{32} && \text{tomar potencias} \\ (b) \quad (r^2s^6)^{1/3} &= (r^2)^{1/3}(s^6)^{1/3} && \text{ley 3 de los exponentes} \\ &= r^{2/3}s^2 && \text{ley 2 de los exponentes} \\ (c) \quad \left(\frac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2 \left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) &= \left(\frac{4x^{4/3}}{y}\right) \left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) && \text{leyes de los exponentes} \\ &= \frac{(4 \cdot 3)x^{4/3-5/6}}{y^{1+(1/3)}} && \text{ley 1 de los exponentes} \\ &= \frac{12x^{8/6-5/6}}{y^{4/3}} && \text{denominador común} \\ &= \frac{12x^{1/2}}{y^{4/3}} && \text{simplificar} \end{aligned}$$

Los exponentes racionales son útiles para problemas con radicales que no sean del mismo índice, como se ilustra en este ejemplo.

EJEMPLO 6 Combinación de radicales

Cambia a una expresión que contenga un radical de la forma $\sqrt[n]{a}$:

$$(a) \sqrt[3]{a} \sqrt{a} \quad (b) \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a^2}}$$

SOLUCIÓN Al introducir exponentes racionales se obtiene

$$\begin{aligned} (a) \quad \sqrt[3]{a} \sqrt{a} &= a^{1/3} a^{1/2} = a^{(1/3)+(1/2)} = a^{5/6} = \sqrt[6]{a^5} \\ (b) \quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a^2}} &= \frac{a^{1/3}}{a^{2/3}} = a^{(1/3)-(2/3)} = a^{-5/3} = \frac{1}{a^{5/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^5}} \end{aligned}$$

En los ejercicios 1.2, siempre que el índice de un radical sea par (o se utilice un exponente racional m/n con n), supondremos que las letras que aparecen en el radicando denotan números reales positivos, a menos que se indique lo contrario.

1.2 Ejercicios

Ejercicios 1 al 10: expresa el número en la forma a/b , donde a y b son enteros.

1 $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$

2 $(-3)^3$

3 $\frac{2^{-3}}{3^{-2}}$

4 $\frac{2^0 + 0^2}{2 + 0}$

5 $-2^4 + 3^{-1}$

6 $\left(-\frac{3}{2}\right)^4 - 2^{-4}$

7 $16^{-3/4}$

8 $9^{5/2}$

9 $(-0.008)^{2/3}$

10 $(0.008)^{-2/3}$

Ejercicios 11 al 46: simplifica.

11 $\left(\frac{1}{2}x^4\right)(16x^5)$

12 $(-3x^{-2})(4x^3)$

13 $\frac{(2x^3)(3x^2)}{(x^2)^3}$

14 $\frac{(2x^2)^3}{4x^4}$

15 $\left(\frac{1}{6}a^5\right)(-3a^2)(4a^7)$

16 $(-4b^3)\left(\frac{1}{6}b^2\right)(-9b^4)$

17 $\frac{(6x^3)^2}{(2x^2)^3} \cdot (3x^2)^0$

18 $\frac{(3y^3)(2y^2)^2}{(y^4)^3} \cdot (y^3)^0$

19 $(3u^2v^3)(4u^4v^{-5})$

20 $(x^2yz^2)(-2xz^3)(x^2y^{-2})$

21 $(8x^4y^{-3})\left(\frac{1}{2}x^{-5}y^2\right)$

22 $\left(\frac{4a^2b}{a^3b^2}\right)\left(\frac{5a^2b}{2b^3}\right)$

23 $\left(\frac{1}{3}x^4y^{-3}\right)^{-2}$

24 $(-2xy^2)^3\left(\frac{x^2}{8y^3}\right)$

25 $(3y^3)^4(4y^2)^{-1}$

26 $(-3a^2b^{-3})^3$

27 $(-2r^4s^{-3})^{-2}$

28 $(2x^2y^{-5})(6x^{-3}y)\left(\frac{1}{3}x^{-4}y^3\right)$

29 $(5x^2y^{-3})(4x^{-5}y^4)$

30 $(-2r^2s)^4(3r^{-1}s^3)^2$

31 $\left(\frac{3x^3y^4}{x^6y^{-1}}\right)^2$

32 $(4a^2b)^4\left(\frac{-a^3}{2b}\right)^2$

33 $(4a^{3/2})(2a^{1/2})$

34 $(-6x^{3/5})(2x^{3/5})$

35 $(3x^{5/6})(8x^{2/3})$

36 $(8r^{1/3})(2r^{1/3})$

37 $(27a^6)^{-2/3}$

38 $(25z^4)^{-3/2}$

39 $(8x^{-2/3})x^{1/6}$

40 $(3x^{1/2})(-2x^{3/2})$

41 $\left(\frac{-8x^3}{y^{-6}}\right)^{2/3}$

42 $\left(\frac{-y^{3/2}}{y^{-1/3}}\right)^3$

43 $\left(\frac{x^6}{9y^{-4}}\right)^{-1/2}$

44 $\left(\frac{c^{-4}}{16d^6}\right)^{3/4}$

45 $\frac{(x^6y^3)^{-1/3}}{(x^4y^2)^{-1/2}}$

46 $a^{4/3}a^{-3/2}a^{1/6}$

Ejercicios 47 al 52: reescribe la expresión con exponentes racionales.

47 $\sqrt[4]{x^3}$

48 $\sqrt[3]{x^5}$

49 $\sqrt[3]{(a+b)^2}$

50 $\sqrt{a + \sqrt{b}}$

51 $\sqrt{x^2 + y^2}$

52 $\sqrt{r^3 - s^3}$

Ejercicios 53 al 56: reescribe la expresión usando un radical.

53 (a) $4x^{3/2}$

(b) $(4x)^{3/2}$

54 (a) $4 + x^{3/2}$

(b) $(4 + x)^{3/2}$

55 (a) $8 - y^{1/3}$

(b) $(8 - y)^{1/3}$

56 (a) $8y^{1/3}$

(b) $(8y)^{1/3}$

Ejercicios 57 al 80: simplifica la expresión y racionaliza el denominador cuando sea apropiado.

57 $\sqrt{81}$

58 $\sqrt[3]{-125}$

59 $\sqrt[3]{-64}$

60 $\sqrt[3]{256}$

61 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

62 $\sqrt{\frac{1}{7}}$

63. $\sqrt{9x^4y^6}$

64. $\sqrt{16a^3b^2}$

65. $\sqrt[3]{8a^3b^3}$

66. $\sqrt[3]{81r^3s^3}$

67. $\sqrt{\frac{3x}{2y^3}}$

68. $\sqrt{\frac{1}{3x^2y}}$

69. $\sqrt{\frac{2x^4y^4}{9x}}$

70. $\sqrt{\frac{3x^2y^3}{4x}}$

71. $\sqrt{\frac{5x^4y^3}{27x^2}}$

72. $\sqrt{\frac{x^5y^{12}}{125x}}$

73. $\sqrt{\frac{5x^2y^2}{8x^2}}$

74. $\sqrt{\frac{3x^{11}y^3}{9x^2}}$

75. $\sqrt[3]{(3x^3y^{-1})^3}$

76. $\sqrt[3]{(2u^{-1}v^4)^3}$

77. $\sqrt{\frac{8x^3}{y^2}} \sqrt{\frac{4x^4}{y^2}}$

78. $\sqrt{5xy^3} \sqrt{10x^2y^3}$

79. $\sqrt[3]{3r^3v^3} \sqrt[3]{-9r^{-1}v^4}$

80. $\sqrt[3]{(2r-s)^3}$

Ejercicios 81 al 84: simplifica la expresión, suponiendo que x y y pueden ser negativos.

81. $\sqrt{x^2y^4}$

82. $\sqrt{x^4y^8}$

83. $\sqrt[3]{x^3(y-1)^{12}}$

84. $\sqrt[3]{(x+2)^{12}y^4}$

Ejercicios 85 al 90: sustituye el símbolo \square con $=$ o \neq de manera que el enunciado resultante sea verdadero, siempre que la expresión tenga significado. Justifica tu respuesta.

85. $(a^2)^3 \square a^{(2^3)}$

86. $(a^2 + 1)^{1/2} \square a + 1$

87. $a^2b^2 \square (ab)^2$

88. $\sqrt{a^2} \square (\sqrt{a})^2$

89. $\sqrt{\frac{1}{c}} \square \frac{1}{\sqrt{c}}$

90. $a^{1/2} \square \frac{1}{a^2}$

Ejercicios 91 y 92: al evaluar números negativos elevados a potencias fraccionarias, quizá se requiera evaluar la raíz y la potencia del entero por separado; por ejemplo, $(-3)^{2/5}$ se puede evaluar satisfactoriamente como $[(-3)^{1/5}]^2$ o bien $[(-3)^2]^{1/5}$, de otra manera quizá aparezca un mensaje de error. Aproxima la expresión de número real a cuatro lugares decimales.

91. (a) $(-3)^{2/5}$

(b) $(-5)^{4/7}$

92. (a) $(-1.2)^{3/7}$

(b) $(-5.08)^{3/11}$

Ejercicios 93 y 94: aproxima la expresión del número real a cuatro lugares decimales.

93. (a) $\sqrt{\pi + 1}$

(b) $\sqrt[3]{15.1 + 5^{1/4}}$

94. (a) $(2.6 - 1.9)^{-2}$

(b) $5^{1/2}$

95. **Cuenta de ahorros** Uno de los bancos más antiguos en Estados Unidos es el Bank of America, fundado en 1812. Si entonces se hubieran depositado \$200 en una cuenta que pagaba 4% de interés anual, luego de 180 años la cantidad habría crecido a $200(1.04)^{180}$ dólares. Aproxima esta cantidad al centavo más cercano.

96. **Distancia de visibilidad** En un día despejado, la distancia d (en millas) que se puede ver desde un edificio de altura h (en pies) se puede calcular mediante $d = 1.2\sqrt{h}$. Calcula la distancia que se puede apreciar desde lo alto de la Torre Sears de Chicago, que mide 1454 pies de altura.

97. **Largo de un lengüado** La relación largo-ancho del lengüado del Pacífico se puede calcular mediante la fórmula $L = 0.46\sqrt{W}$, donde W está en kilogramos y L en metros. El lengüado más grande (comprobado) pesaba 230 kilogramos. Calcula su longitud.

98. **Peso de una ballena** La relación largo-peso para la ballena sei se puede calcular con $W = 0.0016L^{2.47}$, donde W está en toneladas y L en pies. Calcula el peso de una ballena que mide 25 pies de largo.

99. **Handicaps para levantadores de pesas** La fórmula de O'Carroll se usa para medir el *handicap* necesario para los levantadores de pesas. Si un atleta que pesa b kilogramos levanta w kilogramos de peso, entonces el peso W con *handicap* está dado por

$$W = \frac{w}{\sqrt[3]{b - 35}}$$

Supón que dos atletas que pesan 75 kg y 120 kg levantan pesos de 180 y 250 kilogramos, respectivamente. Utiliza la fórmula de O'Carroll para determinar quién es el mejor levantador de pesas.

100. **Superficie corporal** La superficie corporal S de una persona (en pies²) se puede calcular con la fórmula $S = (0.1091)u^{0.425}h^{0.725}$, en donde la estatura h está en pulgadas y el peso w está en libras (lb).

(a) Calcula S para una persona que mide 6 pies de estatura y pesa 175 libras.

(b) Si una persona mide 5 pies y 6 pulgadas de alto, ¿qué efecto tiene sobre S un aumento de 10% en el peso?

101. **Peso de los hombres** El promedio de peso W (en libras) para hombres de estatura h entre 64 y 79 pulgadas se puede calcular con la fórmula $W = 0.1166h^{1.7}$. Elabora una tabla para W con $h = 64, 65, \dots, 79$. Redondea todos los pesos a la libra más cercana.

Estatura	Peso	Estatura	Peso
64		72	
65		73	
66		74	
67		75	
68		76	
69		77	
70		78	
71		79	

102. **Peso de las mujeres** La media del peso W (en libras) para mujeres de estatura h entre 60 y 75 pulgadas se puede calcular usando la fórmula $W = 0.1049h^{1.7}$. Elabora una tabla para W con $h = 60, 61, \dots, 75$. Redondea todos los pesos a la libra más cercana.

Estatura	Peso	Estatura	Peso
60		68	
61		69	
62		70	
63		71	
64		72	
65		73	
66		74	
67		75	

1.3

Expresiones algebraicas

Algunas veces empleamos la notación y la terminología de los conjuntos para describir relaciones matemáticas. Un **conjunto** es una colección de objetos de algún tipo y los objetos se llaman **elementos** del conjunto. Para denotar los conjuntos suelen usarse letras mayúsculas, como R, S, T, \dots las minúsculas a, b, x, y, \dots por lo general representan elementos de los conjuntos. En todo este libro, \mathbb{R} denotará el conjunto de los números reales y \mathbb{Z} el de los enteros.

Dos conjuntos S y T son **iguales**, se escribe $S = T$, si S y T contienen exactamente los mismos elementos. Anotamos $S \neq T$ si S y T no son iguales. En la siguiente tabla aparecen otras notaciones y terminología.

Notación o terminología	Significado	Ejemplos
$a \in S$ $a \notin S$ S es un subconjunto de T Constante	a es un elemento de S a no es elemento de S Todo elemento de S es elemento de T Una letra o símbolo que representa un elemento <i>específico</i> de un conjunto	$3 \in \mathbb{Z}$ $\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$ \mathbb{Z} es subconjunto de \mathbb{R} $5, -\sqrt{2}, \pi$
Variable	Una letra o símbolo que representa <i>cualquier</i> elemento de un conjunto	Que x denote cualquier número real

En general usamos las últimas letras del alfabeto (por ejemplo, x, y y z), para variables y las primeras (como a, b , y c), para constantes. En todo este texto, a menos que se especifique lo contrario, las variables representan números reales.

Si los elementos de un conjunto S tienen cierta propiedad, en ocasiones escribimos $S = \{x\}$ en donde la propiedad que describe a la variable x se indica en el espacio que sigue a los dos puntos. La expresión comprendida en las llaves y los dos puntos se lee "el conjunto de toda x tal que..." donde completamos la frase al escribir la propiedad deseada; por ejemplo, $\{x: x > 3\}$ se lee "el conjunto de toda x tal que x es mayor que 3".

$\{x|x > 3\}$ es una notación equivalente.

Para conjuntos finitos, en ocasiones listamos todos los elementos del conjunto entre las llaves. Así, si el conjunto T está formado por los primeros cinco enteros positivos, anotamos $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Cuando describimos conjuntos de esta manera, el orden usado al especificar los elementos es irrelevante, de modo que se puede escribir $T = \{1, 3, 2, 4, 5\}$, $T = \{4, 3, 2, 5, 1\}$, y así sucesivamente.

Si comenzamos con cualquier colección de variables y números reales, entonces obtenemos una **expresión algebraica** al aplicar sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias o extracción de raíces. Si sustituimos las variables por números específicos en una expresión algebraica, el número real que resulte se llama **valor** de la expresión para tales números. El **dominio** de una expresión algebraica está formado por todos los números reales que puedan representar las variables. Así, a menos que se indique de otra manera, suponemos que el dominio está formado por los números reales que —cuando se sustituyen por las variables— hacen que la expresión tenga significado, en el sentido de que los denominadores no pueden ser iguales a cero y las raíces siempre existen. En la tabla siguiente se incluyen dos ejemplos.

Expresiones algebraicas

Ejemplo	Dominio	Valor típico
$x^3 - 5x + \frac{6}{\sqrt{x}}$	toda $x > 0$	En $x = 4$: $4^3 - 5(4) + \frac{6}{\sqrt{4}} = 64 - 20 + 3 = 47$
$\frac{2xy + (3/x^2)}{\sqrt[3]{y-1}}$	toda $x \neq 0$ y toda $y \neq 1$	En $x = 1$ y $y = 9$: $\frac{2(1)(9) + (3/1^2)}{\sqrt[3]{9-1}} = \frac{18+3}{\sqrt[3]{8}} = \frac{21}{2}$

Si x es una variable, entonces un **monomio** en x es una expresión de la forma ax^n , en donde a es un número real y n es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** una suma de tres monomios. Un **polinomio** en x es una suma de cualquier número de monomios en x . Otro modo de decirlo es la siguiente:

Definición de polinomio

Un **polinomio en x** es una suma de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

en donde n es un entero no negativo y cada coeficiente a_k es un número real. Si $a_n \neq 0$, se dice que el polinomio tiene **grado n** .

Cada expresión $a_k x^k$ en la suma es un **término** del polinomio. Si el coeficiente a_k es cero, se omite el término $a_k x^k$. El coeficiente a_k de la potencia más alta de x es el **coeficiente principal** del polinomio.

La siguiente tabla contiene ilustraciones específicas de polinomios.

Polinomios

Ejemplo	Coficiente principal	Grado
$3x^4 + 5x^3 + (-7)x + 4$	3	4
$x^8 + 9x^2 + (-2)x$	1	8
$-5x^2 + 1$	-5	2
$7x + 2$	7	1
8	8	0

Por definición, dos polinomios son **iguales** si y sólo si son del mismo grado y los coeficientes de potencias semejantes de x son iguales. Si todos los coeficientes del polinomio son cero, se obtiene el llamado **polinomio cero** y se denota con 0. Sin embargo, por convención, el grado del polinomio cero *no* es cero sino indefinido. Si c es un *número real diferente de cero*, entonces c es un polinomio de grado 0. Tales polinomios (incluyendo el polinomio cero) se conocen como **polinomios constantes**.

Si un coeficiente de un polinomio es negativo, por lo general usamos un signo menos entre términos apropiados. Para ilustrar lo anterior, tenemos:

$$3x^2 + (-5)x + (-7) = 3x^2 - 5x - 7.$$

También podemos considerar polinomios con variables distintas de x ; por ejemplo, $\frac{2}{3}z^2 - 3z^7 + 8 - \sqrt{5}z^4$ es un polinomio en z de grado 7. En términos generales colocamos los términos de un polinomio con las potencias de la variable en orden decreciente y escribimos

$$\frac{2}{3}z^2 - 3z^7 + 8 - \sqrt{5}z^4 = -3z^7 - \sqrt{5}z^4 + \frac{2}{3}z^2 + 8.$$

Por otro lado, podemos considerar que un polinomio en x es una expresión algebraica obtenida empleando un número finito de sumas, restas y multiplicaciones que incluyan x . Si una expresión algebraica contiene divisiones o raíces que incluyan una variable x , entonces no es un polinomio en x .

ILUSTRACIÓN No polinomios

$$\blacksquare \frac{1}{x} + 3x \quad \blacksquare \frac{x-5}{x^2+2} \quad \blacksquare 3x^2 + \sqrt{x} - 2$$

Puesto que los polinomios representan números reales, estamos en posibilidad de aplicar las propiedades descritas en la sección 1.1. En particular, si se efectúan sumas, restas y multiplicaciones con polinomios, podemos simplificar los resultados mediante las propiedades de los números reales, como se demuestra en estos ejemplos.

EJEMPLO 1 Suma y resta de polinomios

- (a) Halla la suma: $(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3)$
 (b) Halla la diferencia: $(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 5x^2 + 3)$

SOLUCIÓN

(a) Para obtener la suma de cualesquiera dos polinomios en x , sumamos los coeficientes de potencias semejantes de x .

$$\begin{aligned} (x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3) & \\ = x^3 + 2x^2 - 5x + 7 + 4x^3 - 5x^2 + 3 & \text{eliminar paréntesis} \\ = (1 + 4)x^3 + (2 - 5)x^2 - 5x + (7 + 3) & \text{sumar coeficientes} \\ & \text{de potencias} \\ & \text{semejantes de } x \\ = 5x^3 - 3x^2 - 5x + 10 & \text{simplificar} \end{aligned}$$

Mostramos el agrupamiento del primer paso a fin de aclarar el proceso, pero puedes omitirlo una vez que tengas práctica en este tipo de operaciones.

(b) Para restar polinomios primero eliminamos los paréntesis pero, cuidado, el signo menos que precede al segundo par de paréntesis cambia el signo de cada término de ese polinomio.

$$\begin{aligned} (x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 5x^2 + 3) & \\ = x^3 + 2x^2 - 5x + 7 - 4x^3 + 5x^2 - 3 & \text{eliminar paréntesis} \\ = (1 - 4)x^3 + (2 + 5)x^2 - 5x + (7 - 3) & \text{sumar coeficientes} \\ & \text{de potencias} \\ & \text{semejantes de } x \\ = -3x^3 + 7x^2 - 5x + 4 & \text{simplificar} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Multiplicación de binomios

Halla el producto: $(4x + 5)(3x - 2)$

SOLUCIÓN Puesto que $3x - 2 = 3x + (-2)$, procedemos como en el ejemplo 1 de la sección 1.1:

$$\begin{aligned} (4x + 5)(3x - 2) & \\ = (4x)(3x) + (4x)(-2) + (5)(3x) + (5)(-2) & \text{propiedades} \\ & \text{distributivas} \\ = 12x^2 - 8x + 15x - 10 & \text{multiplicar} \\ = 12x^2 + 7x - 10 & \text{simplificar} \end{aligned}$$

Comprobación con la calculadora para el ejemplo 2: Almacena 17 en X y demuestra que la expresión original y la expresión final son iguales a 3577.

Después de adquirir práctica en problemas del tipo del ejemplo 2, podrás efectuar los dos primeros pasos mentalmente y continuar hasta la forma final de manera directa.

En el ejemplo que sigue se ilustran dos métodos para hallar el producto de dos polinomios.

EJEMPLO 3 Multiplicación de polinomios

Halla el producto: $(x^2 + 5x - 4)(2x^3 + 3x - 1)$

SOLUCIÓN

Método 1 Primero usamos una propiedad distributiva, tratando al polinomio $2x^3 + 3x - 1$ como si fuera un solo número real:

$$\begin{aligned}(x^2 + 5x - 4)(2x^3 + 3x - 1) \\ = x^2(2x^3 + 3x - 1) + 5x(2x^3 + 3x - 1) - 4(2x^3 + 3x - 1)\end{aligned}$$

A continuación utilizamos tres veces otra propiedad distributiva y simplificamos el resultado, con lo cual

$$\begin{aligned}(x^2 + 5x - 4)(2x^3 + 3x - 1) \\ = 2x^5 + 3x^3 - x^2 + 10x^4 + 15x^2 - 5x - 8x^3 - 12x + 4 \\ = 2x^5 + 10x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 17x + 4.\end{aligned}$$

Notarás que multiplicamos los tres monomios del primer polinomio por cada uno de los tres monomios del segundo polinomio, y esto produjo un total de nueve términos.

Método 2 Listamos los polinomios y en seguida los multiplicamos, dejando espacios para las potencias de x que tengan coeficientes 0:

$$\begin{array}{r r r r r r r r r} 2x^3 & + & 3x & - & 1 & & & & \\ x^2 & + & 5x & - & 4 & & & & \\ \hline 2x^5 & & & + & 3x^3 & - & x^2 & & = x^2(2x^3 + 3x - 1) \\ & 10x^4 & & & + & 15x^2 & - & 5x & = 5x(2x^3 + 3x - 1) \\ & & - & 8x^3 & & - & 12x & + & 4 = -4(2x^3 + 3x - 1) \\ \hline 2x^5 & + & 10x^4 & - & 5x^3 & + & 14x^2 & - & 17x & + & 4 = \text{suma total} \end{array}$$

En la práctica, se omiten las razones (igualdades) escritas a la derecha en los últimos cuatro renglones.

También podemos considerar polinomios de más de una variable; por ejemplo, un polinomio en *dos* variables, x y y , es una suma de términos, cada uno de la forma $ax^m y^k$ para un número real a y enteros no negativos m y k . Un ejemplo es

$$3x^4y + 2x^3y^5 + 7x^2 - 4xy + 8y - 5.$$

Otros polinomios pueden comprender tres variables (x, y, z) o cualquier número de variables. La suma, resta y multiplicación se efectúan utilizando las propiedades de los números reales, igual que para los polinomios de una variable.

El siguiente ejemplo ilustra la división de un polinomio entre un monomio.

EJEMPLO 4 División de un polinomio entre un monomio

Expresa como polinomio en x y y :

$$\frac{6x^2y^3 + 4x^3y^2 - 10xy}{2xy}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \frac{6x^2y^3 + 4x^3y^2 - 10xy}{2xy} &= \frac{6x^2y^3}{2xy} + \frac{4x^3y^2}{2xy} - \frac{10xy}{2xy} && \text{dividir cada término entre } 2xy \\ &= 3xy^2 + 2x^2y - 5 && \text{simplificar} \end{aligned}$$

Los productos de la siguiente tabla aparecen con tanta frecuencia que merecen atención especial; puedes comprobar la validez de cada fórmula mediante multiplicación. En (2) y (3) usamos el signo superior o el inferior en ambos lados; por lo tanto, (2) es, de hecho, *dos* fórmulas:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad y \quad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Del mismo modo, (3) representa dos fórmulas.

Fórmulas de productos

Fórmula	Ejemplo
(1) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$	$(2a + 3)(2a - 3) = (2a)^2 - 3^2 = 4a^2 - 9$
(2) $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$	$(2a - 3)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3) + (3)^2$ $= 4a^2 - 12a + 9$
(3) $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$	$(2a + 3)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(3) + 3(2a)(3)^2 + (3)^3$ $= 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$

En el ejemplo siguiente se dan varias muestras de las fórmulas de productos.

EJEMPLO 5 Uso de fórmulas de productos

Encuentra el producto:

$$(a) (2r^2 - \sqrt{s})(2r^2 + \sqrt{s}) \quad (b) \left(\sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \quad (c) (2a - 5b)^3$$

SOLUCIÓN

(a) Usamos la fórmula (1), con $x = 2r^2$ y $y = \sqrt{s}$:

$$(2r^2 - \sqrt{s})(2r^2 + \sqrt{s}) = (2r^2)^2 - (\sqrt{s})^2 \\ = 4r^4 - s$$

(b) Aplicamos la fórmula (2), con $x = \sqrt{c}$ y $y = \frac{1}{\sqrt{c}}$:

$$\left(\sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 = (\sqrt{c})^2 + 2 \cdot \sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \\ = c + 2 + \frac{1}{c}$$

Observa que la última expresión *no* es un polinomio.

(c) Utilizamos la fórmula (3), con $x = 2a$ y $y = 5b$:

$$(2a - 5b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2(5b) + 3(2a)(5b)^2 - (5b)^3 \\ = 8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$$

Si un polinomio es un producto de otros polinomios, entonces cada polinomio en el producto es un **factor** del polinomio original. El proceso de expresar una suma de términos como un producto se llama **factorización**; por ejemplo, como $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$, los polinomios $x + 3$ y $x - 3$ son factores de $x^2 - 9$.

La factorización desempeña un importante papel en matemáticas porque permite reducir el estudio de una expresión complicada al de varias expresiones más sencillas; por ejemplo, las propiedades del polinomio $x^2 - 9$ se pueden determinar examinando los factores $x + 3$ y $x - 3$. Según veremos en el capítulo 2, otro uso destacado de la factorización es resolver ecuaciones.

Nos interesan principalmente los **factores no triviales** de los polinomios —esto es, factores que contienen polinomios de grado positivo—; sin embargo, si los coeficientes se limitan a *enteros*, entonces eliminamos un factor entero común de cada término del polinomio; por ejemplo,

$$4x^2y + 8z^3 = 4(x^2y + 2z^3).$$

Un polinomio con coeficientes en algún conjunto S de números es **primo**, o **irreducible** sobre S , si no puede escribirse como producto de dos polinomios de grado positivo con coeficientes en S . Un polinomio puede ser irreducible sobre un conjunto S , pero no sobre otro; por ejemplo, $x^2 - 2$ es irreducible sobre los números racionales (puesto que no se puede expresar como un producto de dos polinomios de grado positivo que tengan coeficientes *racionales*), pero *no* lo es sobre los números reales, ya que se puede escribir así

$$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

De igual forma, $x^2 + 1$ es irreducible sobre los números reales pero, como veremos en la sección 2.4, no sobre los números complejos.

Todo polinomio $ax + b$ de grado 1 es irreducible.

Antes de factorizar un polinomio es necesario especificar el sistema numérico (o conjunto) del cual han de elegirse los coeficientes. En este capítulo usaremos la regla de que *si un polinomio tiene coeficientes enteros, los factores han de ser polinomios con coeficientes enteros*. **Factorizar un polinomio** significa expresarlo como un producto de polinomios irreducibles.

El **máximo factor común (mfc)** de una expresión es el producto de los factores comunes que aparecen en cada término, cada uno elevado al exponente más pequeño diferente de cero que aparezca en cualquier término. Al factorizar polinomios, es aconsejable factorizar primero el máximo factor común, como se muestra en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN Polinomios factorizados

- $8x^2 + 4xy = 4x(2x + y)$
- $25x^2 + 25x - 150 = 25(x^2 + x - 6) = 25(x + 3)(x - 2)$
- $4x^3y - 9x^2y^3 = x^2y(4x^2 - 9y^2) = x^2y(2x + 3y)(2x - 3y)$

Por lo general es difícil factorizar polinomios de grado mayor que 2. En casos sencillos las siguientes fórmulas de factorización pueden ser útiles. Cada una de ellas se puede comprobar multiplicando los factores a la derecha del signo igual. Es posible demostrar que los factores $x^2 + xy + y^2$ y $x^2 - xy + y^2$ en la diferencia y suma de dos cubos, respectivamente, son irreducibles sobre los números reales.

Fórmulas de factorización

Fórmula	Ejemplo
(1) Diferencia de dos cuadrados: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$	$9a^2 - 16 = (3a)^2 - (4)^2 = (3a + 4)(3a - 4)$
(2) Diferencia de dos cubos: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$	$8a^3 - 27 = (2a)^3 - (3)^3$ $= (2a - 3)[(2a)^2 + (2a)(3) + (3)^2]$ $= (2a - 3)(4a^2 + 6a + 9)$
(3) Suma de dos cubos: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$	$125a^3 + 1 = (5a)^3 + (1)^3$ $= (5a + 1)[(5a)^2 - (5a)(1) + (1)^2]$ $= (5a + 1)(25a^2 - 5a + 1)$

En los siguientes dos ejemplos hay varias ilustraciones del uso de las fórmulas de factorización.

EJEMPLO 6 Diferencia de dos cuadrados

Factoriza cada polinomio:

(a) $25r^2 - 49s^2$ (b) $81x^4 - y^4$ (c) $16x^4 - (y - 2z)^2$

SOLUCIÓN(a) Se aplica la fórmula de la diferencia de dos cuadrados, donde $x = 5r$ y $y = 7s$:

$$25r^2 - 49s^2 = (5r)^2 - (7s)^2 = (5r + 7s)(5r - 7s)$$

(b) Escribimos $81x^4 = (9x^2)^2$ y $y^4 = (y^2)^2$ y aplicamos dos veces la fórmula de la diferencia de dos cuadrados:

$$\begin{aligned} 81x^4 - y^4 &= (9x^2)^2 - (y^2)^2 \\ &= (9x^2 + y^2)(9x^2 - y^2) \\ &= (9x^2 + y^2)[(3x)^2 - (y)^2] \\ &= (9x^2 + y^2)(3x + y)(3x - y) \end{aligned}$$

(c) Escribimos $16x^4 = (4x^2)^2$ y aplicamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados:

$$\begin{aligned} 16x^4 - (y - 2z)^2 &= (4x^2)^2 - (y - 2z)^2 \\ &= [(4x^2) + (y - 2z)][(4x^2) - (y - 2z)] \\ &= (4x^2 + y - 2z)(4x^2 - y + 2z) \end{aligned}$$

**EJEMPLO 7** Suma y diferencia de dos cubos

Factoriza cada polinomio:

(a) $a^3 + 64b^3$ (b) $8c^6 - 27d^9$

SOLUCIÓN(a) Aplicamos la fórmula de la suma de dos cubos, donde $x = a$ y $y = 4b$:

$$\begin{aligned} a^3 + 64b^3 &= a^3 + (4b)^3 \\ &= (a + 4b)[a^2 - a(4b) + (4b)^2] \\ &= (a + 4b)(a^2 - 4ab + 16b^2) \end{aligned}$$

(b) Usamos la fórmula de la diferencia de dos cubos, donde $x = 2c^2$ y $y = 3d^3$:

$$\begin{aligned} 8c^6 - 27d^9 &= (2c^2)^3 - (3d^3)^3 \\ &= (2c^2 - 3d^3)[(2c^2)^2 + (2c^2)(3d^3) + (3d^3)^2] \\ &= (2c^2 - 3d^3)(4c^4 + 6c^2d^3 + 9d^6) \end{aligned}$$

TI-83 Plus

Comprobación del resultado de una factorización

Podemos comprobar el resultado de una factorización multiplicando la respuesta propuesta y comparándola con la expresión original. Aquí sustituiremos valores por las variables y evaluaremos la expresión original y la respuesta propuesta.

```

4 STO > ALPHA A ALPHA :
7 STO > ALPHA B ENTER
ALPHA A MATH 3 +
64 ALPHA B MATH 3 ENTER
( ALPHA A + 4 ALPHA B )
( ALPHA A x^2 -
4 ALPHA A ALPHA B +
16 ALPHA B x^2 ) ENTER

```

```

4+A:7+B      7
A^3+64B^3      22016
(A+4B)(A^2-4AB+16B^2)
B^2)          22016

```

TI-86

```

4 STO > A 2nd :
ALPHA 7 STO > B ENTER
ALPHA A ^ 3 +
64 ALPHA B ^ 3 ENTER
( ALPHA A + 4 ALPHA B )
( ALPHA A x^2 -
4 ALPHA A ALPHA B +
16 ALPHA B x^2 ) ENTER

```

```

4+A:7+B      7
A^3+64B^3      22016
(A+4B)(A^2-4AB+16B^2)
B^2)          22016

```

*En TI-86 no hay función especial para elevar al cubo.

No escojas valores como 0, 1 o 2 para A y B: es muy fácil obtener el mismo valor para la expresión original y la respuesta propuesta. Por ejemplo, si sustituimos 1 por A y 0 por B y factorizamos incorrectamente $A^3 + 64B^3$ como $(A + 4B)(A^2 + 16B^2)$, ambas expresiones serían iguales a 1 y la conclusión errónea sería que la factorización de $A^3 + 64B^3$.

La factorización de un trinomio $px^2 + qx + r$, donde p, q y r son enteros, debe ser de la forma

$$px^2 + qx + r = (ax + b)(cx + d),$$

donde a, b, c y d son enteros. Se deduce que

$$ac = p, \quad bd = r \quad \text{y} \quad ad + bc = q.$$

Sólo un número limitado de opciones para a, b, c y d satisface estas condiciones; si ninguna de las opciones funciona, entonces $px^2 + qx + r$ es irreducible. El proceso de probar diversas posibilidades, como se describe en el siguiente ejemplo, se llama **método de prueba y error**. Este método también es aplicable a trinomios de la forma $px^2 + qxy + ry^2$, en cuyo caso la factorización debe ser de la forma $(ax + by)(cx + dy)$.

EJEMPLO 8 Factorización de un trinomio mediante prueba y errorFactorizar $6x^2 - 7x - 3$.**SOLUCIÓN** Si escribimos

$$6x^2 - 7x - 3 = (ax + b)(cx + d),$$

entonces se tienen que cumplir estas relaciones:

$$ac = 6, \quad bd = -3 \quad \text{y} \quad ad + bc = -7$$

Si suponemos que a y c son positivos, entonces todos los valores posibles están dados en la tabla que sigue:

a	1	6	2	3
c	6	1	3	2

Por lo tanto, si $6x^2 - 7x - 3$ es factorizable, una de estas ecuaciones es verdadera:

$$6x^2 - 7x - 3 = (x + b)(6x + d)$$

$$6x^2 - 7x - 3 = (6x + b)(x + d)$$

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x + b)(3x + d)$$


$$6x^2 - 7x - 3 = (3x + b)(2x + d)$$

En seguida, consideramos todos los valores posibles para b y d . Como $bd = -3$, éstos son:

b	1	-1	3	-3
d	-3	3	-1	1

Probamos con varios valores (quizá con todos) y encontramos que $b = -3$ y $d = 1$; esto es,

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1).$$

Como prueba, multiplica la factorización final para ver si se obtiene el polinomio dado. 

El método de prueba y error ilustrado en el ejemplo 8 puede ser largo y tedioso si los coeficientes de los polinomios son grandes y tienen muchos factores primos. En la sección 2.3 mostraremos un método de factorización que se puede usar para factorizar cualquier trinomio de la forma que se muestra en el ejemplo 8, cualquiera que sea la magnitud de los coeficientes. Con casos sencillos, a menudo es posible llegar a la opción correcta con rapidez.

**EJEMPLO 9** Factorización de polinomios

Factoriza:

$$(a) \quad 12x^2 - 36xy + 27y^2 \qquad (b) \quad 4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3$$

SOLUCIÓN

(a) Puesto que cada término tiene 3 como factor, empezamos escribiendo

$$12x^2 - 36xy + 27y^2 = 3(4x^2 - 12xy + 9y^2).$$

Una factorización de $4x^2 - 12xy + 9y^2$ como producto de dos polinomios de primer grado debe ser de la forma

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (ax + by)(cx + dy),$$

por lo tanto $ac = 4$, $bd = 9$ y $ad + bc = -12$.

Con el método de prueba y error (ejemplo 8), obtenemos:

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)(2x - 3y) = (2x - 3y)^2.$$

Así, $12x^2 - 36xy + 27y^2 = 3(4x^2 - 12xy + 9y^2) = 3(2x - 3y)^2$.

(b) Como cada término tiene x^2y como factor, comenzamos por escribir

$$4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3 = x^2y(4x^2 - 11xy + 6y^2).$$

Por prueba y error obtenemos la factorización

$$4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3 = x^2y(4x - 3y)(x - 2y). \quad /$$

Si una suma contiene cuatro o más términos, es posible agrupar los términos de manera adecuada y luego encontrar una factorización mediante las propiedades distributivas. Esta técnica, llamada **factorización por agrupación**, se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10 Factorización por agrupación

Factoriza:

$$(a) 4ac + 2bc - 2ad - bd \quad (b) 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8$$

$$(c) x^2 - 16y^2 + 10x + 25$$

SOLUCIÓN

(a) Agrupamos los dos primeros términos y los dos últimos, y luego procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} 4ac + 2bc - 2ad - bd &= (4ac + 2bc) - (2ad + bd) \\ &= 2c(2a + b) - d(2a + b) \end{aligned}$$

En esta etapa no hemos factorizado la expresión dada porque el lado derecho tiene la forma

$$2ck - dk \quad \text{con} \quad k = 2a + b.$$

Sin embargo, si factorizamos k , entonces

$$2ck - dk = (2c - d)k = (2c - d)(2a + b).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 4ac + 2bc - 2ad - bd &= 2c(2a + b) - d(2a + b) \\ &= (2c - d)(2a + b). \end{aligned}$$

Notarás que si factorizamos $2ck - dk$ como $k(2c - d)$, entonces la última expresión es $(2a + b)(2c - d)$.

(b) Agrupamos los dos primeros términos, los dos últimos y continuamos de esta manera:

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 &= (3x^3 + 2x^2) - (12x + 8) \\ &= x^2(3x + 2) - 4(3x + 2) \\ &= (x^2 - 4)(3x + 2) \end{aligned}$$

Por último, usamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados para $x^2 - 4$, y obtenemos la factorización:

$$3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = (x + 2)(x - 2)(3x + 2)$$

(c) Primero reacomodamos y agrupamos términos, y luego aplicamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados:

$$\begin{aligned} x^2 - 16y^2 + 10x + 25 &= (x^2 + 10x + 25) - 16y^2 \\ &= (x + 5)^2 - (4y)^2 \\ &= [(x + 5) + 4y][(x + 5) - 4y] \\ &= (x + 4y + 5)(x - 4y + 5) \end{aligned}$$

1.3 Ejercicios

Ejercicios 1 al 44: expresa como un polinomio.

1 $(3x^3 + 4x^2 - 7x + 1) + (9x^3 - 4x^2 - 6x)$

2 $(7x^3 + 2x^2 - 11x) + (-3x^3 - 2x^2 + 5x - 3)$

3 $(4x^3 + 5x - 3) - (3x^3 + 2x^2 + 5x - 7)$

4 $(6x^3 - 2x^2 + x - 2) - (8x^2 - x - 2)$

5 $(2x + 5)(3x - 7)$

6 $(3x - 4)(2x + 9)$

7 $(5x + 7y)(3x + 2y)$

8 $(4x - 3y)(x - 5y)$

9 $(2u + 3)(u - 4) + 4u(u - 2)$

10 $(3u - 1)(u + 2) + 7u(u + 1)$

11 $(3x + 5)(2x^2 + 9x - 5)$

12 $(7x - 4)(x^3 - x^2 + 6)$

13 $(t^2 + 2t - 5)(3t^2 - t + 2)$

14 $(r^2 - 8r - 2)(-r^2 + 3r - 1)$

15 $(x + 1)(2x^2 - 2)(x^3 + 5)$

16 $(2x - 1)(x^2 - 5)(x^3 - 1)$

17 $\frac{8x^3y^3 - 10x^3y}{2x^2y}$

18 $\frac{6a^3b^3 - 9a^2b^2 + 3ab^4}{3ab^2}$

19 $\frac{3u^3v^4 - 2u^2v^2 + (u^3v^2)^2}{u^3v^2}$

20 $\frac{6x^2yz^3 - xy^2z}{xyz}$

21 $(2x + 3y)(2x - 3y)$

22 $(5x + 4y)(5x - 4y)$

- 23 $(x^2 + 2y)(x^2 - 2y)$ 24 $(3x + y^3)(3x - y^3)$ 67 $36r^2 - 25t^2$ 68 $81r^2 - 16t^2$
- 25 $(x^2 + 9)(x^2 - 4)$ 26 $(x^2 + 1)(x^2 - 16)$ 69 $z^4 - 64w^2$ 70 $9y^4 - 121x^2$
- 27 $(3x + 2y)^2$ 28 $(5x - 4y)^2$ 71 $x^4 - 4x^2$ 72 $x^3 - 25x$
- 29 $(x^2 - 3y^2)^2$ 30 $(2x^2 + 5y^2)^2$ 73 $x^2 + 25$ 74 $4x^2 + 9$
- 31 $(x + 2)^2(x - 2)^2$ 75 $75x^2 - 48y^2$ 76 $64x^2 - 36y^2$
- 32 $(x + y)^2(x - y)^2$ 77 $64x^3 + 27$ 78 $125x^3 - 8$
- 33 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ 79 $64x^3 - y^6$ 80 $216x^9 + 125y^3$
- 34 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ 81 $343x^3 + y^9$ 82 $x^6 - 27y^3$
- 35 $(x^{1/3} - y^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$ 83 $125 - 27x^3$ 84 $x^3 + 64$
- 36 $(x^{1/3} + y^{1/3})(x^{2/3} - x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$ 85 $2ax - 6bx + ay - 3by$
- 37 $(x - 2y)^3$ 38 $(x + 3y)^3$ 86 $2ay^2 - axy + 6xy - 3x^2$
- 39 $(2x + 3y)^3$ 40 $(3x - 4y)^3$ 87 $3x^3 + 3x^2 - 27x - 27$
- 41 $(a + b - c)^2$ 42 $(x^2 + x + 1)^2$ 88 $5x^3 + 10x^2 - 20x - 40$
- 43 $(2x + y - 3z)^2$ 44 $(x - 2y + 3z)^2$ 89 $x^4 + 2x^3 - x - 2$ 90 $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$

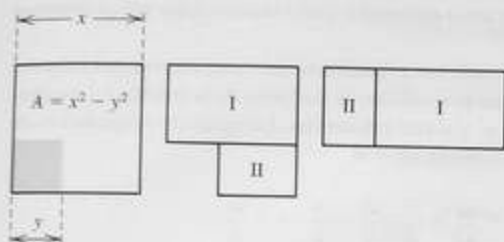
Ejercicios 45 al 102: factoriza el polinomio.

- 45 $rs + 4st$ 46 $4u^2 - 2uv$ 91 $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ 92 $6w^8 + 17w^4 + 12$
- 47 $3a^2b^2 - 6a^2b$ 48 $10xy + 15xy^2$ 93 $a^6 - b^6$ 94 $x^4 - 16$
- 49 $3x^2y^3 - 9x^3y^2$ 50 $16x^5y^2 + 8x^3y^3$ 95 $x^2 + 4x + 4 - 9y^2$ 96 $x^2 - 4y^2 - 6x + 9$
- 51 $15x^3y^4 - 25x^4y^2 + 10x^6y^4$ 52 $121r^3s^4 + 77r^2s^4 - 55r^4s^3$ 97 $y^2 - x^2 + 8y + 16$ 98 $y^2 + 9 - 6y - 4x^2$
- 53 $8x^2 - 53x - 21$ 54 $7x^2 + 10x - 8$ 99 $y^6 + 7y^3 - 8$ 100 $8c^6 + 19c^3 - 27$
- 55 $x^2 + 3x + 4$ 56 $3x^2 - 4x + 2$ 101 $x^{10} - 1$ 102 $4x^3 + 4x^2 + x$
- 57 $6x^2 + 7x - 20$ 58 $12x^2 - x - 6$
- 59 $12x^2 - 29x + 15$ 60 $21x^2 + 41x + 10$
- 61 $4x^2 - 20x + 25$ 62 $9x^2 + 24x + 16$
- 63 $25z^2 + 30z + 9$ 64 $16z^2 - 56z + 49$
- 65 $45x^2 + 38xy + 8y^2$ 66 $50x^2 + 45xy - 18y^2$

Ejercicios 103 y 104: los antiguos griegos proporcionaron demostraciones geométricas para las fórmulas de factorización de la diferencia de dos cuadrados y la diferencia de dos cubos. Establece la fórmula para el caso especial descrito.

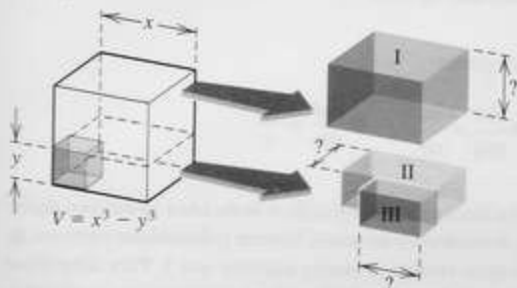
- 103 Halla las áreas de las regiones I y II de la figura, para establecer la fórmula de la diferencia de dos cuadrados para el caso especial en el que $x > y$.

Ejercicio 103



- 104 Encuentra los volúmenes de las cajas I, II y III de la figura con objeto de establecer la fórmula de la diferencia de dos cubos para el caso especial $x > y$.

Ejercicio 104



- 105 Necesidades de calorías El requerimiento de energía basal de un individuo es la cantidad mínima de calorías necesarias para mantener los procesos esenciales para la conservación de la vida, tales como circulación, temperatura corporal y respiración. Dado el sexo de una persona, el peso w (en kilogramos), la estatura h (en centímetros) y la edad y (en años), se puede calcular la necesidad básica de energía en calorías con las siguientes fórmulas, donde C_f y C_m son las calorías necesarias para mujeres y hombres, respectivamente:

$$C_f = 66.5 + 13.8w + 5h - 6.8y$$

$$C_m = 655 + 9.6w + 1.9h - 4.7y$$

- (a) Determina las necesidades de energía basal, primero para una mujer de 25 años, de 59 kg de peso y 1.63 m de estatura, y luego para un hombre de 55 años, de 75 kg de peso y 1.78 metros de estatura.
- (b) Analiza por qué el coeficiente para y es negativo en ambas fórmulas y los otros coeficientes son positivos.

1.4

Expresiones fraccionarias

El cociente de dos expresiones algebraicas se llama **expresión fraccionaria**. Como caso especial, una **expresión racional** es el cociente p/q de dos **polinomios** p y q . Dado que no se permite la división entre cero, el dominio de p/q estará formado por todos los números reales, excepto los que hacen cero al denominador. En la siguiente tabla hay dos ilustraciones.

Expresiones racionales

Cociente	El denominador es cero si	Dominio
$\frac{6x^2 - 5x + 4}{x^2 - 9}$	$x = \pm 3$	Toda $x \neq \pm 3$
$\frac{x^3 - 3x^2y + 4y^3}{y - x^3}$	$y = x^3$	Toda x y y tales que $y \neq x^3$

En la mayor parte de nuestro trabajo nos interesan las expresiones racionales en las cuales tanto numerador como denominador son polinomios de una sola variable.

Puesto que las variables de expresiones racionales representan números reales, podemos usar las propiedades de cocientes de la sección 1.1, sustituyendo las letras a , b , c y d con polinomios. La siguiente propiedad es de particular importancia, donde $bd \neq 0$:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

A veces describimos este proceso de simplificación diciendo que es posible cancelar un factor común distinto de cero en el numerador y denominador de un cociente. En la práctica, solemos indicar esta cancelación tachando el factor común, como en la ilustración que sigue, donde todos los denominadores se suponen diferentes de cero.

ILUSTRACIÓN Factores comunes cancelados

$$\blacksquare \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \quad \blacksquare \frac{mr}{npq} = \frac{m}{pq} \quad \blacksquare \frac{pqr}{rpv} = \frac{q}{v}$$

Una expresión racional está *simplificada*, o *reducida a su mínima expresión*, si numerador y denominador no tienen factores polinomiales comunes de grado positivo ni factores enteros comunes mayores que 1. Para simplificar una expresión racional, se factorizan numerador y denominador y entonces, suponiendo que los factores del denominador no son cero, se cancelan los factores comunes, como en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN Productos y cocientes de expresiones racionales

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4} &= \frac{(3x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \stackrel{\text{si } x \neq 2}{=} \frac{3x+1}{x+2} \\ \blacksquare \frac{2-x-3x^2}{6x^2-x-2} &= \frac{-(3x^2+x-2)}{6x^2-x-2} = \frac{-(3x-2)(x+1)}{(3x-2)(2x+1)} \stackrel{\text{si } x \neq 2/3}{=} \frac{-(x+1)}{2x+1} \\ \blacksquare \frac{(x^2+8x+16)(x-5)}{(x^2-5x)(x^2-16)} &= \frac{(x+4)^2(x-5)}{x(x-5)(x+4)(x-4)} \stackrel{\text{si } x \neq 5, x \neq -4}{=} \frac{x+4}{x(x-4)} \end{aligned}$$

Según se muestra en el próximo ejemplo, cuando simplificamos un producto o cociente de expresiones racionales, a menudo recurrimos a las propiedades de los cocientes a fin de obtener una expresión racional. Entonces factorizamos numerador y denominador y cancelamos los factores comunes, igual que en la ilustración anterior.

**EJEMPLO 1** Productos y cocientes de expresiones racionales

Efectúa la operación indicada y simplifica:

$$(a) \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1} \cdot \frac{2x - 2}{x - 3} \qquad (b) \frac{x + 2}{2x - 3} \div \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 3x}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1} \cdot \frac{2x - 2}{x - 3} &= \frac{(x^2 - 6x + 9)(2x - 2)}{(x^2 - 1)(x - 3)} && \text{propiedad de los cocientes} \\
 &= \frac{(x - 3)^2 \cdot 2(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)(x - 3)} && \text{factorizar todos los polinomios} \\
 &\quad \text{si } x \neq 3, x \neq 1 \\
 &= \frac{2(x - 3)}{x + 1} && \text{cancelar factores comunes}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \frac{x + 2}{2x - 3} \div \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 3x} &= \frac{x + 2}{2x - 3} \cdot \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 4} && \text{propiedad de los cocientes} \\
 &= \frac{(x + 2)x(2x - 3)}{(2x - 3)(x + 2)(x - 2)} && \text{propiedad de los cocientes; factorizar todos los polinomios} \\
 &\quad \text{si } x \neq -2, x \neq 3/2 \\
 &= \frac{x}{x - 2} && \text{cancelar factores comunes}
 \end{aligned}$$

Para sumar o restar dos expresiones racionales, por lo general hallamos un *común denominador* y usamos estas propiedades de los cocientes:

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{d} \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a - c}{d}$$

Si los denominadores de las expresiones no son los mismos, podemos obtener un común denominador multiplicando el numerador y denominador de cada fracción por una expresión apropiada. Es recomendable usar el **mínimo común denominador (mcd)** de los dos cocientes. Para hallar el mcd, factorizamos cada denominador en primos y luego formamos el producto de los diversos factores primos, utilizando el *mayor* exponente que aparezca en cada factor primo. Veamos este método con un ejemplo numérico.

EJEMPLO 2 Suma de fracciones usando el mcd

Expresa como número irracional en términos irreducibles:

$$\frac{7}{24} + \frac{5}{18}$$

SOLUCIÓN Las factorizaciones en primos de los denominadores 24 y 18 son $24 = 2^3 \cdot 3$ y $18 = 2 \cdot 3^2$. Para hallar el mcd, formamos el producto de los diferentes factores primos usando el exponente mayor asociado a cada factor. Esto dará $2^3 \cdot 3^2$. Ahora sustituimos cada fracción por otra equivalente con denominador $2^3 \cdot 3^2$ y sumamos:

$$\begin{aligned}\frac{7}{24} + \frac{5}{18} &= \frac{7}{2^3 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3^2} \\&= \frac{7}{2^3 \cdot 3} \cdot \frac{3}{3} + \frac{5}{2 \cdot 3^2} \cdot \frac{2^2}{2^2} \\&= \frac{21}{2^3 \cdot 3^2} + \frac{20}{2^3 \cdot 3^2} \\&= \frac{41}{2^3 \cdot 3^2} \\&= \frac{41}{72}\end{aligned}$$

TI-83 Plus

Las calculadoras graficadoras nos pueden proporcionar el mínimo común múltiplo (mcm) de dos números y también las sumas exactas de fracciones. Ilustraremos estas características utilizando los mismos números del ejemplo 2.

Cálculo del mcm.

MATH \triangleright 8 24 \square 18 \square
ENTER

Suma de fracciones.

7 \square 24 \square 5 \square 18 MATH
1 ENTER

```
lcm(24,18)      72
7/24+5/18=Frac 41/72
```

TI-86

2nd MATH MISC(F5)
lcm(F4) 24 \square 18 \square ENTER

7 \square 24 \square 5 \square 18 MORE
 \triangleright Frac(F1) ENTER

```
lcm(24,18)      72
7/24+5/18=Frac 41/72
```

NUM	PAGE	ANGLE	W/P	MODE
1/24	2	0/90	1/2	1/2

El método para encontrar el mcd de expresiones racionales es análogo al proceso ilustrado en el ejemplo 2. La única diferencia es que factorizamos polinomios en lugar de enteros.

EJEMPLO 3 Sumas y restas de expresiones racionales

Efectúa las operaciones y simplifica:

$$\frac{6}{x(3x-2)} + \frac{5}{3x-2} - \frac{2}{x^2}$$

SOLUCIÓN Los denominadores ya están factorizados. El mcd es $x^2(3x-2)$. Para obtener tres fracciones que tengan ese denominador necesitamos multiplicar por x , el numerador y el denominador de la primera fracción, los de la segunda por x^2 y los de la tercera por $3x-2$. Esto dará

$$\begin{aligned} \frac{6}{x(3x-2)} + \frac{5}{3x-2} - \frac{2}{x^2} &= \frac{6}{x(3x-2)} \cdot \frac{x}{x} + \frac{5}{3x-2} \cdot \frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} \cdot \frac{3x-2}{3x-2} \\ &= \frac{6x}{x^2(3x-2)} + \frac{5x^2}{x^2(3x-2)} - \frac{2(3x-2)}{x^2(3x-2)} \\ &= \frac{6x + 5x^2 - 2(3x-2)}{x^2(3x-2)} \\ &= \frac{5x^2 + 4}{x^2(3x-2)} \end{aligned}$$

TI-83 Plus**Creación de una tabla**

Haz las asignaciones Y.

Y= 6 ÷ (X,T,θ,n) ()
 3 X,T,θ,n - 2)) +
 5 ÷ (3 X,T,θ,n - 2)) -
 2 ÷ X,T,θ,n x² ENTER
 (5 X,T,θ,n x² +
 4)) ÷ (X,T,θ,n x² ()
 3 X,T,θ,n - 2)) ENTER

Plot1 Plot2 Plot3
 V1 6/(X(3X-2))+
 5/(3X-2)-2/X²
 V2 (5X²+4)/(X²(3X-2))
 V3 =
 V4 =
 V5 =

TI-86

Comprobemos la simplificación del ejemplo 3 creando y comparando tablas de valores para la expresión original y la expresión final. Asignaremos estas expresiones a Y_1 y Y_2 (más tarde denominadas *funciones*) y compararemos sus valores para $x = 1, 2, 3, \dots$

GRAPH Y(x)=(F1) 6 ÷ (X-VAR ()
 3 X-VAR - 2)) +
 5 ÷ (3 X-VAR - 2)) -
 2 ÷ X-VAR x² ENTER
 (5 X-VAR x² +
 4)) ÷ (X-VAR x² ()
 3 X-VAR - 2)) ENTER

Plot1 Plot2 Plot3
 Y1 6/(X(3X-2))+5/(3X-2)-2/X²
 Y2 (5X²+4)/(X²(3X-2))
 Y3 =
 F1 F2 F3
 F1 F2 F3
 F1 F2 F3

(continúa)

Elabora una tabla.

2nd TBLSET 1 ▽ 1 ENTER

TABLE SETUP	
TblStart=1	
ΔTbl=1	
Indent: MISC	Ask
Depend: MISC	Ask

TABLE TBLST(F2) 1 ▽ 1 ENTER

TABLE SETUP	
TblStart=1	
ΔTbl=1	
Indent: MISC	Ask

Observa la tabla.

2nd TABLE

X	V1	V2
1	1.5	1.5
2	2.77778	2.77778
3	5.25	5.25
4	9.892	9.892
5	15.944	15.944
6	23.745	23.745

TABLE(F1)

X	y1	y2
1	1.5	1.5
2	2.77778	2.77778
3	5.25	5.25
4	9.89211	9.89211
5	15.9444	15.9444

La tabla apoya la simplificación que hicimos.

EJEMPLO 4 Simplificación de sumas de expresiones

Efectúa las operaciones y simplifica:

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9} + \frac{x}{x^2-9} + \frac{1}{x-3}$$

SOLUCIÓN Comenzamos por factorizar denominadores:

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9} + \frac{x}{x^2-9} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x+5}{(x+3)^2} + \frac{x}{(x+3)(x-3)} + \frac{1}{x-3}$$

Como el mcd es $(x+3)^2(x-3)$, multiplicamos el numerador y el denominador de la primera fracción por $x-3$, los de la segunda por $x+3$, los de la tercera por $(x+3)^2$ y luego sumamos:

$$\begin{aligned} \frac{(2x+5)(x-3)}{(x+3)^2(x-3)} + \frac{x(x+3)}{(x+3)^2(x-3)} + \frac{(x+3)^2}{(x+3)^2(x-3)} \\ = \frac{(2x^2 - x - 15) + (x^2 + 3x) + (x^2 + 6x + 9)}{(x+3)^2(x-3)} \\ = \frac{4x^2 + 8x - 6}{(x+3)^2(x-3)} = \frac{2(2x^2 + 4x - 3)}{(x+3)^2(x-3)} \end{aligned}$$

Una **fracción compleja** es aquella en que numerador, denominador o ambos son una expresión fraccionaria. En determinados problemas de cálculo integral se requiere simplificar fracciones complejas del tipo del ejemplo que sigue.

EJEMPLO 5 Simplificación de una fracción compleja

Simplifica la fracción compleja:

$$\frac{\frac{2}{x+3} - \frac{2}{a+3}}{x-a}$$

SOLUCIÓN Cambiamos el numerador de la expresión dada por una sola fracción y luego usamos una propiedad para simplificar cocientes:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2}{x+3} - \frac{2}{a+3}}{x-a} &= \frac{\frac{2(a+3) - 2(x+3)}{(x+3)(a+3)}}{x-a} && \text{combinar fracciones del numerador} \\ &= \frac{2a - 2x}{(x+3)(a+3)} \cdot \frac{1}{x-a} && \text{simplificar; propiedad de los cocientes} \\ &= \frac{2(a-x)}{(x+3)(a+3)(x-a)} && \text{factorizar } 2a - 2x; \text{ propiedad de los cocientes} \\ &\stackrel{\text{si } x \neq a}{=} -\frac{2}{(x+3)(a+3)} && \text{cambiar } \frac{a-x}{x-a} \text{ por } -1 \end{aligned}$$

Una solución alternativa consiste en multiplicar numerador y denominador de la expresión dada por $(x+3)(a+3)$, el mcd del numerador y el denominador, y luego simplificar el resultado.

Algunos cocientes que no son expresiones racionales contienen denominadores de la forma $a + \sqrt{b}$ o $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; como en el siguiente ejemplo, estos cocientes se pueden simplificar multiplicando numerador y denominador por el **conjugado** $a - \sqrt{b}$ o $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, respectivamente. Por supuesto, si aparece $a - \sqrt{b}$ se multiplica por $a + \sqrt{b}$.

EJEMPLO 6 Racionalización de un denominador

Racionaliza el denominador:

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} && \text{multiplicar numerador y denominador por el conjugado de } \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} && \text{propiedad de los cocientes y diferencia de cuadrados} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} && \text{ley de los radicales} \end{aligned}$$

En cálculo a veces es necesario racionalizar el *numerador* de un cociente, como en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 7 Racionalización de un numeradorSi $h \neq 0$, racionaliza el numerador de

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

multiplicar numerador y denominador por el conjugado de $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$

$$= \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

propiedad de los cocientes y diferencia de cuadrados

$$= \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

ley de radicales

$$= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

simplificar

$$= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

cancelar $h \neq 0$

Puede parecer que logramos muy poco, dado que se presentan radicales en el denominador. Sin embargo, en cálculo es de interés determinar qué sucede si h está muy cerca de cero. Observa que si usamos la expresión *dada* obtenemos:

$$\text{Si } h \approx 0, \text{ entonces } \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+0} - \sqrt{x}}{0} = \frac{0}{0},$$

expresión que no tiene sentido; pero si usamos la forma *racionalizada* llegamos a:

$$\begin{aligned} \text{Si } h \approx 0, \text{ entonces } \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Para algunos problemas de cálculo es necesario simplificar expresiones del tipo que se muestra en este ejemplo.

**EJEMPLO 8** Simplificación de una expresión fraccionariaSimplifica, si $h \neq 0$:

$$\frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} &= \frac{x^2 - (x+h)^2}{(x+h)^2 x^2} && \text{combinar cocientes en el numerador} \\
 &= \frac{x^2 - (x^2 + 2xh + h^2)}{(x+h)^2 x^2} \cdot \frac{1}{h} && \text{elevar al cuadrado } x+h; \text{ propiedad de los cocientes} \\
 &= \frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{(x+h)^2 x^2 h} && \text{eliminar paréntesis} \\
 &= \frac{-h(2x+h)}{(x+h)^2 x^2 h} && \text{simplificar; factorizar } -h \\
 &= -\frac{2x+h}{(x+h)^2 x^2} && \text{cancelar } h \neq 0
 \end{aligned}$$

Algunos problemas del tipo dado en el ejemplo adjunto se presentan en cálculo.

EJEMPLO 9 Simplificación de una expresión fraccionaria

Simplifica:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^{2(1/3)}(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2}$$

SOLUCIÓN Una forma de simplificar la expresión es:

$$\begin{aligned}
 &\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^{2(1/3)}(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2} \\
 &= \frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - \frac{x^3}{(2x+5)^{1/2}}}{2x+5} && \text{definición de exponentes negativos} \\
 &= \frac{\frac{3x^2(2x+5) - x^3}{(2x+5)^{1/2}}}{2x+5} && \text{combinar términos en el numerador} \\
 &= \frac{6x^3 + 15x^2 - x^3}{(2x+5)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2x+5} && \text{propiedad de los cocientes} \\
 &= \frac{5x^3 + 15x^2}{(2x+5)^{3/2}} && \text{simplificar} \\
 &= \frac{5x^2(x+3)}{(2x+5)^{3/2}} && \text{factorizar numerador}
 \end{aligned}$$

Una simplificación alternativa consiste en eliminar la potencia negativa, $-\frac{1}{2}$, en la expresión dada:

$$\begin{aligned}
 &\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^{2(1/3)}(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2} \cdot \frac{(2x+5)^{1/2}}{(2x+5)^{1/2}} && \text{multiplicar numerador y denominador por } (2x+5)^{1/2} \\
 &= \frac{3x^2(2x+5) - x^3}{(2x+5)(2x+5)^{1/2}} && \text{propiedad de los cocientes y ley de los exponentes}
 \end{aligned}$$

(continúa)

El resto de la simplificación es similar.

Un tercer método de simplificación es factorizar primero el máximo factor común (mfc). En este caso, los factores comunes son x y $(2x + 5)$, y los exponentes más pequeños son 2 y $-\frac{1}{2}$ respectivamente; por tanto, el mfc es $x^2(2x + 5)^{-1/2}$, y factorizamos el numerador y simplificamos de esta forma:

$$\frac{x^2(2x + 5)^{-1/2}[3(2x + 5)^{1/2} - x]}{(2x + 5)^{1/2}} = \frac{x^2(5x + 15)}{(2x + 5)^{1/2}} = \frac{5x^2(x + 3)}{(2x + 5)^{1/2}}$$

Uno de los problemas en cálculo es determinar los valores de x que hacen el numerador igual a cero. La forma simplificada nos ayuda a contestar relativamente fácil esta cuestión: los valores son 0 y -3 .

1.4 Ejercicios

Ejercicios 1 al 4: escribe la expresión como si fuera un número racional simplificado.

$$1. \frac{3}{50} + \frac{7}{30}$$

$$2. \frac{4}{63} + \frac{5}{42}$$

$$3. \frac{5}{24} - \frac{3}{20}$$

$$4. \frac{11}{54} - \frac{7}{72}$$

Ejercicios 5 al 48: simplifica la expresión.

$$5. \frac{2x^2 + 7x + 3}{2x^2 - 7x - 4}$$

$$6. \frac{2x^2 + 9x - 5}{3x^2 + 17x + 10}$$

$$7. \frac{y^2 - 25}{y^2 - 125}$$

$$8. \frac{y^2 - 9}{y^2 + 27}$$

$$9. \frac{12 + r - r^2}{r^2 + 3r^2}$$

$$10. \frac{10 + 3r - r^2}{r^2 + 2r^2}$$

$$11. \frac{9x^2 - 4}{3x^2 - 5x + 2} \cdot \frac{9x^2 - 6x^2 + 4x^2}{27x^2 + 8x}$$

$$12. \frac{4x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 6} \cdot \frac{4x^2 + 6x^2 + 9x^2}{8x^2 - 27x^2}$$

$$13. \frac{5a^2 + 12a + 4}{a^2 - 16} \cdot \frac{25a^2 + 20a + 4}{a^2 - 2a}$$

$$14. \frac{a^2 - 8}{a^2 - 4} \cdot \frac{a}{a^2 + 8}$$

$$15. \frac{6}{x^2 - 4} - \frac{3x}{x^2 - 4}$$

$$16. \frac{15}{x^2 - 9} - \frac{5x}{x^2 - 9}$$

$$17. \frac{2}{3x + 1} - \frac{9}{(3x + 1)^2}$$

$$18. \frac{4}{(5x - 2)^2} + \frac{s}{5x - 2}$$

$$19. \frac{2}{x} + \frac{3x + 1}{x^2} - \frac{x - 2}{x^2}$$

$$20. \frac{5}{x} - \frac{2x - 1}{x^2} + \frac{x + 5}{x^2}$$

$$21. \frac{3t}{t + 2} + \frac{5t}{t - 2} - \frac{40}{t^2 - 4}$$

$$22. \frac{t}{t + 3} + \frac{4t}{t - 3} - \frac{18}{t^2 - 9}$$

$$23. \frac{4x}{3x - 4} + \frac{8}{3x^2 - 4x} + \frac{2}{x}$$

$$24. \frac{12x}{2x + 1} - \frac{3}{2x^2 + x} + \frac{5}{x}$$

$$25. \frac{2x}{x + 2} - \frac{8}{x^2 + 2x} + \frac{3}{x}$$

$$26. \frac{5x}{2x + 3} - \frac{6}{2x^2 + 3x} + \frac{2}{x}$$

$$27. \frac{p^4 + 3p^3 - 8p^2 - 24}{p^3 - 2p^2 - 9p + 18}$$

$$28. \frac{2ac + bc - 6ad - 3bd}{6ac + 2ad + 3bc + bd}$$

$$29. 3 + \frac{5}{u} + \frac{2u}{3u + 1}$$

$$30. 4 + \frac{2}{u} - \frac{3u}{u + 5}$$

$$31. \frac{2x + 1}{x^2 + 4x + 4} - \frac{6x}{x^2 - 4} + \frac{3}{x - 2}$$

$$32. \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 9} + \frac{5x}{x^2 - 9} + \frac{7}{x - 3}$$

$$33. \frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$34. \frac{\frac{1}{x+2} - 3}{\frac{4}{x} - x}$$

$$35. \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}}$$

$$36. \frac{\frac{r}{s} + \frac{s}{r}}{\frac{r^2}{s^2} - \frac{s^2}{r^2}}$$

$$37. \frac{y^{-1} + x^{-1}}{(xy)^{-1}}$$

$$38. \frac{y^{-2} - x^{-2}}{y^{-2} + x^{-2}}$$

$$39. \frac{\frac{5}{x+1} + \frac{2x}{x+3}}{\frac{x}{x+1} + \frac{7}{x+3}}$$

$$40. \frac{\frac{3}{w} - \frac{6}{2w+1}}{\frac{5}{w} + \frac{8}{2w+1}}$$

$$41 \frac{\frac{3}{x-1} - \frac{3}{a-1}}{x-a}$$

$$42 \frac{\frac{x+2}{x} - \frac{a+2}{a}}{x-a}$$

$$43 \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) - (x^2 - 3x)}{h}$$

$$44 \frac{(x+h)^3 + 5(x+h) - (x^3 + 5x)}{h}$$

$$45 \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$$

$$46 \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$47 \frac{\frac{4}{3x+3h-1} - \frac{4}{3x-1}}{h}$$

$$48 \frac{\frac{5}{2x+2h+3} - \frac{5}{2x+3}}{h}$$

Ejercicios 49 al 54: racionaliza el denominador.

$$49 \frac{\sqrt{t}+5}{\sqrt{t}-5}$$

$$50 \frac{\sqrt{t}-4}{\sqrt{t}+4}$$

$$51 \frac{81x^2 - 16y^2}{3\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}$$

$$52 \frac{16x^2 - y^2}{2\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$53 \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \quad (\text{Sugerencia: multiplica el numerador y el denominador por } \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}.)$$

$$54 \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$$

Ejercicios 55 al 60: racionaliza el numerador.

$$55 \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^2 - b^2}$$

$$56 \frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{b^2 - c^2}$$

$$57 \frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h}$$

$$58 \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$$

$$59 \frac{\sqrt{1-x-h} - \sqrt{1-x}}{h}$$

$$60 \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad (\text{Sugerencia: compara con el ejercicio 53.})$$

Ejercicios 61 al 64: expresa como una suma de términos de la forma ax^r , donde r es un número racional.

$$61 \frac{4x^2 - x + 5}{x^{2/3}}$$

$$62 \frac{x^2 + 4x - 6}{\sqrt{x}}$$

$$63 \frac{(x^2 + 2)^2}{x^3}$$

$$64 \frac{(\sqrt{x} - 3)^2}{x^3}$$

Ejercicios 65 al 68: expresa como cociente.

$$65 x^{-3} + x^2$$

$$66 x^{-4} - x$$

$$67 x^{-1/2} - x^{3/2}$$

$$68 x^{-2/3} + x^{2/3}$$

Ejercicios 69 al 82: simplifica la expresión.

$$69 (2x^2 - 3x + 1)(4)(3x + 2)^3(3) + (3x + 2)^4(4x - 3)$$

$$70 (6x - 5)^2(2)(x^2 + 4)(2x) + (x^2 + 4)^2(3)(6x - 5)^2(6)$$

$$71 (x^2 - 4)^{1/2}(3)(2x + 1)^2(2) + (2x + 1)^2\left(\frac{1}{2}\right)(x^2 - 4)^{-1/2}(2x)$$

$$72 (3x + 2)^{1/3}(2)(4x - 5)(4) + (4x - 5)^2\left(\frac{1}{3}\right)(3x + 2)^{-2/3}(3)$$

$$73 (3x + 1)^2\left(\frac{1}{2}\right)(2x - 5)^{-1/2}(2) + (2x - 5)^{1/2}(6)(3x + 1)^2(3)$$

$$74 (x^2 + 9)^2\left(-\frac{1}{3}\right)(x + 6)^{-4/3} + (x + 6)^{-1/3}(4)(x^2 + 9)^2(2x)$$

$$75 \frac{(6x + 1)^3(27x^2 + 2) - (9x^3 + 2x)(3)(6x + 1)^2(6)}{(6x + 1)^6}$$

$$76 \frac{(x^2 - 1)^2(2x) - x^2(4)(x^2 - 1)^3(2x)}{(x^2 - 1)^8}$$

$$77 \frac{(x^2 + 2)^2(2x) - x^2(3)(x^2 + 2)^2(2x)}{[(x^2 + 2)^3]^2}$$

$$78 \frac{(x^2 - 5)^2(3x^3) - x^3(4)(x^2 - 5)^2(2x)}{[(x^2 - 5)^2]^2}$$

$$79 \frac{(x^2 + 4)^{1/3}(3) - (3x)\left(\frac{1}{3}\right)(x^2 + 4)^{-2/3}(2x)}{[(x^2 + 4)^{1/3}]^2}$$

$$80 \frac{(1-x^2)^{1/2}(2x) - x^{1/2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)}{[(1-x^2)^{1/2}]^2}$$

$$81 \frac{(4x^2+9)^{1/2}(2) - (2x+3)(\frac{1}{2})(4x^2+9)^{-1/2}(8x)}{[(4x^2+9)^{1/2}]^2}$$

$$82 \frac{(3x+2)^{1/2}(\frac{1}{2})(2x+3)^{-1/2}(2) - (2x+3)^{1/2}(\frac{1}{2})(3x+2)^{-1/2}(3)}{[(3x+2)^{1/2}]^2}$$



Ejercicios 83 y 84: evalúa el par de expresiones para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5 mediante una tabla de valores. Analiza si ambas expresiones deben ser iguales.

$$83 \frac{113x^3 + 280x^2 - 150x}{22x^3 + 77x^2 - 100x - 350} \quad \frac{3x}{2x+7} + \frac{4x^2}{1.1x^2-5}$$

$$84 \frac{20x^2 + 41x + 31}{10x^3 + 10x^2} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{3.2}{x^2}$$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

1. Expresa como un número racional simplificado:

(a) $(\frac{2}{3})(-\frac{5}{6})$ (b) $\frac{1}{4} + \frac{6}{5}$ (c) $\frac{5}{6} - \frac{4}{3}$ (d) $\frac{1}{4} + \frac{6}{5}$

2. Sustituye el símbolo \square con $<$, $>$, o $=$ para que la expresión resultante sea verdadera.

(a) $-0.1 \square -0.001$ (b) $\sqrt{9} \square -3$
(c) $\frac{1}{8} \square 0.166$

3. Expresa como desigualdad.

(a) x es negativa.
(b) a está entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.
(c) El valor absoluto de x no es mayor de 4.

4. Reescribe sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifica:

(a) $|-7|$ (b) $\frac{|-5|}{-5}$ (c) $|3^{-1} - 2^{-1}|$

5. Si los puntos A , B y C de una recta coordenada tienen coordenadas -8 , 4 y -3 , respectivamente, encuentra la distancia:

(a) $d(A, C)$ (b) $d(C, A)$ (c) $d(B, C)$

6. Determina si la expresión es verdadera para todos los valores de las variables, siempre que la expresión esté definida.

(a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$
(c) $\frac{1}{\sqrt{c}-\sqrt{d}} = \frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{c-d}$

7. Expresa el número en notación científica.

(a) 93 700 000 000 (b) 0.000 004 02

8. Expresa el número en forma decimal.

(a) 6.8×10^7 (b) 7.3×10^{-4}

Ejercicios 9 y 10: reescribe la expresión sin usar el símbolo de valor absoluto, y simplifica el resultado.

9 $|x+3|$ si $x \leq -3$

10 $|(x-2)(x-3)|$ si $2 < x < 3$

Ejercicios 11 y 12: escribe el número en la forma a/b , donde a y b son enteros.

11 $-3^2 + 2^0 + 27^{-2/3}$ 12 $(\frac{1}{2})^0 - 1^2 + 16^{-3/4}$

Ejercicios 13 al 38: simplifica la expresión y racionaliza el denominador cuando sea apropiado.

13 $(3a^2b)^2(2ab^3)$ 14 $\frac{6x^2y^2}{2x^2y}$

15 $\frac{(3x^2y^{-3})^{-2}}{x^{-2}y}$ 16 $\left(\frac{a^{2/3}b^{1/2}}{a^2b}\right)^6$

17 $(-2p^2q)\left(\frac{p}{4q^2}\right)^2$ 18 $c^{-4/3}c^{1/2}c^{1/6}$

19 $\left(\frac{xy^2}{\sqrt{z}}\right)^3 + \left(\frac{x^{1/2}y^2}{z}\right)^3$ 20 $\left(\frac{-64x^3}{c^2y^5}\right)^{1/3}$

21 $[(a^{2/3}b^{-1/2})^3]^{-1}$ 22 $\frac{(3a^2c^3w^{-1})^3}{(2aw^{-1}w^2)^4}$

22 $\frac{r^{-1} + s^{-1}}{(rs)^{-1}}$

24 $(u + v)(u + v)^{-2}$

53 $(13a^2 + 4b)(13a^2 - 4b)$

54 $(a^3 - a^2)^2$

55 $(2a + b)^3$

56 $(c^2 - d^2)^3$

25 $x^{30}x^{-40}x^{-10}$

26 $x^{-2} - y^{-1}$

57 $(3x + 2y)^2(3x - 2y)^2$

58 $(a + b + c + d)^2$

27 $\sqrt[3]{(xy^{-1})^6}$

28 $\sqrt[3]{8x^3y^3z^3}$

29 $\frac{1}{\sqrt{4}}$

30 $\sqrt{\frac{a^2b^3}{c}}$

31 $\sqrt[3]{4x^3y} \sqrt{2x^3y^2}$

32 $\sqrt[3]{(-4a^3b^3c)^3}$

33 $\frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 \right)$

34 $\sqrt{\sqrt[3]{(c^3d^3)^4}}$

35 $\frac{\sqrt{12xy}}{\sqrt{3x^2y^2}}$

36 $\sqrt{(a + 2b)^3}$

37 $\sqrt{\frac{1}{2\pi^2}}$

38 $\sqrt{\frac{x^2}{9y}}$

Ejercicios 59 al 74: factoriza el polinomio.

59 $60uv + 70w$

60 $2x^2y^3 - 8r^2s^2$

61 $28x^2 + 4x - 9$

62 $16a^4 + 24a^2b^2 + 9b^4$

63 $2wy + 3yx - 8wz - 12zx$

64 $2c^3 - 12c^2 + 3c - 18$

65 $8x^3 + 64y^3$

66 $u^3v^4 - u^6v$

67 $p^6 - q^8$

68 $x^4 - 8x^3 + 16x^2$

69 $w^6 + 1$

70 $3x + 6$

71 $x^2 + 36$

72 $x^2 - 49y^2 - 14x + 49$

73 $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 32$

74 $4x^4 + 12x^3 + 20x^2$

Ejercicios 39 al 42: racionaliza el denominador.

39 $\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

40 $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a - 2}}$

41 $\frac{81x^2 - y^2}{3\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

42 $\frac{3 + \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}$

Ejercicios 43 al 58: expresa como polinomio.

43 $(3x^3 - 4x^2 + x - 7) + (x^4 - 2x^2 + 3x^2 + 5)$

44 $(4z^4 - 3z^2 + 1) - z(z^3 + 4z^2 - 4)$

45 $(x + 4)(x + 3) - (2x - 1)(x - 5)$

46 $(4x - 5)(2x^2 + 3x - 7)$

47 $(3y^2 - 2y^2 + y + 4)(y^2 - 3)$

48 $(3x + 2)(x - 5)(5x + 4)$

49 $(a - b)(a^2 + a^2b + ab^2 + b^3)$

50 $\frac{9p^2q^3 - 6p^2q^3 + 5p^2q^3}{3p^2q^3}$

51 $(3a - 5b)(2a + 7b)$

52 $(4r^2 - 3s)^2$

Ejercicios 75 al 86: simplifica la expresión.

75 $\frac{6x^2 - 7x - 5}{4x^2 + 4x + 1}$

76 $\frac{r^3 - t^3}{r^2 - t^2}$

77 $\frac{6x^2 - 5x - 6}{x^2 - 4} + \frac{2x^2 - 3x}{x + 2}$

78 $\frac{2}{4x - 5} - \frac{5}{10x + 1}$

79 $\frac{7}{x + 2} + \frac{3x}{(x + 2)^2} - \frac{5}{x}$

80 $\frac{x + x^{-2}}{1 + x^{-2}}$

81 $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 + x} - \frac{3}{x + 3}$

82 $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$

83 $\frac{x + 2 - \frac{3}{x + 4}}{\frac{x}{x + 4} + \frac{1}{x + 4}}$

84 $\frac{\frac{x}{x + 2} - \frac{4}{x + 2}}{x - 3 - \frac{6}{x + 2}}$

85 $(x^2 + 1)^{10}(4)(x + 5)^3 + (x + 5)^4 \left(\frac{1}{2} \right) (x^2 + 1)^{10}(2x)$

86 $\frac{(4 - x^2) \left(\frac{1}{2} \right) (6x + 1)^{-20}(6) - (6x + 1)^{10}(-2x)}{(4 - x^2)^2}$

87. **Glóbulos rojos en el cuerpo** El cuerpo de una persona promedio contiene 5.5 litros de sangre y alrededor de 5 millones de glóbulos rojos por milímetro cúbico de sangre. Dado que un litro es igual a $1 \text{ L} = 10^6 \text{ mm}^3$, calcula el número de glóbulos rojos en el cuerpo de una persona promedio.
88. **Pulsaciones durante una vida** Un corazón sano pulsa de 70 a 90 veces por minuto. Calcula el número de pulsaciones durante la vida de un individuo que llega a los 80 años de edad.
89. **Superficie del cuerpo** A la edad de 2 años, un niño promedio mide unos 86 cm y pesa 13 kilogramos. Utiliza la fórmula de DuBois y DuBois, $S = (0.007184)w^{0.425}h^{0.725}$, donde w es el peso y h es la estatura, para hallar la superficie S (en metros cuadrados).

90. **Expansión adiabática** Se dice que un gas se expande *adiabáticamente* si no hay pérdida ni ganancia de calor. La fórmula para la expansión adiabática del aire es $pv^{1.4} = c$, donde p es la presión, v es el volumen, y c es una constante. Si, en un cierto instante, la presión es 40 dinas/cm² y el volumen es 60 cm³, encuentra el valor de c (una dina es la unidad de fuerza en el sistema cgs).

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 1

1. **Superficie de un tanque** Se sabe que un tanque esférico contiene 10 000 galones de agua. ¿Qué otra información necesitas para hallar el área del tanque? Calcula el área del tanque.
2. **Determina las condiciones en que** $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.
3. **Demuestra que la suma de cuadrados** $x^2 + 25$ se puede factorizar al sumar y restar un término particular y seguir el método mostrado en el ejemplo 10(c) de la sección 1.3.
4. **¿Cuál es la diferencia entre las expresiones** $\frac{1}{x+1}$

$$\text{y } \frac{x-1}{x^2-1}?$$

5. **Escribe el cociente de dos polinomios arbitrarios de segundo grado en x , y evalúa el cociente con diversos valores grandes de x .** ¿Qué conclusión general puedes obtener sobre dichos cocientes?
6. **Simplifica la ecuación** $\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$. Ahora evalúa ambas ecuaciones con un valor de x ($x \neq \pm 2$). Analiza qué prueba (o no) esta evaluación y qué demuestra su simplificación (o qué no demuestra).

7. **Truco para una fiesta** ¿Quieres adivinar la edad y la estatura de tu compañera(o)? Pídele que haga lo siguiente:

1. Escribir su edad.
2. Multiplicarla por 2.
3. Sumarle 5.
4. Multiplicar por 50 la suma anterior.
5. Restarle 365.
6. Sumarle su estatura (en pulgadas).
7. Sumarle 115.

Los dos primeros dígitos del resultado son iguales a su edad, y los dos últimos son iguales a su estatura. Explica por qué lo anterior es cierto.

8. **Problema de circuitos** En un problema particular de circuitos, el voltaje de salida está definido como

$$V_{\text{salida}} = I_{\text{entrada}} \left(-\frac{RX_i}{R - X_i} \right),$$

Donde $I_{\text{entrada}} = \frac{V_{\text{entrada}}}{Z_{\text{entrada}}}$ y $Z_{\text{entrada}} = \frac{R^2 - X^2 - 3RX_i}{R - X_i}$. Halla una fórmula para V_{salida} en términos de V_{entrada} cuando R sea igual a X .

Ecuaciones y desigualdades

Los métodos para resolver ecuaciones datan de los tiempos de los babilonios (2000 a. C.), quienes describieron ecuaciones con palabras en lugar de las variables x , y y otras que usamos hoy en día. Hacia el siglo XVI, en Italia, se dieron avances importantes para hallar soluciones de ecuaciones, los cuales continuaron en todo el mundo hasta bien entrado el siglo XIX. En los tiempos modernos se usan computadoras para calcular soluciones de ecuaciones muy complicadas.

Las desigualdades donde aparecen variables han alcanzado ahora el mismo nivel de importancia que las ecuaciones y se usan con frecuencia en matemáticas aplicadas. En este capítulo estudiaremos diversos métodos para resolver ecuaciones y desigualdades básicas.

2.1

Ecuaciones

Una **ecuación** (o **igualdad**) es un enunciado en el que dos cantidades o expresiones son iguales. Las ecuaciones se utilizan en todos los campos donde se usan números reales. Como ejemplo, la ecuación

$$d = vt, \quad \text{o bien} \quad \text{distancia} = (\text{velocidad})(\text{tiempo}),$$

se emplea en la solución de problemas donde un objeto se mueve con velocidad constante. Si la velocidad constante v , es 45 millas por hora, entonces la distancia d (en millas) recorrida después de un tiempo t (en horas) está dada por

$$d = 45t.$$

Por ejemplo, si $t = 2$ h, entonces $d = 45 \cdot 2 = 90$ millas. Si deseamos hallar cuánto tarda el objeto en recorrer 75 millas, hacemos $d = 75$ y *resolvemos* la ecuación.

$$75 = 45t \quad \text{o bien} \quad 45t = 75.$$

Al dividir ambos lados de la última ecuación entre 45, obtenemos

$$t = \frac{75}{45} = \frac{5}{3}.$$

Por tanto, si $v = 45$ millas por hora, el tiempo requerido para recorrer 75 millas es $1\frac{2}{3}$ horas, o sea 1 hora y 40 minutos.

Observa que la ecuación $d = vt$ contiene tres variables: d , v y t . En buena parte de nuestro trabajo en este capítulo consideraremos ecuaciones de sólo una variable. La tabla que sigue se aplica a una variable x , pero se puede considerar cualquier otra variable. Las abreviaturas LI y LD del segundo ejemplo son por lado izquierdo y lado derecho, respectivamente.

Terminología	Definición	Ejemplo
Ecuación en x	Una declaración de igualdad que contiene una variable, x	$x^2 - 5 = 4x$
Solución, o raíz, de una ecuación en x	Un número b que produce una declaración cierta al sustituirlo por x	5 es una solución de $x^2 - 5 = 4x$, porque la sustitución dará LI: $5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$ y LD: $4 \cdot 5 = 20$, y $20 = 20$, es una declaración verdadera.
Un número b satisface una ecuación en x	b es una solución de la ecuación	5 satisface $x^2 - 5 = 4x$.
Ecuaciones equivalentes	Ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones	$2x + 1 = 7$ $2x = 7 - 1$ $2x = 6$ $x = 3$
Resolver una ecuación en x	Hallar todas las soluciones de la ecuación	Para resolver $(x + 3)(x - 5) = 0$, igualar a cero cada factor: $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, se obtienen las soluciones -3 y 5 .

Una **ecuación algebraica** en x contiene sólo expresiones algebraicas como polinomios, expresiones racionales, radicales y otras. Una ecuación de este tipo se llama **ecuación condicional** si hay números en los dominios de las expresiones que no sean soluciones; por ejemplo, la ecuación $x^2 = 9$ es condicional porque el número $x = 4$ (y otros) no es una solución. Si *todo* número en los dominios de las expresiones de una ecuación algebraica es una solución, se dice que la ecuación es una **identidad**.

A veces es difícil especificar si una ecuación es condicional o una identidad; a menudo esta última estará indicada cuando se obtiene una ecuación de la forma $p = p$, donde p es alguna expresión, luego de aplicar propiedades de los números reales. Para ilustrar esto, si multiplicamos ambos lados de la ecuación

$$\frac{x}{x^2 - 4} = \frac{x}{(x + 2)(x - 2)},$$

por $x^2 - 4$ obtenemos $x = x$. Esto nos alerta porque podemos tener una identidad, sin embargo, si no es el caso, nada se ha demostrado. Un método estándar para comprobar que una ecuación es identidad consiste en mostrar —mediante las propiedades de los números reales— que la expresión que aparece en un lado de la ecuación se puede transformar en la expresión que se encuentra en el otro lado de la ecuación dada. Esto resultó fácil en el ejemplo anterior porque sabemos que $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Por supuesto, para mostrar que una ecuación no es una identidad, basta hallar un número real en el dominio de la variable que no satisfaga la ecuación original.

La ecuación más básica en álgebra es la **ecuación lineal**, que se define en la siguiente tabla, en donde a y b denotan números reales.

Terminología	Definición	Ejemplo
Ecuación lineal en x	Una ecuación que se puede escribir en la forma $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$	$4x + 5 = 0$ $4x = -5$ $x = -\frac{5}{4}$

El ejemplo de la tabla anterior indica un método característico para resolver una ecuación lineal. Con el mismo procedimiento, vemos que

$$\text{si } ax + b = 0, \quad \text{entonces} \quad x = -\frac{b}{a},$$

siempre que $a \neq 0$; por tanto, una ecuación lineal tiene exactamente una solución.

A veces resolvemos una ecuación elaborando una lista de ecuaciones equivalentes (cada una en algún sentido más sencilla que la precedente) que termina con una ecuación de la que se pueden sacar las soluciones con facilidad. A menudo simplificamos una ecuación al agregarle o restarle la misma expresión en ambos lados. También se pueden multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por una expresión que representa un número real *diferente de cero*. En los próximos ejemplos, las frases en color indican cómo se obtuvo una ecuación equivalente a la ecuación previa. Para abreviar estas frases usamos, como en el ejemplo 1, “sumar 7” en lugar de la más precisa pero más larga *sumar 7 a ambos lados*; “restar $2x$ ”, en vez de *restar $2x$ de ambos lados*, y “dividir entre 4” quiere decir *dividir ambos lados entre 4*.

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación linealResuelve la ecuación $6x - 7 = 2x + 5$.**SOLUCIÓN** Las ecuaciones de la siguiente lista son equivalentes:

$6x - 7 = 2x + 5$	dada
$(6x - 7) + 7 = (2x + 5) + 7$	sumar 7
$6x = 2x + 12$	simplificar
$6x - 2x = (2x + 12) - 2x$	restar $2x$
$4x = 12$	simplificar
$\frac{4x}{4} = \frac{12}{4}$	dividir entre 4
$x = 3$	simplificar

✓ Comprobación $x = 3$ LI: $6(3) - 7 = 18 - 7 = 11$
 LD: $2(3) + 5 = 6 + 5 = 11$

Puesto que $11 = 11$ es un enunciado verdadero, $x = 3$ es una solución. ✓

Como se indicó en el ejemplo 1, con frecuencia comprobamos una solución sustituyéndola en la ecuación dada. Dichas pruebas pueden detectar errores introducidos por manipulaciones incorrectas o errores de aritmética.

Decimos que la ecuación del ejemplo 1 *tiene la solución* $x = 3$. Del mismo modo señalamos que la ecuación $x^2 = 4$ *tiene las soluciones* $x = 2$ y $x = -2$.

Comprobación de ecuaciones**TI-83 Plus**

Para comprobar la solución del ejemplo 1, almacenamos 3 en X y encontramos los valores del lado izquierdo y del lado derecho de la ecuación.

3 STO > X,T,θ,n ENTER
 6 X,T,θ,n - 7 ENTER
 2 X,T,θ,n + 5 ENTER

3 → X	
6X - 7	11
2X + 5	11

TI-86

3 STO > x-VAR ENTER
 6 x-VAR - 7 ENTER
 2 x-VAR + 5 ENTER

3 → x	
6x - 7	11
2x + 5	11

A medida que se hace más difícil el nivel de las ecuaciones que resolvemos, la comprobación con la calculadora graficadora se vuelve muy valiosa.

El ejemplo que viene ilustra que una ecuación aparentemente complicada puede simplificarse a una ecuación lineal.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación

Resuelve la ecuación $(8x - 2)(3x + 4) = (4x + 3)(6x - 1)$.

SOLUCIÓN Las ecuaciones de la siguiente lista son equivalentes:

$$\begin{array}{ll}
 (8x - 2)(3x + 4) = (4x + 3)(6x - 1) & \text{dada} \\
 24x^2 + 26x - 8 = 24x^2 + 14x - 3 & \text{multiplicar factores} \\
 26x - 8 = 14x - 3 & \text{restar } 24x^2 \\
 12x - 8 = -3 & \text{restar } 14x \\
 12x = 5 & \text{sumar } 8 \\
 x = \frac{5}{12} & \text{dividir entre } 12
 \end{array}$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada es $\frac{5}{12}$.

No comprobamos la solución anterior porque cada paso tiene una ecuación equivalente; sin embargo, al trabajar ejercicios o contestar un examen, conviene comprobar las respuestas para evitar errores.

Si una ecuación contiene expresiones racionales, a menudo eliminamos denominadores multiplicando ambos lados por el mcd de estas expresiones. Si multiplicamos ambos lados por una expresión que es igual a cero para algún valor x , quizá la ecuación resultante *no* equivalga a la original, como se plantea en el siguiente ejemplo.



EJEMPLO 3 Una ecuación sin soluciones

Resuelve la ecuación $\frac{3x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{ll}
 \frac{3x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2} & \text{dada} \\
 \left(\frac{3x}{x-2}\right)(x-2) = (1)(x-2) + \left(\frac{6}{x-2}\right)(x-2) & \text{multiplicar por } x-2 \\
 3x = (x-2) + 6 & \text{simplificar} \\
 3x = x + 4 & \text{simplificar} \\
 2x = 4 & \text{restar } x \\
 x = 2 & \text{dividir entre } 2
 \end{array}$$

✓ Comprobación: $x = 2$ LI: $\frac{3(2)}{(2)-2} = \frac{6}{0}$

Puesto que no se permite la división entre 0, $x = 2$ no es una solución; por tanto, la ecuación dada no tiene soluciones.

En el proceso de resolver una ecuación, como una *posible solución*, podemos obtener un número que *no* es una solución de la ecuación dada. Dicho número se llama **solución extraña** o **raíz extraña** de la ecuación dada. En el ejemplo 3, $x = 2$ es una solución (raíz) extraña de la ecuación dada.

También se pueden usar estas guías para resolver la ecuación del ejemplo 3. En este caso, seguir la guía 2 haría innecesario comprobar la solución extraña $x = 2$.

Guías para resolver una ecuación que contenga expresiones racionales

- 1 Determinar el mcd de las expresiones racionales.
- 2 Hallar los valores de la variable que hagan cero al mcd. Éstas *no* son soluciones porque dan como resultado al menos un denominador cero cuando se sustituyen en la ecuación dada.
- 3 Multiplicar cada término de la ecuación por el mcd y simplificar, con lo cual se eliminarán todos los denominadores.
- 4 Resolver la ecuación que se obtiene en la guía 3.
- 5 Las soluciones de la ecuación dada son las encontradas en la guía 4, con exclusión de los valores encontrados en la guía 2.

Seguiremos estas guías en el ejemplo que viene.

EJEMPLO 4 Una ecuación que contiene expresiones racionales

Resuelve la ecuación $\frac{3}{2x-4} - \frac{5}{x+3} = \frac{2}{x-2}$

SOLUCIÓN

Guía 1 Al describir el denominador $2x - 4$ como $2(x - 2)$, se advierte que el mcd de las tres expresiones racionales es $2(x - 2)(x + 3)$.

Guía 2 Los valores de x que hacen cero al mcd $2(x - 2)(x + 3)$ son 2 y -3, de modo que estos números no pueden ser soluciones de la ecuación.

Guía 3 Al multiplicar cada término de la ecuación por el mcd y simplificar se obtendrá lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2(x-2)} \cdot 2(x-2)(x+3) - \frac{5}{x+3} \cdot 2(x-2)(x+3) &= \frac{2}{x-2} \cdot 2(x-2)(x+3) \\ &= \frac{2}{x-2} \cdot 2(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

$$3(x+3) - 10(x-2) = 4(x+3)$$

cancelar factores semejantes

$$3x + 9 - 10x + 20 = 4x + 12$$

multiplicar factores

Figura 1

$$\begin{array}{r}
 17/11 + x \\
 1.545454545 \\
 3/(2x-4) - 5/(x+3) \\
 \\
 2/(x-2) \qquad -4.4 \\
 \qquad \qquad \qquad -4.4
 \end{array}$$

Figura 2

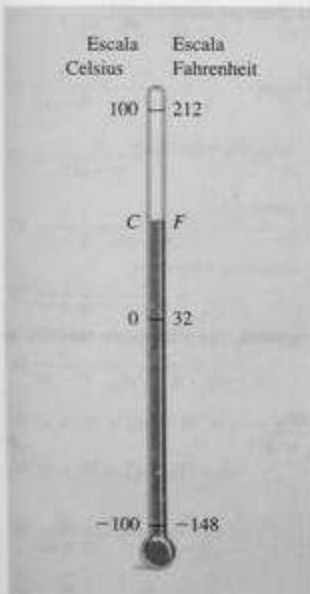


Figura 3



Guía 4 Se resuelve la última ecuación obtenida en la guía 3.

$$\begin{array}{ll}
 3x - 10x - 4x = 12 - 9 - 20 & \text{restar } 4x, 9 \text{ y } 20 \\
 -11x = -17 & \text{combinar términos semejantes} \\
 x = \frac{17}{11} & \text{dividir entre } -11
 \end{array}$$

Guía 5 Como $\frac{17}{11}$ no está incluido entre los valores (2 y -3) que hacen cero al *med* (guía 2), resulta que $x = \frac{17}{11}$ es una solución de la ecuación dada.

No comprobaremos la solución $x = \frac{17}{11}$ por sustitución porque la aritmética que se requiere es complicada. Es más fácil cotejar con cuidado las manipulaciones algebraicas que se hacen en cada paso. En cualquier caso, se recomienda hacer una comprobación con calculadora como se muestra en la figura 1.

Las fórmulas con diversas variables se presentan en muchas aplicaciones de las matemáticas. A veces es necesario despejar una variable específica en términos de las variables restantes que aparecen en la fórmula, como se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Relación entre escalas de temperatura

En el termómetro de la figura 2 se muestran las escalas Celsius y Fahrenheit. La relación entre las lecturas de temperatura C y F está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Despeje F .

SOLUCIÓN Para despejar F debe obtener una fórmula donde F aparezca sola a un lado del signo igual y no *aparezca* en el otro lado. Esto se hace como sigue:

$$\begin{array}{ll}
 C = \frac{5}{9}(F - 32) & \text{dada} \\
 \frac{9}{5}C = F - 32 & \text{multiplicar por } \frac{9}{5} \\
 \frac{9}{5}C + 32 = F & \text{sumar } 32 \\
 F = \frac{9}{5}C + 32 & \text{ecuación equivalente}
 \end{array}$$

Es posible hacer una comprobación simple del resultado del ejemplo 5 de la siguiente manera. Comience con $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ y sustituya F por 212 (una elección arbitraria) para obtener $C = 100$. Ahora, deje que $C = 100$ en $F = \frac{9}{5}C + 32$ para que $F = 212$. De nuevo, esta comprobación no *demuestra* que estamos en lo correcto, pero ciertamente da credibilidad a nuestro resultado.



EJEMPLO 6 Resistores conectados en paralelo

En teoría eléctrica, la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

se usa para hallar la resistencia total R cuando dos resistores R_1 y R_2 se conectan en paralelo (figura 3). Despeje R_1 .

SOLUCIÓN Primero se multiplican ambos lados de la ecuación dada por el mcd de las tres fracciones y luego se despeja R_1 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} && \text{dada} \\ \frac{1}{R} \cdot RR_1R_2 &= \frac{1}{R_1} \cdot RR_1R_2 + \frac{1}{R_2} \cdot RR_1R_2 && \text{multiplicar por el mcd, } RR_1R_2 \\ R_1R_2 &= RR_2 + RR_1 && \text{cancelar factores comunes} \\ R_1R_2 - RR_1 &= RR_2 && \text{reunir términos con } R_1 \text{ en un lado} \\ R_1(R_2 - R) &= RR_2 && \text{factorizar } R_1 \\ R_1 &= \frac{RR_2}{R_2 - R} && \text{dividir entre } R_2 - R\end{aligned}$$

Un método alternativo de solución es despejar primero $\frac{1}{R_1}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} && \text{dada} \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R} && \text{ecuación equivalente} \\ \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} && \text{restar } \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_1} &= \frac{R_2 - R}{RR_2} && \text{combinar fracciones}\end{aligned}$$

Si dos números diferentes de cero son iguales, sus recíprocos también lo son; por tanto,

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$$

2.1 Ejercicios

Ejercicios 1 al 44: resuelve la ecuación:

1 $-3x + 4 = -1$

2 $2x - 2 = -9$

9 $0.3(3 + 2x) + 1.2x = 3.2$

3 $4x - 3 = -5x + 6$

4 $5x - 4 = 2(x - 2)$

10 $1.5x - 0.7 = 0.4(3 - 5x)$

5 $4(2y + 5) = 3(5y - 2)$

11 $\frac{3 + 5x}{5} = \frac{4 - x}{7}$

12 $\frac{2x - 9}{4} = 2 + \frac{x}{12}$

6 $6(2y + 3) - 3(y - 5) = 0$

7 $\frac{1}{2}x + 2 = 3 - \frac{1}{3}x$

8 $\frac{1}{3}x - 1 = 4 + \frac{1}{2}x$

13 $\frac{13 + 2x}{4x + 1} = \frac{3}{4}$

14 $\frac{3}{7x - 2} = \frac{9}{3x + 1}$

$$15 \quad 8 - \frac{5}{x} = 2 + \frac{3}{x}$$

$$16 \quad \frac{3}{y} + \frac{6}{y} - \frac{1}{y} = 11$$

$$17 \quad (3x - 2)^2 = (x - 5)(9x + 4)$$

$$18 \quad (x + 5)^2 + 3 = (x - 2)^2$$

$$19 \quad (5x - 7)(2x + 1) - 10x(x - 4) = 0$$

$$20 \quad (2x + 9)(4x - 3) = 8x^2 - 12$$

$$21 \quad \frac{3x + 1}{6x - 2} = \frac{2x + 5}{4x - 13}$$

$$22 \quad \frac{5x + 2}{10x - 3} = \frac{x - 8}{2x + 3}$$

$$23 \quad \frac{2}{5} + \frac{4}{10x + 5} = \frac{7}{2x + 1}$$

$$24 \quad \frac{-5}{3x - 9} + \frac{4}{x - 3} = \frac{5}{6}$$

$$25 \quad \frac{3}{2x - 4} - \frac{5}{3x - 6} = \frac{3}{5}$$

$$26 \quad \frac{9}{2x + 6} - \frac{7}{5x + 15} = \frac{2}{3}$$

$$27 \quad 2 - \frac{5}{3x - 7} = 2$$

$$28 \quad \frac{6}{2x + 11} + 5 = 5$$

$$29 \quad \frac{1}{2x - 1} = \frac{4}{8x - 4}$$

$$30 \quad \frac{4}{5x + 2} - \frac{12}{15x + 6} = 0$$

$$31 \quad \frac{7}{y^2 - 4} - \frac{4}{y + 2} = \frac{5}{y - 2}$$

$$32 \quad \frac{4}{2u - 3} + \frac{10}{4u^2 - 9} = \frac{1}{2u + 3}$$

$$33 \quad (x + 3)^2 - (3x - 1)^2 = x^3 + 4$$

$$34 \quad (x - 1)^3 = (x + 1)^3 - 6x^2$$

$$35 \quad \frac{9x}{3x - 1} = 2 + \frac{3}{3x - 1}$$

$$36 \quad \frac{2x}{2x + 3} + \frac{6}{4x + 6} = 5$$

$$37 \quad \frac{1}{x + 4} + \frac{3}{x - 4} = \frac{3x + 8}{x^2 - 16}$$

$$38 \quad \frac{2}{2x + 3} + \frac{4}{2x - 3} = \frac{5x + 6}{4x^2 - 9}$$

$$39 \quad \frac{4}{x + 2} + \frac{1}{x - 2} = \frac{5x - 6}{x^2 - 4}$$

$$40 \quad \frac{2}{2x + 5} + \frac{3}{2x - 5} = \frac{10x + 5}{4x^2 - 25}$$

$$41 \quad \frac{2}{2x + 1} - \frac{3}{2x - 1} = \frac{-2x + 7}{4x^2 - 1}$$

$$42 \quad \frac{3}{2x + 5} + \frac{4}{2x - 5} = \frac{14x + 3}{4x^2 - 25}$$

$$43 \quad \frac{5}{2x + 3} + \frac{4}{2x - 3} = \frac{14x + 3}{4x^2 - 9}$$

$$44 \quad \frac{-3}{x + 4} + \frac{7}{x - 4} = \frac{-5x + 4}{x^2 - 16}$$

Ejercicios 45 al 50: muestra que la ecuación es una identidad.

$$45 \quad (4x - 3)^2 - 16x^2 = 9 - 24x$$

$$46 \quad (3x - 4)(2x + 1) + 5x = 6x^2 - 4$$

$$47 \quad \frac{x^2 - 9}{x + 3} = x - 3$$

$$48 \quad \frac{x^3 + 8}{x + 2} = x^2 - 2x + 4$$

$$49 \quad \frac{3x^2 + 8}{x} = \frac{8}{x} + 3x$$

$$50 \quad \frac{49x^2 - 25}{7x - 5} = 7x + 5$$

Ejercicios 51 y 52: ¿para qué valor de c el número a es una solución de la ecuación?

$$51 \quad 4x + 1 + 2c = 5c - 3x + 6; \quad a = -2$$

$$52 \quad 3x - 2 + 6c = 2c - 5x + 1; \quad a = 4$$

Ejercicios 53 y 54: determina si las dos ecuaciones son equivalentes.

$$53 \quad (a) \quad \frac{7x}{x - 5} = \frac{42}{x - 5}, \quad x = 6$$

$$(b) \quad \frac{7x}{x - 5} = \frac{35}{x - 5}, \quad x = 5$$

$$54 \quad (a) \quad \frac{8x}{x - 7} = \frac{72}{x - 7}, \quad x = 9$$

$$(b) \quad \frac{8x}{x - 7} = \frac{56}{x - 7}, \quad x = 7$$

Ejercicios 55 y 56: encuentra valores para a y b tales que $\frac{8}{3}$ sea una solución de la ecuación.

55 $ax + b = 0$

56 $ax^2 + bx = 0$

Ejercicios 57 y 58: indica cuál ecuación no es equivalente a la ecuación que le precede.

57 $x^2 - x - 2 = x^2 - 4$
 $(x + 1)(x - 2) = (x + 2)(x - 2)$
 $x + 1 = x + 2$
 $1 = 2$

58 $5x + 6 = 4x + 3$
 $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 4x + 3$
 $(x + 2)(x + 3) = (x + 1)(x + 3)$
 $x + 2 = x + 1$
 $2 = 1$

Ejercicios 59 al 62: despeja de la fórmula, la variable especificada.

59 $EK + L = D - TK$ para K

60 $CD + C = PC + N$ para C

61 $M = \frac{Q + 1}{Q}$ para Q

62 $\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$ para α

Ejercicios 63 al 76: la fórmula se presenta en la aplicación indicada. Despeja la variable especificada.

63 $I = Prt$ para P (interés simple)

64 $C = 2\pi r$ para r (circunferencia de un círculo)

65 $A = \frac{1}{2}bh$ para h (área de un triángulo)

66 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ para h (volumen de un cono)

67 $F = g \frac{mM}{d^2}$ para m (ley de Newton de la gravitación)

68 $R = \frac{V}{I}$ para I (ley de Ohm en teoría eléctrica)

69 $P = 2l + 2w$ para w (perímetro de un rectángulo)

70 $A = P + Prt$ para r (capital más interés)

71 $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$ para b_1 (área de un trapecio)


72 $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ para v_0 (distancia de caída de un cuerpo)

73 $S = \frac{P}{q + p(1 - q)}$ para q (ley de Amdahl para computadoras)

74 $S = 2(hw + hw + hf)$ para h (área superficial de una caja rectangular)

75 $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ para q (ecuación de las lentes)

76 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ para R_2 (tres resistores conectados en paralelo)

 Ejercicios 77 y 78: escoge la ecuación que mejor describa la tabla de datos. (Sugerencia: haz las asignaciones a $Y_1 - Y_4$; revisa una tabla de sus valores.)

77

x	y
1	0.8
2	-0.4
3	-1.6
4	-2.8
5	-4.0

(1) $y = -1.2x + 2$

(2) $y = -1.2x^2 + 2$

(3) $y = 0.8\sqrt{x}$

(4) $y = x^{3.5} - 0.2$

78

x	y
1	-9
2	-4
3	11
4	42
5	95

(1) $y = 13x - 22$

(2) $y = x^2 - 2x - 8$

(3) $y = 4\sqrt{x} - 13$

(4) $y = x^3 - x^2 + x - 10$

2.2

Problemas aplicados

Las ecuaciones se usan con frecuencia en la solución de *problemas aplicados*; es decir, problemas con aplicaciones matemáticas en otros campos. Debido a la ilimitada variedad de problemas aplicados, es difícil establecer reglas específicas para hallar soluciones. Las siguientes guías pueden ser útiles, siempre que sea posible formular el problema en términos de una ecuación en una variable.

**Guías para resolver
problemas aplicados**

- 1 Si el problema se expresa por escrito, léelo con cuidado varias veces y considera los datos junto con la cantidad desconocida que ha de encontrarse.
- 2 Introduce una literal para denotar la cantidad desconocida. Éste es uno de los pasos más importantes en la solución. Frases que tengan palabras como *qué*, *hallar*, *cuánto*, *a qué distancia* o *cuándo* ponen sobre aviso respecto a la cantidad desconocida.
- 3 Si es necesario, haz un dibujo y pónle leyendas.
- 4 Lista los datos conocidos y sus relaciones con la cantidad desconocida, una ecuación en que aparecen enunciados escritos (en lugar de letras o números) en uno o ambos lados del signo igual, puede describir una relación.
- 5 Después de analizar la lista de la guía 4, formula una ecuación que describa con precisión lo que se expresa en palabras.
- 6 Resuelve la ecuación formulada en la guía 5.
- 7 Comprueba las soluciones obtenidas en la guía 6 consultando el enunciado original del problema. Verifica que la solución esté acorde con las condiciones indicadas.

El próximo ejemplo ilustra el uso de estas guías.

EJEMPLO 1 Promedio de examen

En el curso de álgebra, un estudiante obtiene calificaciones de 64 y 78. ¿Qué calificación en el tercer examen le dará un promedio de 80?

SOLUCIÓN

Guía 1 Lee el problema al menos una vez más.

Guía 2 La cantidad desconocida es la calificación del tercer examen, así que dejamos que

$$x = \text{calificación del tercer examen.}$$

Guía 3 No es necesario un dibujo o un diagrama para este problema.

Guía 4 Los datos conocidos son las calificaciones 64 y 78 de los primeros dos exámenes. Una relación en la que se incluya a x es la calificación promedio de 64, 78 y x ; por tanto,

$$\text{calificación promedio} = \frac{64 + 78 + x}{3}$$

(continúa)

Guía 5 Como la calificación promedio en 4 es 80, considere la ecuación

$$\frac{64 + 78 + x}{3} = 80.$$

Guía 6 Resolvemos la ecuación formulada en 5:

$$64 + 78 + x = 80 \cdot 3 \quad \text{multiplicar por 3}$$

$$142 + x = 240 \quad \text{simplificar}$$

$$x = 98 \quad \text{restar 142}$$

Guía 7 Comprobación Si las tres calificaciones de los exámenes son 64, 78 y 98, entonces el promedio es

$$\frac{64 + 78 + 98}{3} = \frac{240}{3} = 80,$$

como se desea.

En los ejemplos restantes, trata de identificar las guías explícitas que se usan en las soluciones.

EJEMPLO 2 Cálculo de un precio de venta

Una tienda de ropa, que hace una venta de liquidación, anuncia que ha reducido todos los precios un 20%. Si una camiseta se vende en \$28, ¿cuál fue su precio antes de la rebaja?

SOLUCIÓN En vista de que la cantidad desconocida es el precio anterior a la rebaja, hacemos.

$$x = \text{precio anterior a la rebaja.}$$

A continuación se toma nota de los siguientes datos:

$$0.20x = \text{descuento del 20\% al precio anterior a la rebaja}$$

$$28 = \text{precio de barata.}$$

El precio de barata se determina como sigue:

$$(\text{precio anterior a la rebaja}) - (\text{descuento}) = \text{precio de barata}$$

Se traduce la última ecuación en símbolos, se resuelve y resulta que

$$x - 0.20x = 28 \quad \text{formular una ecuación}$$

$$0.80x = 28 \quad \text{restar } 0.20x \text{ de } 1x$$

$$x = \frac{28}{0.80} = 35 \quad \text{dividir entre } 0.80$$

El precio anterior a la rebaja era de \$35.

Comprobación Si una camisa de \$35 se rebaja 20%, el descuento es $(0.20)(35) = 7$ y el precio de barata es $35 - 7$, o sea \$28.

Los bancos y otras instituciones financieras pagan intereses sobre las inversiones. Por lo general este interés es *compuesto* (como se describe en la sección 5.2); si se invierte o presta dinero durante un plazo corto, pueden pagar *interés simple* usando esta fórmula:

Fórmula de interés simple

Si se invierte una cantidad de dinero C (o **capital inicial**) a una tasa r de interés simple (expresada como decimal), el **interés simple** I al término de t años es

$$I = Crt.$$

La tabla adjunta ilustra el interés simple para tres casos.

C inicial	Tasa de interés r	Números de años t	Interés $I = Crt$
\$1000	$8\% = 0.08$	1	$\$1\,000(0.08)(1) = \80
\$2000	$6\% = 0.06$	$1\frac{1}{2}$	$\$2\,000(0.06)(1.5) = \180
\$3200	$5\frac{1}{2}\% = 0.055$	2	$\$3\,200(0.055)(2) = \352

EJEMPLO 3 Inversión en dos acciones

Una empresa inversionista tiene \$100 000 de un cliente para invertir y decide ponerlos en dos acciones, A y B. La tasa esperada de interés anual, o interés simple, de la acción A es de 15%, pero tiene algún riesgo y el cliente no desea invertir más de \$50 000 en dicha acción. Se anticipa que la tasa anual de interés de la acción B, que es más estable, es de 10%. Determina si hay una forma de invertir el dinero de modo que el interés anual sea

- (a) \$12 000 (b) \$13 000.

SOLUCIÓN El interés anual está dado por $I = Cr$, que resulta de la fórmula de interés simple $I = Crt$ donde $t = 1$. Si x denota la cantidad invertida en la acción A, entonces se invertirán $100\,000 - x$ en la acción B. Esto lleva a las siguientes igualdades:

x = cantidad invertida en la acción A al 15%

$100\,000 - x$ = cantidad invertida en la acción B al 10%

$0.15x$ = interés anual de la acción A

$0.10(100\,000 - x)$ = interés anual de la acción B.

Al sumar el interés de ambas acciones obtenemos

$$\text{interés anual total} = 0.15x + 0.10(100\,000 - x).$$

(continúa)

Simplificamos el lado derecho de la ecuación y llegamos a

$$\text{interés anual total} = 10\,000 + 0.05x.$$

- (a) El interés anual total es de \$12 000 si

$$10\,000 + 0.05x = 12\,000$$

$$0.05x = 2000$$

$$x = \frac{2000}{0.05} = 40\,000$$

Por tanto, deben invertirse \$40 000 en la acción A, y los \$60 000 restantes en la acción B. Como la cantidad destinada a la acción A no es mayor que \$50 000, esta forma de invertir dinero satisface las indicaciones del cliente.

- ✓ **Comprobación** Si se invierten \$40 000 en la acción A y \$60 000 en la acción B, entonces el interés anual total es

$$40\,000(0.15) + 60\,000(0.10) = 6000 + 6000 = 12\,000.$$

- (b) El interés anual total es de \$13 000 si

$$10\,000 + 0.05x = 13\,000$$

$$0.05x = 3000$$

$$x = \frac{3000}{0.05} = 60\,000.$$

Así pues, deben invertirse \$60 000 en la acción A y los otros \$40 000 en la B. Este plan *no* satisface las indicaciones del cliente respecto de no invertir más de \$50 000 en la acción A; en consecuencia, la empresa no puede invertir en las acciones A y B de modo tal que el interés anual total sea de \$13 000. /

En ciertas aplicaciones es necesario combinar dos sustancias a fin de obtener una mezcla preescrita, según se ilustra en los siguientes dos ejemplos.



EJEMPLO 4 Mezcla de sustancias químicas

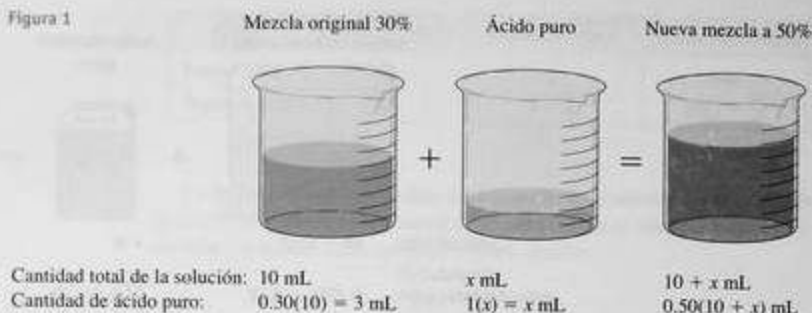
Un químico tiene 10 mL de una solución que contiene un ácido a 30% de concentración. ¿Cuántos mililitros de ácido puro han de agregarse para aumentar la concentración a 50%?

SOLUCIÓN Puesto que la cantidad desconocida es el ácido puro por agregar, se hace

$$x = \text{número de mL de ácido puro por agregar.}$$

Para visualizar el problema hagamos un dibujo, como en la figura 1, y pongamos las leyendas apropiadas.

Figura 1



Dado que se puede expresar la cantidad de ácido puro de la solución final como $3 + x$ (de los dos primeros vasos) o $0.50(10 + x)$, se obtiene la ecuación

$$3 + x = 0.50(10 + x).$$

Ahora despejamos x :

$$3 + x = 5 + 0.5x \quad \text{multiplicar factores}$$

$$0.5x = 2 \quad \text{restar } 0.5x \text{ y } 3$$

$$x = \frac{2}{0.5} = 4 \quad \text{dividir entre } 0.5$$

Por tanto, hay que agregar 4 mL de ácido a la solución original.

✓ **Comprobación** Si se agregan 4 mL de ácido a la solución dada, la nueva solución contendrá 14 mL, de los cuales 7 mL son ácido puro. Ésta es la concentración al 50% que se deseaba. ✍

EJEMPLO 5 Cambio de anticongelante

Un radiador contiene 8 cuartos [1 cuarto (unidad sajona que se abrevia qt) \approx 0.946 l] de una mezcla de agua y anticongelante. Si 40% de la mezcla es anticongelante, ¿cuánto de ésta debe drenarse y sustituirse por anticongelante puro para que la mezcla resultante contenga 60% de anticongelante?

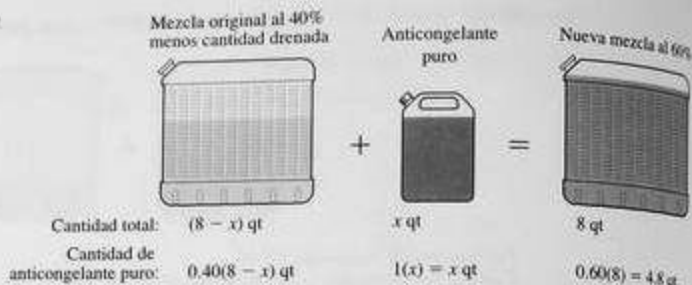
SOLUCIÓN Sea

x = número de cuartos de la mezcla por drenar.

Como había 8 qt en la mezcla original a 40%, el problema se puede describir como en la figura 2.

(continúa)

Figura 2



En vista de que el número de cuartos de anticongelante puro de la mezcla final se puede expresar como $0.40(8 - x) + x$ o 4.8 , se obtiene la ecuación

$$0.40(8 - x) + x = 4.8.$$

Ahora despejamos x :

$$3.2 - 0.4x + x = 4.8$$

multiplicar factores

$$0.6x = 1.6$$

combinar términos en x y restar 3.2

$$x = \frac{1.6}{0.6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

dividir entre 0.6

En consecuencia, hay que drenar $\frac{8}{3}$ qt de la mezcla original.

Comprobación Observemos primero que la cantidad de anticongelante de la mezcla original de 8 qt era $0.4(8)$, o sea 3.2 qt. Al drenar $0.4(\frac{8}{3})$ qt de la mezcla original al 40%, se pierden $0.4(\frac{8}{3})$ qt de anticongelante y, por tanto, quedarán $3.2 - 0.4(\frac{8}{3})$ qt de anticongelante después del drenado. Si agregamos $\frac{8}{3}$ qt de anticongelante puro, la cantidad de anticongelante de la mezcla final es

$$3.2 - 0.4(\frac{8}{3}) + \frac{8}{3} = 4.8 \text{ qt.}$$

Este número, 4.8, es el 60% de 8.



EJEMPLO 6 Comparación de tiempos de recorrido de automóviles

Dos ciudades están conectadas por una carretera. Un auto sale de la ciudad B a la 1:00 P.M. y avanza con una rapidez constante de 40 mi/h hacia la ciudad C. Treinta minutos después, otro vehículo sale de B y avanza hacia C con una rapidez constante de 55 mi/h. Si despreciamos las longitudes de los autos, ¿a qué hora alcanzará el segundo automóvil al primero?

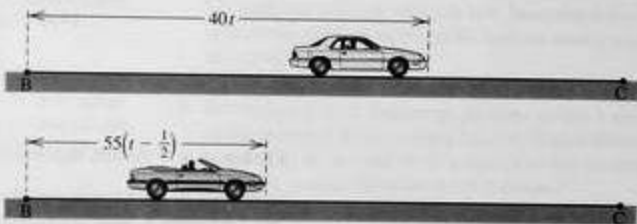
SOLUCIÓN Denotemos con t el número de horas de viaje del primer auto después de la 1:00 P.M. Como el segundo sale de B a la 1:30 P.M. ha viajado $\frac{1}{2}$ hora menos que el primero, lo que lleva a esta tabla.

Autos	Rapidez (mi/h)	Horas de viaje	Millas recorridas
Primer auto	40	t	$40t$
Segundo auto	55	$t - \frac{1}{2}$	$55(t - \frac{1}{2})$

La figura 3 ilustra las posibles posiciones de los vehículos t horas después de la 1:00 P.M. El segundo alcanza al primero cuando el número de millas recorridas por los dos autos es igual; esto es, cuando

$$55(t - \frac{1}{2}) = 40t.$$

Figura 3



Ahora despejamos t :

$$55t - \frac{55}{2} = 40t \quad \text{multiplicar factores}$$

$$15t = \frac{55}{2} \quad \text{restar } 40t \text{ y sumar } \frac{55}{2}$$

$$t = \frac{55}{30} = \frac{11}{6} \quad \text{dividir entre 15}$$

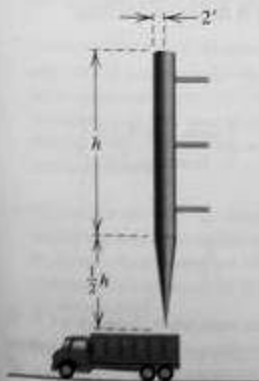
En consecuencia, t es $1\frac{5}{6}$ horas o, lo que es igual, 1 hora 50 minutos después de la 1:00 P.M. por lo que el segundo auto alcanza al primero a las 2:50 P.M.

✓ **Comprobación** A las 2:50 P.M. el primer auto ha viajado durante $1\frac{5}{6}$ horas, y su distancia de B es $40(1\frac{5}{6}) = \frac{220}{3}$ millas. A las 2:50 P.M. el segundo auto ha viajado durante $1\frac{1}{3}$ horas y está a $55(\frac{4}{3}) = \frac{220}{3}$ millas de B; por lo tanto, están juntos a las 2:50 P.M. ✓

EJEMPLO 7 Construcción de una tolva elevadora de granos

Una tolva elevadora de granos ha de construirse como se muestra en la figura 4, con un cilindro circular recto de 2 pies de radio y h pies de altura en lo alto de un cono circular recto cuya altura es la mitad de la del cilindro. ¿Qué valor de h hará que el volumen total V de la tolva sea de 500 pies³?

Figura 4



SOLUCIÓN Si V_{cilindro} y V_{cono} denotan el volumen (en pies³) y h_{cilindro} y h_{cono} representan las alturas (en pies) del cilindro y el cono, respectivamente, entonces, usando las fórmulas para volumen indicadas en las páginas finales del libro se obtiene:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h_{\text{cilindro}} = \pi(2)^2 h = 4\pi h$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi(2)^2 \left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{2}{3} \pi h$$

Como el volumen total V de la tolva debe ser de 500 pies³, debemos tener

$$4\pi h + \frac{2}{3}\pi h = 500$$

$$V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cono}} = V_{\text{tolva}}$$

$$12\pi h + 2\pi h = 1500$$

multiplicar por 3

$$14\pi h = 1500$$

combinar términos

$$h = \frac{1500}{14\pi} \approx 34.1 \text{ pies. dividir entre } 14\pi$$

EJEMPLO 8 Tiempo requerido para realizar un trabajo

Se dispone de dos bombas para llenar un tanque de almacenamiento de gasolina. La bomba A, sola, puede hacerlo en tres horas y la bomba B, en cuatro. Si se usan las dos al mismo tiempo, ¿cuánto tardarán en llenar el tanque?

SOLUCIÓN Denotemos con t la cantidad de horas necesarias para que A y B llenen el tanque si se usan en forma simultánea. Es conveniente introducir la *parte* del tanque que se llena en una hora como sigue:

$$\frac{1}{3} = \text{parte del tanque que A llena en una hora}$$

$$\frac{1}{4} = \text{parte del tanque que B llena en una hora}$$

$$\frac{1}{t} = \text{parte del tanque que A y B llenan en una hora.}$$

Debido al hecho de que

$$\left(\begin{array}{c} \text{parte que A} \\ \text{llena en 1 h} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} \text{parte que B} \\ \text{llena en 1 h} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \text{parte que A y B} \\ \text{llenan en 1 h} \end{array}\right),$$

obtenemos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{t}, \quad \text{o bien} \quad \frac{7}{12} = \frac{1}{t}.$$

Tomamos el recíproco de cada lado de la última ecuación y llegamos a $t = \frac{12}{7}$; por tanto, si las bombas A y B se usan al mismo tiempo, el tanque se llenará en $1\frac{5}{7}$ horas, o sea en aproximadamente 1 hora y 43 minutos.

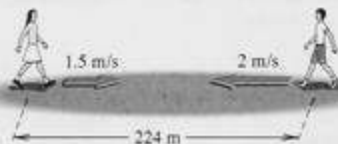
2.2 Ejercicios

1. **Clasificación de exámenes.** Un estudiante de un curso de álgebra obtiene notas de 75, 82, 71 y 84 en los exámenes. ¿Qué calificación en su siguiente prueba elevará su promedio a 80?
2. **Promedio final de clase.** Antes del examen final, un estudiante obtiene calificaciones de 72, 80, 65, 78 y 60 en exámenes. Si el examen final equivale a un tercio de la calificación final, ¿qué calificación debe obtener en el para tener un promedio final de 76?
3. **Sueldo bruto.** Un trabajador percibe \$492 de salario después de restar deducciones, las cuales corresponden a 40% del sueldo bruto. ¿Cuál es su sueldo bruto?
4. **Costo de comer fuera de casa.** Una pareja desea cenar en un restaurante pero no quiere gastar más de \$70. Si se agrega un impuesto de ventas de 6% a la cuenta y piensan dar una propina de 15% después de agregar el impuesto, ¿cuál es la cantidad máxima que pueden consumir?
5. **Cociente de inteligencia.** El cociente de inteligencia (IQ) de una persona se calcula multiplicando por 100 el cociente resultante de la división de su edad mental entre su edad cronológica.
 - (a) Calcula el IQ de un niño de 12 años que tiene una edad mental de 15.
 - (b) Calcula la edad mental de una persona de 15 años de edad cuyo IQ es de 140.
6. **Superficie de la Tierra.** El agua cubre el 70.8% de la superficie terrestre, es decir, cerca de 361×10^6 km². Calcula aproximadamente la superficie total de la Tierra.
7. **Costo del aislamiento.** El costo de instalar aislamiento térmico en una casa particular de dos recámaras es de \$1080. En la actualidad, el promedio mensual de los costos de calefacción es de \$60, pero se espera que el aislamiento los reduzca 10%. ¿Cuántos meses tardará en recuperar el costo del aislamiento?
8. **Pago de tiempo extra.** El salario básico de un trabajador es de \$10 por hora, pero recibe un tanto y medio de esta cuota por cada hora que rebasa las 40 horas por semana. Si el cheque de su semana es de \$595, ¿cuántas horas de tiempo extra trabajó?
9. **Cuentas de ahorro.** Un estudiante de álgebra ha ganado \$100 000 en una lotería y desea depositarlos en cuentas de ahorros en dos instituciones financieras. Una paga 8% de interés simple, pero los depósitos se aseguran sólo a \$50 000. La segunda cuenta paga 6.4% de interés simple, pero los depósitos se aseguran hasta por \$100 000. Determina si el dinero se puede depositar de modo que esté asegurado totalmente y gane intereses anuales de \$7500.
10. **Fondos municipales.** Un gobierno municipal ha aprobado la construcción de un estadio deportivo de \$50 millones, se captarán hasta \$30 millones por la venta de bonos que pagarán interés simple a una tasa de 12% anual. Una compañía de seguros financiará la cantidad restante (hasta \$40 millones) a una tasa de interés simple de 10%. Determina si el estadio es financiable de modo que los intereses anuales sean de \$5.2 millones.
11. **Asistencia a un cine.** Seiscientas personas asisten a presenciar el estreno de una película. Los boletos para adultos cuestan \$5 y los de niños \$2. Si la taquilla recibió un total de \$2 400, ¿cuántos niños asistieron al estreno?
12. **Sueldo por hora.** El tiempo de servicio de un ingeniero consultor se factura en \$60 por hora y el de su ayudante, en \$20 por hora. Un cliente recibe una cuenta de \$580 por determinado trabajo. Si el ayudante trabajó cinco horas menos que el ingeniero, ¿cuántas horas facturó cada uno?
13. **Preparación de una solución de glucosa.** En cierta prueba médica diseñada para medir la tolerancia a los carbohidratos, un adulto ingiere 7 onzas (oz) de una solución de glucosa al 30%; cuando la prueba se aplica a un niño, la concentración de glucosa debe disminuirse al 20%. ¿Cuánta solución de glucosa al 30% y cuánta agua se necesitan a fin de preparar 7 oz de una solución de glucosa al 20%?
14. **Preparación de gotas para los ojos.** Un farmacéutico debe preparar 15 mililitros de gotas oftálmicas para un paciente con glaucoma. La solución ha de tener un ingrediente activo al 2%, pero el farmacéutico sólo tiene en existencia soluciones al 10% y 1%. ¿Cuánto de cada tipo de solución requiere la elaboración de la receta?
15. **Preparación de una aleación.** La plata británica sterling es una aleación que contiene 7.5% de cobre en peso. ¿Cuántos gramos de cobre puro y cuántos de plata sterling deben emplearse para preparar 200 g de una aleación de cobre-plata con 10% de cobre en peso?

- 16 Concentración de medicamentos Para preparar teofilina, un agente antiastmático, se usa un elixir con una concentración de fármaco de 5 mg/mL y un jarabe como saborizante. ¿Qué cantidad de ambos se necesita para preparar 100 mL de solución con una concentración del medicamento de 2 mg/mL?

- 17 Rapidez al caminar Dos niños, que se encuentran a 224 m entre sí, empiezan a caminar uno hacia el otro al mismo instante a razón de 1.5 m/s y 2 m/s, respectivamente (vea la figura).

- (a) ¿Cuándo se encontrarán?
(b) ¿Cuánto habrá caminado cada uno?



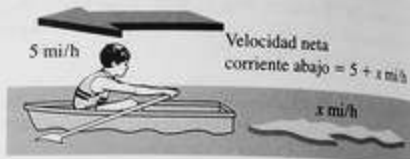
- 18 Rapidez de carrera Un corredor empieza a correr desde el principio de una pista de carreras con una rapidez constante de 6 mi/h. Cinco minutos más tarde, un segundo corredor sale del mismo sitio y hace el mismo recorrido con una rapidez de 8 mi/h. ¿En cuánto tiempo alcanzará al primero?

- 19 Rapidez de una máquina barrenieves A las 6:00 A.M. una barrenieves que avanza con una rapidez constante empieza a despejar una carretera que conduce a las afueras de la ciudad. A las 8:00 A.M. un automóvil toma esa carretera a una velocidad de 30 mi/h y alcanza a dicha máquina 30 minutos después. Encuentra la rapidez de la máquina.

- 20 Alcance de radiocomunicación Dos niños tienen aparatos de radiocomunicación cuyo alcance máximo es de dos millas. Uno de los menores empieza a caminar a partir de determinado lugar hacia el norte, a la 1:00 P.M. a razón de 4 mi/h. El otro pequeño sale del mismo sitio a la 1:15 P.M. y camina hacia el sur a 6 mi/h. ¿A qué hora ya no podrán comunicarse?

- 21 Velocidad al remar Un muchacho puede remar con una rapidez constante de 5 mi/h en aguas tranquilas (vea la figura). Rema a contracorriente durante 15 minutos y luego corriente abajo y regresa al punto de partida en 12 minutos.

Ejercicio 21



- (a) Encuentra la rapidez de la corriente.
(b) Encuentra la distancia total que recorrió.

- 22 Rendimiento de combustible Un agente de ventas compró un automóvil que promediaba 25 mi/gal en la ciudad y 40 mi/gal en carretera, según la publicidad. En un viaje reciente de negocios utilizó 51 galones para recorrer 1800 millas. Si suponemos que el anuncio del rendimiento es correcto, ¿cuántas millas recorrió en la ciudad?

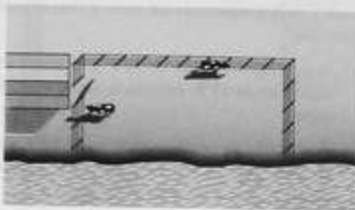
- 23 Distancia a un blanco Se dispara horizontalmente un proyectil hacia un blanco y el sonido del impacto se escucha 1.2 segundos más tarde. Si la rapidez del proyectil es de 3300 pies/s y la rapidez del sonido es de 1100 pies/s, ¿a qué distancia se halla el blanco?

- 24 Rapidez al trotar Una corredora sale a las 3:00 P.M. y se dirige hacia el norte con un ritmo de 6 minutos por milla. Más tarde cambia de dirección y corre hacia el sur a un paso de 7 minutos por milla. Si regresa al punto de partida a las 3:45 P.M. calcula el número total de millas que corrió.

- 25 Cercado de un terreno Un campesino desea cercar un terreno rectangular y piensa usar 180 pies de alambardo y parte de la orilla de un río, en vez de cercar uno de los lados del rectángulo, como se muestra en la figura. Encuentra el área del terreno si la longitud del lado paralelo a la orilla del río es

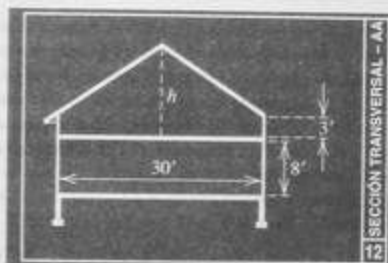
- (a) El doble de la longitud de uno de los lados adyacentes.
(b) La mitad de la longitud de un lado adyacente.
(c) La misma longitud de un lado adyacente.

Ejercicio 25



- 26 Dimensiones de una casa En la figura se presenta la sección transversal de una casa de dos pisos, para la que la altura central del segundo piso, h , todavía no ha sido determinada. Encuentra h tal que el área transversal del segundo piso sea la misma que la del primero.

Ejercicio 26



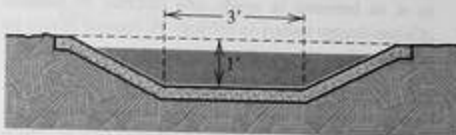
- 27 Dimensiones de una ventana Se diseña un vitral en forma de rectángulo bajo de un semicírculo (vea la figura). El ancho de la ventana es de 3 pies, pero la altura h todavía no se ha definido. Si se usan 24 pies^2 de vidrio, halla la altura h .

Ejercicio 27



- 28 Dimensiones de un canal de drenaje La sección transversal de un canal de desagüe es un trapecio isósceles, cuya base menor es de 3 pies y una altura de 1 pie, como se ve en la figura. Determina el ancho de la base mayor para que el área transversal del canal sea de 5 pies^2 .

Ejercicio 28



- 29 Construcción de un silo Se desea construir un silo grande para granos en forma de cilindro circular con una semiesfera unida a la parte superior (vea la figura). El diámetro del silo debe ser de 30 pies pero la altura aún no se establece. Encuentra la altura h del silo para que su capacidad sea de $11\,250 \pi \text{ pies}^3$.

Ejercicio 29



- 30 Dimensiones de un cono (barquillo) El cono de la figura ha de tener una capacidad de 8 pulg^3 de nieve cuando se llene hasta el fondo. El diámetro del cono es de 2 pulg y la copa de nieve tiene forma de semiesfera. Encuentra la altura h del cono.

Ejercicio 30



- 31 Rapidez para podar el césped Un muchacho tarda 90 minutos en podar un césped, pero su hermana puede hacerlo en 60 minutos. ¿Cuánto tardarán si trabajan juntos, usando dos podadoras?

32. Llenado de una piscina. Una manguera llena una piscina en 8 horas y otra mayor lo hace en 5 horas. ¿Cuánto tiempo se necesita para llenarla utilizando las dos mangueras simultáneamente?
33. Reparto de periódicos. Una repartidora de periódicos tarda 45 minutos en entregar los diarios que le corresponden, pero si su hermano la ayuda sólo tardarán 20 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará su hermano en entregar él solo los periódicos?
34. Vaciado de un tanque. Un tanque de agua puede vaciarse con una bomba en 5 horas, pero otra bomba más pequeña puede vaciarlo en 8 horas. Si se pone a funcionar la bomba grande a la 1:00 P.M., ¿a qué hora debe encenderse la pequeña para que el tanque quede vacío a las 5:00 P.M.?
35. Calificación punto promedio (CPP). Una estudiante terminó 48 horas crédito con una CPP de 2.75. Para ingresar al programa que le interesa, la estudiante debe tener una CPP de 3.2. ¿Cuántas horas crédito adicionales de 4 de trabajo harán subir su CPP a 3.2?
36. Ley de Ohm. En teoría eléctrica, la ley de Ohm afirma que $I = V/R$, donde I es la corriente en amperes, V es la fuerza electromotriz en volts y R es la resistencia en ohms. En cierto circuito $V = 110$ y $R = 50$. Si se cambian V y R en la misma cantidad numérica, ¿qué alteración en ambos hará que I se duplique?
37. Temperatura del aire. Bajo la base de una nube, la temperatura del aire T (en $^{\circ}\text{F}$) a una altura h (en pies) se puede calcular mediante la ecuación $T = T_0 - \left(\frac{5.5}{1000}\right)h$, donde T_0 es la temperatura a nivel del suelo.
- (a) Determina la temperatura del aire a una altura de una milla si la temperatura del suelo es de 70°F .
- (b) ¿A qué altitud se alcanza la temperatura de congelamiento?
38. Altura de una nube. La altura h (en pies) de la base de la nube se puede calcular con la ecuación $h = 227(T - D)$, donde T es la temperatura del suelo y D es el punto de condensación.
- (a) Si la temperatura es de 70°F y el punto de condensación es de 55°F , calcula la altura de la base de la nube.
- (b) Si el punto de condensación es de 65°F y la base de la nube está a 3 500 pies, estima la temperatura del suelo.
39. Temperatura de una nube. La temperatura T dentro de una nube a una altura h (en pies) sobre la base de la nube se puede calcular usando la ecuación $T = B - \left(\frac{1}{1000}\right)h$, donde B es la temperatura de la nube en su base. Determina la temperatura a 10 000 pies en una nube con una temperatura de 55°F en su base y una altura de 4 000 pies en su base. **Nota:** para una aplicación interesante donde aparecen los tres ejemplos anteriores, consulta el ejercicio 6 en la sección de ejercicios de análisis al final del capítulo.
40. Correlación entre huesos y estatura. Los arqueólogos pueden determinar la estatura de un ser humano sin tener un esqueleto completo. Si un arqueólogo encuentra un hueso, puede determinar la estatura del individuo usando una relación lineal simple (el hueso es el hueso entre el hombro y el codo). Para una mujer, si x es la longitud del hueso (en cm), entonces su estatura h (en cm) se puede encontrar en la fórmula $h = 65 + 3.14x$; para un hombre, debe usarse la fórmula $h = 73.6 + 3x$.
- (a) Se encuentra el esqueleto de una mujer que tiene un hueso de 30 cm; indique su estatura en el momento de su fallecimiento.
- (b) Por lo general, la estatura de una persona disminuye 0.06 cm cada año después de los 30. Se encuentra el esqueleto de un hombre con un hueso de 34 cm, y la estatura del hombre era de 174 cm. Determina su edad aproximada en el momento de su fallecimiento.

2.3

Ecuaciones cuadráticas

Desde el nivel del suelo se dispara un cohete de juguete verticalmente y hacia arriba, como se ilustra en la figura 1. Si la velocidad inicial es de 120 pies/s y la única fuerza que actúa es la gravedad, entonces la altura h (en pies) del cohete sobre el suelo después de t segundos está dada por

$$h = -16t^2 + 120t.$$

En la tabla siguiente se incluyen algunos valores de h para los primeros siete segundos de vuelo.

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7
h (pies)	0	104	176	216	224	200	144	56

Figura 1



En la tabla vemos que, mientras ascendía, en algún momento entre $t = 2$ y $t = 3$, el cohete estaba a 180 pies por encima del suelo. Al descender, en algún instante entre $t = 5$ y $t = 6$, se encontraba a 180 pies sobre el suelo. A fin de hallar los valores exactos de t para los cuales $h = 180$ pies, debemos resolver la ecuación

$$180 = -16t^2 + 120t,$$

o bien

$$16t^2 - 120t + 180 = 0.$$

Según se indica en la tabla que sigue, la ecuación de este tipo se llama *ecuación cuadrática* en t . Después de desarrollar una fórmula para resolver estas ecuaciones, regresaremos a este problema en el ejemplo 13 y hallaremos los tiempos exactos en los que el cohete estaba a 180 pies sobre el suelo.

Terminología	Definición	Ejemplos
Ecuación cuadrática en x	Una ecuación que puede escribirse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$	$4x^2 = 8 - 11x$ $x(3 + x) = 5$ $4x = x^2$

El teorema que sigue nos permite resolver muchos tipos de ecuaciones.

Teorema del factor cero

Si p y q son expresiones algebraicas, entonces

$$pq = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad p = 0 \quad \text{o bien} \quad q = 0.$$

El teorema del factor cero se puede ampliar a cualquier número de expresiones algebraicas; esto es,

$$pqr = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad p = 0 \quad \text{o bien} \quad q = 0 \quad \text{o bien} \quad r = 0,$$

etc. Se deduce que si se puede escribir $ax^2 + bx + c$ como producto de dos polinomios de primer grado, entonces es posible encontrar soluciones igualando a 0 cada factor, como se ilustra en los dos ejemplos que siguen. Esta técnica se llama **método de factorización**.

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación por factorización

Resuelve la ecuación $3x^2 = 10 - x$.

SOLUCIÓN Para usar el método de factorización, es esencial que sólo aparezca el número 0 en un lado de la ecuación. Por tanto, procederemos como sigue:

$$\begin{array}{ll}
 3x^2 = 10 - x & \text{dada} \\
 3x^2 + x - 10 = 0 & \text{sumar } x - 10 \\
 (3x - 5)(x + 2) = 0 & \text{factorizar} \\
 3x - 5 = 0, \quad x + 2 = 0 & \text{teorema del factor cero} \\
 x = \frac{5}{3}, \quad x = -2 & \text{despejar } x
 \end{array}$$

En consecuencia, las soluciones de la ecuación dada son $\frac{5}{3}$ y -2 .

EjemPlo 2 Solución de una ecuación por factorización

Resuelve la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

SOLUCIÓN Procedemos como en el ejemplo 1:

$$\begin{array}{ll}
 x^2 + 16 = 8x & \text{dada} \\
 x^2 - 8x + 16 = 0 & \text{restar } 8x \\
 (x - 4)(x - 4) = 0 & \text{factorizar} \\
 x - 4 = 0, \quad x - 4 = 0 & \text{teorema del factor cero} \\
 x = 4, \quad x = 4 & \text{despejar } x
 \end{array}$$

Por tanto, la ecuación cuadrática dada tiene una solución, 4.

Puesto que $x - 4$ aparece dos veces como factor en la solución previa, el 4 recibe el nombre de **raíz doble** o **raíz de multiplicidad 2** de la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

Si una ecuación cuadrática tiene la forma $x^2 = d$ para alguna $d > 0$, entonces $x^2 - d = 0$ o equivalentemente,

$$(x + \sqrt{d})(x - \sqrt{d}) = 0.$$

Igualar a cero cada factor nos dará las soluciones $-\sqrt{d}$ y \sqrt{d} . A menudo se usa el símbolo $\pm\sqrt{d}$ (más o menos \sqrt{d}) para representar tanto \sqrt{d} como $-\sqrt{d}$. Por tanto, para $d > 0$, hemos probado este resultado (el caso $d < 0$ requiere el sistema de números complejos que se discute en la sección 2.4).

Una ecuación cuadrática especial

$$\text{Si } x^2 = d, \text{ entonces } x = \pm\sqrt{d}.$$

Comentario sobre la notación: Es práctica común dejar que una variable represente más de un valor, como en $x = \pm 3$. Una notación más descriptiva es $x_{1,2} = \pm 3$, implicando que $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$.

El proceso de resolver $x^2 = d$ como se indica en el cuadro anterior puede describirse con la frase *tomar la raíz cuadrada de ambos lados de*

la ecuación. Advierta que si $d > 0$ obtenemos una raíz cuadrada positiva y una negativa, no sólo la raíz cuadrada principal definida en la sección 1.2.

EJEMPLO 3 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 = d$

Resuelve las ecuaciones:

(a) $x^2 = 5$ (b) $(x + 3)^2 = 5$

SOLUCIÓN

(a) $x^2 = 5$ dada
 $x = \pm\sqrt{5}$ tomar la raíz cuadrada

Por tanto, las soluciones son $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$.

(b) $(x + 3)^2 = 5$ dada
 $x + 3 = \pm\sqrt{5}$ tomar la raíz cuadrada
 $x = -3 \pm \sqrt{5}$ restar 3

Así pues, las soluciones son $-3 + \sqrt{5}$ y $-3 - \sqrt{5}$.

En el trabajo siguiente cambiaremos una expresión de la forma $x^2 + kx$ por $(x + d)^2$, donde k y d son números reales. Este procedimiento se conoce como **completar el cuadrado** para $x^2 + kx$ y se puede llevar a cabo al sumar $(k/2)^2$, como se describe en el siguiente cuadro (se usa el mismo procedimiento para $x^2 - kx$).

Completar el cuadrado

A fin de completar el cuadrado para $x^2 + kx$ o $x^2 - kx$, se suma $\left(\frac{k}{2}\right)^2$; esto es, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x .

$$(1) \quad x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2$$

$$(2) \quad x^2 - kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2$$

EJEMPLO 4 Completar el cuadrado

Determina el(los) valor(es) de d que completan el cuadrado para cada expresión. Escribe el trinomio y el cuadrado del binomio que representa.

(a) $x^2 - 3x + d$ (b) $x^2 + dx + 64$

SOLUCIÓN

(a) El cuadrado de la mitad del coeficiente de x es $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Entonces, $d = \frac{9}{4}$ y

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2.$$

(continúa)

(b) Si $(x + c)^2 = x^2 + dx + 64$, entonces $x^2 + 2cx + c^2 = x^2 + dx + 64$, de modo que c^2 debe ser igual a 64 y $2c$ debe ser igual a d . Entonces, c debe ser igual a 8 o -8, y como $d = 2c$, d puede ser igual a 16 o -16. Así, se tendría

$$x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2 \quad \text{o} \quad x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2$$

En el siguiente ejemplo resolvemos una ecuación cuadrática completando el cuadrado.

EJEMPLO 5 Solución de una ecuación cuadrática completando el cuadrado

Resuelve la ecuación $x^2 - 5x + 3 = 0$.

SOLUCIÓN Es conveniente describir primero la ecuación de modo que sólo términos en x se encuentren a la izquierda, como sigue:

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

dada

$$x^2 - 5x = -3$$

restar 3

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

completar el cuadrado

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

sumando $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ a ambos lados

ecuación equivalente

$$x - \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{13}{4}}$$

tomar la raíz cuadrada

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

sumar $\frac{5}{2}$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $(5 + \sqrt{13})/2 \approx 4.3$ y $(5 - \sqrt{13})/2 \approx 0.7$.

En el ejemplo 5 resolvimos una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a = 1$. Si $a \neq 1$, podemos resolver la ecuación cuadrática agregando un paso al procedimiento empleado en el ejemplo anterior. Después de escribir de nuevo la ecuación para que en el lado izquierdo queden solamente términos que contengan x ,

$$ax^2 + bx = -c,$$

dividimos ambos lados entre a y tenemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Luego completamos el cuadrado sumando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos lados. Esta técnica se usa en la demostración de la siguiente fórmula importante.

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La fórmula cuadrática nos da dos soluciones de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Elas son $x = x_1, x_2$, donde

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DEMOSTRACIÓN Supondremos que $b^2 - 4ac \geq 0$ de modo que $\sqrt{b^2 - 4ac}$ sea un número real (el caso en que $b^2 - 4ac < 0$ se estudiará en la siguiente sección). Continuemos como sigue:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dada

$$ax^2 + bx = -c$$

restar c

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

dividir entre a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

completar el cuadrado

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

ecuación equivalente

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

tomar la raíz cuadrada

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

restar $\frac{b}{2a}$

Podemos escribir el radical de la última ecuación como

$$\pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{(2a)^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}$$

Dado que $|2a| = 2a$ si $a > 0$ o $|2a| = -2a$ si $a < 0$, en todos los casos veremos que

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Advertirás que si la fórmula cuadrática se ejecuta en forma adecuada, no es necesario comprobar las soluciones.

El número $b^2 - 4ac$ bajo el signo del radical de la fórmula cuadrática se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. El discriminante sirve para determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación, como en la tabla que sigue.

Valor del discriminante $b^2 - 4ac$	Naturaleza de las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$
Valor positivo	Dos raíces reales y diferentes
Cero	Una raíz de multiplicidad 2
Valor negativo	No hay raíz real

El discriminante de los próximos dos ejemplos es positivo. En el ejemplo 8 el discriminante es 0.

EJEMPLO 6 Uso de la fórmula cuadráticaResuelve la ecuación $4x^2 + x - 3 = 0$.**SOLUCIÓN** Identificamos $a = 4$, $b = 1$ y $c = -3$ en la fórmula cuadrática

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(4)(-3)}}{2(4)} & b &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8} & & \text{simplificar el discriminante} \\
 &= \frac{-1 \pm 7}{8} & & \sqrt{49} = 7
 \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones son

$$x = \frac{-1 + 7}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{-1 - 7}{8} = -1.$$

El ejemplo 6 también puede resolverse por factorización. Al escribir $(4x - 3)(x + 1) = 0$ e igualar cada factor a cero tendremos $x = \frac{3}{4}$ y $x = -1$.**EJEMPLO 7** Uso de la fórmula cuadráticaResuelve la ecuación $2x(3 - x) = 3$.**SOLUCIÓN** Para usar la fórmula cuadrática debemos escribir la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$\begin{aligned}
 2x(3 - x) &= 3 && \text{dada} \\
 6x - 2x^2 &= 3 && \text{multiplicar factores} \\
 -2x^2 + 6x - 3 &= 0 && \text{restar 3} \\
 2x^2 - 6x + 3 &= 0 && \text{multiplicar por } -1
 \end{aligned}$$

Con $a = 2$, $b = -6$ y $c = 3$ en la fórmula cuadrática, obtenemos

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4}$$

Nota que

$$\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \neq \frac{3}{2} \pm \sqrt{3}$$

El 2 en el denominador debe dividir a ambos términos del numerador, por lo que

$$\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

En virtud de que 2 es un factor del numerador y del denominador, la última fracción se simplifica así:

$$\frac{2(3 \pm \sqrt{3})}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Por tanto, las soluciones son

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{2} \approx 2.37 \quad \text{y} \quad \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0.63$$

El ejemplo que sigue ilustra el caso de una raíz doble.

EJEMPLO 8 Uso de la fórmula cuadrática

Resuelve la ecuación $9x^2 - 30x + 25 = 0$.

SOLUCIÓN Con $a = 9$, $b = -30$ y $c = 25$ en la fórmula cuadrática

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(9)(25)}}{2(9)} & x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{18} & & \text{simplificar} \\ &= \frac{30 \pm 0}{18} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación tiene una raíz (doble): $\frac{5}{3}$.

EJEMPLO 9 Eliminación de las fracciones de una ecuación

Resuelve la ecuación $\frac{2x}{x-3} + \frac{5}{x+3} = \frac{36}{x^2-9}$.

SOLUCIÓN De acuerdo con las guías dadas en la sección 2.1 para resolver una ecuación que contenga expresiones racionales, multiplicamos por el mcd, $(x+3)(x-3)$, recordando que según la guía 2, los números $(-3$ y $3)$, que hacen cero el mcd, no pueden ser soluciones. Así procedemos de la siguiente manera:

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{5}{x+3} = \frac{36}{x^2-9} \quad \text{dada}$$

$$2x(x+3) + 5(x-3) = 36 \quad \begin{array}{l} \text{multiplicar por el mcd,} \\ (x+3)(x-3) \end{array}$$

$$2x^2 + 6x + 5x - 15 - 36 = 0 \quad \text{multiplicar factores y restar 36}$$

$$2x^2 + 11x - 51 = 0 \quad \text{simplificar}$$

$$(2x+17)(x-3) = 0 \quad \text{factorizar}$$

$$2x+17=0, \quad x-3=0 \quad \text{teorema del factor cero}$$

$$x = -\frac{17}{2}, \quad x = 3 \quad \text{despejar } x$$

Debido a que $x = 3$ no puede ser una solución, vemos que $x = -\frac{17}{2}$ es la única solución para la ecuación dada.

El siguiente ejemplo muestra cómo la fórmula cuadrática puede ayudar en la factorización de trinomios.

**EJEMPLO 10** Factorización con ayuda de la fórmula cuadráticaFactorice el polinomio $21x^2 - 13x - 20$.**SOLUCIÓN** Resolvemos la ecuación cuadrática asociada,

$$21x^2 - 13x - 20 = 0,$$

empleando la fórmula cuadrática:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(21)(-20)}}{2(21)} \\ &= \frac{13 \pm \sqrt{169 + 1680}}{42} = \frac{13 \pm \sqrt{1849}}{42} \\ &= \frac{13 \pm 43}{42} = \frac{56}{42}, \frac{30}{42} = \frac{4}{3}, -\frac{5}{7}. \end{aligned}$$

Ahora escribimos la ecuación como un producto de factores lineales, ambos de la forma $(x - \text{solución})$:

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x - \left(-\frac{5}{7}\right)\right) = 0.$$

Los denominadores se eliminan cuando multiplicamos ambos lados por $3 \cdot 7$.

$$3 \cdot 7\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{5}{7}\right) = 0 \cdot 3 \cdot 7$$

$$3\left(x - \frac{4}{3}\right) \cdot 7\left(x + \frac{5}{7}\right) = 0$$

$$(3x - 4)(7x + 5) = 0.$$

El lado izquierdo es la factorización deseada, es decir,

$$21x^2 - 13x - 20 = (3x - 4)(7x + 5).$$

En el siguiente ejemplo vamos a usar la fórmula cuadrática para resolver una ecuación que contiene más de una variable.

EJEMPLO 11 Uso de la fórmula cuadráticaDespeja x de $y = x^2 - 6x + 5$, donde $x \leq 3$.**SOLUCIÓN** La ecuación puede escribirse en la forma

$$x^2 - 6x + 5 - y = 0,$$

de modo que es una ecuación cuadrática en x con coeficientes $a = 1$, $b = -6$

y $c = 5 - y$. Observa que y se considera como una constante porque estamos despejando la variable x . Ahora usamos la fórmula cuadrática:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5-y)}}{2(1)} & x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{16 + 4y}}{2} & & \text{simplificar } b^2 - 4ac \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{4}\sqrt{4+y}}{2} & & \text{factorizar } \sqrt{4} \\ &= \frac{6 \pm 2\sqrt{4+y}}{2} & & \sqrt{4} = 2 \\ &= 3 \pm \sqrt{4+y} & & \text{dividir ambos términos entre dos} \end{aligned}$$

Debido a que $\sqrt{4+y}$ es no negativo, $3 + \sqrt{4+y}$ es mayor o igual a 3 y $3 - \sqrt{4+y}$ es menor o igual a 3. Ya que la restricción es $x \leq 3$, tenemos

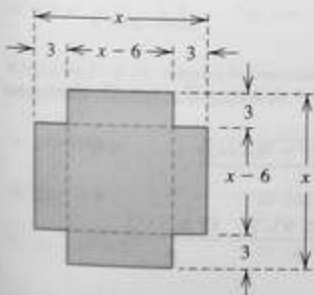
$$x = 3 - \sqrt{4+y}.$$

Muchos problemas aplicados llevan a ecuaciones cuadráticas. El ejemplo siguiente ilustra uno de ellos.

EJEMPLO 12 Construcción de una caja

Se desea construir una caja de base cuadrada y sin tapa a partir de un trozo cuadrado de lámina. Se recortará un cuadrado de 3 pulg por lado en cada esquina y se doblarán los lados hacia arriba. Si la caja debe contener un volumen de 48 pulg³, ¿de qué tamaño deberá ser el trozo de lámina?

Figura 2



SOLUCIÓN Comencemos por hacer el dibujo de la figura 2, donde denotaremos con x la longitud desconocida del lado del trozo de lámina. Subsecuentemente, cada lado de la base de la caja tendrá una longitud de $x - 3 - 3 = x - 6$.

Como el área de la base de la caja es $(x - 6)^2$ y la altura es 3, resulta que

$$\text{volumen de la caja} = 3(x - 6)^2.$$

En vista de que la caja debe tener un volumen de 48 pulg³,

$$3(x - 6)^2 = 48.$$

Ahora despejamos x :

$$\begin{aligned} (x - 6)^2 &= 16 && \text{dividir entre 3} \\ x - 6 &= \pm 4 && \text{tomar la raíz cuadrada} \\ x &= 6 \pm 4 && \text{sumar 6} \end{aligned}$$

(continúa)

En consecuencia,

$$x = 10 \quad \text{o bien} \quad x = 2.$$

Comprobación En la figura 2 vemos que $x = 2$ es inaceptable puesto que no es posible hacer la caja en este caso; sin embargo, si comenzamos con un trozo de lámina de 10 pulg² por lado, recortamos esquinas de 3 pulg y doblamos, obtenemos una caja con dimensiones de 4, 4 y 3 pulg; es decir con el volumen deseado de 48 pulg³; por tanto, un cuadrado de 10 pulg por lado es la respuesta al problema.

Según se ilustra en el ejemplo 12, aun cuando se formule correctamente una ecuación, es posible llegar a soluciones sin sentido a causa de la naturaleza física de un problema dado; dichas soluciones deben descartarse. Por ejemplo, no aceptaríamos la respuesta de -7 años para la edad de un individuo o $\sqrt{50}$ para el número de automóviles de un lote de estacionamiento.

En el siguiente ejemplo resolvemos el problema aplicado que se estudió al comienzo de esta sección.

EJEMPLO 13 Cálculo de la altura de un cohete de juguete

La altura h sobre el nivel del suelo (en pies) de un cohete de juguete, t segundos después de ser lanzado, está dada por $h = -16t^2 + 120t$. ¿Cuándo estará el cohete a 180 pies sobre el suelo?

SOLUCIÓN Con $h = -16t^2 + 120t$, se obtiene:

$$180 = -16t^2 + 120t \quad \text{donde } h = 180$$

$$16t^2 - 120t + 180 = 0 \quad \text{sumar } 16t^2 - 120t$$

$$4t^2 - 30t + 45 = 0 \quad \text{dividir entre 4}$$

Observa que la ecuación es cuadrática en t , por lo que la fórmula cuadrática se resuelve para t .

Al aplicar la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = -30$ y $c = 45$, obtenemos

$$\begin{aligned} t &= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(4)(45)}}{2(4)} \\ &= \frac{30 \pm \sqrt{180}}{8} = \frac{30 \pm 6\sqrt{5}}{8} = \frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

Por tanto, el cohete estará a 180 pies sobre el suelo en los siguientes instantes:

$$t = \frac{15 - 3\sqrt{5}}{4} \approx 2.07\text{s}$$

$$t = \frac{15 + 3\sqrt{5}}{4} \approx 5.43\text{s}$$

2.3 Ejercicios

Ejercicios 1 al 14: resuelve la ecuación por factorización.

1 $6x^2 + x - 12 = 0$

2 $4x^2 + x - 14 = 0$

3 $15x^2 - 12 = -8x$

4 $15x^2 - 14 = 29x$

5 $2x(4x + 15) = 27$

6 $x(3x + 10) = 77$

7 $75x^2 + 35x - 10 = 0$

8 $48x^2 + 12x - 90 = 0$

9 $12x^2 + 60x + 75 = 0$

10 $4x^2 - 72x + 324 = 0$

11 $\frac{2x}{x+3} + \frac{5}{x} - 4 = \frac{18}{x^2+3x}$

12 $\frac{5x}{x-2} + \frac{3}{x} + 2 = \frac{-6}{x^2-2x}$

13 $\frac{5x}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{90}{x^2-9}$

14 $\frac{3x}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{-4}{x^2-4}$

Ejercicios 15 y 16: determina si las dos ecuaciones son equivalentes.

15 (a) $x^2 = 16$, $x = 4$ (b) $x = \sqrt{9}$, $x = 3$

16 (a) $x^2 = 25$, $x = 5$ (b) $x = \sqrt{64}$, $x = 8$

Ejercicios 17 al 24: resuelve la ecuación usando la ecuación cuadrática especial de la página 82.

17 $x^2 = 169$

18 $x^2 = 361$

19 $25x^2 = 9$

20 $16x^2 = 49$

21 $(x-3)^2 = 17$

22 $(x+4)^2 = 31$

23 $4(x+2)^2 = 11$

24 $9(x-1)^2 = 7$

Ejercicios 25 y 26: determina los valores de d que completan el cuadrado para la expresión.

25 (a) $x^2 + 9x + d$

(b) $x^2 - 8x + d$

(c) $x^2 + dx + 36$

(d) $x^2 + dx + \frac{49}{4}$

26 (a) $x^2 + 13x + d$

(b) $x^2 - 6x + d$

(c) $x^2 + dx + 25$

(d) $x^2 + dx + \frac{81}{4}$

Ejercicios 27 al 30: resuelve completando el cuadrado. (Nota: consulta el análisis que está después del ejemplo 5 como una ayuda para resolver los ejercicios 29 y 30).

27 $x^2 + 6x + 7 = 0$

28 $x^2 - 8x + 11 = 0$

29 $4x^2 - 12x - 11 = 0$

30 $4x^2 + 20x + 13 = 0$

Ejercicios 31 al 44: resuelve con la fórmula cuadrática.

31 $6x^2 - x = 2$

32 $5x^2 + 13x = 6$

33 $x^2 + 4x + 2 = 0$

34 $x^2 - 6x - 3 = 0$

35 $2x^2 - 3x - 4 = 0$

36 $3x^2 + 5x + 1 = 0$

37 $\frac{1}{2}z^2 - 4z - 1 = 0$

38 $\frac{5}{3}s^2 + 3s + 1 = 0$

39 $\frac{5}{w^2} - \frac{10}{w} + 2 = 0$

40 $\frac{x+1}{3x+2} = \frac{x-2}{2x-3}$

41 $4x^2 + 81 = 36x$

42 $24x + 9 = -16x^2$

43 $\frac{5x}{x^2+9} = -1$

44 $\frac{1}{3}x^2 + 1 = \frac{4}{3}x$

Ejercicios 45 al 48: usa la fórmula cuadrática para factorizar las expresiones.

45 $x^2 + x - 30$

46 $x^2 + 7x$

47 $12x^2 - 16x - 3$

48 $15x^2 + 34x - 16$

Ejercicios 49 y 50: usa la fórmula cuadrática para resolver la ecuación para: (a) x en términos de y y (b) y en términos de x .

49 $4x^2 - 4xy + 1 - y^2 = 0$

50 $2x^2 - xy = 3y^2 + 1$

Ejercicios 51 al 54: despeja la variable especificada.

51 $K = \frac{1}{2}mv^2$ para v

(energía cinética)

$$52. F = g \frac{mM}{d^2} \text{ para } d \quad (\text{ley de la gravitación de Newton})$$

$$53. A = 2\pi r(r+h) \text{ para } r \quad (\text{área de un cilindro cerrado})$$

$$54. s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t \text{ para } t \quad (\text{distancia de caída de un objeto})$$

55. **Velocidad de un gas.** Cuando un gas caliente sale de una chimenea cilíndrica, su velocidad varía en toda una sección transversal circular de la chimenea; el gas que se encuentra cerca del centro de la sección transversal tiene mayor velocidad que el cercano al perímetro. Este fenómeno se puede describir mediante la fórmula

$$V = V_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right],$$

donde V_{\max} es la velocidad máxima del gas, r_0 es el radio de la chimenea y V es la velocidad del gas a una distancia r del centro de la sección transversal circular. De esta fórmula, despeja r .

56. **Densidad de la atmósfera.** Para altitudes h de hasta 10 000 m, la densidad D de la atmósfera de la Tierra (en kg/m^3) se puede calcular mediante la fórmula

$$D = 1.225 - (1.12 \times 10^{-6})h + (3.24 \times 10^{-7})h^2.$$

Determina la altitud si la densidad de la atmósfera es 0.74 kg/m^3 .

57. **Dimensiones de una lata.** Un fabricante de latas desea construir una lata cilíndrica circular recta de 20 cm de altura y volumen de 3000 cm^3 (vé la figura). Encuentra el radio interior r de la lata.

Ejercicio 57



58. **Construcción de una caja rectangular.** Consulta el ejemplo 12. Hay que elaborar una caja sin tapa recortando cuadrados de 3 pulgadas en las esquinas de una pieza rectangular de hojalata, cuya longitud es el doble de su ancho. ¿De qué tamaño debe ser el trozo de hojalata para hacer una caja que tenga un volumen de 60 pul^3 ?

59. **Pelota de béisbol.** Una pelota de béisbol se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies/s . El número de pies s sobre el suelo después de t segundos está dado por la ecuación $s = -16t^2 + 64t$.

(a) ¿En cuánto tiempo alcanza la pelota una altura de 48 pies sobre el suelo?

(b) ¿Cuándo regresará al piso?

60. **Distancia de frenado.** La distancia que recorre un automóvil desde el momento en que el conductor decide aplicar los frenos hasta el instante en que se detiene, se conoce como distancia de frenado. Para determinado automóvil que avanza a v mi/h , la distancia de frenado d (en pies) está dada por $d = v + (v^2/20)$.

(a) Calcula la distancia de frenado cuando la velocidad es de 55 mi/h .

(b) Si el conductor decide aplicar los frenos a 120 pies de una señal de alto, ¿cuán rápido puede ir en ese momento para tener oportunidad de detenerse al llegar a la señal?

61. **Temperatura de ebullición del agua.** La temperatura T (en $^{\circ}\text{C}$) a la que hierve el agua está relacionada con la elevación h (en metros sobre el nivel del mar) por la fórmula

$$h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2,$$

para $95 \leq T \leq 100$.

(a) ¿A qué elevación hierve el agua a una temperatura de 98 $^{\circ}\text{C}$?

(b) La altitud del Monte Everest es de alrededor de 8840 m. Calcula la temperatura a la que hierve el agua en la cima de esa montaña. (Sugerencia: usa la fórmula cuadrática con $x = 100 - T$.)

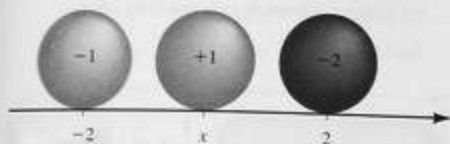
62. **Ley de Coulomb.** Una partícula de carga -1 está en una recta coordenada en $x = -2$ y una partícula de carga -2 está en $x = 2$ (véase la figura). Si una partícula de carga $+1$

está en la posición x entre -2 y 2 , la ley de Coulomb en teoría eléctrica enuncia que la fuerza neta F que actúa sobre esta partícula está dada por

$$F = \frac{-k}{(x+2)^2} + \frac{2k}{(2-x)^2},$$

para alguna constante $k > 0$. Determina la posición en que la fuerza neta es cero.

Ejercicio 62



63. Dimensiones de una acera Un terreno rectangular de 26 por 30 pies está rodeado por una acera de ancho uniforme. Si el área de la acera es de 240 pies², ¿cuál es su ancho?

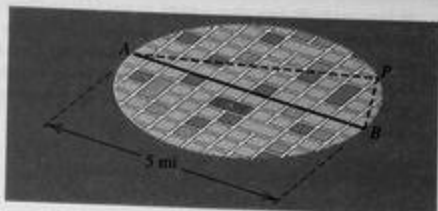
64. Diseño de un cartel En una hoja de papel de 24×36 pulgadas se ha de imprimir una fotografía, con el lado menor en la parte de abajo. Los márgenes laterales y superior han de tener el mismo ancho, pero el margen inferior tendrá el doble de los otros. Encuentra el ancho de los márgenes si el área por imprimir es de 661.5 pulg².

65. Cercado de una huerta Hay que cercar una huerta cuadrada con un alambrado. Si la cerca cuesta \$1 por pie y el costo de preparar el terreno es de \$0.50 por pie cuadrado, determina el tamaño de la huerta que pueda cercarse a un costo de \$120.

66. Cercado de un terreno Un campesino planea cercar un terreno rectangular, utilizando parte de su granero para un lado y alambrado para los otros tres lados. Si desea que el lado paralelo al granero sea el doble de un lado adyacente y que el área del terreno sea de 128 pies², ¿cuántos metros de alambrado debe comprar?

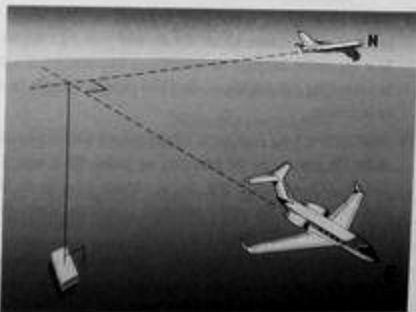
67. Planeación de una autopista Los límites de una ciudad están formados por una circunferencia de 5 millas de diámetro. Como se muestra en la figura, una carretera recta atraviesa el centro de la ciudad de A a B . El Departamento de Carreteras piensa construir una autopista de 6 millas de largo de A a un punto P en las afueras y luego a B . Encuentra la distancia de A a P . (Sugerencia: APB es un triángulo rectángulo.)

Ejercicio 67



68. Expansión de la ciudad Los límites de una ciudad están formados por una circunferencia de 10 millas de diámetro. En la última década, la ciudad ha crecido en superficie unas 16π mi² (alrededor de 50 mi²). Supón que la ciudad ha tenido siempre forma circular y encuentra el cambio correspondiente en distancia desde el centro a los límites.
69. Distancia entre aviones Un aeroplano vuela hacia el norte a 200 mi/h y pasa sobre cierto lugar a las 2:00 P.M. Otra aeronave, que vuela hacia el este a la misma altitud y a 400 mi/h, pasa sobre el mismo lugar a las 2:30 P.M. (véase la figura).
- (a) Si t denota el tiempo en horas después de las 2:30 P.M., expresa la distancia d entre los aviones, en términos de t .
- (b) ¿A qué hora, después de las 2:30 P.M., estaban los aviones a 500 millas uno de otro?

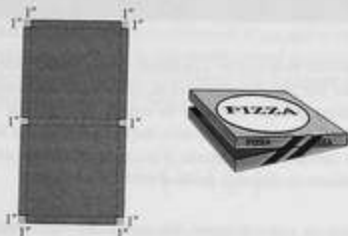
Ejercicio 69



70. Alcance de radiocomunicación Dos topógrafos que llevan aparatos de radiocomunicación salen del mismo punto a las 9:00 A.M. Uno camina hacia el sur a 4 mi/h y el otro hacia el oeste a 3 mi/h. ¿Durante cuánto tiempo se pueden comunicar si cada radio tiene un alcance máximo de 2 millas?

71. Construcción de una caja para pizza. Debe hacerse una caja de base cuadrada para pizza a partir de una hoja rectangular de cartón. Para esto se cortan seis cuadrados de 1 pulgada de las esquinas y en las secciones medias y se doblan los lados (véase la figura). Si el área de la base es de 144 pulgadas cuadradas, ¿de qué tamaño tiene que ser la hoja de cartón?

Ejercicio 71:

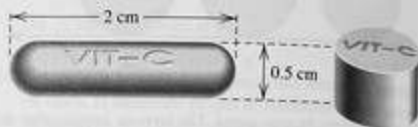


72. Construcción de marcos de alambre. Dos marcos de alambre cuadrados deben construirse con un alambre de 100 pulgadas de largo. Si el área encerrada por un marco es la mitad del área encerrada por el otro, encuentra las dimensiones de cada marco (desprecia el grueso del alambre).
73. Velocidad de canotaje. La velocidad de la corriente de un arroyo es de 5 mi/h. Un remero tarda 30 minutos más en remar 1.2 millas río arriba que en remar la misma distancia a favor de la corriente. ¿Cuál es la velocidad del remero en aguas tranquilas?
74. Altura de un risco. Si una piedra se deja caer desde un risco hasta el mar, recorre alrededor de $16t^2$ pies en t segundos. Si 4 segundos después se escucha su impacto en el agua y la velocidad del sonido es de 1100 pies/s, calcula la altura del risco.
75. Descuentos. Una compañía vende tenis a \$40 el par en pedidos de menos de 50 pares; si se piden 50 o más pares (hasta 600), el precio por par se reduce a razón de \$0.04 por el número de pares pedidos. ¿Cuántos pares puede comprar un distribuidor por \$8400?
76. Precio de un reproductor de CD. Cuando una tienda vende un reproductor de discos compactos de conocida marca a \$300 por unidad, desplaza 15 unidades por semana. Sin embargo, cada vez que reduce el precio \$10 hay dos ventas más por semana. ¿Qué precio de venta producirá ingresos semanales de \$7000?
77. Dimensiones de un barril de petróleo. Debe construirse un barril cilíndrico, recto, circular, cerrado, para petróleo, de 4 pies de altura, de modo que su área superficial total sea de 10π pies². Encuentra el diámetro del barril.

78. Dimensiones de una tableta de vitaminas. La rapidez con que una pastilla de vitamina C empieza a disolverse depende de su área superficial. Una marca de tabletas mide 2 cm de largo y tiene la forma de un cilindro con hemisferios de 0.5 cm de diámetro, rematando sus extremos, como se muestra en la figura. Se piensa fabricar otras tabletas en forma de cilindro circular recto de 0.5 cm de altura.

- (a) Encuentra el diámetro de la segunda tableta, de modo que su área superficial sea igual a la de la primera tableta.
- (b) Halla el volumen de cada una de las tabletas.

Ejercicio 78



Ejercicios 79 y 80: durante una explosión nuclear se produce una bola de fuego cuyo volumen máximo es V_0 . Para temperaturas por debajo de 2000 K y una fuerza explosiva dada, el volumen V de la bola de fuego t segundos después de la explosión, se puede calcular con la fórmula dada. (El grado kelvin se abrevia como K, y no como °K). Calcula t cuando V sea 95% de V_0 .

- 79 $V/V_0 = 0.8197 + 0.007752t + 0.0000281t^2$
(explosión de 20 kilotones)
- 80 $V/V_0 = 0.831 + 0.00598t + 0.0000919t^2$
(explosión de 10 megatones)

Ejercicios 81 y 82: cuando se realizan operaciones en una calculadora, la fórmula cuadrática no siempre da resultados precisos si b^2 es grande en comparación con ac , debido a que una de las raíces estará cerca de cero y será difícil de calcular.

- (a) Usa la fórmula cuadrática para calcular las raíces de la ecuación dada.
- (b) Para obtener una mejor aproximación de la raíz cercana a cero racionaliza el numerador para cambiar:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{a} \quad x = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

y utiliza la segunda fórmula.

- 81 $x^2 + 450000x - 0.96 = 0$
- 82 $x^2 - 73000000x + 2.01 = 0$

- 83 Relaciones de temperatura-latitud La tabla que sigue contiene promedios de temperaturas anuales para los hemisferios norte y sur en varias latitudes.

Latitud	Hem. N	Hem. S
85°	-8°F	-5°F
75°	13°F	10°F
65°	30°F	27°F
55°	41°F	42°F
45°	57°F	53°F
35°	68°F	65°F
25°	78°F	73°F
15°	80°F	78°F
5°	79°F	79°F

- (a) De las siguientes ecuaciones, ¿cuál pronostica con más precisión el promedio de temperatura anual en el hemisferio sur en latitudes L ?

$$(1) T_1 = -1.09L + 96.01$$

$$(2) T_2 = -0.011L^2 - 0.126L + 81.45$$

- (b) Aproxima el promedio de temperatura anual en el hemisferio sur a 50° de latitud.

2.4

Números complejos

Los números complejos se necesitan para hallar soluciones de ecuaciones que no se pueden resolver usando sólo el conjunto \mathbb{R} de los números reales. En la tabla siguiente se incluyen varias ecuaciones cuadráticas simples y los tipos de números requeridos para sus soluciones.

Ecuación	Soluciones	Tipo requerido de números
$x^2 = 9$	3, -3	Enteros
$x^2 = \frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	Números racionales
$x^2 = 5$	$\sqrt{5}, -\sqrt{5}$	Números irracionales
$x^2 = -9$?	Números complejos

Las soluciones de las primeras tres ecuaciones de la tabla están en \mathbb{R} , pero como los cuadrados de números reales nunca son negativos, \mathbb{R} no contiene las soluciones de $x^2 = -9$. A fin de resolver esta ecuación se precisa el sistema de números complejos \mathbb{C} , que contiene tanto a \mathbb{R} como a los números cuyos cuadrados son negativos.

Comencemos por introducir la **unidad imaginaria**, denotada por i , que tiene las siguientes propiedades.

Propiedades de i

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1$$

Debido a que su cuadrado es negativo, la letra i no representa un número real. Es una nueva entidad matemática que hace posible obtener \mathbb{C} . Puesto que i , junto con \mathbb{R} , ha de estar contenida en \mathbb{C} , debemos considerar productos de la forma bi para un número real b y también expresiones de la forma $a + bi$ para números reales a y b . En la tabla que sigue se proporcionan definiciones que usaremos.

Terminología	Definición	Ejemplo(s)
Número complejo	$a + bi$, donde a y b son números reales y $i^2 = -1$	$3, 2 + i, 2i$
Número imaginario	$a + bi$ con $b \neq 0$	$3 + 2i, -4i$
Número imaginario puro	bi con $b \neq 0$	$-4i, \sqrt{3}i, i$
Igualdad	$a + bi = c + di$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$	$x + yi = 3 + 4i$ si y sólo si $x = 3$ y $y = 4$
Suma	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	ve ejemplo 1(a)
Producto	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$	ve ejemplo 1(b)

Observa que los números imaginarios puros son un subconjunto de los números imaginarios y éstos, a su vez, un subconjunto de los números complejos. Usamos indistintamente las frases *número complejo no real* y *número imaginario*.

No es necesario aprender de memoria las definiciones de suma y multiplicación de números complejos dadas en la tabla anterior. En lugar de ello, podemos tratar todos los símbolos como si tuvieran propiedades de números reales, con una excepción: sustituimos i^2 con -1 ; por tanto, para el producto $(a + bi)(c + di)$ basta usar las leyes distributivas y el hecho de que

$$(bi)(di) = bdi^2 = bd(-1) = -bd.$$

EJEMPLO 1 Suma y multiplicación de números complejos

Expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

(a) $(3 + 4i) + (2 + 5i)$ (b) $(3 + 4i)(2 + 5i)$

SOLUCIÓN

(a) $(3 + 4i) + (2 + 5i) = (3 + 2) + (4 + 5)i = 5 + 9i$

(b) $(3 + 4i)(2 + 5i) = (3 + 4i)(2) + (3 + 4i)(5i)$
 $= 6 + 8i + 15i + 20i^2$
 $= 6 + 23i + 20(-1)$
 $= -14 + 23i.$

El conjunto \mathbb{R} de números reales se puede identificar con el conjunto de números complejos de la forma $a + 0i$. También es conveniente denotar el número complejo $0 + bi$ con bi . De esta forma,

$$(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)i = a + bi.$$

En consecuencia, es posible considerar $a + bi$ como la suma de dos números complejos a y bi (esto es, $a + 0i$ y $0 + bi$). En el número complejo $a + bi$ llamamos a a la **parte real** y b a la **parte imaginaria**.

EJEMPLO 2 Igualdad de números complejos

Halla los valores de x y y , donde x y y son números reales:

$$(2x - 4) + 9i = 8 + 3yi.$$

SOLUCIÓN Comenzamos igualando las partes real e imaginaria de cada lado de la ecuación:

$$2x - 4 = 8 \quad y \quad 9 = 3y.$$

Dado que $2x - 4 = 8$, $2x = 12$ y $x = 6$. Como $9 = 3y$, $y = 3$. Los valores de x y y que hacen iguales a los números complejos son

$$x = 6 \quad y \quad y = 3.$$

Con números complejos, ahora podemos resolver una ecuación como $x^2 = -9$. En particular, dado que

$$(3i)(3i) = 3^2 i^2 = 9(-1) = -9,$$

vemos que una solución es $3i$ y otra es $-3i$.

En la tabla que sigue definimos la diferencia de números complejos y la multiplicación de un número complejo por un número real.

Terminología	Definición
Diferencia	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
Multiplicación por un número real k	$k(a + bi) = ka + (kb)i$

Si se nos solicita escribir una expresión de la forma $a + bi$, también aceptaremos la forma $a - di$, ya que $a - di = a + (-d)i$.

EJEMPLO 3 Operaciones con números complejos

Expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

(a) $4(2 + 5i) - (3 - 4i)$ (b) $(4 - 3i)(2 + i)$

(c) $i(3 - 2i)^2$ (d) i^{31}

SOLUCIÓN

(a) $4(2 + 5i) - (3 - 4i) = 8 + 20i - 3 + 4i = 5 + 24i$

(b) $(4 - 3i)(2 + i) = 8 - 6i + 4i - 3i^2 = 11 - 2i$

(c) $i(3 - 2i)^2 = i(9 - 12i + 4i^2) = i(5 - 12i) = 5i - 12i^2 = 12 + 5i$

(d) Tomamos potencias sucesivas de i , y obtenemos

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

y luego el ciclo comienza de nuevo

$$i^5 = i, \quad i^6 = i^2 = -1, \text{ etcétera.}$$

En particular,

$$i^{31} = i^{28} i^3 = (i^4)^7 i^3 = (1)^7 i^3 = (1)(-i) = -i.$$

El siguiente concepto tiene importantes usos cuando se trabaja con números complejos.

Definición del conjugado de un número complejo

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces su **conjugado**, denotado por \bar{z} , es $a - bi$.

En virtud de que $a - bi = a + (-bi)$, se deduce que el conjugado de $a - bi$ es

$$a - (-bi) = a + bi.$$

Por tanto, $a + bi$ y $a - bi$ son conjugados entre sí. En los ejercicios 55 al 60 se dan algunas propiedades de los conjugados.

ILUSTRACIÓN Conjugados

Número complejo	Conjugado
■ $5 + 7i$	$5 - 7i$
■ $5 - 7i$	$5 + 7i$
■ $4i$	$-4i$
■ 3	3

Operaciones con números complejos

TI-83 Plus

Primero, cambia al modo complejo.

MODE ▾ (6 times) ► ENTER

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connect Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
ZOOM Horiz G-T
```

La i está en la tecla del punto decimal.

4 () 2 + 5 (2nd) i) -
 () 3 - 4 (2nd) i) ENTER
 2nd) i ^ 51 ENTER
 MATH ► ► 1
 5 - 7 (2nd) i) ENTER

TI-86

Los números complejos se introducen en la forma (real, imaginaria).

4 () 2 , 5) - () 3 , -4) ENTER
 () 0 , 1) ^ 51 ENTER
 2nd) CPLX conj(F1)
 () 5 , -7) ENTER

$$\begin{array}{l}
 4(2+5i) - (3-4i) \\
 5+24i \\
 i^4 51 \\
 1E-13-i \\
 \text{conj}(5-7i) \\
 5+7i
 \end{array}
 \quad \leftarrow 0-i$$

$$\begin{array}{l}
 4(2,5)-(3,-4) \\
 (0,1)^4 51 \\
 \text{conj}(5,-7) \\
 (5,7)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 (5,24) \\
 (0,-1) \\
 (5,7)
 \end{array}$$

En la TI-83 Plus, notarás que la segunda respuesta equivale a $0 - i$. Esto lo sabemos por el ejemplo 3(d), donde vimos que la parte real de una potencia de i debe ser 0, 1 o -1 . Ten cuidado para detectar estas pequeñas inconsistencias.

Las dos propiedades que siguen son consecuencia de las definiciones de la suma y el producto de números complejos.

Propiedades de los conjugados	Ejemplo
$(a + bi) + (a - bi) = 2a$	$(4 + 3i) + (4 - 3i) = 4 + 4 = 2 \cdot 4$
$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$	$(4 + 3i)(4 - 3i) = 4^2 - (3i)^2 = 4^2 - 3^2 i^2 = 4^2 + 3^2$

Observarás que la suma y el producto de un número complejo y su conjugado son números reales. Los conjugados son útiles para hallar el **inverso multiplicativo** de $a + bi$, $1/(a + bi)$, o simplificar el cociente de dos números complejos. Según se expone en el siguiente ejemplo, es posible considerar estos tipos de simplificaciones como meras *racionalizaciones del denominador*, ya que multiplicamos el cociente por el conjugado del denominador dividido entre sí mismo.

EJEMPLO 4 Cocientes de números complejos

Expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

$$(a) \frac{1}{9 + 2i} \quad (b) \frac{7 - i}{3 - 5i}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \frac{1}{9 + 2i} &= \frac{1}{9 + 2i} \cdot \frac{9 - 2i}{9 - 2i} = \frac{9 - 2i}{81 + 4} = \frac{9}{85} - \frac{2}{85}i \\
 (b) \quad \frac{7 - i}{3 - 5i} &= \frac{7 - i}{3 - 5i} \cdot \frac{3 + 5i}{3 + 5i} = \frac{21 + 35i - 3i - 5i^2}{9 + 25} \\
 &= \frac{26 + 32i}{34} = \frac{13}{17} + \frac{16}{17}i.
 \end{aligned}$$

Si p es un número real positivo, entonces la ecuación $x^2 = -p$ tiene soluciones en \mathbb{C} . Una solución es $\sqrt{p}i$, porque

$$(\sqrt{p}i)^2 = (\sqrt{p})^2 i^2 = p(-1) = -p.$$

En forma análoga, $-\sqrt{p}i$ también es una solución.

La definición de $\sqrt{-r}$ de la siguiente tabla está motivada por $(\sqrt{ri})^2 = -r$ para $r > 0$. Cuando uses esta definición, ten cuidado de no escribir \sqrt{ri} cuando lo que busca es $\sqrt{r}i$.

Terminología	Definición	Ejemplos
Raíz cuadrada principal $\sqrt{-r}$ para $r > 0$	$\sqrt{-r} = \sqrt{r}i$	$\sqrt{-9} = \sqrt{9}i = 3i$ $\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$ $\sqrt{-1} = \sqrt{1}i = i$

Operaciones con números complejos

TI-83 Plus

No olvides cambiar al modo complejo.

(7) (-) 2nd (i)) (+)
(3) (-) 5 2nd (i)) ENTER
MATH 1 ENTER
2nd (√) - 9) ENTER

(7-1)/(3-5i)
.7647058824+.9411i
Ans>Frac
13/17+16/17i
f(-9)
3i

TI-86

(7) (-) - 1) (+)
(3) (-) - 5) ENTER
2nd MATH MISC(F5)
MORE Frac(F1) ENTER
2nd (√) - 9 ENTER

(7-1)/(3-5)
.764705882353+.9411i
Ans>Frac
f-9 (13/17, 16/17)
(0,3)

El signo de radical debe usarse con precaución cuando el radicando sea negativo; por ejemplo, la fórmula $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, que se cumple para números reales positivos, *no es* cierta cuando a y b son ambos negativos, como se muestra en seguida:

$$\sqrt{-3} \sqrt{-3} = (\sqrt{3}i)(\sqrt{3}i) = (\sqrt{3})^2 i^2 = 3(-1) = -3$$

Pero

$$\sqrt{(-3)(-3)} = \sqrt{9} = 3.$$

Por tanto,

$$\sqrt{-3} \sqrt{-3} \neq \sqrt{(-3)(-3)}.$$

Si sólo uno de a o b es negativo, entonces $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. En general, no aplicaremos leyes de radicales si los radicandos son negativos; en cambio, codificaremos la forma de radicales antes de efectuar cualquier operación, según se ilustra en el siguiente ejemplo.



EJEMPLO 5 Trabajo con raíces cuadradas de números negativos

Expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

$$(5 - \sqrt{-9})(-1 + \sqrt{-4}).$$

SOLUCIÓN Primero usamos la definición $\sqrt{-r} = \sqrt{r}i$, y luego simplificamos:

$$\begin{aligned}(5 - \sqrt{-9})(-1 + \sqrt{-4}) &= (5 - \sqrt{9}i)(-1 + \sqrt{4}i) \\ &= (5 - 3i)(-1 + 2i) \\ &= -5 + 10i + 3i - 6i^2 \\ &= -5 + 13i + 6 = 1 + 13i.\end{aligned}$$

En la sección 2.3 establecimos que si el discriminante $b^2 - 4ac$ de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es negativo, entonces no hay raíces reales de la ecuación. De hecho, las soluciones de la ecuación son dos números *imaginarios*. Además, las soluciones son conjugadas una de la otra, como se presenta en este ejemplo.

EJEMPLO 6 Una ecuación cuadrática con soluciones complejas

Resuelve la ecuación $5x^2 + 2x + 1 = 0$.

SOLUCIÓN Al aplicar la fórmula cuadrática con $a = 5$, $b = 2$ y $c = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(5)(1)}}{2(5)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{10} = \frac{-2 \pm 4i}{10} = \frac{-1 \pm 2i}{5} = -\frac{1}{5} \pm \frac{2}{5}i.\end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ y $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.



EJEMPLO 7 Una ecuación con soluciones complejas

Resuelve la ecuación $x^3 - 1 = 0$.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula de factorización de la diferencia de dos cubos con $a = x$ y $b = 1$, y escribimos $x^3 - 1 = 0$ como

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

(continúa)

Diferencia de dos cubos:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Iguatamos a cero cada factor, resolvemos las ecuaciones resultantes y obtenemos las soluciones.

$$1. \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2},$$

o, lo que es equivalente,

$$1. -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ya que el número 1 se llama **número real unitario** y la ecuación dada se puede escribir como $x^3 = 1$, llamaremos **raíces cúbicas de la unidad** a estas tres soluciones.

En la sección 1.3 mencionamos que $x^2 + 1$ es irreducible sobre los números reales. Sin embargo, si factorizamos sobre los números complejos, entonces $x^2 + 1$ se puede factorizar como sigue:

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i).$$

2.4 Ejercicios

Ejercicios 1 al 34: escribe la expresión en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

1 $(5 - 2i) + (-3 + 6i)$

2 $(-5 + 7i) + (4 + 9i)$

3 $(7 - 6i) - (-11 - 3i)$

4 $(-3 + 8i) - (2 + 3i)$

5 $(3 + 5i)(2 - 7i)$

6 $(-2 + 6i)(8 - i)$

7 $(1 - 3i)(2 + 5i)$

8 $(8 + 2i)(7 - 3i)$

9 $(5 - 2i)^2$

10 $(6 + 7i)^2$

11 $i(3 + 4i)^2$

12 $i(2 - 7i)^2$

13 $(3 + 4i)(3 - 4i)$

14 $(4 + 9i)(4 - 9i)$

15 i^0

16 i^{10}

17 i^{11}

18 i^{66}

19 $\frac{3}{2 + 4i}$

20 $\frac{5}{2 - 7i}$

21 $\frac{1 - 7i}{6 - 2i}$

22 $\frac{2 + 9i}{-3 - i}$

23 $\frac{-4 + 6i}{2 + 7i}$

24 $\frac{-3 - 2i}{5 + 2i}$

25 $\frac{4 - 2i}{-5i}$

26 $\frac{-2 + 6i}{3i}$

27 $(2 + 5i)^3$

28 $(3 - 2i)^3$

29 $(2 - \sqrt{-4})(3 - \sqrt{-16})$

30 $(-3 + \sqrt{-25})(8 - \sqrt{-36})$

31 $\frac{4 + \sqrt{-81}}{7 - \sqrt{-64}}$

32 $\frac{5 - \sqrt{-121}}{1 + \sqrt{-25}}$

33 $\frac{\sqrt{-36} \sqrt{-49}}{\sqrt{-16}}$

34 $\frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-16} \sqrt{-81}}$

Ejercicios 35 al 38: encuentra los valores de x y y , donde x y y son números reales.

35 $4 + (x + 2y)i = x + 2i$

36 $(x - y) + 3i = 7 + yi$

37 $(2x - y) - 16i = 10 + 4yi$

38 $8 + (3x + y)i = 2x - 4i$

Ejercicios 39 al 54: halla las soluciones de la ecuación.

$$39 \quad x^2 - 6x + 13 = 0$$

$$40 \quad x^2 - 2x + 26 = 0$$

$$41 \quad x^2 + 4x + 13 = 0$$

$$42 \quad x^2 + 8x + 17 = 0$$

$$43 \quad x^2 - 5x + 20 = 0$$

$$44 \quad x^2 + 3x + 6 = 0$$

$$45 \quad 4x^2 + x + 3 = 0$$

$$46 \quad -3x^2 + x - 5 = 0$$

$$47 \quad x^3 + 125 = 0$$

$$48 \quad x^3 - 27 = 0$$

$$49 \quad x^4 = 256$$

$$50 \quad x^4 = 81$$

$$51 \quad 4x^4 + 25x^2 + 36 = 0$$

$$52 \quad 27x^4 + 21x^2 + 4 = 0$$

$$53 \quad x^3 + 3x^2 + 4x = 0$$

$$54 \quad 8x^3 - 12x^2 + 2x - 3 = 0$$

Ejercicios 55 al 60: verifica la propiedad.

$$55 \quad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$56 \quad \overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$$

$$57 \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$58 \quad \overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$$

$$59 \quad \overline{z} = z \text{ si y sólo si } z \text{ es real.}$$

$$60 \quad \overline{z^2} = (\overline{z})^2$$

2.5

Otros tipos de ecuaciones

Las ecuaciones consideradas en las secciones anteriores son inadecuadas para muchos problemas; por ejemplo, en la práctica con frecuencia es necesario considerar potencias x^k con $k > 2$. En algunas ecuaciones aparecen valores absolutos o radicales. En esta sección damos ejemplos de ecuaciones de estos tipos, que se pueden resolver usando métodos elementales.

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación con un valor absoluto

Resuelve la ecuación $|x - 5| = 3$.

SOLUCIÓN Si a y b son números reales con $b > 0$, entonces $|a| = b$ si y sólo si $a = b$ o bien $a = -b$, por lo tanto, si $|x - 5| = 3$,

$$x - 5 = 3 \quad \text{o} \quad x - 5 = -3.$$

Se resuelve para

$$x = 5 + 3 = 8 \quad \text{o} \quad x = 5 - 3 = 2.$$

Por tanto, la ecuación dada tiene dos soluciones, 8 y 2.

Para una ecuación como

$$2|x - 5| + 3 = 11,$$

primero aislamos la expresión del valor absoluto al restar 3 y dividir entre 2 para obtener

$$|x - 5| = \frac{11 - 3}{2} = 4,$$

y luego procederemos como en el ejemplo 1.

Si una ecuación está en forma factorizada *con cero en un lado*, se pueden obtener soluciones igualando cada factor a cero. Por ejemplo, si p , q y r son expresiones en x y si $pqr = 0$, entonces $p = 0$ o $q = 0$ o $r = 0$. En el siguiente ejemplo factorizamos por agrupación de términos.

**EJEMPLO 2** Solución de una ecuación por agrupaciónResuelve la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

SOLUCIÓN

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{dada}$$

$$x^2(x + 2) - 1(x + 2) = 0 \quad \text{agrupar términos}$$

$$(x^2 - 1)(x + 2) = 0 \quad \text{factorizar } x + 2$$

$$(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 0 \quad \text{factorizar } x^2 - 1$$

$$x + 1 = 0, \quad x - 1 = 0, \quad x + 2 = 0 \quad \text{teorema del factor cero}$$

$$x = -1, \quad x = 1, \quad x = -2 \quad \text{resolver para } x \quad /$$

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación con exponentes racionalesResuelve la ecuación $x^{3/2} = x^{1/2}$.

SOLUCIÓN

$$x^{3/2} = x^{1/2} \quad \text{dada}$$

$$x^{3/2} - x^{1/2} = 0 \quad \text{restar } x^{1/2}$$

$$x^{1/2}(x - 1) = 0 \quad \text{factorizar } x^{1/2}$$

$$x^{1/2} = 0, \quad x - 1 = 0 \quad \text{teorema del factor cero}$$

$$x = 0, \quad x = 1 \quad \text{resolver para } x \quad /$$

En el ejemplo 3 habría sido incorrecto dividir ambos lados de la ecuación $x^{3/2} = x^{1/2}$ entre $x^{1/2}$, obteniendo así $x = 1$, porque se perdería la solución $x = 0$. En general, *evitemos dividir ambos lados de una ecuación entre una expresión que contenga variables*; en lugar de esto, *factoricemos* siempre.

Si en una ecuación hay radicales o exponentes fraccionarios, a menudo elevamos ambos lados a una potencia positiva. Las soluciones de la nueva ecuación siempre contienen las soluciones de la ecuación dada; por ejemplo, las soluciones de

$$2x - 3 = \sqrt{x + 6}$$

también son soluciones de

$$(2x - 3)^2 = (\sqrt{x + 6})^2.$$

En algunos casos la nueva ecuación tiene *más* soluciones que la ecuación dada. Para ilustrar lo anterior, si nos dan la ecuación $x = 3$ y elevamos al cuadrado ambos lados obtendremos $x^2 = 9$. Observa que la ecuación dada $x = 3$ tiene sólo una solución, 3, y que la nueva ($x^2 = 9$) tiene dos, 3 y -3. Cualquier solución de la nueva ecuación, que no sea una solución de la ecuación dada, es una solución extraña. Puesto que pueden presentarse soluciones extrañas, *es indispensable comprobar todas las soluciones obtenidas después de elevar ambos lados de una ecuación a una potencia par*. Tales comprobaciones no son necesarias si ambos lados se elevan a una potencia impar, pues en este caso las soluciones extrañas (números reales) no se introducen.

Se pueden introducir soluciones imaginarias al elevar ambos lados de la ecuación a una potencia impar, por ejemplo, elevar al cubo ambos lados de $x = 1$ da $x^3 = 1$, que es equivalente a $x^3 - 1 = 0$. Esta ecuación tiene 3 soluciones, dos de las cuales son imaginarias (véase el ejemplo 7 de la sección 2.4).

EJEMPLO 4 Solución de una ecuación con un radicalResuelve la ecuación $\sqrt{x^2 - 1} = 2$.**SOLUCIÓN**

$\sqrt{x^2 - 1} = 2$	dada
$(\sqrt{x^2 - 1})^2 = 2^2$	eleva al cubo ambos lados
$x^2 - 1 = 8$	propiedad de $\sqrt{}$
$x^2 = 9$	sumar 1
$x = \pm 3$	extraer raíz cuadrada

Así pues, la ecuación dada tiene dos soluciones, 3 y -3. Excepto para detectar errores algebraicos, la comprobación es innecesaria porque elevamos ambos lados a una potencia impar.

En la última solución usamos la frase *eleva al cubo ambos lados* de $\sqrt{x^2 - 1} = 2$. En general, para la ecuación $x^{m/n} = a$, donde x es un número real elevamos ambos lados a la potencia n/m (recíproca de m/n) para despejar x . Si m es impar resulta $x = a^{n/m}$, pero si m es par tendremos $x = \pm a^{n/m}$. Si n es par se pueden presentar soluciones extrañas, por ejemplo, si $x^{3/2} = -8$, entonces $x = (-8)^{2/3} = (\sqrt[3]{-8})^2 = (-2)^2 = 4$. Sin embargo, 4 no es solución de $x^{3/2} = -8$, porque $4^{3/2} = 8$, no -8.

ILUSTRACIÓN Resolver $x^{m/n} = a$, m impar, x real

Ecuación	Solución
■ $x^{3/2} = 64$	$x = 64^{2/3} = \sqrt[3]{64} = 4$
■ $x^{3/2} = 64$	$x = 64^{2/3} = (\sqrt[3]{64})^2 = 4^2 = 16$

ILUSTRACIÓN Resolver $x^{m/n} = a$, m par, x real

Ecuación	Solución
■ $x^{4/3} = 16$	$x = \pm 16^{3/4} = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2$
■ $x^{2/3} = 16$	$x = \pm 16^{3/2} = \pm (\sqrt{16})^3 = \pm 4^3 = \pm 64$

En los siguientes dos ejemplos, antes de elevar ambos lados de la ecuación a una potencia *aislaremos un radical*; es decir, consideraremos una ecuación equivalente en que sólo aparezca el radical en un lado.

EJEMPLO 5 Solución de una ecuación con un radicalResuelve la ecuación $3 + \sqrt{3x + 1} = x$.**SOLUCIÓN**

$3 + \sqrt{3x + 1} = x$	dada
$\sqrt{3x + 1} = x - 3$	despejar el radical
$(\sqrt{3x + 1})^2 = (x - 3)^2$	eleva ambos lados al cuadrado
$3x + 1 = x^2 - 6x + 9$	simplificar
$x^2 - 9x + 8 = 0$	restar $3x + 1$
$(x - 1)(x - 8) = 0$	factorizar
$x - 1 = 0, \quad x - 8 = 0$	teorema del factor cero
$x = 1, \quad x = 8$	despejar x

(continúa)

Elevamos ambos lados a una potencia par, de modo que se requieran comprobaciones.

$$\checkmark \text{ Comprobación } x = 1 \quad \text{LI: } 3 + \sqrt{3(1) + 1} = 3 + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5 \\ \text{LD: } 1$$

Como $5 \neq 1$, $x = 1$ no es una solución.

$$\checkmark \text{ Comprobación } x = 8 \quad \text{LI: } 3 + \sqrt{3(8) + 1} = 3 + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8 \\ \text{LD: } 8$$

Dado que $8 = 8$ es una expresión cierta, $x = 8$ es una solución.

Por tanto, la ecuación dada tiene una solución: $x = 8$.

Para resolver una ecuación con varios radicales, puede ser preciso elevar ambos lados a potencias dos o más veces, como en este ejemplo.

EJEMPLO 6 Solución de una ecuación con radicales

Resuelve la ecuación $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} + 2 = 0$.

SOLUCIÓN

$$\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} + 2 = 0$$

$$\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+7} - 2$$

$$2x-3 = (x+7) - 4\sqrt{x+7} + 4$$

$$x-14 = -4\sqrt{x+7}$$

$$x^2 - 28x + 196 = 16(x+7)$$

$$x^2 - 28x + 196 = 16x + 112$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0$$

$$(x-42)(x-2) = 0$$

$$x-42 = 0, \quad x-2 = 0$$

$$x = 42, \quad x = 2$$

dada

despejar $\sqrt{2x-3}$

elevar al cuadrado
ambos lados

aislar el radical

elevar al cuadrado
ambos lados

multiplicar factores

restar $16x + 112$

factorizar

teorema del factor
cero

despejar x

Se requiere comprobar, ya que ambos lados se elevaron a una potencia par.

$$\checkmark \text{ Comprobación } x = 42 \quad \text{LI: } \sqrt{84-3} - \sqrt{42+7} + 2 = 9-7+2=4 \\ \text{LD: } 0$$

Como $4 \neq 0$, $x = 42$ no es solución.

$$\checkmark \text{ Comprobación } x = 2 \quad \text{LI: } \sqrt{4-3} - \sqrt{2+7} + 2 = 1-3+2=0 \\ \text{LD: } 0$$

Puesto que $0 = 0$ es una expresión cierta, $x = 2$ es solución.

Por tanto, la ecuación dada tiene una solución: $x = 2$.

Una ecuación es de **tipo cuadrático** si puede escribirse de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde $a \neq 0$ y u es una expresión en alguna variable. Si encontramos las soluciones en términos de u , entonces las soluciones de la ecuación dada se pueden obtener al consultar la forma específica de u .

EJEMPLO 7 Solución de una ecuación de tipo cuadrático

Resuelve la ecuación $x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0$.

SOLUCIÓN Como $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$, la forma de la ecuación sugiere que hagamos $u = x^{1/3}$, como en el segundo renglón:

$$\begin{aligned} x^{2/3} + x^{1/3} - 6 &= 0 && \text{dada} \\ u^2 + u - 6 &= 0 && \text{sea } u = x^{1/3} \\ (u + 3)(u - 2) &= 0 && \text{factorizar} \\ u + 3 = 0, \quad u - 2 = 0 &&& \text{teorema del factor cero} \\ u = -3, \quad u = 2 &&& \text{despejar } u \\ x^{1/3} = -3, \quad x^{1/3} = 2 &&& u = x^{1/3} \\ x = -27, \quad x = 8 &&& \text{elevar al cubo ambos lados} \end{aligned}$$

No es necesario comprobar, puesto que no elevamos ambos lados a una potencia par, así pues, la ecuación dada tiene dos soluciones: -27 y 8 .

Un método alternativo es factorizar el lado izquierdo de la ecuación dada como sigue:

$$x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = (x^{1/3} + 3)(x^{1/3} - 2).$$

Al igualar cada factor a cero, obtenemos las soluciones.

EJEMPLO 8 Solución de una ecuación de tipo cuadrático

Resuelve la ecuación $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

SOLUCIÓN Como $x^4 = (x^2)^2$, la forma de la ecuación sugiere que hagamos $u = x^2$ como en el segundo renglón:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 1 &= 0 && \text{dada} \\ u^2 - 3u + 1 &= 0 && \text{sea } u = x^2 \\ u &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} && \text{fórmula cuadrática} \\ x^2 &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} && u = x^2 \\ x &= \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} && \text{tomar la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

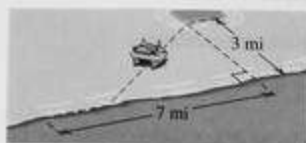
Por tanto, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}, \quad \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Con una calculadora obtenemos las aproximaciones ± 1.62 y ± 0.62 . No queremos comprobar porque no elevamos ambos lados de una ecuación a una potencia par.

**EJEMPLO 9** Determinación de la ruta de un transbordador

Figura 1

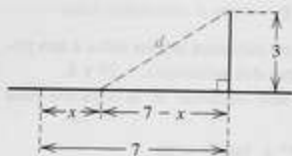


Un transbordador para pasajeros viaja desde una población hasta una isla que dista 7 millas de aquella y está a 3 millas en línea recta de la playa. Según se muestra en la figura 1, el transbordador navega a lo largo de la playa hasta algún punto y luego avanza directamente hacia la isla. Si el transbordador navega a 12 mph a lo largo de la playa y a 10 mph cuando se interna en el mar, determina las rutas que tienen un tiempo de recorrido de 45 minutos.

SOLUCIÓN Denotemos con x la distancia recorrida a lo largo de la playa. Esto lleva al dibujo de la figura 2, donde d es la distancia de un punto en la playa hasta la isla. Consultemos el triángulo rectángulo indicado:

$$\begin{aligned} d^2 &= (7-x)^2 + 3^2 && \text{teorema de Pitágoras} \\ &= 49 - 14x + x^2 + 9 && \text{elevar al cuadrado los términos} \\ &= x^2 - 14x + 58 && \text{simplificar} \end{aligned}$$

Figura 2



Tomamos la raíz cuadrada de ambos lados, observamos que $d > 0$ y obtenemos

$$d = \sqrt{x^2 - 14x + 58}.$$

Con distancia = (velocidad)(tiempo) o, lo que es lo mismo, tiempo = (distancia)/(velocidad) obtenemos esta tabla.

	A lo largo de la playa	Mar adentro
Distancia (mi)	x	$\sqrt{x^2 - 14x + 58}$
Velocidad (mi/h)	12	10
Tiempo (h)	$\frac{x}{12}$	$\frac{\sqrt{x^2 - 14x + 58}}{10}$

El tiempo para el viaje completo es la suma de las dos expresiones del último renglón de la tabla. Como la velocidad está en millas por hora, por consistencia debemos expresar este tiempo (45 min) como $\frac{3}{4}$ de hora. Por tanto, tenemos:

$$\frac{x}{12} + \frac{\sqrt{x^2 - 14x + 58}}{10} = \frac{3}{4}$$

tiempo total de viaje

$$\frac{\sqrt{x^2 - 14x + 58}}{10} = \frac{3}{4} - \frac{x}{12}$$

restar $\frac{x}{12}$

$$6\sqrt{x^2 - 14x + 58} = 45 - 5x$$

multiplicar por el m.c.m. 60

$$6\sqrt{x^2 - 14x + 58} = 5(9 - x)$$

factorizar

$$36(x^2 - 14x + 58) = 25(9 - x)^2$$

elevar ambos lados al cuadrado

$$36x^2 - 504x + 2088 = 2025 - 450x + 25x^2$$

multiplicar términos

$$11x^2 - 54x + 63 = 0$$

simplificar

$$(x-3)(11x-21)=0$$

factorizar

$$x-3=0, \quad 11x-21=0$$

teorema del factor cero

$$x=3, \quad x=\frac{21}{11}$$

despejar x

Una comprobación verifica que estos números también sean soluciones de la ecuación original; por tanto, hay dos posibles rutas con un tiempo de recorrido de 45 minutos: el transbordador puede viajar a lo largo de la playa 3 millas o $\frac{21}{11} \approx 1.9$ millas antes de avanzar hacia la isla.

2.5 Ejercicios

Ejercicios 1 al 50: resuelve la ecuación.

1 $|x+4|=11$

2 $|x-5|=2$

3 $|3x-2|+3=7$

4 $2|5x+2|-1=5$

5 $3|x+1|-2=-11$

6 $|x-2|+5=5$

7 $9x^3-18x^2-4x+8=0$

8 $3x^3-4x^2-27x+36=0$

9 $4x^4+10x^3=6x^2+15x$

10 $15x^5-20x^4=6x^3-8x^2$

11 $y^{3/2}=5y$

12 $y^{4/3}=-3y$

13 $\sqrt{7-5x}=8$

14 $\sqrt{2x-9}=\frac{1}{3}$

15 $2+\sqrt{1-5t}=0$

16 $\sqrt{6-s^2}+5=0$

17 $\sqrt{2x^2+1}-2=0$

18 $\sqrt{2x^2-1}=x$

19 $\sqrt{7-x}=x-5$

20 $\sqrt{3-x}-x=3$

21 $3\sqrt{2x-3}+2\sqrt{7-x}=11$

22 $\sqrt{2x+15}-2=\sqrt{6x+1}$

23 $x=4+\sqrt{4x-19}$

24 $x=3+\sqrt{5x-9}$

25 $x+\sqrt{5x+19}=-1$

26 $x-\sqrt{-7x-24}=-2$

27 $\sqrt{7-2x}-\sqrt{5+x}=\sqrt{4+3x}$

28 $4\sqrt{1+3x}+\sqrt{6x+3}=\sqrt{-6x-1}$

29 $\sqrt{11+8x}+1=\sqrt{9+4x}$

30 $2\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=\sqrt{5+x}$

31 $\sqrt{2\sqrt{x+1}}=\sqrt{3x-5}$

32 $\sqrt{5\sqrt{x}}=\sqrt{2x-3}$

33 $\sqrt{1+4\sqrt{x}}=\sqrt{x+1}$

34 $\sqrt{x+1}=\sqrt{x-1}$

35 $x^4-25x^2+144=0$

36 $2x^4-10x^2+8=0$

37 $5y^4-7y^2+1=0$

38 $3y^4-5y^2+1=0$

39 $36x^{-4}-13x^{-2}+1=0$

40 $x^{-2}-2x^{-1}-35=0$

41 $3x^{2/3}+4x^{1/3}-4=0$

42 $2y^{1/3}-3y^{1/6}+1=0$

43 $6w-23w^{3/2}+20=0$

44 $2x^{-2/3}-7x^{-1/3}-15=0$

45 $\left(\frac{t}{t+1}\right)^2-\frac{2t}{t+1}-8=0$

46 $6u^{-1/2}-13u^{-3/4}+6=0$

47 $27x^3=(x+5)^3$

48 $16x^4=(x-4)^4$

49 $\sqrt{x}=2\sqrt[3]{x}$ (Sugerencia: elevar ambos lados al

mcm de 3 y 4.)

50 $\sqrt{x+3}=\sqrt[3]{2x+6}$

Ejercicios 51 y 52: encuentra las soluciones reales de la ecuación.

51 (a) $x^{5/3} = 32$ (b) $x^{4/3} = 16$

(c) $x^{2/3} = -36$ (d) $x^{3/4} = 125$

(e) $x^{3/2} = -27$

52 (a) $x^{3/5} = -27$ (b) $x^{2/3} = 25$

(c) $x^{4/3} = -49$ (d) $x^{3/2} = 27$

(e) $x^{3/4} = -8$

Ejercicios 53 al 56: despeja la variable especificada.

53 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ para l (periodo de un péndulo)

54 $d = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - C^2}$ para C (segmentos de círculos)

55 $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ para h (área de un cono)

56 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ para C (circuitos de corriente alterna)

- 57 **Altura de una escalera** La distancia recomendable d a la cual se debe colocar una escalera con respecto a una pared vertical es el 25% de la longitud de la escalera L . Calcula aproximadamente la altura h que se puede alcanzar expresando h como un porcentaje de L .

Ejercicio 57



- 58 **Experimentos nucleares** Los experimentos nucleares efectuados en los océanos vaporizan grandes cantidades de agua salada. La sal hierve y se convierte en vapor a los 1738 K. Después de ser vaporizada por una fuerza de 10 megatones, la sal tarda al menos de 8 a 10 s en enfriarse lo suficiente para cristalizarse. La cantidad de sal A , que se ha cristalizado en t segundos después de un experimento, se calcula a veces con $A = k\sqrt{t/T}$, donde k y T son constantes. Despeja t de esta ecuación.

- 59 **Potencia eléctrica de los molinos de viento** La potencia P (en watts) generada por un molino de viento que tiene una eficiencia E está dada por la fórmula $P = 0.31ED^3V^3$, donde D es el diámetro (en pies) de las aspas y V es la velocidad del viento (en pies por segundo; pies/s). Calcula la velocidad del viento necesaria para generar 10 000 watts (W) si $E = 42\%$ y $D = 10$.

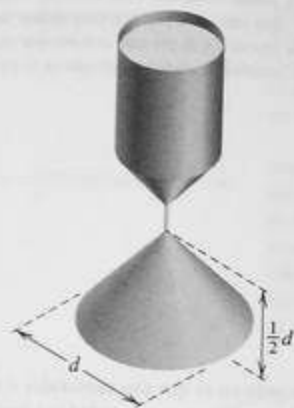
- 60 **Resistencia de extracción de clavos** La resistencia de extracción de un clavo indica su fuerza de sostén en madera. Una fórmula que se usa para clavos comunes es $P = 15700S^2RD$, donde P es la resistencia máxima de extracción (en lb), S es la gravedad específica de la madera a 12% de contenido de humedad, R es el radio del clavo (en pulgadas) y D es la profundidad (en pulgadas) que el clavo ha penetrado en la madera. Un clavo común de 2 pulgadas de longitud y 0.113 pulg de diámetro es clavado por completo en una pieza de abeto Douglas. Si se requiere una fuerza máxima de 380 lb para sacarlo, haz un cálculo aproximado de la gravedad específica del abeto Douglas.

- 61 **Efecto del precio sobre la demanda** Por lo general, la demanda de un artículo depende de su precio. Si otros factores no afectan la demanda, la cantidad Q comparada a un precio P (en centavos) está dada por $Q = kP^{-c}$, donde k y c son constantes positivas. Si $k = 10^5$ y $c = \frac{1}{2}$, encuentra el precio que generará la compra de 5000 piezas.

- 62 **Isla de calor urbano** Las zonas urbanas tienen promedios más altos de temperaturas del aire que las rurales, por la presencia de edificios, asfalto y concreto. Este fenómeno se conoce como *isla de calor urbano*. La diferencia de temperatura T (en °C) entre zonas urbanas y rurales cerca de Montreal, con una población P entre 1000 y 1 000 000, se puede describir mediante la fórmula $T = 0.25P^{1/3}/\sqrt{v}$, donde v es el promedio de velocidad del viento (mi/h) y $v \geq 1$. Si $T = 3$ y $v = 5$, encuentra P .

- 63 **Dimensiones de un cúmulo de arena** Cuando se fuga arena de un recipiente, forma un cúmulo en forma de cono circular recto, cuya altitud es siempre la mitad del diámetro d de la base. ¿Cuál será d en el momento en que se ha fugado 144 cm³ de arena?

Ejercicio 63



- 64 Inflado de un globo meteorológico El volumen de un globo esférico es de $10\frac{2}{3}$ pies³. Para levantar un equipo transmisor y meteorológico, el globo se infla con $25\frac{1}{3}$ pies³ de helio adicionales. ¿Cuánto aumenta su diámetro?

- 65 Regla del cubo en ciencias políticas La regla del cubo en ciencias políticas es una fórmula empírica, para pronosticar (en teoría) el porcentaje y de los escaños en la Cámara estadounidense de representantes que un partido político obtendrá como consecuencia del voto popular para su candidato presidencial. Si x denota el porcentaje de dicho voto popular, la regla del cubo expresa que

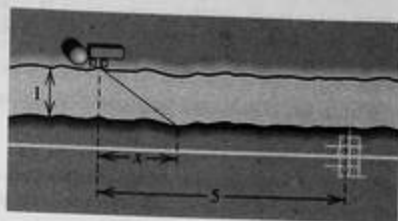
$$y = \frac{x^3}{x^3 + (1-x)^3}.$$

¿Qué porcentaje del voto popular necesitará el candidato para que su partido gane 60% de los escaños?

- 66 Dimensiones de un vaso cónico Un vaso cónico de papel debe tener una altura de 3 pulgadas. Encuentra el radio del cono que resultará en un área superficial de 6π pulg².

- 67 Instalación de una línea eléctrica Se piensa instalar una línea eléctrica a través de un río de una milla de ancho, hasta una población que está a cinco millas corriente abajo (ve la figura). El tendido de un cable bajo el agua cuesta \$7500 por milla y en tierra, \$6000 por milla. Determina cómo debe instalarse el cable si se dispone de \$35 000 para este proyecto.

Ejercicio 67



- 68 Cálculo del crecimiento humano Adolphe Quetelet (1796–1874), director del Observatorio de Bruselas de 1832 a 1874, fue la primera persona que intentó ajustar una expresión matemática a los datos del crecimiento humano. Si h denota la estatura en metros y t denota la edad en años. La fórmula de Quetelet para varones en Bruselas se puede expresar como

$$h = \frac{h}{h_M - h} = at + \frac{h_0 + t}{1 + \frac{1}{3}t},$$

donde $h_0 = 0.5$ es la estatura al nacimiento, $h_M = 1.684$ es la estatura final de un adulto y $a = 0.545$.

- (a) Indica la estatura esperada de un niño de 12 años.
(b) ¿A qué edad se alcanza 50% de la estatura de la edad adulta?



- 69 Relaciones luz solar-latitud La siguiente tabla proporciona el número de minutos de luz solar que hay en varias latitudes del hemisferio norte en los solsticios de verano e invierno.

Latitud	Verano	Invierno
0°	720	720
10°	755	685
20°	792	648
30°	836	604
40°	892	548
50°	978	462
60°	1107	333

- (a) De las siguientes ecuaciones, ¿cuál predice con más precisión la duración del día en el solsticio de verano en la latitud L ?

$$(1) D_1 = 6.096L + 685.7$$

$$(2) D_2 = 0.00178L^3 - 0.072L^2 + 4.37L + 719$$

- (b) Aproxima la duración de la luz solar a una latitud de 35° durante el solsticio de verano.



70 Volumen de una caja Hay que elaborar una caja abierta a partir de una lámina metálica rectangular de 24×36 pulgadas, recortando de cada esquina un cuadrado idéntico de área x^2 y doblando los lados hacia arriba.

- Halla una ecuación para establecer el volumen V de la caja en términos de x .
- Usa una tabla práctica a fin de calcular el valor de x dentro de ± 0.1 pulgada para obtener el volumen máximo.



71 Construcción de una caja Una caja de cartón con tapa abierta y fondo cuadrado debe tener un volumen de 25 pies³. Utiliza una tabla práctica para definir las dimensiones de la caja al 0.1 de pie más cercano que reduzca al mínimo la cantidad de cartón empleado en la elaboración de la caja.

2.6

Desigualdades

Una **desigualdad** es un enunciado en el que dos cantidades o expresiones no son iguales. Puede darse el caso de que una cantidad sea menor que ($<$), menor o igual que (\leq), mayor que ($>$) o mayor o igual que (\geq) la otra cantidad. Consideremos la desigualdad

$$2x + 3 > 11,$$

en donde x es una variable. Según se expone en la tabla que sigue, determinados números conducen a expresiones verdaderas cuando se sustituyen con x , pero otros llevan a expresiones falsas.

x	$2x + 3 > 11$	Conclusión
3	$9 > 11$	Expresión falsa
4	$11 > 11$	Expresión falsa
5	$13 > 11$	Expresión verdadera
6	$15 > 11$	Expresión verdadera

Si se obtiene una expresión verdadera cuando se sustituye un número b por x , entonces b es una **solución** de la desigualdad; por tanto, $x = 5$ es una solución de $2x + 3 > 11$ porque $13 > 11$, pero $x = 3$ no es una solución pues $9 > 11$ es falso. **Resolver** una desigualdad quiere decir encontrar todas sus soluciones. Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen soluciones idénticas.

La mayor parte de las desigualdades posee un número infinito de soluciones. Para ilustrar lo anterior, las soluciones de la desigualdad

$$2 < x < 5$$

abarcan todo número real x entre 2 y 5. Este conjunto recibe el nombre de **intervalo abierto** y se denota con $(2, 5)$. La **gráfica** del intervalo abierto $(2, 5)$ es el conjunto de todos los puntos de una recta coordenada que se encuentran

Figura 1



Figura 2



entre los puntos correspondientes a $x = 2$ y $x = 5$ (pero sin incluirlos). La gráfica se representa sombreando la parte apropiada del eje (figura 1). Nos referimos a este proceso como el **trazado de la gráfica** del intervalo. Los números 2 y 5 se llaman **puntos extremos** del intervalo $(2, 5)$. Los paréntesis de la notación $(2, 5)$ y la figura 1 indican que los puntos extremos del intervalo no están incluidos.

Si deseamos abarcar un punto extremo, usamos corchetes en lugar de paréntesis; por ejemplo, las soluciones de la desigualdad $2 \leq x \leq 5$ se denotan con $[2, 5]$ y se conocen como **intervalo cerrado**. La gráfica de $[2, 5]$ aparece en la figura 2, donde los corchetes indican que se incluyen los puntos extremos. También consideraremos **intervalos semiabiertos** $[a, b)$ y $(a, b]$ e **intervalos infinitos**, como se describe en la siguiente tabla. El símbolo ∞ (se lee "infinito") que se usa para intervalos infinitos, sólo es un medio de notación y no representa un número real.

Intervalos

Notación	Desigualdad	Gráfica
(1) (a, b)	$a < x < b$	
(2) $[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
(3) $[a, b)$	$a \leq x < b$	
(4) $(a, b]$	$a < x \leq b$	
(5) (a, ∞)	$x > a$	
(6) $[a, \infty)$	$x \geq a$	
(7) $(-\infty, b)$	$x < b$	
(8) $(-\infty, b]$	$x \leq b$	
(9) $(-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$	

Los métodos para resolver desigualdades en x son semejantes a los que se utilizan en la solución de ecuaciones. A menudo usamos las propiedades de desigualdades a fin de sustituir una desigualdad con una lista de desigualdades equivalentes, hasta terminar con una desigualdad que permita obtener soluciones con facilidad. Las propiedades de la tabla adjunta se pueden demostrar para los números reales a, b, c y d .

Propiedades de las desigualdades

Propiedad	Ejemplo
(1) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.	$2 < 5$ y $5 < 9$, así que $2 < 9$.
(2) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.	$2 < 7$, así que $2 + 3 < 7 + 3$ y $2 - 3 < 7 - 3$.
(3) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	$2 < 5$ y $3 > 0$, así que $2 \cdot 3 < 5 \cdot 3$ y $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$.
(4) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.	$2 < 5$ y $-3 < 0$, así que $2(-3) > 5(-3)$ y $\frac{2}{-3} > \frac{5}{-3}$.

Invierte la desigualdad cuando multipliques o dividas por un número negativo.

Es importante recordar que multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por un número real negativo *invierte* el signo de desigualdad (ve la propiedad 4). Las propiedades semejantes a las citadas son verdaderas para otras desigualdades, para \leq y para \geq . Por tanto, si $a > b$, entonces $a + c > b + c$; si $a \geq b$ y $c < 0$, entonces $ac \leq bc$; y así sucesivamente.

Cuando x representa un número real —de acuerdo con la propiedad 2— sumar o restar la misma expresión que contenga x en ambos lados de una desigualdad dará una desigualdad equivalente. Según la propiedad 3, es posible multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por una expresión que contenga x si estamos seguros de que la expresión es positiva para todos los valores de x considerados. Para ilustrar lo anterior, la multiplicación o la división entre $x^4 + 3x^2 + 5$ sería permisible porque esta expresión es siempre positiva. Si multiplicamos o dividimos ambos lados de una desigualdad entre una expresión que siempre es negativa, como $-7 - x^2$, entonces, por la propiedad 4, la desigualdad se invierte.

En los próximos ejemplos describiremos soluciones de desigualdades por medio de intervalos y también los representaremos en forma gráfica.

**EJEMPLO 1** Solución de una desigualdad

Resuelve la desigualdad $-3x + 4 < 11$.

SOLUCIÓN

$$-3x + 4 < 11 \quad \text{dada}$$

$$(-3x + 4) - 4 < 11 - 4 \quad \text{restar 4}$$

$$-3x < 7 \quad \text{simplificar}$$

$$\frac{-3x}{-3} > \frac{7}{-3} \quad \begin{array}{l} \text{dividir entre } -3; \\ \text{invertir el signo de} \\ \text{desigualdad} \end{array}$$

$$x > -\frac{7}{3} \quad \text{simplificar}$$

Figura 3



Por tanto, las soluciones de $-3x + 4 < 11$ están formadas por todos los números reales x tales que $x > -\frac{7}{3}$. Éste es el intervalo $(-\frac{7}{3}, \infty)$ trazado en la figura 3.

EJEMPLO 2 Solución de una desigualdadResuelve la desigualdad $4x - 3 < 2x + 5$.**SOLUCIÓN**

$$4x - 3 < 2x + 5 \quad \text{dada}$$

$$(4x - 3) + 3 < (2x + 5) + 3 \quad \text{sumar 3}$$

$$4x < 2x + 8 \quad \text{simplificar}$$

$$4x - 2x < (2x + 8) - 2x \quad \text{restar } 2x$$

$$2x < 8 \quad \text{simplificar}$$

$$\frac{2x}{2} < \frac{8}{2} \quad \text{dividir entre 2}$$

$$x < 4 \quad \text{simplificar}$$

Figura 4



Por consiguiente, las soluciones de la desigualdad dada están formadas por todos los números reales x tales que $x < 4$. Éste es el intervalo $(-\infty, 4)$ de la figura 4.

EJEMPLO 3 Solución de una desigualdadResuelve la desigualdad $-6 < 2x - 4 < 2$.

SOLUCIÓN Un número real x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si es una solución de *ambas* desigualdades.

$$-6 < 2x - 4 \quad \text{y} \quad 2x - 4 < 2.$$

La primera desigualdad se resuelve como sigue:

$$-6 < 2x - 4 \quad \text{dada}$$

$$-6 + 4 < (2x - 4) + 4 \quad \text{sumar 4}$$

$$-2 < 2x \quad \text{simplificar}$$

$$\frac{-2}{2} < \frac{2x}{2} \quad \text{dividir entre 2}$$

$$-1 < x \quad \text{simplificar}$$

$$x > -1 \quad \text{desigualdad equivalente}$$

La segunda desigualdad se resuelve entonces:

$$2x - 4 < 2 \quad \text{dada}$$

$$2x < 6 \quad \text{sumar 4}$$

$$x < 3 \quad \text{dividir entre 2}$$

Por tanto, x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si *ambas*

$$x > -1 \quad \text{y} \quad x < 3;$$

esto es,

$$-1 < x < 3.$$

(continúa)

Figura 5



Así pues, las soluciones son todos los números del intervalo abierto $(-1, 3)$, trazado en la figura 5.

Un método alternativo (y más corto) consiste en resolver ambas desigualdades simultáneamente; es decir, resolver la desigualdad continua:

$$\begin{array}{rcll} -6 < 2x - 4 < 2 & & \text{dada} \\ -6 + 4 < 2x < 2 + 4 & & \text{sumar 4} \\ -2 < 2x < 6 & & \text{simplificar} \\ -1 < x < 3 & & \text{dividir entre 2} \end{array}$$

**EJEMPLO 4** Solución de una desigualdad continua

Resuelve la desigualdad continua $-5 \leq \frac{4-3x}{2} < 1$.

SOLUCIÓN Un número x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si

$$-5 \leq \frac{4-3x}{2} \quad \text{y} \quad \frac{4-3x}{2} < 1.$$

Es posible trabajar con cada una de las desigualdades por separado o resolverlas al mismo tiempo (recordemos que nuestra meta es aislar x) de esta forma:

$$\begin{array}{rcll} -5 \leq \frac{4-3x}{2} < 1 & & \text{dada} \\ -10 \leq 4-3x < 2 & & \text{multiplicar por 2} \\ -10-4 \leq -3x < 2-4 & & \text{restar 4} \\ -14 \leq -3x < -2 & & \text{simplificar} \\ \frac{-14}{-3} \geq \frac{-3x}{-3} > \frac{-2}{-3} & & \text{dividir entre -3; invertir los signos de desigualdad} \\ \frac{14}{3} \geq x > \frac{2}{3} & & \text{simplificar} \\ \frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3} & & \text{desigualdad equivalente} \end{array}$$

Figura 6



Por tanto, las soluciones de la desigualdad son todos los números del intervalo semiabierto $\left[\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$ que aparece en la figura 6.

EJEMPLO 5 Solución de una desigualdad racional

Resuelve la desigualdad $\frac{1}{x-2} > 0$.

SOLUCIÓN Como el numerador es positivo, la fracción es positiva si y sólo si el denominador, $x-2$, también es positivo; en consecuencia, $x-2 > 0$, o bien, lo que es igual, $x > 2$, y las soluciones son todos los números del intervalo infinito $(2, \infty)$ dibujado en la figura 7.

Figura 7

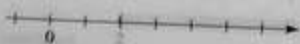
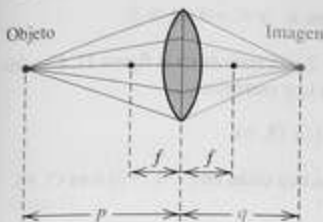


Figura 8

**EJEMPLO 6** Uso de una fórmula para lentes

Según se ilustra en la figura 8, si una lente convexa tiene una longitud focal de f centímetros y si un objeto se coloca a una distancia de p centímetros de la lente con $p > f$, entonces la distancia q desde la lente a la imagen está relacionada con p y f , por la fórmula

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

Si $f = 5$ cm, ¿cuán cerca debe estar el objeto de la lente para que la imagen quede a más de 12 cm de la lente?

SOLUCIÓN Como $f = 5$, la fórmula dada se puede escribir como

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{5}.$$

Deseamos determinar los valores de q tales que $q > 12$. Primero despejamos q de la ecuación:

$$5q + 5p = pq$$

multiplicar por el mcd, $5pq$

$$q(5 - p) = -5p$$

reunir los términos q en un lado y factorizar

$$q = \frac{-5p}{5 - p} = \frac{5p}{p - 5}$$

dividir entre $5 - p$

Para resolver la desigualdad $q > 12$, procedemos como sigue:

$$\frac{5p}{p - 5} > 12$$

$$q = \frac{5p}{p - 5}$$

$$5p > 12(p - 5)$$

posible, ya que $p > f$ implica $p - 5 > 0$

$$-7p > -60$$

multiplicar factores y reunir los términos de p en un lado

$$p < \frac{60}{7}$$

dividir entre -7 , invertir la desigualdad

Al combinar la última desigualdad con el hecho de que p es mayor que 5, se obtiene la solución

$$5 < p < \frac{60}{7}.$$

Si un punto X sobre una recta coordenada tiene una coordenada x , como se describe en la figura 9, entonces X está a la derecha del origen O si $x > 0$ y a la izquierda de O si $x < 0$. Con base en la sección 1.1, la distancia $d(O, X)$ entre O y X es el número real *no negativo* dado por

$$d(O, X) = |x - 0| = |x|.$$

Se deduce que las soluciones de una desigualdad como $|x| < 3$ constan de las coordenadas de todos los puntos cuya distancia desde O es menor que 3. Éste es el intervalo abierto $(-3, 3)$ trazado en la figura 10; por tanto,

$$|x| < 3 \quad \text{es equivalente a} \quad -3 < x < 3.$$

Figura 9

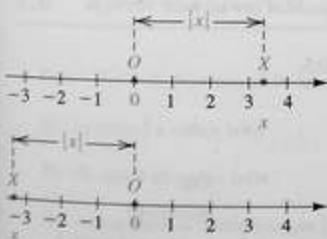
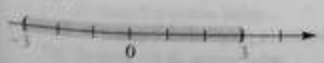


Figura 10



En forma análoga, para $|x| > 3$, la distancia entre O y un punto con coordenada x es mayor que 3; esto es,

$$|x| > 3 \text{ es equivalente a } x < -3 \text{ o } x > 3.$$

Figura 11



La gráfica de las soluciones de $|x| > 3$ está trazada en la figura 11. Con frecuencia usamos el **símbolo de unión** \cup y escribimos

$$(-\infty, -3) \cup (3, \infty),$$

para denotar todos los números reales que están en $(-\infty, -3)$ o en $(3, \infty)$. La notación

$$(-\infty, 2) \cup (2, \infty),$$

representa todos los números reales excepto el 2.

El **símbolo de intersección** \cap denota los elementos *comunes* a los dos conjuntos; por ejemplo,

$$(-\infty, 3) \cap (-3, \infty) = (-3, 3),$$

ya que la intersección de $(-\infty, 3)$ y $(-3, \infty)$ consta de todos los números reales x tales que $x < 3$ y $x > -3$.

El análisis anterior se puede generalizar para obtener las siguientes propiedades de los valores absolutos.

Propiedades de los valores absolutos ($b > 0$)

(1) $|a| < b$ es equivalente a $-b < a < b$.

(2) $|a| > b$ es equivalente a $a < -b$ o $a > b$.

En el siguiente ejemplo utilizamos la propiedad 1 con $a = x - 3$ y $b = 0.5$.

EJEMPLO 7 Solución de una desigualdad con un valor absoluto

Resuelve la desigualdad $|x - 3| < 0.5$.

SOLUCIÓN

$$|x - 3| < 0.5$$

$$-0.5 < x - 3 < 0.5$$

$$-0.5 + 3 < (x - 3) + 3 < 0.5 + 3$$

$$2.5 < x < 3.5$$

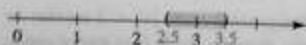
dada

propiedad 1

despejar x al sumar 3

simplificar

Figura 12



Por tanto, las soluciones son los números reales del intervalo abierto $(2.5, 3.5)$. La gráfica aparece en la figura 12.

En el siguiente ejemplo aplicaremos la propiedad 2 con $a = 2x + 1$ y $b = 9$.

EJEMPLO 8 Solución de una desigualdad con un valor absolutoResuelve la desigualdad $|2x + 3| > 9$.

SOLUCIÓN	$ 2x + 3 > 9$	dada
	$2x + 3 < -9$ o $2x + 3 > 9$	propiedad 2
	$2x < -12$ o $2x > 6$	restar 3
	$x < -6$ o $x > 3$	dividir entre 2

Figure 13



En consecuencia, las soluciones de la desigualdad $|2x + 3| > 9$ constan de los números $(-\infty, -6) \cup (3, \infty)$. La grafica está en la figura 13.

La ley de la tricotomía de la sección 1.1 expresa que para cualesquiera números reales a y b , una y sólo una, de las siguientes expresiones es verdadera:

$$a > b, \quad a < b, \quad \text{o} \quad a = b.$$

Así, luego de resolver $|2x + 3| > 9$ en el ejemplo 8, fácilmente obtenemos las soluciones $|2x + 3| < 9$ y $|2x + 3| = 9$, es decir, $(-6, 3)$ y $\{-6, 3\}$, respectivamente. Notarás que la unión de estos tres conjuntos de soluciones es, necesariamente, el conjunto de los números reales \mathbb{R} .

Al usar la notación $a < x < b$, debemos tener $a < b$. Por tanto, es incorrecto escribir la solución $x < -6$ o $x > 3$ (en el ejemplo 8) como $3 < x < -6$. Otro mal uso de la notación de desigualdad es escribir $a < x > b$, ya que cuando se usan varios símbolos de desigualdad en una expresión, deben apuntar en la misma dirección.

2.6 Ejercicios1 Dado $-7 < -3$, determina la desigualdad obtenida si

- (a) Se suma 5 a ambos lados
- (b) Se resta 4 de ambos lados
- (c) Ambos lados se multiplican por $\frac{1}{3}$
- (d) Ambos lados se multiplican por $-\frac{1}{3}$

2 Dado $4 > -5$, encuentra la desigualdad obtenida si

- (a) Se suma 7 a ambos lados
- (b) Se resta -5 de ambos lados

(c) Ambos lados se dividen entre 6

(d) Ambos lados se dividen entre -6

Ejercicios 3 al 12: expresa la desigualdad como intervalo y traza su gráfica.

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 3 $x < -2$ | 4 $x \leq 5$ |
| 5 $x \geq 4$ | 6 $x > -3$ |
| 7 $-2 < x \leq 4$ | 8 $-3 \leq x < 5$ |
| 9 $3 \leq x \leq 7$ | 10 $-3 < x < -1$ |
| 11 $5 > x \geq -2$ | 12 $-3 \geq x > -5$ |

Ejercicios 13 al 20: expresa el intervalo como desigualdad en la variable x .

13 $(-5, 8]$

14 $[0, 4)$

15 $[-4, -1]$

16 $(3, 7)$

17 $[4, \infty)$

18 $(-3, \infty)$

19 $(-\infty, -5)$

20 $(-\infty, 2]$

Ejercicios 21 al 70: resuelve la desigualdad y expresa las soluciones en términos de intervalos siempre que sea posible.

21 $3x - 2 > 14$

22 $2x + 5 \leq 7$

23 $-2 - 3x \geq 2$

24 $3 - 5x < 11$

25 $2x + 5 < 3x - 7$

26 $x - 8 > 5x + 3$

27 $9 + \frac{1}{2}x \geq 4 - \frac{1}{2}x$

28 $\frac{1}{4}x + 7 \leq \frac{1}{2}x - 2$

29 $-3 < 2x - 5 < 7$

30 $4 \geq 3x + 5 > -1$

31 $3 \leq \frac{2x-3}{5} < 7$

32 $-2 < \frac{4x+1}{3} \leq 0$

33 $4 > \frac{2-3x}{7} \geq -2$

34 $5 \geq \frac{6-5x}{3} > 2$

35 $0 \leq 4 - \frac{1}{2}x < 2$

36 $-2 < 3 + \frac{1}{4}x \leq 5$

37 $(2x-3)(4x+5) \leq (8x+1)(x-7)$

38 $(x-3)(x+3) \geq (x+5)^2$

39 $(x-4)^2 > x(x+12)$

40 $2x(6x+5) < (3x-2)(4x+1)$

41 $\frac{4}{3x+2} \geq 0$

42 $\frac{3}{2x+5} \leq 0$

43 $\frac{-2}{4-3x} > 0$

44 $\frac{-3}{2-x} < 0$

45 $\frac{2}{(1-x)^2} > 0$

46 $\frac{4}{x^2+4} < 0$

47 $|x| < 3$

48 $|x| \leq 7$

49 $|x| \geq 5$

50 $|-x| > 2$

51 $|x+3| < 0.01$

52 $|x-4| \leq 0.03$

53 $|x+2| + 0.1 \geq 0.2$

54 $|x-3| - 0.3 > 0.1$

55 $|2x+5| < 4$

56 $|3x-7| \geq 5$

57 $-\frac{1}{2}|6-5x| + 2 \geq 1$

58 $2|-11-7x| - 2 > 10$

59 $|7x+2| > -2$

60 $|6x-5| \leq -2$

61 $|3x-9| > 0$

62 $|5x+2| \leq 0$

63 $\left| \frac{2-3x}{5} \right| \geq 2$

64 $\left| \frac{2x+5}{3} \right| < 1$

65 $\frac{3}{|5-2x|} < 2$

66 $\frac{2}{|2x+3|} \geq 5$

67 $-2 < |x| < 4$

68 $1 < |x| < 5$

69 $1 < |x-2| < 4$

70 $2 < |2x-1| < 3$

Ejercicios 71 y 72: resuelve la parte (a) y determina las respuestas a las partes (b) y (c) con la respuesta.

71 (a) $|x+5| = 3$

(b) $|x+5| < 3$

(c) $|x+5| > 3$

72 (a) $|x-3| < 2$

(b) $|x-3| = 2$

(c) $|x-3| > 2$

Ejercicios 73 al 76: expresa el enunciado en términos de una desigualdad con un valor absoluto.

73 El peso w de un luchador no ha de variar más de 2 lb de 148 lb.

74 El radio r de un cojinete no debe variar más de 0.01 cm de 1 cm.

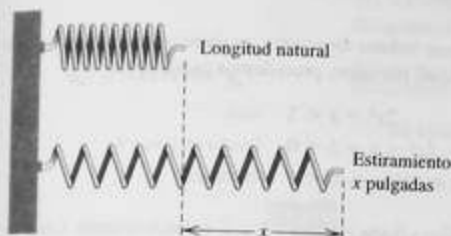
75 La diferencia de dos temperaturas T_1 y T_2 de una mezcla química tiene que estar entre 5°C y 10°C .

76 El tiempo de arribo t del tren B será al menos 5 minutos diferente de las 4:00 P.M. que es el momento de llegada del tren A.

77 Escalas de temperatura La fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ relaciona las lecturas de temperatura en las escalas Fahrenheit y Celsius. ¿Qué valores de F corresponden a los valores C tales que $30 \leq C \leq 40$?

78. **Ley de Hooke** De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza F (en lb) requerida para estirar cierto resorte x pulgadas, más allá de su longitud natural, está dada por $F = (4.5)x$ (ve la figura). Si $10 \leq F \leq 18$, ¿cuáles son los valores correspondientes de x ?

Ejercicio 78



79. **Ley de Ohm** La ley de Ohm en teoría eléctrica señala que si R denota la resistencia de un objeto (en ohms), V es la diferencia de potencial (en volts) conectada al objeto, e I es la corriente (en amperes) que circula por el objeto, entonces $R = V/I$. Si el voltaje es 110, ¿qué valores de resistencia producirán una corriente que no exceda de 10 amperes?

80. **Resistencia eléctrica** Si dos resistores, R_1 y R_2 se conectan en paralelo en un circuito eléctrico, la resistencia neta R está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si $R_1 = 10$ ohms, ¿qué valores de R_2 darán una resistencia neta de menos de 5 ohms?

81. **Amplificación lineal** En la figura se muestra una lente de aumento. El objeto que se ampliará se coloca de modo que la distancia p desde la lente sea menor que la longitud focal f . La amplificación lineal M es el cociente entre el tamaño de la imagen y el del objeto. En física se demuestra que $M = f/(f - p)$. Si $f = 6$ cm, ¿a qué distancia de la lente hay que colocar el objeto para que su imagen aparezca ampliada al menos tres veces? (Compare con el ejemplo 6).

Ejercicio 81



82. **Concentración de medicamento** Para tratar la arritmia cardíaca, se aplica un medicamento al torrente sanguíneo en forma intravenosa. Supón que la concentración c del fármaco después de t horas está dada por $c = 3.5t/(t + 1)$ mg/L. Si el nivel terapéutico mínimo es 1.5 mg/L, indica cuándo se rebasa este nivel.

83. **Gastos en una empresa** Una constructora requiere decidir cuál grúa comprar. El modelo A cuesta \$50 000 y requiere \$4000 anuales de mantenimiento; el modelo B tiene un precio de \$4000 y un costo de mantenimiento de \$5 500 al año. ¿Durante cuántos años se usará el modelo A antes de que se vuelva más económico que el B?

84. **Compra de un auto** Un consumidor se muestra indeciso ante cuál vehículo adquirir. El auto A cuesta \$10 000 con un rendimiento de 30 millas por galón (mpg) y un seguro de \$550 por año; el B cuesta \$12 000, con un rendimiento de 50 mpg y un seguro de \$600 por año. Considera que el comprador recorre 15 000 millas al año y que el precio de la gasolina permanece constante en \$1.25 por galón. Con base en estos datos, señala cuánto tiempo se necesitará para que el costo total del auto B sea menor que el del A.

85. **Estatura decreciente** La estatura de una persona disminuye por lo general 0.024 pulgadas por año después de los 30 años.

- (a) Si una mujer mide 5 pies 9 pulgadas a los 30 años, predice la estatura que tendrá a los 70 años.
- (b) Un hombre de 50 años mide 5 pies 6 pulgadas. Encuentra una desigualdad para los límites en estatura (en pulgadas) que experimentará entre los 30 y 70 años.

2.7

Más sobre desigualdades

Para resolver una desigualdad con polinomios de grado mayor que 1, expresaremos cada polinomio como el producto de factores lineales $ax + b$, factores cuadráticos irreducibles $ax^2 + bx + c$ o ambos. Si alguno de dichos factores no es cero en un intervalo, entonces es positivo o negativo en todo el intervalo; por tanto, si escogemos cualquier k del intervalo y si el factor es positivo (o negativo) para $x = k$, entonces es positivo (o negati-

tivo) en todo el intervalo. El valor del factor en $x = k$ se llama **valor de prueba** en el número de prueba k . Este concepto se expone en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Solución de una desigualdad cuadrática

Resuelve la desigualdad $2x^2 - x < 3$.

SOLUCIÓN Para usar valores de prueba, es esencial tener 0 en un lado del signo de desigualdad; por tanto, procedemos como sigue:

$$2x^2 - x < 3 \quad \text{dada}$$

$$2x^2 - x - 3 < 0 \quad \text{igualar un lado a 0}$$

$$(x + 1)(2x - 3) < 0 \quad \text{factorizar}$$

Figura 1



Los factores $x + 1$ y $2x - 3$ son cero en -1 y $\frac{3}{2}$, respectivamente. Los puntos correspondientes sobre una recta coordenada (figura 1) fijan los intervalos que no se traslapan.

$$(-\infty, -1), \left(-1, \frac{3}{2}\right), \text{ y } \left(\frac{3}{2}, \infty\right).$$

Podemos encontrar los signos de $x + 1$ y $2x - 3$ de cada intervalo con un valor de prueba. Para ilustrar lo anterior, si escogemos $k = -10$ en $(-\infty, -1)$, los valores tanto de $x + 1$ como de $2x - 3$ son negativos y, en consecuencia, lo serán en todo el intervalo $(-\infty, -1)$. Un procedimiento similar para los otros dos intervalos nos dará la siguiente *tabla de signos*, donde el término *signo resultante* del último renglón se refiere al signo obtenido al aplicar las leyes de los signos al producto de los factores. Observarás que el signo resultante es positivo o negativo según el número de signos negativos de los factores sea par o impar, respectivamente.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \infty)$
Signo de $x + 1$	-	+	+
Signo de $2x - 3$	-	-	+
Signo resultante	+	-	+

En ocasiones conviene representar los signos de $x + 1$ y $2x - 3$ con una recta coordenada y un *diagrama de signos* (figura 2). Las líneas verticales indican los lugares en que los factores son cero, y los signos de factores aparecen arriba de la recta coordenada. Los signos resultantes se muestran en azul oscuro.

Figura 2



Las soluciones de $(x + 1)(2x - 3) < 0$ son los valores de x para los que el producto de los factores es *negativo*; esto es, donde el signo resultante es negativo. Esto corresponde al intervalo abierto $(-1, \frac{3}{2})$.

Ya en la página 81 estudiamos el teorema del factor cero, que se refería a las *igualdades*. Es un error común ampliar este teorema a las *desigualdades*. La siguiente advertencia muestra esta extensión incorrecta aplicada a la desigualdad del ejemplo 1.



$$(x + 1)(2x - 3) < 0 \text{ no es equivalente a } x + 1 < 0 \text{ o } 2x - 3 < 0$$

En ejemplos futuros usaremos un cuadro de signos o un diagrama de signos, pero no las dos cosas. Al resolver ejercicios debes elegir el método de solución que manejes con más comodidad.



EJEMPLO 2 Solución de una desigualdad cuadrática

Resuelve la desigualdad $-3x^2 < -21x + 30$.

SOLUCIÓN	$-3x^2 < -21x + 30$	dada
	$-3x^2 + 21x - 30 < 0$	igualar un lado a 0
	$x^2 - 7x + 10 > 0$	dividir entre el factor común -3; invertir la desigualdad
	$(x - 2)(x - 5) > 0$	factorizar

Los factores son cero en 2 y en 5. Los puntos correspondientes de una recta coordenada (figura 3) establecen los intervalos que no se traslapan.

Figura 3



$$(-\infty, 2) \quad (2, 5), \quad \text{y} \quad (5, \infty).$$

Al igual que en el ejemplo 1, es posible usar valores de prueba a fin de obtener esta tabla de signos:

Interval	$(-\infty, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
Signo de $x - 2$	-	+	+
Signo de $x - 5$	-	-	+
Signo resultante	+	-	+

Las soluciones de $(x - 2)(x - 5) > 0$ son los valores de x para los que el signo resultante es *positivo*; por tanto, la solución de la desigualdad dada es la unión $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$.

EJEMPLO 3 Uso de un diagrama de signos en la solución de una desigualdad

Resuelve la desigualdad $\frac{(x + 2)(3 - x)}{(x + 1)(x^2 + 1)} \leq 0$.

SOLUCIÓN Dado que 0 ya está en el lado derecho de la desigualdad y el lado izquierdo está factorizado, se puede seguir directamente al diagrama de signos de la figura 4, donde las líneas verticales indican los ceros $(-2, -1 \text{ y } 3)$ de los factores.

Figura 4



El recuadro en -1 indica que se hace igual a cero un factor del denominador de la desigualdad original. En vista de que el factor cuadrático $x^2 + 1$ siempre es positivo, no afecta el signo de cociente y se puede omitir del diagrama.

Los diferentes signos de los factores se pueden encontrar usando valores de prueba. Como alternativa, baste recordar que a medida que x aumenta, el signo de un factor lineal $ax + b$ pasa de negativo a positivo si el coeficiente a de x es positivo, y de positivo a negativo si a es negativo.

Para hallar en dónde el cociente es menor o igual a 0, a partir del diagrama de signos observamos primero que es *negativo* para números en $(-2, -1) \cup (3, \infty)$. Como el cociente es 0 en $x = -2$ y $x = 3$, los números -2 y 3 también son soluciones y debemos *incluirlos* en la respuesta. Por último, el cociente es *indefinido* en $x = -1$, así que *excluimos* -1 de nuestra solución; por tanto, las soluciones de la desigualdad dada están dadas por

$$[-2, -1) \cup [3, \infty).$$



EJEMPLO 4 Uso de un diagrama de signos para resolver una desigualdad

Resuelve la desigualdad $\frac{(2x+1)^2(x-1)}{x(x^2-1)} \geq 0$.

SOLUCIÓN Al rescribir la desigualdad como

$$\frac{(2x+1)^2(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \geq 0,$$

vemos que $x-1$ es un factor común tanto del numerador como del denominador. Así, podemos cancelar este factor y reducir nuestra búsqueda de soluciones si *asumimos* que $x-1 \neq 0$ (es decir, $x \neq 1$)

$$\frac{(2x+1)^2}{x(x+1)} \geq 0 \quad \text{y} \quad x \neq 1.$$

Después observamos que este cociente es 0 si $2x+1=0$ (es decir $x=-\frac{1}{2}$). De este modo, $-\frac{1}{2}$ es una solución. Construimos el diagrama de signos (figura 5).

Figura 5



para encontrar las soluciones restantes. No incluimos $(2x + 1)^2$ en el diagrama de signos, ya que esta expresión es positiva siempre que $x \neq -\frac{1}{2}$, por lo que no afecta al signo del cociente. Al corroborar el signo resultante y recordar que $-\frac{1}{2}$ es una solución pero que 1 no es solución, vemos que las soluciones de la desigualdad están dadas por

$$(-\infty, -1) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup (0, 1) \cup (1, \infty).$$

EJEMPLO 5 Uso de un diagrama de signos para resolver una desigualdad

Resuelve la desigualdad $\frac{x+1}{x+3} \leq 2$.

SOLUCIÓN Un error común al resolver una desigualdad de este tipo es multiplicar primero ambos lados por $x+3$. Si lo hiciéramos así, tendríamos que considerar dos casos, ya que $x+3$ puede ser positivo o negativo (suponiendo $x+3 \neq 0$) y tendríamos que invertir la desigualdad. Un método más sencillo es obtener primero una desigualdad equivalente que tenga 0 en el lado derecho y proseguir desde ahí:

$$\frac{x+1}{x+3} \leq 2 \quad \text{dada}$$

$$\frac{x+1}{x+3} - 2 \leq 0 \quad \text{hacer un lado cero}$$

$$\frac{x+1-2(x+3)}{x+3} \leq 0 \quad \text{combinar en una fracción}$$

$$\frac{-x-5}{x+3} \leq 0 \quad \text{simplificar}$$

$$\frac{x+5}{x+3} \geq 0 \quad \text{multiplicar por } -1$$

Observarás que la dirección de la desigualdad cambia en el último paso, ya que multiplicamos por un número negativo. Efectuamos esta multiplicación por conveniencia, a fin de que todos los factores tengan coeficientes positivos en x .

Los factores $x+5$ y $x+3$ son 0 en $x = -5$ y $x = -3$, respectivamente. Esto lleva al diagrama de signos de la figura 6, donde los signos están determinados como en ejemplos previos. A partir del diagrama vemos que el signo resultante y, por tanto, el signo del cociente es positivo en $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$. El cociente es 0 en $x = -5$ (incluye -5) y no definido en $x = -3$ (excluye -3). Así pues, la solución de $(x+5)/(x+3) \geq 0$ es $(-\infty, -5] \cup (-3, \infty)$.

Figura 6



(continúa)

Un método de solución alternativo es comenzar por multiplicar por $(x + 3)$ ambos lados de la desigualdad dada, suponiendo que $x \neq -3$. En este caso, $(x + 3)^2 > 0$ y la multiplicación es permisible; sin embargo, después de resolver la desigualdad resultante, excluimos el valor $x = -3$.

EJEMPLO 6 Determinación de niveles terapéuticos mínimos

Para que un medicamento tenga un efecto benéfico, su concentración en la sangre debe ser mayor que cierto valor, llamado *nivel terapéutico mínimo*. Supón que la concentración c (mg/L) de un fármaco en particular, t horas después de su ingestión, está dada por

$$c = \frac{20t}{t^2 + 4}.$$

Si el nivel terapéutico mínimo es 4 mg/L, indica cuándo se rebasa este nivel.

SOLUCIÓN El nivel terapéutico mínimo, 4 mg/L, se rebasa si $c > 4$; por tanto, debemos resolver la desigualdad

$$\frac{20t}{t^2 + 4} > 4.$$

Como $t^2 + 4 > 0$ para toda t , multiplicamos ambos lados por $t^2 + 4$ y procedemos como sigue:

$$\begin{array}{ll} 20t > 4t^2 + 16 & \text{permitido, puesto que } t^2 + 4 > 0 \\ -4t^2 + 20t - 16 > 0 & \text{hacer un lado igual a 0} \\ t^2 - 5t + 4 < 0 & \text{dividir entre el factor común } -4 \\ (t - 1)(t - 4) < 0 & \text{factorizar} \end{array}$$

Los factores de la última desigualdad son 0 cuando $t = 1$ y $t = 4$. Éstos son los tiempos en que c es igual a 4. Al igual que en ejemplos anteriores, podemos utilizar una tabla de signos o diagrama de signos (con $t \geq 0$) con el fin de mostrar que $(t - 1)(t - 4) < 0$ para toda t en el intervalo $(1, 4)$. En consecuencia, el nivel terapéutico mínimo se rebasa si $1 < t < 4$.

Puesto que las gráficas en un plano coordenado se introducen en el siguiente capítulo, sería prematuro demostrar aquí el uso de una calculadora graficadora o programa de computadora para resolver desigualdades en 1. Dichos métodos se considerarán más adelante.

Mencionamos algunas propiedades básicas de las desigualdades al comienzo de la última sección. Las siguientes propiedades adicionales son útiles para resolver determinadas desigualdades. Las demostraciones de las propiedades aparecen después de la tabla.

Propiedades adicionales de las desigualdades

Propiedad	Ejemplo
(1) Si $0 < a < b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.	Si $0 < \frac{1}{x} < 4$, entonces $\frac{1}{1/x} > \frac{1}{4}$, o $x > \frac{1}{4}$.
(2) Si $0 < a < b$, entonces $0 < a^2 < b^2$.	Si $0 < \sqrt{x} < 4$, entonces $0 < (\sqrt{x})^2 < 4^2$, o $0 < x < 16$.
(3) Si $0 < a < b$, entonces $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$.	Si $0 < x^2 < 4$, entonces $0 < \sqrt{x^2} < \sqrt{4}$, o $0 < x < 2$.

DEMOSTRACIONES

(1) Si $0 < a < b$, al multiplicar por $1/(ab)$ obtenemos

$$a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab}, \text{ o } \frac{1}{b} < \frac{1}{a}; \text{ esto es, } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

(2) Si $0 < a < b$, al multiplicar por a resulta $a \cdot a < a \cdot b$ y al multiplicar por b tenemos $b \cdot a < b \cdot b$, así que $a^2 < ab < b^2$ y, por lo tanto, $a^2 < b^2$.

(3) Si $0 < a < b$, entonces $b - a > 0$ o bien, lo que es equivalente,

$$(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0.$$

Al dividir ambos lados de la última desigualdad entre $\sqrt{b} + \sqrt{a}$, obtenemos $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$; esto es, $\sqrt{b} > \sqrt{a}$.

2.7 Ejercicios

Ejercicios 1 al 40: resuelve la desigualdad y expresa las soluciones en términos de intervalos siempre que sea posible.

1 $(3x + 1)(5 - 10x) > 0$

2 $(2 - 3x)(4x - 7) \geq 0$

3 $(x + 2)(x - 1)(4 - x) \leq 0$

4 $(x - 5)(x + 3)(-2 - x) < 0$

5 $x^2 - x - 6 < 0$

6 $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

7 $x^2 - 2x - 5 > 3$

8 $x^2 - 4x - 17 \leq 4$

9 $x(2x + 3) \geq 5$

10 $x(3x - 1) \leq 4$

11 $6x - 8 > x^2$

12 $x + 12 \leq x^2$

13 $x^2 < 16$

14 $x^2 > 9$

15 $25x^2 - 9 < 0$

16 $25x^2 - 9x < 0$

17 $16x^2 \geq 9x$

18 $16x^2 > 9$

19 $x^4 + 5x^2 \geq 36$

20 $x^4 + 15x^2 < 16$

21 $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$

22 $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 \geq 0$

23 $\frac{x^2(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)} \leq 0$

24 $\frac{(x^2 + 1)(x - 3)}{x^2 - 9} \geq 0$

25 $\frac{x^2 - x}{x^2 + 2x} \leq 0$

26 $\frac{(x + 3)^2(2 - x)}{(x + 4)(x^2 - 4)} \leq 0$

27 $\frac{x - 2}{x^2 - 3x - 10} \geq 0$

28 $\frac{x + 5}{x^2 - 7x + 12} \leq 0$

29. $\frac{-3x}{x^2-9} > 0$

30. $\frac{2x}{16-x^2} < 0$

31. $\frac{x+1}{2x-3} > 2$

32. $\frac{x-2}{3x+5} \leq 4$

33. $\frac{1}{x-2} \geq \frac{3}{x+1}$

34. $\frac{2}{2x+3} \leq \frac{2}{x-5}$

35. $\frac{4}{3x-2} \leq \frac{2}{x+1}$

36. $\frac{3}{5x+1} \geq \frac{1}{x-3}$

37. $\frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1}$

38. $\frac{x}{2x-1} \geq \frac{3}{x+2}$

39. $x^3 > x$

40. $x^4 \geq x^2$

Ejercicios 41 y 42: a medida que una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria recta, su rapidez v (en cm/s) en el tiempo t (en s) está dada por la ecuación. ¿Para qué subintervalos del intervalo dado $[a, b]$ su velocidad será al menos k cm/s?

41. $v = t^3 - 3t^2 - 4t + 20$; $[0, 5]$; $k = 8$

42. $v = t^4 - 4t^3 + 10$; $[1, 6]$; $k = 10$

43. Marca de salto vertical. El *Guinness Book of World Records* reporta que los perros pastor alemán pueden saltar verticalmente más de 10 pies al trepar por paredes. Si la distancia s (en pies) que saltan del suelo después de t segundos está dada por la ecuación $s = -16t^2 + 24t + 1$, ¿durante cuántos segundos el animal se mantiene a más de 9 pies del suelo?

44. Altura de un objeto lanzado. Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia s arriba del suelo después de t segundos está dada por $s = -16t^2 + 320t$. ¿Para qué valores de t el objeto estará a más de 1536 pies sobre el suelo?

45. Distancia de frenado. La distancia de frenado d (en pies) de un auto que se desplaza a v mph está dada por $d = v + (v^2/20)$. Encuentra las velocidades que den distancias de frenado de menos de 75 pies.

46. Rendimiento de combustible. El número de millas M que determinado automóvil compacto puede recorrer con un galón de gasolina, está relacionado con su rapidez v (en mi/h) por

$$M = -\frac{1}{30}v^2 + \frac{4}{3}v \quad \text{para } 0 < v < 70.$$

¿A qué velocidad será M al menos 45?

47. Propagación del salmón. Para una población particular de salmones, la relación entre el número S de ponedoras y el número R de hijuelos que sobreviven hasta la edad adulta está dada por la fórmula $R = 4500S/(S + 500)$. ¿En qué condiciones es $R > S$?

48. Densidad de población. La densidad de población D (en personas/mi²) de una gran ciudad está relacionada con la distancia x desde el centro de la ciudad por $D = 5000x/(x^2 + 36)$. ¿En qué partes de la ciudad la densidad de población rebasará las 400 personas/mi²?

49. Peso en el espacio. Después que un astronauta es lanzado al espacio, su peso disminuye hasta que alcanza un estado de ingravidez. El peso de un astronauta de 125 lb a una altura de x km sobre el nivel del mar está dado por

$$W = 125 \left(\frac{6400}{6400 + x} \right)^2.$$

¿A qué altura será menor de 5 lb?

50. Fórmula de contracción de Lorentz. La fórmula de contracción de Lorentz, en teoría de la relatividad, relaciona la longitud L de un objeto que se mueve a una velocidad v (mi/s (millas por segundo) con respecto a un observador con su longitud L_0 en reposo. Si c es la velocidad de la luz, entonces

$$L = L_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

¿Para qué velocidades L será menor que $\frac{1}{2}L_0$? Anota la respuesta en términos de c .

51. Velocidad de aterrizaje de aviones. En el diseño de un pequeño avión de turbohélices, la velocidad V de aterrizaje (en pies/s) está determinada por la fórmula $W = 0.0035V^3S$, donde W es el peso bruto (en lb) del avión y S es la superficie (en pies²) de las alas. Si el peso bruto de la nave está entre 7500 y 10 000 lb y $S = 210$ pies², encuentra los límites de velocidad de aterrizaje en mph.

Ejercicios 52 y 53: usa una tabla que te ayude a resolver la desigualdad en el intervalo dado.

$$52. \frac{(2-x)(3x-9)}{(1-x)(x+1)} > 0, \quad [-2, 3.5]$$

$$53. x^4 - x^2 - 16x^2 + 4x + 48 < 0, \quad [-3.5, 5]$$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

Ejercicios 1 al 24: resuelve la ecuación.

$$1 \quad \frac{3x+1}{5x+7} = \frac{6x+11}{10x-3}$$

$$2 \quad 2 - \frac{1}{x} = 1 + \frac{4}{x}$$

$$3 \quad \frac{2}{x+5} - \frac{3}{2x+1} = \frac{5}{6x+3}$$

$$4 \quad \frac{7}{x-2} - \frac{6}{x^2-4} = \frac{3}{2x+4}$$

$$5 \quad \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$6 \quad 2x^2 + 5x - 12 = 0$$

$$7 \quad x(3x+4) = 5$$

$$8 \quad \frac{x}{3x+1} = \frac{x-1}{2x+3}$$

$$9 \quad (x-2)(x+1) = 3$$

$$10 \quad 4x^2 - 33x^2 + 50 = 0$$

$$11 \quad x^{20} - 2x^{10} - 15 = 0$$

$$12 \quad 20x^2 + 8x^2 - 35x - 14 = 0$$

$$13 \quad 5x^2 = 2x - 3$$

$$14 \quad x^2 + \frac{1}{3}x + 2 = 0$$

$$15 \quad 6x^4 + 29x^2 + 28 = 0$$

$$16 \quad x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$

$$17 \quad |4x-1| = 7$$

$$18 \quad 2|2x+1| + 1 = 19$$

$$19 \quad \frac{1}{x} + 6 = \frac{5}{\sqrt{x}}$$

$$20 \quad \sqrt[3]{4x-5} - 2 = 0$$

$$21 \quad \sqrt{7x+2} + x = 6$$

$$22 \quad \sqrt{x+4} = \sqrt[3]{6x+19}$$

$$23 \quad \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$$

$$24 \quad x^{40} = 16$$

Ejercicios 25 y 26: resuelve completando el cuadrado.

$$25 \quad 3x^2 - 12x + 3 = 0$$

$$26 \quad x^2 + 10x + 38 = 0$$

Ejercicios 27 al 44: resuelve la desigualdad y, siempre que sea posible, escribe las soluciones en términos de intervalos.

$$27 \quad (x-3)^2 \leq 0$$

$$28 \quad 10 - 7x < 4 + 2x$$

$$29 \quad \frac{1}{2} < \frac{2x+3}{5} < \frac{3}{2}$$

$$30 \quad (3x-1)(10x+4) \geq (6x-5)(5x-7)$$

$$31 \quad \frac{6}{10x+3} < 0$$

$$32 \quad |4x+7| < 21$$

$$33 \quad 2|3-x| + 1 > 5$$

$$34 \quad -2|x-3| + 1 \geq -5$$

$$35 \quad |16-3x| \geq 5$$

$$36 \quad 2 < |x-6| < 4$$

$$37 \quad 10x^2 + 11x > 6$$

$$38 \quad x(x-3) \leq 10$$

$$39 \quad \frac{x^2(3-x)}{x+2} \leq 0$$

$$40 \quad \frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3} \leq 0$$

$$41 \quad \frac{3}{2x+3} < \frac{1}{x-2}$$

$$42 \quad \frac{x+1}{x^2-25} \leq 0$$

$$43 \quad x^3 > x^2$$

$$44 \quad (x^2-x)(x^2-5x+6) < 0$$

Ejercicios 45 al 50: despeja para la variable especificada en la expresión dada.

$$45 \quad P + N = \frac{C+2}{C} \text{ para } C$$

$$46 \quad A = B \sqrt[3]{\frac{C}{D}} - E \text{ para } D$$

$$47 \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ para } r \quad (\text{volumen de una esfera})$$

$$48 \quad F = \frac{\pi PR^4}{8VL} \text{ para } R \quad (\text{ley de fluidos de Poiseuille})$$

$$49 \quad c = \sqrt{4h(2R-h)} \text{ para } h \quad (\text{base de un segmento circular})$$

$$50 \quad V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + rR) \text{ para } r \quad (\text{volumen del tronco de un cono})$$

Ejercicios 51 al 56: expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

$$51 \quad (7+5i) - (-8+3i) \quad 52 \quad (4+2i)(-5+4i)$$

53. $(3 + 8)^2$

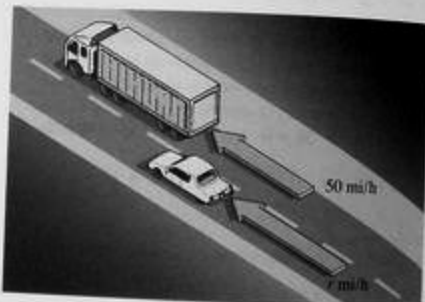
54. $\frac{1}{9 - \sqrt{-4}}$

55. $\frac{6 - 3i}{2 + 7i}$

56. $\frac{20 - 8i}{4i}$

57. **Regla de 90** En cierto sindicato de maestros, un maestro se puede jubilar cuando la suma de su edad más sus años de servicio es de 90 por lo menos. Si un profesor de 37 años de edad tiene 15 años de servicio, ¿a qué edad tendrá derecho de jubilarse? Haz suposiciones razonables.
58. **Resistencia eléctrica** Cuando dos resistores R_1 y R_2 se conectan en paralelo, la resistencia neta R está dada por $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$. Si $R_1 = 5$ ohms, ¿qué valor de R_2 hará que la resistencia neta sea 2 ohms?
59. **Ingreso por inversiones** Un inversionista tiene la opción de realizar dos inversiones: un fondo de bonos y un fondo de acciones. El primero produce 7.186% de interés anual, que es libre de impuestos a nivel federal y estatal. Supón que el inversionista paga 28% de impuesto federal y 7% de impuesto estatal. Encuentra el interés anual en el fondo de acciones impositivo para que los dos fondos le rindan la misma cantidad de ingreso por interés neto al inversionista.
60. **Mezcla de oro y plata** Un anillo que pesa 80 g está hecho de oro y plata. Al medir el desplazamiento del anillo en agua, se ha determinado que tiene un volumen de 5 cm³. El oro pesa 19.3 g/cm³ y la plata 10.5 g/cm³. ¿Cuántos gramos de oro contiene el anillo?
61. **Preparación de alimentos en un hospital** El dietista de un hospital desea preparar un platillo de 10 onzas (oz) de carne y verduras que proporciona siete gramos de proteína. Si el contenido de una onza de la porción de verduras es $\frac{1}{2}$ gramo de proteína y el de una onza de carne es de un gramo de proteína, ¿cuánto de cada uno debe emplear?
62. **Preparación de un bactericida** Se utilizará como bactericida una solución de alcohol etílico que es 75% de alcohol en peso; la solución se elabora añadiendo agua a una solución de alcohol etílico de 95%. Ahora bien, ¿cuántos gramos de cada uno se requieren para preparar 400 gramos del bactericida?
63. **Calefacción solar** Un panel grande para calefacción solar necesita 120 galones de un fluido que es 30% anticongelante. El fluido se vende en solución a 50% o a 20%. ¿Cuántos galones de cada uno se precisan para preparar la solución de 120 galones?
64. **Consumo de combustible** Una lancha tiene un tanque de gasolina de 10 gal y se desplaza a 20 millas por hora (mi/h), con un consumo de combustible de 16 millas por galón (mi/gal), cuando se le acelera a plena potencia en aguas tranquilas. La lancha avanza aguas arriba en una corriente de 5 mi/h. Ahora bien, digamos que tiene el tanque lleno, ¿qué distancia aguas arriba puede viajar y volver si se le acelera a plena potencia durante todo el viaje?
65. **Viaje en tren** Un tren de alta velocidad recorre 400 millas en $5\frac{1}{2}$ h sin escalas, entre dos grandes ciudades. El convoy avanza a 100 mi/h entre las ciudades, pero el reglamento de seguridad exige que avance a sólo 25 mi/h al cruzar ciudades intermedias pequeñas. ¿Cuántas horas se emplean al pasar por estas últimas?
66. **Velocidad del viento** Un avión voló a favor del viento durante 30 min y regresó la misma distancia en 45 min. Si la velocidad de crucero era de 320 mi/h, ¿cuál era la velocidad del viento?
67. **Velocidad al rebasar** Un automóvil de 20 pies de largo alcanza a un camión de 40 pies que avanza a 50 mi/h (ve la figura). ¿A qué velocidad constante debe viajar el auto para pasar al camión en 5 s?

Ejercicio 67



68. **Llenado de una tolva** Un aparato puede llenar una tolva vacía en 2 h y unos trabajadores pueden vaciarla en 5 h. Si la tolva está a la mitad de su capacidad cuando un aparato empieza a llenarla y unos trabajadores comienzan a vaciarla, ¿cuánto tardará en llenarse?
69. **Rendimiento de gasolina** El representante de una compañía estima que el rendimiento promedio de gasolina de su automóvil es de 28 millas por galón (mi/g) en carretera y 22 mi/g en la ciudad. En un viaje reciente recorrió 627 mi y utilizó 24 gal de gasolina. ¿Cuántas millas recorrió en la ciudad?
70. **Expansión de una ciudad** El recorrido más largo al centro de una ciudad de forma cuadrada, desde las afueras de la misma, es de 10 mi. En la última década, la ciudad ha cre-

cido en una superficie de 50 mi². Imagina que la ciudad siempre ha sido cuadrada y encuentra el cambio correspondiente en el recorrido más largo al centro.

- 71 Dimensiones de una membrana celular La membrana de una célula es una esfera de 6 micras de radio. ¿Qué cambio en el radio hará aumentar 25% la superficie de la membrana?

- 72 Viaje por carretera En el punto P una carretera que va de norte a sur cruza otra que va de este a oeste. Un automóvil pasa por P a las 10:00 A.M. cuando se dirige al este a una velocidad constante de 20 mi/h. Al mismo tiempo otro vehículo se encuentra a 2 mi al norte de P cuando se dirige hacia el sur a 50 mi/h.

- (a) Encuentra una fórmula para la distancia d entre los automóviles t horas después de las 10:00 A.M.
(b) ¿Aproximadamente a qué hora se encontrarán los autos a 104 mi uno de otro?

- 73 Cercado de una perrera El dueño de una perrera tiene 270 pies de alambrado para dividir una superficie rectangular en 10 perreras iguales (como se muestra en la figura). Encuentra las dimensiones de cada perrera para que tengan un área de 100 pies².

Ejercicio 73



- 74 Dimensiones de un acuario Hay que construir un acuario sin tapa con lados de 6 pies de largo y extremos cuadrados, como en la figura.

- (a) Encuentra la altura del acuario si el volumen ha de ser de 48 pies³.
(b) Halla la altura si se han de usar 44 pies² de vidrio.

Ejercicio 74



- 75 Dimensiones de una piscina La longitud de una alberca rectangular debe ser cuatro veces su ancho, y a su alrededor se hará una banqueta de 6 pies de ancho. Si se dispone de 1440 pies² para su construcción, ¿cuáles serán las dimensiones de la piscina?

- 76 Dimensiones de un baño Un contratista diseña un baño rectangular hundido, con 40 pies² de área para bañarse; alrededor de ésta ha de instalarse una franja de losetas de 1 pie de ancho. La longitud total de la superficie enlosada debe ser el doble de su ancho. Encuentra las dimensiones del área para bañarse.

- 77 Crecimiento poblacional Se espera que la población P (en miles) de una pequeña ciudad crezca según la fórmula

$$P = 15 + \sqrt{3t + 2},$$

donde t es el tiempo en años. ¿Cuándo tendrá 20 000 habitantes?

- 78 Ley de Boyle La ley de Boyle para determinado gas señala que si la temperatura es constante, entonces $pV = 200$, donde p es la presión (en lb/in²) y V es el volumen (en in³). Si $25 \leq V \leq 50$, ¿cuál es el intervalo correspondiente para p ?

- 79 Comisión en ventas Un universitario recién egresado tiene ofertas de trabajo como vendedor en dos empresas de computadoras. Para el puesto A ofrecen \$25 000 por año, más 5% de comisiones; el puesto B le representa sólo \$20 000 por año, y una comisión de 10%. ¿Cuánto debe vender al año para que el segundo puesto sea más lucrativo?

- 80 Velocidad del sonido La velocidad del sonido en aire a 0 °C (o 273 K) es 1 087 pies/s, pero esta velocidad aumenta a medida que sube la temperatura. La velocidad v del sonido a una temperatura T en K está dada por $v = 1087\sqrt{T/273}$. ¿A qué temperatura rebasará los 1100 pies/s?

- 81 Período de un péndulo Si la longitud del péndulo de un reloj de pared es l cm, entonces su período T (en s) está dado por $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, donde g es una constante gravitacional. Si, en determinadas condiciones, $g = 980$ y $98 \leq l \leq 100$, ¿cuál es el intervalo correspondiente para T ?

- 82 Órbita de un satélite Para que un satélite conserve una órbita de altitud h kilómetros, su velocidad (en km/s) debe ser igual a $626.4/\sqrt{h + R}$, donde $R = 6372$ km es el radio de la Tierra. ¿Qué velocidades producirán órbitas con una altitud de más de 100 km de la superficie de la Tierra?

83. Cercado de un terreno. Se dispone de 100 pies de alambrado para cercar un terreno rectangular. ¿Cuáles serán el largo y el ancho de un terreno cercado de al menos 600 pies?²⁷

84. Plantación de una huerta de manzanas. El propietario de una huerta estima que si se plantan 24 árboles por acre, cada árbol maduro producirá unas 600 manzanas por año. Por cada árbol adicional por acre, cada árbol da 12 manzanas menos por año. ¿Cuántos manzanos debe plantar por acre para obtener al menos 16 416 manzanas por año?

85. Renta de departamentos. Una inmobiliaria es dueña de 180 departamentos, que están todos ocupados cuando la renta es de \$300 por mes. La compañía estima que por cada \$10

de aumento en la renta, se desocuparán cinco departamentos. ¿Qué renta debe cobrar para pagar las cuentas mensuales que suman \$54 500?



86. Escoge la ecuación que mejor describa la tabla de datos.

x	y
1	2.1213
2	3.6742
3	4.7434
4	5.6125
5	6.3640

(1) $y = 1.5529x + 0.5684$

(2) $y = \frac{3}{x} + x^2 - 1$

(3) $y = 3\sqrt{x - 0.5}$

(4) $y = 3x^{1/3} + 1.1213$

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 2

1. Cuando factorizamos la suma o diferencia de cubos $x^3 \pm y^3$, ¿siempre será factorizable $(x^2 \pm xy + y^2)$ con respecto a sólo los números reales?

2. ¿Cuál es el promedio de las dos soluciones de la ecuación cuadrática arbitraria $ax^2 + bx + c = 0$? Analiza la forma en que este conocimiento te puede ayudar a comprobar fácilmente las soluciones de una ecuación cuadrática.

3. (a) Encuentra una expresión de la forma $p + qi$ para el inverso multiplicativo de $\frac{a+bi}{c+di}$, donde a, b, c , y d son números reales.

(b) ¿Esta expresión se aplica a números reales de la forma a/c ?

(c) ¿Hay alguna restricción en su respuesta para la parte (a)?

4. Al resolver la desigualdad $\frac{x-1}{x-2} \geq 3$, ¿qué hay de malo al emplear $x-1 \geq 3(x-2)$ como primer paso?

5. Considera la desigualdad $ax^2 + bx + c \geq 0$, donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$. Supón que la igualdad asociada $ax^2 + bx + c = 0$ tiene un discriminante D . Categoriza las soluciones de la desigualdad según los signos de a y D .

6. Nivel de congelación de una nube. Consulta los ejercicios 37 al 39 de la sección 2.2.

(a) Aproxima la altura del nivel de congelación en una nube si la temperatura del suelo es 80 °F y el punto de condensación es 68 °F.

(b) Encuentra una fórmula para la altura h del nivel de congelación en una nube para una temperatura del suelo G y un punto de condensación D .

7. Explica por qué no deberías tratar de resolver una de estas ecuaciones.

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+5} = 0$$

$$\sqrt[3]{2x-3} + \sqrt[3]{x+5} = 0$$

8. Resuelve la ecuación

$$\sqrt{x} = cx - 2/c,$$

para x , donde $c = 2 \times 10^{100}$. Comenta por qué una de las soluciones positivas es extraña.

Funciones y gráficas

El término matemático *función* (o su equivalente latino) data de fines del siglo XVII, cuando el cálculo estaba en sus primeras etapas de desarrollo. Este importante concepto es ahora la espina dorsal de los cursos avanzados de matemáticas y es indispensable en todos los campos de las ciencias.

En este capítulo estudiamos las propiedades de funciones, para lo cual usamos métodos algebraicos y gráficos que incluyen localización de puntos, determinación de simetrías y desplazamientos horizontales y verticales. Ahora bien, aunque estas técnicas sirven para obtener bocetos de las gráficas que nos ayudan a entender las propiedades de las funciones, los métodos modernos emplean refinados programas de computadora y matemáticas avanzadas para generar representaciones gráficas sumamente precisas de las funciones.

3.1

Sistemas de coordenadas rectangulares

En la sección 1.1 estudiamos cómo asignar un número real (coordenada) a cada punto de una recta. Ahora mostraremos la forma de asignar un **par ordenado** (a, b) de números reales a cada punto de un plano. Aun cuando también hemos usado la notación (a, b) para denotar un intervalo abierto, hay poca probabilidad de confusión, porque en nuestro análisis siempre debería estar claro si (a, b) representa un punto o un intervalo.

Introducimos un **sistema de coordenadas rectangulares** o **cartesiano*** en un plano por medio de dos rectas coordenadas perpendiculares llamadas **ejes coordenados**, que se intersecan en el **origen** O (figura 1). La recta horizontal recibe el nombre de **eje x** y la vertical el de **eje y** ; se identifican con x y y , respectivamente. Se trata de un **plano coordenado** o **plano xy** . Los ejes coordenados lo dividen en cuatro partes llamadas **primero, segundo, tercero y cuarto cuadrantes** (figura 1: I, II, III y IV). Los puntos sobre los ejes no pertenecen a cuadrante alguno.

A cada punto P de un plano x - y se le puede asignar un par ordenado (a, b) , como se aprecia en la figura 1; a es la **coordenada x** (o **abscisa**) de P y b la **coordenada y** (o **ordenada**). Decimos que P **tiene coordenadas** (a, b) y nos referimos al punto (a, b) o al punto $P(a, b)$. A la inversa, todo par ordenado (a, b) determina al punto P con coordenadas (a, b) . **Trazamos un punto** mediante un punto como el que se presenta en la figura 2.

Figura 1

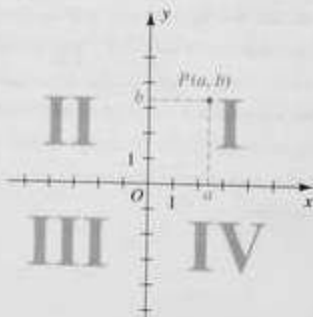
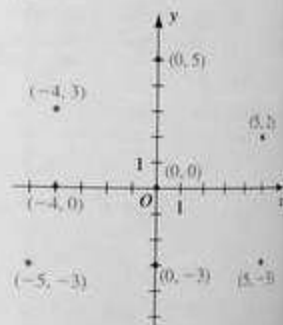


Figura 2



La fórmula que sigue sirve para hallar la distancia entre dos puntos de un plano coordenado.

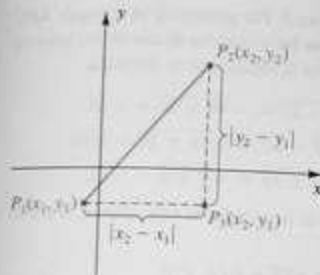
Fórmula de la distancia

La distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de un plano coordenado es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

*El término *cartesiano* se usa en honor del matemático y filósofo francés René Descartes (1596–1650), quien fue el primero en emplear dicho sistema de coordenadas.

Figura 3



DEMOSTRACIÓN Si $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$, entonces, según se ve en la figura 3, los puntos P_1 , P_2 y $P_3(x_2, y_1)$ son vértices de un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras,

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2.$$

A partir de la figura observamos que

$$d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1| \quad \text{y} \quad d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1|.$$

Puesto que $|a|^2 = a^2$ para todo número real a , podemos escribir

$$[d(P_1, P_2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Tomamos la raíz cuadrada de cada lado de la última ecuación y como $d(P_1, P_2) \geq 0$ llegamos a la fórmula de la distancia.

Si $y_1 = y_2$, los puntos P_1 y P_2 están en la misma línea horizontal y

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

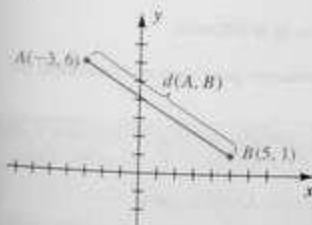
Si $x_1 = x_2$, los puntos están en la misma línea vertical y

$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}.$$

Estos son casos especiales de la fórmula de la distancia.

Aun cuando nos referimos a los puntos mostrados en la figura 3, nuestra demostración es independiente de la posición de P_1 y P_2 .

Figura 4



Cuando applies la fórmula de la distancia, notarás que $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$ por tanto, no importa el orden en que restes las coordenadas x y las y de los puntos. Cabe considerar la distancia entre dos puntos como la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

EJEMPLO 1 Cálculo de la distancia entre puntos

Gráfica los puntos $A(-3, 6)$ y $B(5, 1)$, y encuentra la distancia $d(A, B)$.

SOLUCIÓN Los puntos se encuentran en la figura 4. Por la fórmula de la distancia,

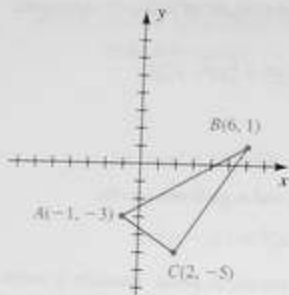
$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{[5 - (-3)]^2 + (1 - 6)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89} \approx 9.43. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Demostración de que un triángulo es rectángulo

(a) Gráfica $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$, comprueba que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo.

(b) Encuentra el área del triángulo ABC .

Figura 5



Área de un triángulo:

$$A = \frac{1}{2}bh$$

SOLUCIÓN

(a) Los puntos se localizan en la figura 5. Por geometría, el triángulo ABC es un triángulo rectángulo si la suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al cuadrado del lado restante. Por la fórmula de la distancia,

$$d(A, B) = \sqrt{(6+1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(2-6)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(2+1)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

En virtud de que $d(A, B) = \sqrt{65}$ es el mayor de los tres valores, la condición por satisfacer es

$$[d(A, B)]^2 = [d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2.$$

Al sustituir los valores encontrados con la fórmula de la distancia, obtenemos

$$[d(A, B)]^2 = (\sqrt{65})^2 = 65$$

$$\text{y } [d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2 = (\sqrt{52})^2 + (\sqrt{13})^2 = 52 + 13 = 65.$$

Por tanto, el triángulo es un triángulo rectángulo con hipotenusa AB .

(b) El área de un triángulo con base b y altura h es $\frac{1}{2}bh$. A partir de la figura 5, tenemos

$$b = d(B, C) = \sqrt{52} \quad \text{y} \quad h = d(A, C) = \sqrt{13}.$$

Así pues el área del triángulo ABC es

$$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\sqrt{52}\sqrt{13} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13}\sqrt{13} = 13.$$



EJEMPLO 3 Aplicación de la fórmula de la distancia

Dados $A(1, 7)$, $B(-3, 2)$ y $C(4, \frac{1}{2})$, demuestra que C está en la mediatriz del segmento AB .

SOLUCIÓN Los puntos A , B y C y la mediatriz l se presentan en la figura 6. Por geometría plana, cualquiera de estas condiciones caracteriza a l :

- (1) l es la línea perpendicular al segmento AB en su punto medio.
- (2) l es el conjunto de todos los puntos equidistantes de los puntos extremos del segmento AB .

Con la condición (2) demostraremos que C está en l al comprobar que

$$d(A, C) = d(B, C).$$

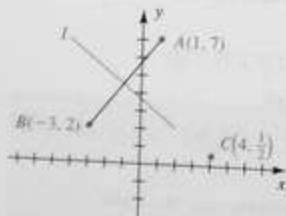
Aplicamos la fórmula de la distancia:

$$d(A, C) = \sqrt{(4-1)^2 + (\frac{1}{2}-7)^2} = \sqrt{3^2 + (-\frac{13}{2})^2} = \sqrt{9 + \frac{169}{4}} = \sqrt{\frac{181}{4}}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(4-(-3))^2 + (\frac{1}{2}-2)^2} = \sqrt{7^2 + (-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{49 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{181}{4}}$$

Por tanto, C es equidistante de A y B , y la verificación está completa.

Figura 6



EJEMPLO 4 Determinación de una fórmula que describa una mediatriz

Dados $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$, encuentra una fórmula que indique que un punto arbitrario $P(x, y)$ está en la mediatriz l del segmento AB .

SOLUCIÓN Por la condición (2) del ejemplo 3, $P(x, y)$ está en l si y sólo si $d(A, P) = d(B, P)$; esto es,


$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{[x-(-3)]^2 + (y-2)^2}.$$

Para obtener una fórmula más sencilla, elevemos al cuadrado ambos lados y simplifiquemos términos de la ecuación resultante:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y-7)^2 &= [x-(-3)]^2 + (y-2)^2 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 14y + 49 &= x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 \\ -2x + 1 - 14y + 49 &= 6x + 9 - 4y + 4 \\ -8x - 10y &= -37 \\ 8x + 10y &= 37\end{aligned}$$

En particular, advierta que la última fórmula es verdadera para las coordenadas del punto $C(4, \frac{1}{2})$ del ejemplo 3, ya que si $x = 4$ y $y = \frac{1}{2}$, la sustitución en $8x + 10y$ dará

$$8 \cdot 4 + 10 \cdot \frac{1}{2} = 37.$$

En el ejemplo 9 de la sección 3.3 se encuentra la fórmula correspondiente a la mediatriz de un segmento, a partir de la condición 1 del ejemplo 3. 

Podemos hallar el punto medio de un segmento de recta con esta fórmula.

Fórmula del punto medio

El punto medio M del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ para $P_2(x_2, y_2)$ es

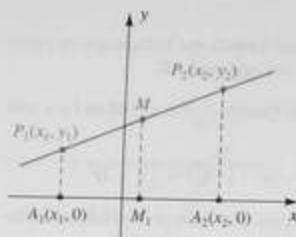
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

DEMOSTRACIÓN Las rectas que pasan por P_1 y P_2 paralelas al eje y cortan al eje x en $A_1(x_1, 0)$ y $A_2(x_2, 0)$. Por geometría plana, la recta que cruza por el punto medio M paralela al eje y cruza al segmento A_1A_2 en el punto M_1 (figura 7). Si $x_1 < x_2$, entonces $x_2 - x_1 > 0$ y, por tanto $d(A_1, A_2) = x_2 - x_1$. Puesto que M_1 está a la mitad entre A_1 y A_2 , la coordenada M_1 es igual a la coordenada x de A_1 más la mitad de la distancia de A_1 a A_2 ; esto es,

$$\text{la coordenada } x \text{ de } M_1 = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

(continúa)

Figura 7



La expresión del lado derecho de la última ecuación se simplifica a

$$\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Este cociente es el *promedio* de los números x_1 y x_2 . Se deduce que la coordenada x de M es también $(x_1 + x_2)/2$. En forma análoga, la coordenada y de M es $(y_1 + y_2)/2$. Estas fórmulas se cumplen para todas las posiciones de P_1 y P_2 .

En la aplicación de la fórmula del punto medio, basta recordar que

la coordenada x del punto medio = *promedio* de las coordenadas x

y que

la coordenada y del punto medio = *promedio* de las coordenadas y .



EJEMPLO 5 Determinación de un punto medio

Encuentra el punto medio M del segmento de recta de $P_1(-2, 3)$ a $P_2(4, -2)$, y comprueba que $d(P_1, M) = d(P_2, M)$.

SOLUCIÓN Por la fórmula del punto medio, las coordenadas de M son

$$\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{3 + (-2)}{2} \right), \text{ o } \left(1, \frac{1}{2} \right).$$

Los tres puntos P_1 , P_2 y M se localizan en la figura 8. Por la fórmula de la distancia,

$$d(P_1, M) = \sqrt{(1 + 2)^2 + \left(\frac{1}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}}$$

$$d(P_2, M) = \sqrt{(1 - 4)^2 + \left(\frac{1}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}}.$$

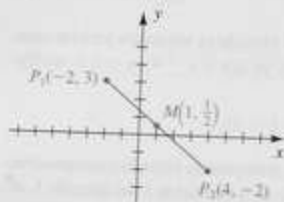
Así pues, $d(P_1, M) = d(P_2, M)$.

El término **graficador** se refiere a una calculadora graficadora o a una computadora que cuente con el software adecuado. La pantalla (o **rectángulo de visión**) de una graficadora es la porción del plano xy que se visualiza. Las fronteras (lados) de la pantalla se ajustan manualmente asignando valores máximos y mínimos a x y y (X_{\max} , X_{\min} , Y_{\max} y Y_{\min}) y a las diferencias entre máximos y mínimos se les marcará con X_{sc1} y/o Y_{sc1} , de acuerdo con el eje que corresponda. En los ejemplos solemos optar por los valores estándar (predeterminados), que dependen de las dimensiones (medidas en píxeles) de la pantalla de la graficadora. Si deseamos otra vista de la gráfica, usaremos la frase

"emplea $[X_{\min}, X_{\max}, X_{\text{sc1}}]$ por $[Y_{\min}, Y_{\max}, Y_{\text{sc1}}]$ "

para indicar la modificación de la pantalla. Si se omiten X_{sc1} y/o Y_{sc1} , el valor predeterminado es 1.

Figura 8



EJEMPLO 6 Trazado de puntos en una calculadora graficadora

En la tabla que se muestra se presentan los estimados para la población de Estados Unidos al 1 de julio de varios años.

- (a) Grafica los datos.
 (b) Usa la fórmula del punto medio para calcular la población en 1995.
 (c) Encuentra el incremento porcentual en la población de 1996 a 1998.

Año	Población
1992	254 994 517
1994	260 289 237
1996	265 189 794
1998	270 298 524

SOLUCIÓN**TI-83 Plus**

Ingresa los datos.

- (a) Pon los años en L1 (lista 1) y las poblaciones en L2.

STAT 1 1992 ENTER
 1994 ENTER 1996 ENTER 1998 ENTER
 Δ (4 times) \triangleright 254 994 517 ENTER
 260 289 237 ENTER 265 189 794 ENTER
 270 298 524 ENTER

L1	L2	L3	2
1992	254994517	-----	
1994	260289237	-----	
1996	265189794	-----	
1998	270298524	-----	
-----	-----	-----	
L2(5) =			

Enciende STAT PLOT 1.

2nd STAT PLOT 1 ENTER

Plot1 Plot2 Plot3
 On Off
 Type: \square \square \square
 Xlist: L1
 Ylist: L2
 Mark: \square

Grafica los datos.

Asegúrate de apagar o borrar las asignaciones Y. Si usas ZOOM STAT o ZDATA, la calculadora selecciona automáticamente la pantalla, de modo que aparezcan todos los datos.

ZOOM 9

**TI-86**

Pon los años en xStat y las poblaciones en yStat.

2nd STAT EDIT(F2) 1992 ENTER
 1994 ENTER 1996 ENTER 1998 ENTER
 Δ (4 times) \triangleright 254 994 517 ENTER
 260 289 237 ENTER 265 189 794 ENTER
 270 298 524 ENTER

xStat	yStat	zStat	2
1992	254994517	-----	
1994	260289237	-----	
1996	265189794	-----	
1998	270298524	-----	
-----	-----	-----	
yStat(5) =			
1	2	Mod(2)	000

2nd STAT PLOT(F3) PLOT1(F1) ENTER

On Off
 Type: \square
 Xlist Name=xStat
 Ylist Name=yStat
 Mark= \square
 ENTER PLOT1 PLOT2 PLOT3 PLOT4

GRAPH ZOOM(F3) MORE
 ZDATA(F5) CLEAR



(continúa)

Verifica los valores de la pantalla.

WINDOW

```

WINDOW
Xmin=1991.4
Xmax=1998.6
Xscl=1
Ymin=252392835
Ymax=272900205
Yscl=1
Xres=1

```

GRAPH

WIND(F2)

```

WINDOW
Xmin=1991.4
Xmax=1998.6
Xscl=1
Ymin=252392835.81
Ymax=272900205.19
Yscl=1
MODE F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7 F8 F9

```

(b) Para calcular la población de 1995, encontraremos el promedio de los estimados de las poblaciones de 1994 y 1996.

2nd QUIT

2nd L2 (2) + 2nd L2

(3)

ENTER = 2 ENTER

```

L2(2)+L2(3)
525479031
Ans/2
262739515.5

```

2nd QUIT

2nd LIST NAMES(F3)

yStat(F3) (2) + yStat(F3)

(3)

ENTER + 2 ENTER

```

yStat(2)+yStat(3)
525479031
Ans/2
262739515.5
C 3 MODE ENT DP
yStat yStat yStat

```

El valor encontrado, 262 739 515.5, es una aproximación aceptable del estimado real de 1995, que fue 262 764 948.

(c) Para encontrar el incremento porcentual en la población de 1996 a 1998, necesitamos dividir la diferencia de las poblaciones entre la población de 1996.

CLEAR 2nd L2 (4)

- 2nd L2 (3) ENTER

= 2nd L2 (3) ENTER

```

L2(4)-L2(3)
5108730
Ans/L2(3)
.0192644292

```

CLEAR 2nd LIST NAMES(F3)

yStat(F3) (4)

- yStat(F3) (3) ENTER

+ yStat(F3) (3) ENTER

```

yStat(4)-yStat(3)
5108730
Ans/yStat(3)
.019264429158
C 3 MODE ENT DP
yStat yStat yStat

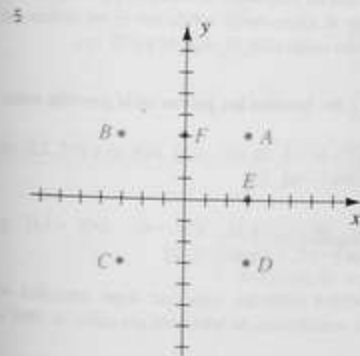
```

Hubo un incremento de casi 1.93% en los dos años.

3.1 Ejercicios

- 1 Grafica los puntos $A(5, -2)$, $B(-5, -2)$, $C(5, 2)$, $D(-5, 2)$, $E(3, 0)$ y $F(0, 3)$ en un plano coordenado.
- 2 Localiza los puntos $A(-3, 1)$, $B(3, 1)$, $C(-2, -3)$, $D(0, 3)$, y $E(2, -3)$ en un plano coordenado. Dibuja los segmentos de recta AB , BC , CD , DE y EA .
- 3 Ubica los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 3)$, $D(-1, -1)$ y $E(-2, -2)$. Describe el conjunto de todos los puntos de la forma (a, a) , donde a es un número real.
- 4 Encuentra los puntos $A(0, 0)$, $B(1, -1)$, $C(3, -3)$, $D(-1, 1)$ y $E(-3, 3)$. Describe el conjunto de todos los puntos de la forma $(a, -a)$, donde a es un número real.

Ejercicios 5 y 6: halla las coordenadas de los puntos $A-F$.



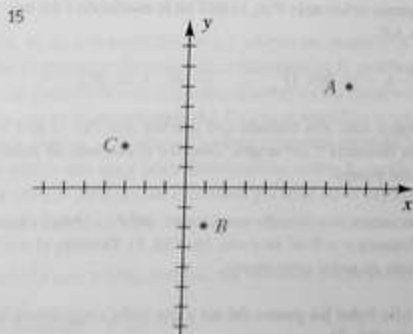
Ejercicios 7 y 8: describe el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en un plano coordenado que satisfaga la condición dada.

- | | | |
|----------------|--------------|----------------|
| 7 (a) $x = -2$ | (b) $y = 3$ | (c) $x \geq 0$ |
| (d) $xy > 0$ | (e) $y < 0$ | (f) $x = 0$ |
| 8 (a) $y = -2$ | (b) $x = -4$ | (c) $x/y < 0$ |
| (d) $xy = 0$ | (e) $y > 1$ | (f) $y = 0$ |

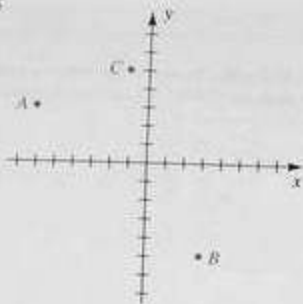
Ejercicios 9 al 14: (a) encuentra la distancia $d(A, B)$ entre A y B . (b) Halla el punto medio del segmento AB .

- 9 $A(4, -3)$, $B(6, 2)$
- 10 $A(-2, -5)$, $B(4, 6)$
- 11 $A(-5, 0)$, $B(-2, -2)$
- 12 $A(6, 2)$, $B(6, -2)$
- 13 $A(7, -3)$, $B(3, -3)$
- 14 $A(-4, 7)$, $B(0, -8)$

Ejercicios 15 y 16: demuestra que el triángulo con vértices A , B y C es un triángulo rectángulo y encuentra su área.



16



- 17 Demuestra que $A(-4, 2)$, $B(1, 4)$, $C(3, -1)$ y $D(-2, -3)$ son vértices de un cuadrado.

- 18 Prueba que $A(-4, -1)$, $B(0, -2)$, $C(6, 1)$ y $D(2, 2)$ son vértices de un paralelogramo.

- 19 Dado $A(-3, 8)$, encuentra las coordenadas del punto B tal que $C(5, -10)$ es el punto medio del segmento AB .

- 20 Dados $A(5, -8)$ y $B(-6, 2)$, halla el punto del segmento AB que se localiza a tres cuartas partes del recorrido de A a B .

Ejercicios 21 y 22: demuestra que C está en la mediatriz del segmento AB .

21 $A(-4, -3)$, $B(6, 1)$, $C(5, -11)$

22 $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$, $C(7, 7)$

Ejercicios 23 y 24: encuentra una fórmula que determine si un punto arbitrario $P(x, y)$ está en la mediatriz l del segmento AB .

23 $A(-4, -3)$, $B(6, 1)$ 24 $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$

- 25 Proporciona una fórmula que muestre que $P(x, y)$ está a una distancia 5 del origen. Describe el conjunto de todos estos puntos.

- 26 Encuentra una fórmula que muestre que $P(x, y)$ está a una distancia $r > 0$ de un punto fijo $C(h, k)$. Describe el conjunto de todos estos puntos.

- 27 Halla todos los puntos del eje y que estén a una distancia 6 de $P(5, 3)$.

- 28 Localiza todos los puntos del eje x que estén a una distancia 5 de $P(-2, 4)$.

- 29 Encuentra el punto con coordenadas de la forma $(2a, a)$ localizado en el tercer cuadrante y a una distancia 5 de $P(1, 3)$.

- 30 Encuentra todos los puntos con coordenadas de la forma (a, a) ubicados a una distancia 3 de $P(-2, 1)$.

- 31 ¿Para cuáles valores de a la distancia entre $P(a, 3)$ y $Q(5, 2a)$ es mayor que $\sqrt{26}$?

- 32 Dados $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$, encuentra una fórmula que no contenga radicales y que manifieste que la suma de las distancias de $P(x, y)$ a A y a B , respectivamente, sea 5.

- 33 Prueba que el punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo es equidistante de los vértices. (Sugerencia: marca los vértices del triángulo como $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ y $B(0, b)$.)

- 34 Demuestra que las diagonales de cualquier paralelogramo se bisecan entre sí. (Sugerencia: señala tres de los vértices del paralelogramo como $O(0, 0)$, $A(a, b)$ y $C(c, c)$.)



Ejercicios 35 y 36: localiza los puntos en la pantalla dada.

- 35 $A(-5, -3.5)$, $B(-2, 2)$, $C(1, 0.5)$, $D(4, 1)$ y $E(7, 2.5)$ en $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

- 36 $A(-10, 4)$, $B(-7, -1.1)$, $C(0, -6)$, $D(3, -5.1)$ y $E(9, 2.1)$ en $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$



- 37 Suscripciones a cable La tabla que sigue especifica el número de suscriptores de televisión por cable de 1990 a 1994.

Año	Suscriptores
1990	54 871 330
1991	55 786 390
1992	57 211 600
1993	58 834 440
1994	59 332 200

- (a) Grafica los datos en la pantalla [1988, 1996] por $[54 \times 10^6, 61 \times 10^6, 1 \times 10^6]$

- (b) Analiza la forma en que el número de suscriptores cambia.

18. Periódicos publicados. La tabla adjunta indica el número de diarios publicados en Estados Unidos para varios años.

- (a) Grafica los datos en la pantalla [1895, 2000, 10] por [0, 3000, 1000].
- (b) Usa la fórmula del punto medio para calcular el número de periódicos en 1930. Compara tu respuesta con el valor real de 1942.

Año	Periódicos
1900	2226
1920	2042
1940	1878
1960	1763
1980	1745
1993	1556

3.2

Gráficas de ecuaciones

Con frecuencia, las gráficas ilustran las variaciones en las cantidades. Una gráfica en la sección financiera de un periódico exhibe la fluctuación del promedio Dow-Jones durante un mes dado; un meteorólogo las usa para indicar los cambios de la temperatura del aire en un día; un cardiólogo las emplea (en este caso se denominan electrocardiogramas) para analizar irregularidades en el ritmo cardíaco; un ingeniero o físico recurre a ellas con objeto de ilustrar la manera en que la presión de un gas confinado aumenta a medida que éste se calienta. Por lo general, tales ayudas visuales permiten apreciar el comportamiento de las cantidades con más facilidad que una larga tabla de valores numéricos.

En ocasiones dos cantidades se relacionan por medio de una ecuación o fórmula con dos variables. En esta sección analizaremos cómo representar geoméricamente tal ecuación con una gráfica en un plano coordenado. La gráfica puede servir luego para descubrir propiedades de las cantidades que no eran evidentes a partir de la sola ecuación. La próxima tabla introduce el concepto básico de la gráfica de una ecuación con las variables x y y ; también son válidas otras letras.

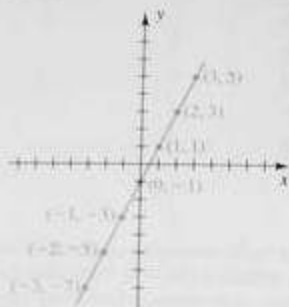
Terminología	Definición	Ejemplo
Solución de una ecuación en x y y	Un par ordenado (a, b) que lleva una expresión verdadera si $x = a$ y $y = b$	$(2, 3)$ es una solución de $y^2 = 5x - 1$, ya que al sustituir $x = 2$ y $y = 3$ resulta LS: $3^2 = 9$ RS: $5(2) - 1 = 10 - 1 = 9$.

Cada solución (a, b) de una ecuación en x y y tiene un punto $P(a, b)$ en un plano coordenado. El conjunto de todos estos números es la **gráfica** de la ecuación. Para trazar la gráfica de una ecuación, ilustramos las características relevantes de la gráfica en un plano coordenado. En casos sencillos se traza localizando unos cuantos puntos, si los hay. Con una ecuación complicada, la ubicación de puntos puede dar muy poca información sobre la gráfica. En tales casos, conviene utilizar métodos de cálculo o gráficas de computadora. Comencemos con un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 1 Trazado de una gráfica sencilla por localización de puntos

Traza la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1$.

Figura 1



SOLUCIÓN Deseamos encontrar los puntos (x, y) de un plano coordenado que correspondan a las soluciones de la ecuación. Es útil anotar las coordenadas de varios de tales puntos en una tabla, donde para cada x obtenemos el valor para y de $y = 2x - 1$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Es evidente que los puntos con estas coordenadas se encuentran en una recta, por lo que podemos trazar la gráfica de la figura 1. Ahora bien, los pocos puntos localizados no serían suficientes en términos generales para ilustrar la gráfica de una ecuación, pero en este caso elemental podemos estar razonablemente seguros de que la gráfica es una recta. Estableceremos este hecho en la sección que viene.

Es imposible trazar toda la gráfica del ejemplo 1, pues se pueden asignar valores a x numéricamente tan grandes como se desee. Por otro lado, llamamos *gráfica de la ecuación* o *un trazo de la gráfica* al dibujo de la figura 1. En general, el trazado de una gráfica ha de ilustrar sus características esenciales, de manera que las partes restantes (no dibujadas) sean evidentes. Por ejemplo, en la figura 1, puede observarse el **comportamiento final**, el patrón de la gráfica cuando x asume valores positivos y negativos grandes (es decir, la forma de los extremos derecho e izquierdo).

Si una gráfica termina en algún punto (como sería el caso para un segmento de recta o semirrecta), se pone un punto en el *punto extremo* apropiado de la gráfica. A manera de observación final, si no se marcan divisiones en los ejes coordenados (como en la figura 1), cada división representa una *unidad*. Marcaremos divisiones sólo cuando se usen distintas unidades en los ejes. Para gráficas *arbitrarias*, donde las unidades de medida no tienen importancia, se omiten las divisiones (ve figura 5 y 6).

EJEMPLO 2 Trazado de la gráfica de una ecuación

Dibuja la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 3$.

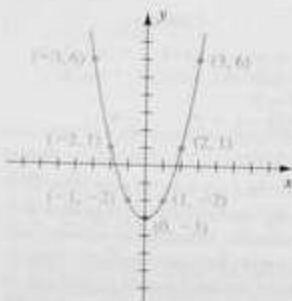
SOLUCIÓN Al sustituir los valores de x y hallar los valores correspondientes de y usando $y = x^2 - 3$, obtenemos una tabla de coordenadas para varios puntos de la gráfica

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

Los valores más grandes de $|x|$ producen valores más grandes de y ; por ejemplo, los puntos $(4, 13)$, $(5, 22)$ y $(6, 33)$ están en la gráfica, al igual que $(-4, 13)$, $(-5, 22)$ y $(-6, 33)$. Localizar los puntos dados por la tabla y dibujar una curva suave que pase por estos puntos (en orden creciente de valores de x) nos da el trazo de la figura 2.

La gráfica de la figura 2 es una **parábola**, y el eje y es el **eje de la parábola**. El punto más bajo $(0, -3)$ es el **vértice** de la parábola y decimos

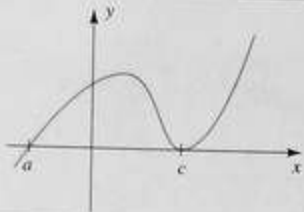
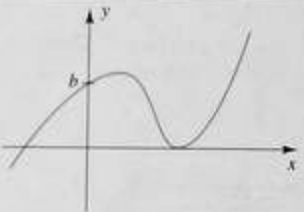
Figura 2



que la parábola *abre hacia arriba*. Si invertimos la gráfica, la parábola *abre hacia abajo* y el vértice es el punto más alto de la gráfica. En general, la gráfica de cualquier ecuación de la forma $y = ax^2 + c$ con $a \neq 0$ es una parábola con vértice $(0, c)$, que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$. Cuando $c = 0$, la ecuación se reduce a $y = ax^2$ y el vértice está en el origen $(0, 0)$. Las parábolas también pueden abrir a la derecha o a la izquierda (ve el ejemplo 5) o en otras direcciones.

La terminología que sigue nos servirá para describir en dónde la gráfica de una ecuación en x y y interseca al eje de las x o al eje de las y .

Intersecciones de la gráfica de una ecuación en x y y

Terminología	Definición	Interpretación gráfica	Cómo hallar
Intersecciones en x	Coordenadas x de los puntos donde la gráfica corta al eje x .		Hacer $y = 0$ y despejar x . Aquí, a y c son intersecciones en x .
Intersecciones en y	Coordenadas y de los puntos donde la gráfica corta al eje y .		Hacer $x = 0$ y despejar y . Aquí, b es la intersección en y .

Una intersección x se conoce a veces como un *cero* de la gráfica de una ecuación o como *raíz* de una ecuación. Cuando utilizemos una graficadora para hallar una intersección x , diremos que usamos una *raíz funcional*.



EJEMPLO 3 Determinación de intersecciones en x y y

Encuentra las intersecciones en x y en y de la gráfica de $y = x^2 - 3$.

SOLUCIÓN La gráfica está dibujada en la figura 2 (ejemplo 2). Hallamos las intersecciones según se expone en la tabla anterior.

(1) intersecciones en x :

$$\begin{array}{ll}
 y = x^2 - 3 & \text{dado} \\
 0 = x^2 - 3 & \text{hacer } y = 0 \\
 x^2 = 3 & \text{ecuación equivalente} \\
 x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73 & \text{tomar la raíz cuadrada}
 \end{array}$$

(continúa)

Por tanto, las intersecciones en x son $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$. Los puntos en que la gráfica cruza el eje x ($-\sqrt{3}, 0$) y ($\sqrt{3}, 0$).

(2) intersecciones en y :

$$y = x^2 - 3 \quad \text{dado}$$

$$y = 0 - 3 = -3 \quad \text{hacer } x = 0$$

Así pues, la intersección en y es -3 , y el punto en que la gráfica cruza al eje y es $(0, -3)$.

EJEMPLO 4 Trazado de la gráfica de una ecuación y determinación de las intersecciones

Traza la gráfica de $y = x^2 - 3$ y encuentra (o estima) sus intersecciones x y y .

SOLUCIÓN

TI-83 Plus

Antes de comenzar, desactiva STAT PLOT 1. En la pantalla aparecerá "Done" una vez que hayas hecho lo anterior.

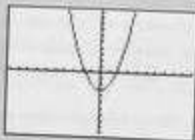
2nd STAT PLOT 4 ENTER

Haz las asignaciones Y.

Y= X²-3

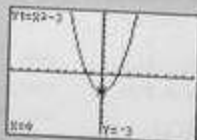
Gráfica en una pantalla estándar.

ZOOM 6



Encuentra la intersección y .

2nd CALC 1 0 ENTER



TI-86

2nd STAT PLOT(F3) F1(F5)

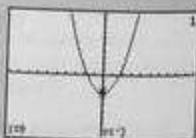
ENTER

GRAPH Y(X)=(F1) X-VAR X² - 3

2nd ZOOM(M3) ZSTD(F4)



MORE MORE EVAL(F1) 0 ENTER

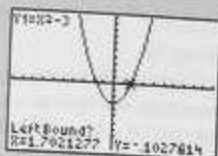


Calcula las intersecciones

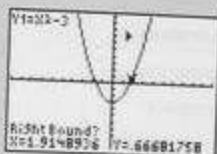
2nd CALC 2

GRAPH MORE MATH(F1) ROOT(F1)

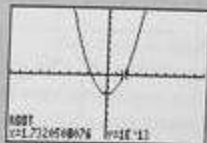
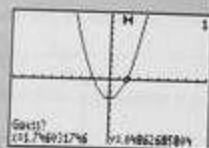
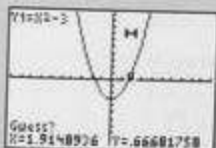
Encontraremos la intersección x positiva. Como respuesta a "Left Bound?", mueve el cursor a la derecha, de modo que la coordenada y sea un número negativo pequeño y luego oprime **ENTER**.



Como respuesta a "Right Bound?", mueve el cursor a la derecha, de modo que la coordenada y sea un número positivo pequeño y luego oprime **ENTER**.



Como respuesta a "Guess?", simplemente oprime **ENTER**, ya que estamos muy cerca de la intersección x .



Por el ejemplo previo sabemos que las intersecciones x son aproximadamente ± 1.73 .

Nota sobre la calculadora: Si conoces una aproximación de la intersección en x , entonces puedes teclear valores x para tus respuestas. Las siguientes respuestas producen el mismo resultado que se obtuvo arriba.

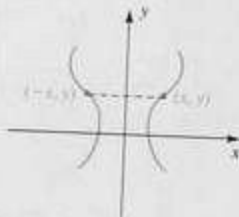
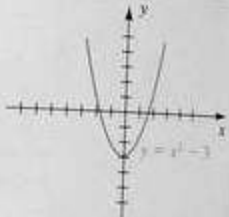
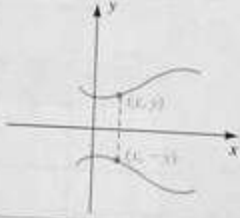
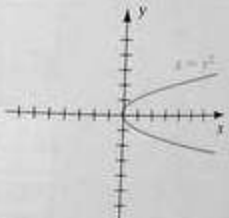
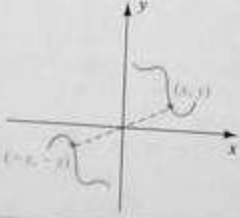

Left bound? 1 **ENTER**Right bound? 2 **ENTER**Guess? 1.5 **ENTER**

Si el plano coordenado de la figura 2 se dobla a lo largo del eje y , la gráfica que queda en la mitad izquierda del plano coincide con la de la mitad derecha y decimos que *la gráfica es simétrica con respecto al eje y* . Una gráfica es simétrica con respecto al eje y siempre que el punto $(-x, y)$ se encuentre en la gráfica cuando (x, y) también lo esté. La gráfica de $y = x^2 - 3$ del ejemplo 2 tiene esta propiedad, ya que la sustitución de x por $-x$ da la misma ecuación:

$$y = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3$$

Esta sustitución es una aplicación de la prueba de simetría (1) de la próxima tabla; también se mencionan otros dos tipos de simetría y las pruebas correspondientes. Las gráficas de $x = y^2$ y $4y = x^3$ de la columna de ejemplos se estudian en los ejemplos 5 y 6, respectivamente.

Simetrías de las gráficas de ecuaciones en x y y

Terminología	Interpretación gráfica	Prueba de simetría	Ejemplo
La gráfica es simétrica con respecto al eje y .		(1) La sustitución de $-x$ por x lleva a la misma ecuación.	
La gráfica es simétrica con respecto al eje x .		(2) La sustitución de $-y$ por y lleva a la misma ecuación.	
La gráfica es simétrica con respecto al origen.		(3) La sustitución simultánea de $-x$ por x y $-y$ por y lleva a la misma ecuación.	

Si una gráfica es simétrica con respecto a un eje, basta determinar la gráfica en la mitad del plano coordenado, ya que el resto se puede trazar tomando una *imagen de espejo* o *reflexión*, en el eje apropiado.



EJEMPLO 5 Gráfica simétrica con respecto al eje x

Traza la gráfica de la ecuación $y^2 = x$.

SOLUCIÓN Puesto que la sustitución de y con $-y$ no cambia la ecuación, la gráfica es simétrica con respecto al eje x (consulta la prueba 2 de simetría); por tanto, si el punto (x, y) se halla en la gráfica, también lo estará el punto $(x, -y)$; en consecuencia, es suficiente ubicar puntos con coordenadas y no negativas y luego reflejar en el eje x . La ecuación $y^2 = x$ equivale a $y = \pm\sqrt{x}$. Las coordenadas y de puntos *arriba* del eje x (y es *positiva*) están dadas por $y = \sqrt{x}$, en tanto que $y = -\sqrt{x}$ proporciona las coordenadas y de puntos *abajo* del eje x (y es *negativa*). A continuación se detallan las coordenadas de algunos puntos. La gráfica aparece en la figura 3.

x	0	1	2	3	4	9
y	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	3

La gráfica es una parábola que abre a la derecha, con su vértice en el origen. En este caso, el eje x es el eje de la parábola.

EJEMPLO 6 Gráfica simétrica con respecto al origen

Traza la gráfica de la ecuación $4y = x^3$.

SOLUCIÓN Si en forma simultánea sustituimos x por $-x$ y por $-y$, entonces

$$4(-y) = (-x)^3 \quad \text{o, lo que es equivalente,} \quad -4y = -x^3.$$

Al multiplicar ambos lados por -1 , vemos que la última ecuación tiene las mismas soluciones que la ecuación $4y = x^3$; por tanto, por la prueba (3) de simetría, la gráfica es simétrica con respecto al origen, y si el punto (x, y) se encuentra en la gráfica, también el punto $(-x, -y)$ lo está. En la tabla siguiente se incluyen las coordenadas de algunos puntos de la gráfica.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{32}$	2	$\frac{125}{32}$

Debido a la simetría, podemos ver que los puntos $(-1, -\frac{1}{4})$, $(-2, -2)$, etc., también pertenecen a la gráfica, la cual aparece en la figura 4.

Figura 3

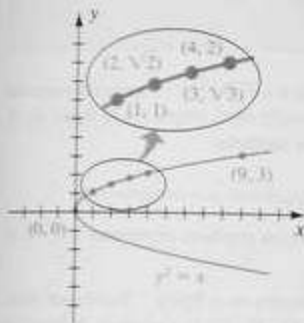


Figura 4

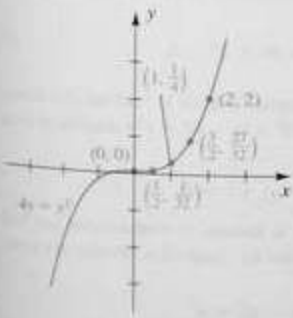


Figura 5



Si $C(h, k)$ es un punto en un plano coordenado, entonces una circunferencia con centro C y radio $r > 0$ está formada por todos los puntos del plano que están a r unidades de C . Según se ve en la figura 5, un punto $P(x, y)$ está sobre la circunferencia siempre que $d(C, P) = r$ o, por la fórmula de la distancia,

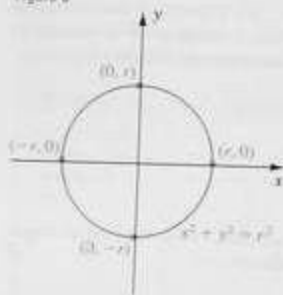
$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r.$$

La ecuación anterior equivale a la siguiente expresión, que se conoce como **ecuación estándar de una circunferencia**:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ecuación estándar de una circunferencia con centro (h, k) y radio r

Figura 6



Si $h = 0$ y $k = 0$, esta ecuación se reduce a $x^2 + y^2 = r^2$, que es la ecuación de una circunferencia de radio r con centro en el origen (ve la figura 6). Si $r = 1$, la gráfica es una **circunferencia unitaria**.

EJEMPLO 7 Determinación de la ecuación de una circunferencia

Encuentra la ecuación de una circunferencia que tiene como centro $C(-2, 3)$ y contiene el punto $D(4, 5)$.

SOLUCIÓN La circunferencia se muestra en la figura 7. Puesto que D está sobre la circunferencia, el radio r es $d(C, D)$. Por la fórmula de la distancia,

$$r = \sqrt{(4+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

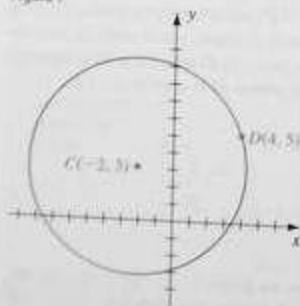
Con la ecuación estándar de una circunferencia con $h = -2$, $k = 3$ y $r = \sqrt{40}$, obtenemos

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 40.$$

Al elevar al cuadrado los términos y simplificar la última ecuación, podemos escribirla así

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0.$$

Figura 7



Al igual que en la solución al ejemplo 7, elevar al cuadrado los términos de una ecuación de la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y simplificar lleva a una ecuación del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

dónde a , b y c son números reales. A la inversa, si comenzamos con esta ecuación siempre es posible, al **completar los cuadrados**, obtener una ecuación de la forma

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = d.$$

Este método se ilustra en el ejemplo 8. Si $d > 0$, la gráfica es una circunferencia con centro (h, k) y radio $r = \sqrt{d}$. Ahora bien, si $d = 0$, la gráfica está formada sólo por el punto (h, k) . Por último, si $d < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y, por tanto, no hay gráfica.

EJEMPLO 8 Determinación del centro y radio de una circunferencia

Encuentra el centro y radio de la circunferencia cuya ecuación es

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 18y = 9.$$

SOLUCIÓN En vista de que es más fácil completar el cuadrado si los coeficientes de x^2 y y^2 son 1, comencemos dividiendo la ecuación dada entre 3, con lo que se obtiene

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3.$$

En seguida reescribimos la ecuación como sigue (los espacios subrayados representan números por determinar):

$$(x^2 - 4x + \underline{\quad}) + (y^2 + 6y + \underline{\quad}) = 3 + \underline{\quad} + \underline{\quad}$$

Luego completamos los cuadrados para las expresiones dentro de los paréntesis, cuidando de sumar los números adecuados a *ambos* lados de la ecuación. A fin de completar el cuadrado para una expresión de la forma $x^2 + ax$, añadimos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x (esto es, $(a/2)^2$) a ambos lados de la ecuación. Del mismo modo, para $y^2 + by$, sumamos $(b/2)^2$ a ambos lados. En este ejemplo, $a = -4$, $b = 6$, $(a/2)^2 = (-2)^2 = 4$ y $(b/2)^2 = 3^2 = 9$. Estas operaciones llevan a

$$(x^2 - 4x + \underline{4}) + (y^2 + 6y + \underline{9}) = 3 + \underline{4} + \underline{9} \quad \text{y a completar los cuadrados a$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

ecuación equivalente

Al comparar la última ecuación con la ecuación estándar de una circunferencia, vemos que $h = 2$ y $k = -3$ y concluimos que la circunferencia tiene centro $(2, -3)$ y radio $\sqrt{16} = 4$.

En algunas aplicaciones es necesario trabajar con sólo la mitad de una circunferencia; es decir, una **semicircunferencia**. El próximo ejemplo indica cómo hallar ecuaciones para semicircunferencias de circunferencias con centros en el origen.

EJEMPLO 9 Determinación de ecuaciones de semicircunferencias

Encuentra ecuaciones para las mitades superior, inferior, derecha e izquierda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 81$.

SOLUCIÓN La gráfica de $x^2 + y^2 = 81$ es una circunferencia de radio 9 con centro en el origen (compara con la figura 6). Despejamos y en términos de x con objeto de hallar ecuaciones para las mitades superior e inferior.

$$x^2 + y^2 = 81$$

$$y^2 = 81 - x^2$$

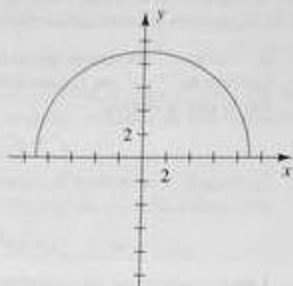
$$y = \pm \sqrt{81 - x^2} \quad \text{tomar la raíz cuadrada}$$

Puesto que $\sqrt{81 - x^2} \geq 0$, se deduce que la mitad superior de la circunferencia tiene la ecuación $y = \sqrt{81 - x^2}$ (y es positiva) y la mitad inferior está dada por $y = -\sqrt{81 - x^2}$ (y es negativa), según se ilustra en la figura 8(a) y (b).

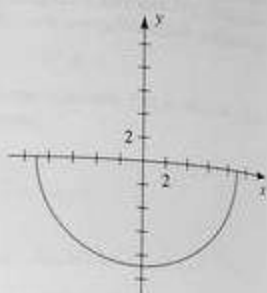
(continúa)

Figura 8

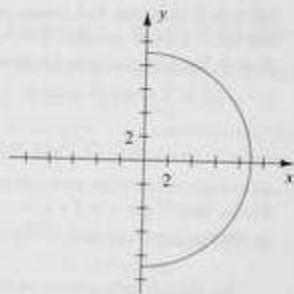
(a) $y = \sqrt{81 - x^2}$



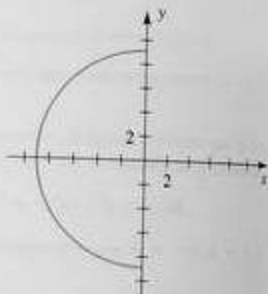
(b) $y = -\sqrt{81 - x^2}$



(c) $x = \sqrt{81 - y^2}$



(d) $x = -\sqrt{81 - y^2}$



Del mismo modo, a fin de hallar ecuaciones para las mitades derecha e izquierda, se despeja x en términos de y de la ecuación $x^2 + y^2 = 81$ y se obtiene

$$x = \pm \sqrt{81 - y^2}.$$

Dado que $\sqrt{81 - y^2} \geq 0$, se deduce que la mitad derecha de la circunferencia tiene la ecuación $x = \sqrt{81 - y^2}$ (x es positiva) y la mitad izquierda está dada por $x = -\sqrt{81 - y^2}$ (x es negativa), como se aprecia en la figura 8(c) y (d).

En muchas aplicaciones prácticas es esencial hallar los puntos en que se cortan las gráficas de dos ecuaciones en x y en y . Para calcularlos con una graficadora, con frecuencia es necesario despejar y de cada ecuación en términos de x ; por ejemplo, supón que una ecuación es

$$4x^2 - 3x + 2y + 6 = 0.$$

Al despejar y se obtiene

$$y = \frac{-4x^2 + 3x - 6}{2} = -2x^2 + \frac{3}{2}x - 3.$$

La gráfica de la ecuación se encuentra asignando

$$Y_1 = -2x^2 + \frac{3}{2}x - 3$$

en la calculadora graficadora. (El símbolo Y_1 indica la *primera* ecuación, o el primer valor y .) También se despeja y de la segunda ecuación en términos de x y se efectúa la asignación

$$Y_2 = \text{una expresión en } x.$$

Al presionar las teclas adecuadas obtenemos los trazos de las gráficas que conocemos como gráficas de Y_1 y Y_2 . Luego utilizamos una función del dispositivo, como *intersect* (de *intersection*, intersección), para calcular las coordenadas de los puntos de intersección.

En el ejemplo que viene demostramos esta técnica para las gráficas de los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 10 Cálculo de los puntos de intersección de gráficas

Usa una graficadora para calcular los puntos de intersección de las gráficas de $y = x^2 - 3$ y $y = 2x - 1$.

SOLUCIÓN

TI-83 Plus

Haz las asignaciones Y_1 .

$Y_1 = X^2 - 3$ ENTER
2 $Y_2 = 2X - 1$ ENTER



ZOOM 6

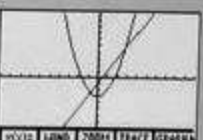


TI-86

GRAPH $Y(X) = (F1)$ X-VAR $X^2 - 3$ ENTER
2 X-VAR $2X - 1$ ENTER



2nd ZOOM(M3) ZSTD(F4)



Con base en las gráficas de Y_1 y Y_2 , vemos que hay dos puntos de intersección: P_1 en el primer cuadrante y P_2 en el tercer cuadrante. Encontraremos P_1 .

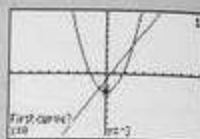
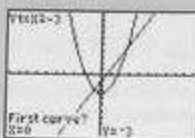
(continúa)

Encuentra un punto de intersección.

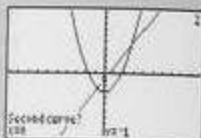
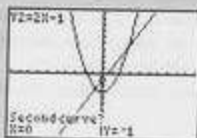
2nd CALC 5

MORE MATH(F1) MORE ISECT(F3)

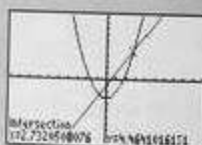
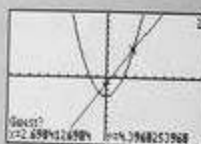
Como respuesta a "First Curve?", simplemente oprime **ENTER** para indicar que Y_1 es la primera curva.



Como respuesta a "Second Curve?", simplemente oprime **ENTER** para indicar que Y_2 es la segunda curva.



Como respuesta a "Guess?", mueve el cursor cerca de P_1 y luego oprime **ENTER**.



Calculamos las coordenadas de P_1 como $(2.73, 4.46)$. Luego volvemos a usar la función *intersect* para obtener $(-0.73, -2.46)$ como coordenadas aproximadas de P_2 .

Nota sobre la calculadora: Una respuesta alternativa a "Guess?" es teclear un estimado del valor x del punto de intersección. La siguiente respuesta produce el mismo resultado que antes:

Guess? 3 **ENTER**

EJEMPLO 11 Cálculo de los puntos de intersección de las gráficas

Usa una graficadora para calcular los puntos de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 = 25$ y $x^2 + y^2 - 4y = 12$.

SOLUCIÓN

Como en el ejemplo 9, en $x^2 + y^2 = 25$ despejamos y en términos de x , obteniendo

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2},$$

y hacemos las siguientes asignaciones:

$$Y_1 = \sqrt{25 - x^2} \quad \text{y} \quad Y_2 = -Y_1$$

(A menudo asignamos Y_2 en términos de Y_1 para evitar secuencias de tecleo repetitivas.)

Podemos considerar la ecuación de la segunda circunferencia como una ecuación cuadrática $ay^2 + by + c = 0$ en y y reordenando los términos como sigue:

$$y^2 - 4y + (x^2 - 12) = 0$$

Al aplicar la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = -4$ y $c = x^2 - 12$ ($x^2 - 12$ se considera un término constante porque no contiene a la variable y), obtenemos que

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(x^2 - 12)}}{2(1)} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(x^2 - 12)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{4 - (x^2 - 12)}}{2} = 2 \pm \sqrt{16 - x^2}. \end{aligned}$$

(No es necesario simplificar la ecuación tanto como lo hemos hecho aquí, aunque la forma simplificada es más fácil de introducir en una calculadora graficadora.)

Ahora hacemos las asignaciones

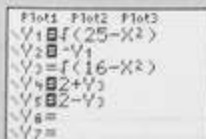
$$Y_3 = \sqrt{16 - x^2}, \quad Y_4 = 2 + Y_3 \quad \text{y} \quad Y_5 = 2 - Y_3.$$

TI-83 Plus

Haz las asignaciones Y_1 .



Desactiva Y_2 .

**TI-86**

Usaremos una pantalla cuadrada para que las circunferencias se vean redondas y no ovaladas.

(continúa)

Gráfica en una pantalla cuadrada.

2nd ZOOM 5



2nd ZOOM(M3) MORE ZSQRT(F2)



A partir de las gráficas de las circunferencias vemos que hay dos puntos de intersección: P_1 en el primer cuadrante y P_2 en el segundo cuadrante. Nuevamente encontraremos P_2 .

Encuentra un punto de intersección.

2nd CALC 5

GRAPH MORE MATH(F1) MORE ISECT(F3)

Como respuesta a "First Curve?", simplemente oprime **ENTER** para indicar que Y_1 es la primera curva. Como respuesta a "Second curve?" oprime **▽** para borrar a Y_2 como la selección para la segunda curva, ya que no corta Y_1 . Luego oprime **ENTER** para seleccionar a Y_2 como la segunda curva. Como respuesta a "Guess?", mueve el cursor cerca de P_1 y luego oprime **ENTER** o bien, tecla 3.5 para un intento y oprime **ENTER**.



Así, calculamos las coordenadas de P_1 como (3.8, 3.25). Dado que ambas circunferencias son simétricas con respecto al eje y , P_2 es aproximadamente (-3.8, 3.25).

Ten presente que las soluciones aproximadas de los ejemplos 10 y 11 no satisfacen las ecuaciones dadas por la imprecisión de los cálculos hechos desde la gráfica. En un capítulo posterior estudiaremos la manera de hallar los valores exactos para los puntos de intersección.

3.2 Ejercicios

Ejercicios 1 al 20: traza la gráfica de la ecuación y marca las intersecciones en x y y .

1 $y = 2x - 3$

2 $y = 3x + 2$

5 $y = -4x^2$

6 $y = \frac{1}{4}x^2$

3 $y = -x + 1$

4 $y = -2x - 3$

7 $y = 2x^2 - 1$

8 $y = -x^2 + 2$

9 $x = \frac{1}{4}y^2$

10 $x = -2y^2$

11 $x = -y^2 + 3$

12 $x = 2y^2 - 4$

13 $y = -\frac{1}{2}x^3$

14 $y = \frac{1}{2}x^3$

15 $y = x^3 - 8$

16 $y = -x^3 + 1$

17 $y = \sqrt{x}$

18 $y = \sqrt{-x}$

19 $y = \sqrt{x} - 4$

20 $y = \sqrt{x-4}$

Ejercicios 21 y 22: utiliza las pruebas de simetría para determinar qué gráficas en los ejercicios indicados son simétricas respecto de: (a) el eje y ; (b) el eje x y (c) el origen.

21 Los ejercicios naves del 1 al 20

22 Los ejercicios pares del 1 al 20

Ejercicios 23 al 34: dibuja la gráfica de la circunferencia o semicircunferencias.

23 $x^2 + y^2 = 11$

24 $x^2 + y^2 = 7$

25 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$

26 $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 4$

27 $(x+3)^2 + y^2 = 16$

28 $x^2 + (y-2)^2 = 25$

29 $4x^2 + 4y^2 = 25$

30 $9x^2 + 9y^2 = 1$

31 $y = -\sqrt{16-x^2}$

32 $y = \sqrt{4-x^2}$

33 $x = \sqrt{9-y^2}$

34 $x = -\sqrt{25-y^2}$

Ejercicios 35 al 46: encuentra una ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas.

35 Centro $C(2, -3)$, radio 5

36 Centro $C(-4, 1)$, radio 3

37 Centro $C(\frac{1}{2}, 0)$, radio $\sqrt{5}$

38 Centro $C(\frac{3}{2}, -\frac{2}{3})$, radio $3\sqrt{2}$

39 Centro $C(-4, 6)$, que pasa por $P(1, 2)$

40 Centro en el origen, pasa por $P(4, -7)$

41 Centro $C(-3, 6)$, tangente al eje y

42 Centro $C(4, -1)$, tangente al eje x

43 Tangente a ambos ejes, centro en el segundo cuadrante, radio 4

44 Tangente a ambos ejes, centro en el cuarto cuadrante, radio 3

45 Puntos extremos de un diámetro $A(4, -3)$ y $B(-2, 7)$

46 Puntos extremos de un diámetro $A(-5, 2)$ y $B(3, 6)$

Ejercicios 47 al 56: encuentra el centro y radio de la circunferencia con la ecuación dada.

47 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$

48 $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 37 = 0$

49 $x^2 + y^2 + 4y - 117 = 0$

50 $x^2 + y^2 - 10x + 18 = 0$

51 $2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y - 15 = 0$

52 $9x^2 + 9y^2 + 12x - 6y + 4 = 0$

53 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

54 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$

55 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 19 = 0$

56 $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 16 = 0$

Ejercicios 57 al 60: halla ecuaciones para las mitades superior, inferior, derecha e izquierda de la circunferencia.

57 $x^2 + y^2 = 36$

58 $(x+3)^2 + y^2 = 64$

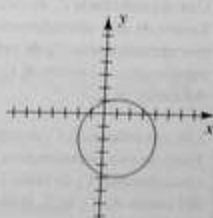
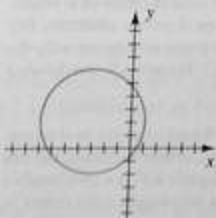
59 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 49$

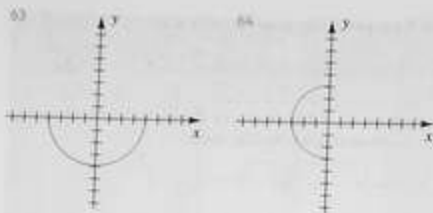
60 $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$

Ejercicios 61 al 64: encuentra una ecuación para la circunferencia o la semicircunferencia.

61

62





Ejercicios 65 y 66: indica si el punto P está dentro, fuera o en la circunferencia con centro C y radio r .

65. (a) $P(2, 3)$, $C(4, 6)$, $r = 4$

(b) $P(4, 2)$, $C(1, -2)$, $r = 5$

(c) $P(-3, 5)$, $C(2, 1)$, $r = 6$

66. (a) $P(3, 8)$, $C(-2, -4)$, $r = 13$

(b) $P(-2, 5)$, $C(3, 7)$, $r = 6$

(c) $P(1, -2)$, $C(6, -7)$, $r = 7$

Ejercicios 67 y 68: para la circunferencia dada, encuentra (a) las intersecciones en x y (b) las intersecciones en y .

67. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

68. $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$

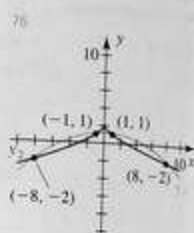
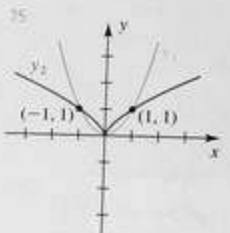
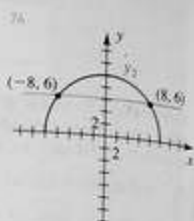
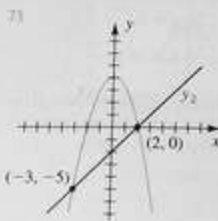
69. Escribe una ecuación para la circunferencia que sea concéntrica (que tenga el mismo centro) con $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ y que pase por $P(2, 6)$.

70. Alcance de la transmisión por radio. La señal de una estación de radio tiene un alcance circular de 50 millas. Una segunda estación, ubicada a 100 millas al este y 80 millas al norte de la primera, cubre 80 millas. ¿Hay lugares que reciben ambas señales? Explica tu respuesta.

71. Una circunferencia C_1 de radio 5 tiene su centro en el origen. Dentro de esta circunferencia, en el primer cuadrante, hay una circunferencia C_2 de radio 2 que es tangente a C_1 . La coordenada x del centro de C_2 es 2. Encuentra la coordenada y del centro de C_2 .

72. Una circunferencia C_1 de radio 5 tiene su centro en el origen. Fuera de esta circunferencia, en el primer cuadrante, hay una circunferencia C_2 de radio 2 tangente a C_1 . La coordenada y del centro de C_2 es 3. Halla la coordenada x del centro de C_2 .

Ejercicios 73 al 76: expresa, en forma de intervalo, los valores x tales que $y_1 < y_2$. Supón que todos los puntos de intersección se encuentran en el intervalo $(-\infty, \infty)$.



73. Grafica la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ con las ecuaciones $Y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ y $Y_2 = -Y_1$ en la pantalla dada. Luego analiza cómo es que ésta afecta la gráfica y encuentra la pantalla que genere una gráfica circular.

(1) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ (2) $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

(3) $[-2, 2]$ por $[-5, 5]$ (4) $[-5, 5]$ por $[-2, 2]$

74. Grafica la ecuación $|x| + |y| = 5$, con las ecuaciones $Y_1 = 5 - |x|$ y $Y_2 = -Y_1$ en la pantalla $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$.

(a) Proporciona el número de intersecciones en x y y .

(b) Usa la gráfica para hallar la región donde $|x| + |y| < 5$.

Ejercicios 79 y 80: grafica la ecuación y calcula las intersecciones en x .

79. $y = x^3 - \frac{9}{10}x^2 - \frac{43}{25}x + \frac{24}{25}$

80. $y = x^4 + 0.85x^3 - 2.46x^2 - 1.07x + 0.51$

Ejercicios 81 al 84: dibuja las dos ecuaciones en el mismo plano coordenado y calcula las coordenadas de sus puntos de intersección.

81 $y = x^3 + x;$

$x^2 + y^2 = 1$

82 $y = 3x^2 - \frac{1}{2};$

$x^2 + y^2 = 1$

83 $x^2 + (y - 1)^2 = 1;$

$(x - \frac{3}{4})^2 + y^2 = 1$

84 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4};$

$(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$

85. Distancia entre automóviles. La distancia D (en millas) entre dos autos que se encuentran en la misma carretera al tiempo t (en minutos), está descrita por la ecuación $D = |2t - 4|$ en el intervalo $[0, 4]$. Grafica D y describe el movimiento de los carros.

86. Agua en una piscina. La expresión $A = 12000x - 2000x^2$ representa la cantidad de agua A de una alberca en un día x . A está dada en galones (gal) y $x = 0$ corresponde al mediodía de un domingo. Grafica A en el intervalo $[0, 6]$ e indica la cantidad de agua en la piscina.



87. Velocidad del sonido. La velocidad v del sonido en el aire varía con la temperatura. Se puede calcular en pies por segundo (pies/s) con la ecuación $v = 1087 \sqrt{\frac{T + 273}{273}}$, donde T es la temperatura (en $^{\circ}\text{C}$).

(a) Calcula v cuando $T = 20^{\circ}\text{C}$.

(b) Determina la temperatura al grado más cercano, tanto en forma algebraica como gráfica, cuando la velocidad del sonido sea 1000 pies/s.



88. El área A de un triángulo equilátero con un lado de longitud s es $A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$. Considera que A debe ser igual a 100 pies² con un error máximo de ± 1 pie². Determina en forma gráfica con cuánta precisión hay que medir s para satisfacer este requisito de error. (Sugerencia: grafica $y = A$, $y = 99$ y $y = 101$.)

3.3

Rectas

Uno de los conceptos básicos en geometría es la *recta*. En esta sección limitaremos nuestro estudio a las rectas de un plano coordenado, lo que nos permitirá el uso de métodos algebraicos para estudiar sus propiedades. Dos de nuestros objetivos principales pueden establecerse de esta manera:

- (1) Dada una recta l de un plano coordenado, encontrar una ecuación cuya gráfica corresponda a l .
- (2) Dada una ecuación de una recta l de un plano coordenado, trazar la gráfica de la ecuación.

El concepto que sigue es fundamental para el estudio de las rectas.

Definición de la pendiente de una recta

Sea l una recta que no es paralela al eje y , y sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos diferentes de l . La **pendiente m** de l es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

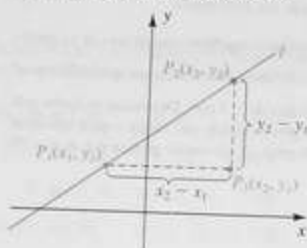
Si l es paralela al eje y , la pendiente de l no está definida.

En matemáticas, la letra griega Δ (delta) se usa para denotar "cambio en". Así, podemos pensar que la pendiente m es:

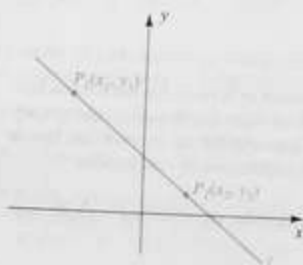
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$$

Figura 1

(a) Pendiente positiva (la recta crece)



(b) Pendiente negativa (la recta decrece)



Los puntos característicos P_1 y P_2 de la línea l se exhiben en la figura 1. El numerador $y_2 - y_1$ de la fórmula para encontrar m es el cambio vertical en dirección de P_1 a P_2 y puede ser positivo, negativo o cero. El denominador $x_2 - x_1$ es el cambio horizontal de P_1 a P_2 y puede ser positivo o negativo, pero nunca cero porque l no es paralelo al eje y y si existe una pendiente. En la figura 1(a) la pendiente es positiva y decimos que la recta *crece*; en la figura 1(b) es negativa y la línea *decrece*.

Al hallar la pendiente de una recta no importa qué punto marquemos como P_1 y P_2 , pues

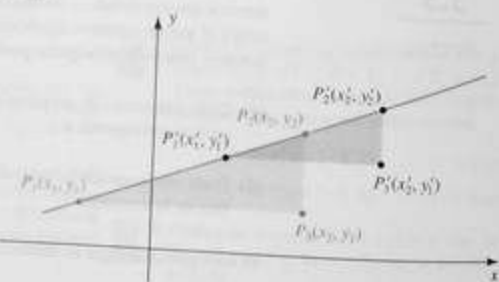
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Si los puntos están señalados de modo que $x_1 < x_2$ (figura 1), entonces $x_2 - x_1 > 0$ y, por tanto, la pendiente es positiva, negativa o cero, dependiendo de si $y_2 > y_1$, $y_2 < y_1$ o $y_2 = y_1$, respectivamente.

La definición de la pendiente no depende de los puntos elegidos. Si se usan otros puntos, por ejemplo $P'_1(x'_1, y'_1)$ y $P'_2(x'_2, y'_2)$, entonces, como en la figura 2, el triángulo con vértices P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$ es semejante al triángulo con vértices P'_1, P'_2 y $P'_3(x'_2, y'_1)$. Puesto que los cocientes entre los lados correspondientes de triángulos similares son iguales,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$

Figura 2



EJEMPLO 1 Búsqueda de pendientes

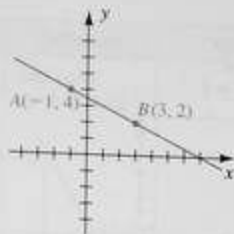
Traza la recta que pasa por cada par de puntos y encuentra su pendiente m :

- (a) $A(-1, 4)$ y $B(3, 2)$ (b) $A(2, 5)$ y $B(-2, -1)$
(c) $A(4, 3)$ y $B(-2, 3)$ (d) $A(4, -1)$ y $B(4, 4)$

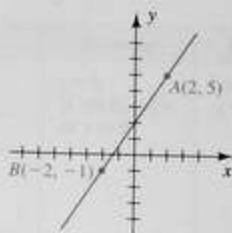
SOLUCIÓN Las rectas aparecen en la figura 3. Usamos la definición de pendiente para hallar la pendiente de cada recta.

Figura 3

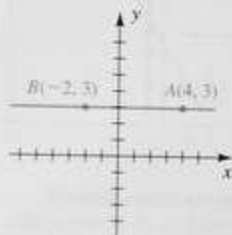
(a) $m = -\frac{1}{2}$



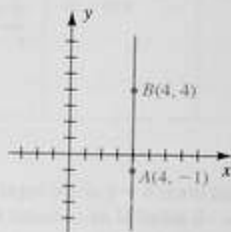
(b) $m = \frac{3}{2}$



(c) $m = 0$



(d) m indefinida



(a) $m = \frac{2 - 4}{3 - (-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

(b) $m = \frac{5 - (-1)}{2 - (-2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

(c) $m = \frac{3 - 3}{-2 - 4} = \frac{0}{-6} = 0$

(d) La pendiente no está definida porque la recta es paralela al eje y . Observarás que si usamos la fórmula para m , el denominador es cero.

EJEMPLO 2 Trazado de una recta con una pendiente dada

Traza la recta que pasa por $P(2, 1)$ que tiene

(a) pendiente $\frac{5}{3}$ (b) pendiente $-\frac{5}{3}$

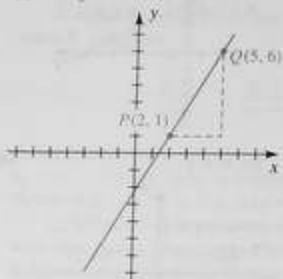
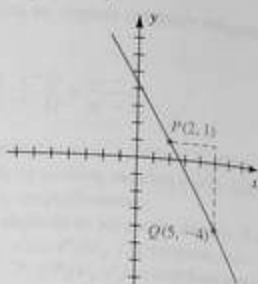
SOLUCIÓN Si la pendiente de una recta es a/b y b es positiva, entonces para todo cambio de b unidades en dirección horizontal, la recta crece o decrece $|a|$ unidades, dependiendo de si a es positiva o negativa.

(a) Si $P(2, 1)$ está en la recta y $m = \frac{5}{3}$, es posible obtener otro punto de la recta si comenzamos en P y lo movemos 3 unidades a la derecha y 5 hacia arriba. Esto dará el punto $Q(5, 6)$ y la recta estará determinada igual que en la figura 4(a).

(continúa)

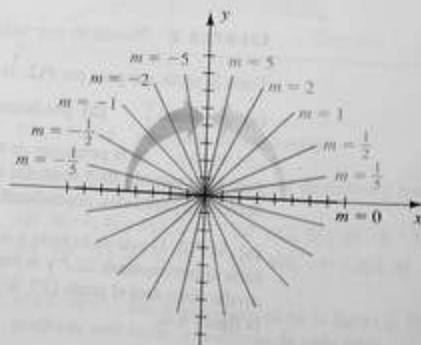
(b) Si $P(2, 1)$ se halla en la recta y $m = -\frac{5}{3}$, movemos 3 unidades a la derecha, 5 hacia abajo y llegamos a la recta que pasa por $Q(5, -4)$ [figura 4(b)].

Figura 4

(a) $m = \frac{5}{3}$ (b) $m = -\frac{5}{3}$ 

El diagrama de la figura 5 indica las pendientes de varias rectas que pasan por el origen. La recta que se encuentra sobre el eje x tiene pendiente $m = 0$. Si se hace girar alrededor de O en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj (según indica la flecha azul), la pendiente es positiva y aumenta; alcanza el valor de 1 cuando la recta biseca el primer cuadrante y continúa incrementándose a medida que la recta se acerca al eje y . Ahora bien, la recta de pendiente $m = 0$ se hace girar en sentido de las manecillas del reloj (flecha gris), la pendiente es negativa y llega al valor de -1 cuando la recta biseca el segundo cuadrante; además, se vuelve más grande y negativa conforme la recta se acerca al eje y .

Figura 5



Las rectas horizontales o verticales tienen ecuaciones sencillas, según se aprecia en la tabla siguiente.

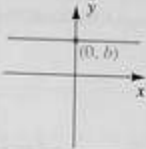
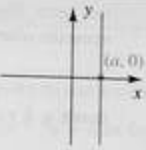
Terminología	Definición	Gráfica	Ecuación	Pendiente
Recta horizontal	Una recta paralela al eje x		$y = b$ la intersección en y es b	La pendiente es 0
Recta vertical	Una recta paralela al eje y		$x = a$ la intersección en x es a	La pendiente es indefinida

Figura 6

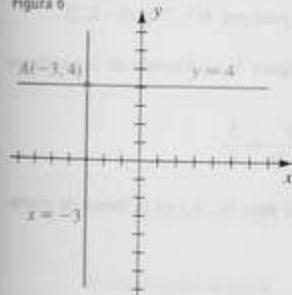
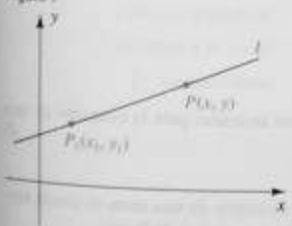


Figura 7



Un error común es considerar la gráfica de $y = b$ como formada por un solo punto $(0, b)$. Si expresamos la ecuación en la forma $0 \cdot x + y = b$, el valor de x no tiene importancia; por tanto, la gráfica de $y = b$ está formada por los puntos (x, b) para *toda* x ; o sea, es una recta horizontal. Del mismo modo, la gráfica de $x = a$ es la recta vertical formada por todos los puntos (a, y) , donde y es un número real.

EJEMPLO 3 Determinación de ecuaciones de rectas horizontales y verticales

Encuentra una ecuación de la recta que pasa por $A(-3, 4)$ paralela al

- (a) eje x (b) eje y

SOLUCIÓN Las dos rectas aparecen en la figura 6. De acuerdo con la tabla anterior, las ecuaciones son $y = 4$ para el inciso (a) y $x = -3$ para (b).

A continuación encontremos una ecuación de la recta l que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m . Si $P(x, y)$ es cualquier punto con $x \neq x_1$ (figura 7), entonces P está sobre la recta l si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es m ; es decir, si

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Observarás que (x_1, y_1) es una solución de la última ecuación y, por tanto, los puntos de l son precisamente los puntos que corresponden a las soluciones. Esta ecuación para l se conoce como la forma **punto-pendiente**.

Forma punto-pendiente para la ecuación de una recta

Una ecuación para la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

La forma punto-pendiente es sólo una posibilidad para una ecuación de una recta. Hay muchas ecuaciones equivalentes. A veces simplificamos la ecuación obtenida usando la forma punto-pendiente a

$$ax + by = c \quad \text{o} \quad ax + by + d = 0,$$

donde a , b y c son enteros sin factor común, $a > 0$ y $d = -c$.

EJEMPLO 4 Determinación de la ecuación de una recta que pasa por dos puntos

Encuentra una ecuación de la recta que pasa por $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$.

SOLUCIÓN La recta aparece en la figura 8. La fórmula de la pendiente m nos da

$$m = \frac{7 - 2}{1 - (-3)} = \frac{5}{4}.$$

Podemos usar las coordenadas de A o B para (x_1, y_1) en la forma de punto-pendiente. Con $A(1, 7)$ tendremos

$$\begin{aligned} y - 7 &= \frac{5}{4}(x - 1) && \text{forma de punto-pendiente} \\ 4(y - 7) &= 5(x - 1) && \text{multiplicar por 4} \\ 4y - 28 &= 5x - 5 && \text{multiplicar factores} \\ -5x + 4y &= 23 && \text{restar } 5x \text{ y sumar } 28 \\ 5x - 4y &= -23 && \text{multiplicar por } -1 \end{aligned}$$

La última ecuación es una de las formas deseadas para la ecuación de una recta. Otra es $5x - 4y + 23 = 0$.

La forma punto-pendiente para la ecuación de una recta se puede escribir de esta manera: $y = mx - mx_1 + y_1$, que es de la forma

$$y = mx + b$$

con $b = -mx_1 + y_1$. El número real b es la ordenada al origen o intersección en y de la gráfica (figura 9). Dado que la ecuación $y = mx + b$ muestra la

Figura 8

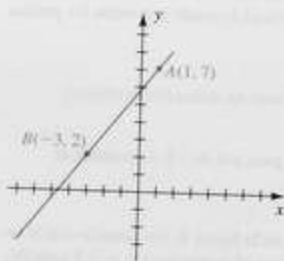


Figura 9



pendiente m y la intersección igual a b en y de l , se llama **forma pendiente-intersección** o pendiente-ordenada al origen para la ecuación de una recta. A la inversa, si comenzamos con $y = mx + b$, podemos escribir

$$y - b = m(x - 0).$$

Al comparar esta ecuación con la forma punto-pendiente, vemos que la gráfica es una recta con pendiente m que pasa por el punto $(0, b)$. Hemos demostrado este resultado.

**Forma pendiente-intersección
para la ecuación de una recta**

La gráfica de $y = mx + b$ es una recta con pendiente m y ordenada al origen igual a b .

EJEMPLO 5 Expresión de una ecuación en forma pendiente-intersección

Escribe la ecuación $2x - 5y = 8$ en forma pendiente-intersección.

SOLUCIÓN Nuestra meta es despejar y de la ecuación dada para obtener la forma $y = mx + b$. Podemos proceder de esta manera:

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 8 && \text{dado} \\ -5y &= -2x + 8 && \text{restar } 2x \\ y &= \left(\frac{-2}{-5}\right)x + \left(\frac{8}{-5}\right) && \text{dividir entre } -5 \\ y &= \frac{2}{5}x + \left(-\frac{8}{5}\right) && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

La última ecuación es de la forma pendiente-intersección $y = mx + b$ con pendiente $m = \frac{2}{5}$ y ordenada al origen igual a $b = -\frac{8}{5}$.

A partir de la forma de punto-pendiente, se deduce que toda recta es una gráfica de una ecuación

$$ax + by = c,$$

donde a , b y c son números reales y a y b no son ambos cero. Esta ecuación se denomina **ecuación lineal** en x y y . Demostremos, recíprocamente, que la gráfica de $ax + by = c$ donde a y b no son ambas cero, es siempre una recta. Si $b \neq 0$ despejamos y y obtenemos

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \frac{c}{b},$$

que, por la forma pendiente-intersección, es la ecuación de una recta con pendiente $-a/b$ y ordenada al origen igual a c/b . Si $b = 0$ pero $a \neq 0$, despejamos x y obtenemos $x = c/a$, que es la ecuación de una recta vertical con intersección en x igual a c/a . Este análisis establece el resultado que sigue.

Forma general para la ecuación de una recta

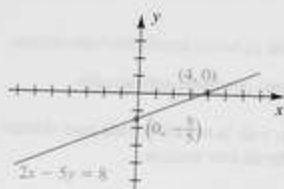
La gráfica de una ecuación lineal $ax + by = c$ es una recta y, recíprocamente, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

Para simplificar, usamos la recta $ax + by = c$, en lugar de la frase la recta con ecuación $ax + by = c$.

EJEMPLO 6 Trazado de la gráfica de una ecuación lineal

Traza la gráfica de $2x - 5y = 8$.

Figura 10



SOLUCIÓN Por nuestro estudio anterior sabemos que la gráfica es una recta, de modo que basta hallar dos puntos en la gráfica. Encontremos las intersecciones en x y y sustituyendo $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente, en la ecuación dada, $2x - 5y = 8$.

Intersección x : si $y = 0$, entonces $2x = 8$, o bien $x = 4$.

Intersección y : si $x = 0$, entonces $-5y = 8$, o bien $y = -\frac{8}{5}$.

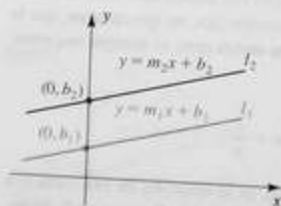
Grificamos las intersecciones $(4, 0)$ y $(0, -\frac{8}{5})$ tendemos una recta que pase por ellos y llegamos a la gráfica de la figura 10.

El teorema que viene especifica la relación entre **rectas paralelas** (rectas en un plano que no se cortan) y pendiente.

Teorema sobre pendientes de rectas paralelas

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

Figura 11



DEMOSTRACIÓN Sean l_1 y l_2 rectas distintas de pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Si las intersecciones en y (u ordenadas al origen) son b_1 y b_2 (figura 11), entonces, por la forma pendiente-intersección, las rectas tienen ecuaciones

$$y = m_1x + b_1 \quad \text{y} \quad y = m_2x + b_2.$$

Las rectas se cortan en algún punto (x, y) si y sólo si los valores de y son iguales para alguna x , esto es, si

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2,$$

o bien

$$(m_1 - m_2)x = b_2 - b_1.$$

La última ecuación se puede resolver para x si y sólo si $m_1 - m_2 \neq 0$. Hemos demostrado que las rectas l_1 y l_2 se cortan si y sólo si $m_1 \neq m_2$; por tanto, no se intersectan (son paralelas) si y sólo si $m_1 = m_2$.



EJEMPLO 7 Determinación de la ecuación de una recta paralela a una recta dada

Encuentra una ecuación de la recta que pasa por $P(5, -7)$ que es paralela a la recta $6x + 3y = 4$.

SOLUCIÓN Primero se expresa la ecuación dada en forma pendiente-intersección:

$$\begin{aligned} 6x + 3y &= 4 && \text{dada} \\ 3y &= -6x + 4 && \text{restar } 6x \\ y &= -2x + \frac{4}{3} && \text{dividir entre 3} \end{aligned}$$

La última ecuación está en forma pendiente-intersección, $y = mx + b$, con pendiente $m = -2$ e intersección y igual a $\frac{4}{3}$. Puesto que las rectas paralelas poseen la misma pendiente, la recta requerida también tiene pendiente -2 . Con el punto $P(5, -7)$ tendremos:

$$\begin{aligned} y - (-7) &= -2(x - 5) && \text{forma punto-pendiente} \\ y + 7 &= -2x + 10 && \text{simplificar} \\ y &= -2x + 3 && \text{restar 7} \end{aligned}$$

La última ecuación está en forma pendiente-intersección y muestra que la recta paralela que hemos encontrado tiene ordenada al origen igual a 3. Ésta y la recta dada aparecen en la figura 12.

Como solución alternativa podemos aprovechar que las rectas de la forma $6x + 3y = k$ tienen la misma pendiente que la recta dada y, por tanto, son paralelas a ella. Sustituimos $x = 5$ y $y = -7$ en la ecuación $6x + 3y = k$, con lo cual $6(5) + 3(-7) = k$, o bien, lo que es lo mismo, $k = 9$. La ecuación $6x + 3y = 9$ equivale a $y = -2x + 3$.

Si las pendientes de dos rectas no verticales son diferentes, entonces las rectas no son paralelas y se cortan en exactamente un punto.

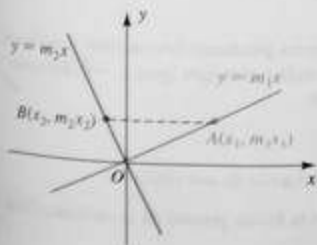
El teorema adjunto nos da información sobre **rectas perpendiculares** (rectas que se cortan en ángulos rectos).

Teorema sobre pendientes de rectas perpendiculares

Dos rectas con pendiente m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si

$$m_1 m_2 = -1.$$

Figura 13



DEMOSTRACIÓN Por simplicidad, consideremos el caso especial de dos rectas que se cortan en el origen O (figura 13). Las ecuaciones de estas rectas son $y = m_1x$ y $y = m_2x$. Si, como en la figura, escogemos los puntos $A(x_1, m_1x_1)$ y $B(x_2, m_2x_2)$ diferentes de O sobre las rectas, entonces las rectas son perpendiculares si y sólo si el ángulo AOB es un ángulo recto. Con el teorema de Pitágoras veremos que el ángulo AOB es recto si y sólo si

$$[d(A, B)]^2 = [d(O, B)]^2 + [d(O, A)]^2$$

o bien, por la fórmula de la distancia,

$$(x_2 - x_1)^2 + (m_2x_2 - m_1x_1)^2 = x_2^2 + (m_2x_2)^2 + x_1^2 + (m_1x_1)^2.$$

(continúa)

Figura 14

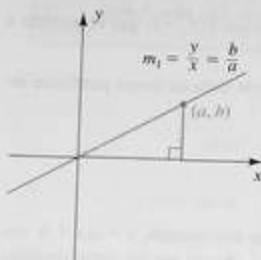
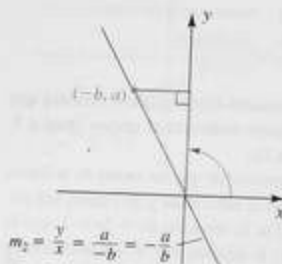


Figura 15



Al elevar al cuadrado los términos, simplificar y factorizar obtendremos:

$$-2m_1m_2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0$$

$$-2x_1x_2(m_1m_2 + 1) = 0.$$

Dado que ni x_1 ni x_2 no son cero, podemos dividir ambos lados entre $-2x_1x_2$, con lo cual obtenemos $m_1m_2 + 1 = 0$; por tanto, las rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$.

El mismo tipo de demostración es válido si las rectas se cortan en cualquier punto (a, b) .

Una forma conveniente de recordar las condiciones relativas a las pendientes de las rectas perpendiculares es advertir que m_1 y m_2 deben ser *recíprocas negativas* entre sí; esto es, $m_1 = -1/m_2$ y $m_2 = -1/m_1$.

El resultado del último teorema puede visualizarse como se muestra a continuación. Dibuja un triángulo como el de la figura 14; la recta que contiene su hipotenusa tiene una pendiente $m_1 = b/a$. Ahora haz que el triángulo gire 90 grados como en la figura 15. La recta tiene ahora la pendiente $m_2 = a/(-b)$, el recíproco negativo de m_1 .

EJEMPLO 8 Determinación de la ecuación de una recta perpendicular a una recta dada

Encuentra la forma pendiente-intersección para la recta que pasa por el punto $P(5, -7)$ perpendicular a la recta $6x + 3y = 4$.

SOLUCIÓN Consideramos la recta $6x + 3y = 4$ en el ejemplo 7 y encontramos que su pendiente es -2 ; por tanto, la pendiente de la recta requerida es el recíproco negativo $-[1/(-2)]$, o sea $\frac{1}{2}$. Con $P(5, -7)$ llegamos a:

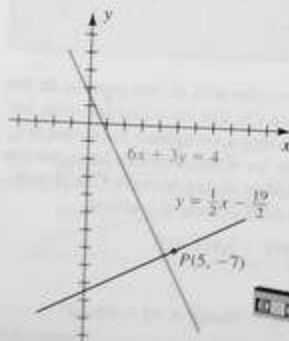
$$y - (-7) = \frac{1}{2}(x - 5) \quad \text{forma punto-pendiente}$$

$$y + 7 = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \quad \text{simplificar}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{19}{2} \quad \text{poner en la forma pendiente-intersección}$$

La última ecuación está en la forma pendiente-intersección y muestra que la recta perpendicular tiene ordenada y al origen igual a $-\frac{19}{2}$. Esta recta, y la dada, aparecen en la figura 16.

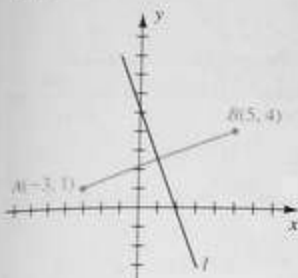
Figura 16



EJEMPLO 9 Determinación de la ecuación de una mediatriz

Dados $A(-3, 1)$ y $B(5, 4)$, encuentra la forma general de la mediatriz del segmento de recta AB .

Figura 17



SOLUCIÓN El segmento de recta AB y su mediatriz l se ilustran en la figura 17. Calculamos lo siguiente, donde M es el punto medio de AB :

Coordenadas de M : $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{2}\right)$ fórmula de punto medio

Pendiente de AB : $\frac{4-1}{5-(-3)} = \frac{3}{8}$ fórmula de pendiente

Pendiente de l : $-\frac{1}{\frac{3}{8}} = -\frac{8}{3}$ recíproco negativo de $\frac{3}{8}$

Con el punto $M(1, \frac{5}{2})$ y la pendiente $-\frac{8}{3}$ obtenemos estas ecuaciones equivalentes para l :

$$y - \frac{5}{2} = -\frac{8}{3}(x - 1) \quad \text{forma punto-pendiente}$$

$$6y - 15 = -16(x - 1) \quad \text{multiplicar por el mcd, 6}$$

$$6y - 15 = -16x + 16 \quad \text{multiplicar}$$

$$16x + 6y = 31 \quad \text{poner en forma general}$$

Dos variables x y y están **linealmente relacionadas** si $y = ax + b$, donde a y b son números reales y $a \neq 0$. Las relaciones lineales entre variables se presentan con frecuencia en problemas aplicados. El siguiente ejemplo es una demostración.

EJEMPLO 10 Relación entre temperatura del aire y altitud

La relación entre la temperatura del aire T (en $^{\circ}\text{F}$) y la altitud h (en pies sobre el nivel del mar: pies/snm) es aproximadamente lineal para $0 \leq h \leq 20\,000$. Si la temperatura al nivel del mar es 60° , un aumento de 5000 pies en altitud baja la temperatura del aire unos 18° .

- Expresa T en términos de h y dibuja la gráfica en un sistema coordenado hT .
- Calcula la temperatura del aire a una altitud de 15 000 pies.
- Aproxima la altitud a la que la temperatura sea 0° .

SOLUCIÓN

- (a) Si T está linealmente relacionada a h , entonces

$$T = ah + b$$

para algunas constantes a y b (a representa la pendiente y b la intersección en T). Puesto que $T = 60^{\circ}$ cuando $h = 0$ pies (al nivel del mar), la intersección en T es 60 y la temperatura T para $0 \leq h \leq 20\,000$ está dada por

$$T = ah + 60.$$

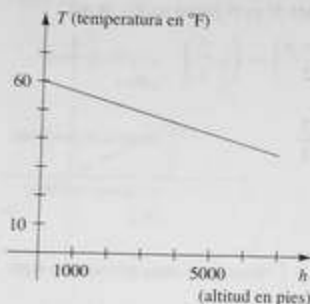
A partir de los datos dados, observamos que cuando $h = 5000$ pies, la temperatura $T = 60^{\circ} - 18^{\circ} = 42^{\circ}$; por tanto a , se encuentra de esta manera:

$$42 = a(5000) + 60 \quad \text{sean } T = 42 \text{ y } h = 5000$$

$$a = \frac{42 - 60}{5000} = -\frac{9}{2500} \quad \text{despejar } a$$

(continúa)

Figura 18



Al sustituir a en $T = ah + 60$ se obtiene esta fórmula para T :

$$T = -\frac{9}{2500}h + 60$$

La gráfica aparece en la figura 18, con diferentes escalas en los ejes.

(b) Con la última fórmula para T obtenida en el inciso (a), encontramos que la temperatura (en °F) cuando $h = 15\,000$ es

$$T = -\frac{9}{2500}(15\,000) + 60 = -54 + 60 = 6.$$

(c) Para hallar la altitud h que corresponda a $T = 0^\circ$, procedemos de este modo:

$$T = -\frac{9}{2500}h + 60 \quad \text{del inciso (a)}$$

$$0 = -\frac{9}{2500}h + 60 \quad \text{sea } T = 0$$

$$\frac{9}{2500}h = 60 \quad \text{sumar } \frac{9}{2500}h$$

$$h = 60 \cdot \frac{2500}{9} \quad \text{multiplicar por } \frac{2500}{9}$$

$$h = \frac{50\,000}{3} \approx 16\,667 \text{ pies} \quad \text{simplificar y aproximar}$$

Un **modelo matemático** es una descripción matemática de un problema. Para nuestros propósitos, estas descripciones serán gráficas y ecuaciones. En el último ejemplo, la ecuación $T = -\frac{9}{2500}h + 60$ es un **modelo** que muestra la relación entre la temperatura del aire y la altitud.

En el ejemplo que sigue encontramos un modelo de la forma $y = mx + b$, denominado **recta de regresión lineal**. Podemos considerar a ésta como la **del mejor ajuste**. Es decir, la recta única que mejor describe el comportamiento de los datos.

EJEMPLO 11 Determinación de la recta del mejor ajuste

(a) Encuentra la recta del mejor ajuste que se aproxime a los datos siguientes sobre tiempos récord de velocidad en la carrera de 100 metros planos para mujeres.

Año (x)	Corredora	Tiempo en segundos (y)
1952	Marjorie Jackson	11.4
1960	Wilma Rudolph	11.3
1972	Renate Stecher	11.07
1984	Evelyn Ashford	10.76

(b) Grafica los datos y la recta de regresión.

(c) Wyomia Tyus obtuvo el récord en 1968 con 11.08 segundos. ¿Qué tiempo predice el modelo para 1968? Esta pregunta demanda **interpolar**, ya que debemos estimar un valor entre valores conocidos. ¿Qué tiempo predice el modelo para 1988? Esta pregunta demanda **extrapolar**, porque debemos estimar un valor fuera de los valores conocidos.

(d) Interpreta la pendiente de la recta.

SOLUCIÓN

TI-83 Plus

Introduce los datos.

(a) Pon los años en L1 y los tiempos en L2. Pon los años en xStat y los tiempos en yStat. En esta ocasión, borra todas las asignaciones Y y todas las listas. Puedes borrar una lista poniendo el cursor en el nombre de la lista y oprimiendo **CLEAR** y **▽**.

STAT 1 1952 ENTER
1960 ENTER 1972 ENTER 1984 ENTER
△ (4 times) ▷ 11.4 ENTER
11.3 ENTER 11.07 ENTER 10.76 ENTER

L1	L2	L3	2
1952	11.4		
1960	11.3		
1972	11.07		
1984	10.76		

L2(F) =

STAT ▷ 4
VARS ▷ 1 1 ENTER

LinReg(ax+b) V1

LinReg
y=a+bx
a=-.0201190476
b=50.70666667

Encuentra la recta del mejor ajuste (ecuación de regresión) y almacénala en Y₁.

TI-86

2nd STAT EDIT(F2) 1952 ENTER
1960 ENTER 1972 ENTER 1984 ENTER
△ (4 times) ▷ 11.4 ENTER
11.3 ENTER 11.07 ENTER 10.76 ENTER

Llena la lista de frecuencia, fStat, con unos.

xStat	yStat	fStat	2
1952	11.4	1	
1960	11.3	1	
1972	11.07	1	
1984	10.76	1	

yStat(F) =

C 2 Name1 = fStat

EXIT 2nd STAT CALC(F1) LinR(F3)
2nd alpha Y 1 ENTER

LinR y1

LinReg
y=a+bx
a=-.0201190476
b=50.70666667
r=.99115547

STAT EDIT PLOT NAME YMS
Store Name List List Expr

Vemos en la pantalla que la recta del mejor ajuste tiene la ecuación (aproximada) $y = -0.02x + 50.71$. Para la TI-83 Plus, activa Diagnostic On del CATALOGO para desplegar los valores de r^2 y r .

(b)

Activa STAT PLOT 1.

2nd STAT PLOT 1 ENTER

Plot1 Plot2 Plot3
On Off
Type: ☒ ☐ ☐
Xlist: L1
Ylist: L2
Mark: ☒ ☐ ☐

2nd STAT PLOT(F3) PLOT1(F1) ENTER

On Off
Type: ☒ ☐ ☐
Xlist Name=xStat
Ylist Name=yStat
Mark: ☒ ☐ ☐
ENTER PLOT1 PLOT2 PLOT3 F1 F2 F3

(continúa)

Gráfica los datos
y la recta de regresión.

ZOOM 9



GRAPH ZOOM(F3) MORE
ZDATA(F5) CLEAR



(c)

Encuentra $Y_1(1968)$.

2nd QUIT CLEAR

VARS > 1 1 1968 1

ENTER

Encuentra $Y_1(1988)$.

2nd ENTRY < (3 times) 8 ENTER

2nd QUIT CLEAR

2nd alpha Y 1 1968 ENTER

2nd ENTRY < (3 times) 8 ENTER

$Y_1(1968)$
11.11238095
 $Y_1(1988)$
10.71

$Y_1(1968)$
11.1123809524
 $Y_1(1988)$
10.71

A partir del modelo obtenemos un estimador de 11.11 s, para 1968; el tiempo real era de 11.08 s. Para $x = 1988$ obtenemos $y = 10.71$ s. En 1988, Florence Griffith-Joiner hizo añicos el récord mundial con un tiempo de 10.49 s; ¡lástima de predicción!

(d) La pendiente de la recta de regresión es aproximadamente -0.02 , lo cual indica que el tiempo del récord mundial ha disminuido 0.02 s/año.

3.3 Ejercicios

Ejercicios 1 al 6: traza la recta que pasa por A y B, y encuentra su pendiente m .

1 $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$

2 $A(4, -1)$, $B(-6, -3)$

3 $A(2, 5)$, $B(-7, 5)$

4 $A(5, -1)$, $B(5, 6)$

5 $A(-3, 2)$, $B(-3, 5)$

6 $A(4, -2)$, $B(-3, -2)$

Ejercicios 7 al 10: utiliza pendientes para demostrar que los puntos son vértices del polígono especificado.

7 $A(-3, 1)$, $B(5, 3)$, $C(3, 0)$, $D(-5, -2)$; paralelogramo

8 $A(2, 3)$, $B(5, -1)$, $C(0, -6)$, $D(-6, 2)$; trapecio

9 $A(6, 15)$, $B(11, 12)$, $C(-1, -8)$, $D(-6, -5)$; rectángulo

10 $A(1, 4)$, $B(6, -4)$, $C(-15, -6)$; triángulo rectángulo

11 Si tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(-1, -3)$, $B(4, 2)$ y $C(-7, 5)$, encuentra el cuarto vértice.

12 Las expresiones $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ y $D(x_4, y_4)$ denotan los vértices de un cuadrilátero arbitrario. Demuestra que los segmentos de recta que enlazan los puntos medios de lados adyacentes forman un paralelogramo.

Ejercicios 13 y 14: traza la gráfica de $y = mx$ para los valores dados de m .

13. $m = 3, -2, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}$

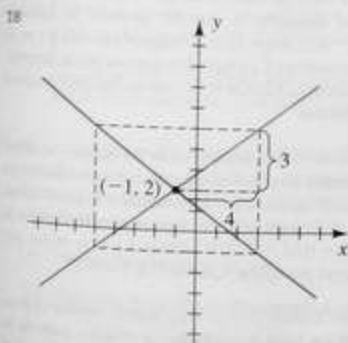
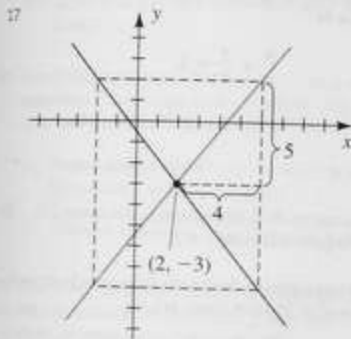
14. $m = 5, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

Ejercicios 15 y 16: dibuja la gráfica de la recta que pasa por el punto P para cada valor de m .

15. $P(3, 1); m = \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{5}$

16. $P(-2, 4); m = 1, -2, -\frac{1}{2}$

Ejercicios 17 y 18: escribe las ecuaciones de las rectas.



Ejercicios 19 y 20: traza las gráficas de las rectas en el mismo plano coordenado.

19. $y = x + 3, y = x + 1, y = -x + 1$

20. $y = -2x - 1, y = -2x + 3, y = \frac{1}{2}x + 3$

Ejercicios 21 al 32: encuentra una forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto A y satisface la condición dada.

21. $A(5, -2)$

(a) paralela al eje y

(b) perpendicular al eje y

22. $A(-4, 2)$

(a) paralela al eje x

(b) perpendicular al eje x

23. $A(5, -3);$ pendiente -4 24. $A(-1, 4);$ pendiente $\frac{2}{3}$

25. $A(4, 0);$ pendiente -3 26. $A(0, -2);$ pendiente 5

27. $A(4, -5);$ que pase por $B(-3, 6)$

28. $A(-1, 6);$ intersección en x igual a 5

29. $A(2, -4);$ paralela a la recta $5x - 2y = 4$

30. $A(-3, 5);$ paralela a la recta $x + 3y = 1$

31. $A(7, -3);$ perpendicular a la recta $2x - 5y = 8$

32. $A(4, 5);$ perpendicular a la recta $3x + 2y = 7$

Ejercicios 33 al 36: halla la forma pendiente-intersección de la recta que satisface las condiciones dadas.

33. Intersección en x igual a 4 , intersección en y (o ordenada al origen) igual a -3

34. Intersección en x igual a -5 , intersección en y igual a -1

35. Pasa por $A(5, 2)$ y $B(-1, 4)$

36. Pasa por $A(-2, 1)$ y $B(3, 7)$

Ejercicios 37 y 38: encuentra una forma general de una ecuación para la mediatriz del segmento AB .

37. $A(3, -1), B(-2, 6)$

38. $A(4, 2), B(-2, 10)$

Ejercicios 39 y 40: escribe una ecuación para la recta que corta los cuadrantes dados.

39. II y IV

40. I y III

Ejercicios 41 al 44: utiliza la forma pendiente-intersección para hallar la pendiente e intersección en y de la recta dada y traza su gráfica.

41 $2x = 15 - 3y$

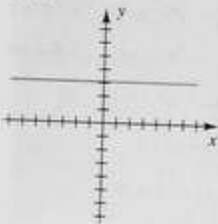
42 $7x = -4y - 8$

43 $4x - 3y = 9$

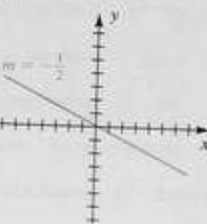
44 $x - 5y = -15$

Ejercicios 45 y 46: encuentra una ecuación de la recta mostrada en la figura.

45 (a)



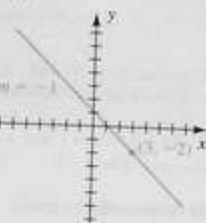
45 (b)



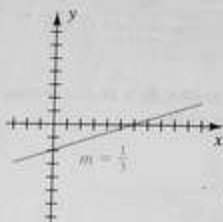
46 (a)



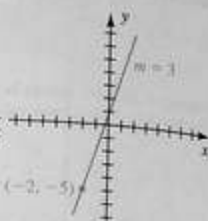
46 (b)



(c)



(d)



Ejercicios 47 y 48: si una recta l tiene intersecciones en x y y diferentes de cero e iguales a a y b , respectivamente, la forma simétrica es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Encuentra la forma simétrica para la recta dada.

47 $4x - 2y = 6$

48 $x - 3y = -2$

49 Halla una ecuación de la circunferencia con centro $C(3, -2)$ y que sea tangente a la recta $y = 5$.

50 Encuentra una ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $P(3, 4)$.

51 Crecimiento fetal El crecimiento de un feto de más de 12 semanas de gestación se calcula mediante la fórmula $L = 1.53t - 6.7$, donde L es la longitud (en cm) y t es el tiempo (en semanas). La longitud prenatal se puede determinar por ultrasonido. Calcula la edad de un feto cuya longitud es 28 centímetros.

52 Cálculo de salinidad La salinidad de los océanos se refiere a la cantidad de material disuelto que se encuentra en una muestra de agua marina. La salinidad S se puede calcular a partir de la cantidad C de cloro en agua de mar con la ecuación $S = 0.03 + 1.805C$, donde S y C se miden por peso en partes por millar. Calcula C si S es 0.35.

53 Peso de una ballena jorobada Es posible calcular el peso esperado W (en tons) de una ballena jorobada a partir de su longitud L (en pies), mediante la fórmula $W = 1.70L - 42.8$ para $30 \leq L \leq 50$.

(a) Calcula el peso de un ejemplar de 40 pies de largo.

(b) Si el error al calcular la longitud puede ser de hasta 2 pies, ¿cuál es el error correspondiente para el cálculo del peso?

54. **Crecimiento de una ballena azul.** Las ballenas azules recién nacidas miden alrededor de 24 pies de largo y pesan 3 tons. Los cetáceos jóvenes son amamantados durante 7 meses y, al momento del destete, muchos miden 53 pies de largo y pesan 23 tons. Denotemos con L y W la longitud en pies y el peso en tons, respectivamente, de una ballena de t meses de edad.
- Si L y t están relacionadas linealmente, expresa L en términos de t .
 - ¿Cuál es el aumento diario en la longitud de una ballena joven? (Usa 1 mes = 30 días.)
 - Si W y t están relacionadas linealmente, expresa W en términos de t .
 - ¿Cuál es el aumento diario en el peso de una ballena joven?
55. **Estadísticas en beisbol.** Un jugador de las grandes ligas ha conectado 5 *home-runs* en los primeros 14 juegos, y mantiene este paso toda la temporada de 162 encuentros.
- Proporciona el número y de *home-runs* en términos de la cantidad x de juegos jugados.
 - ¿Cuántos *home-runs* conectará en la temporada?
56. **Producción de queso.** Un fabricante produce 18 000 libras del 1 de enero al 24 de marzo. Supón que mantiene este ritmo de producción el resto del año.
- Expresa la cantidad y de libras de queso producidas en términos del número x del día en un año de 365 días.
 - Haz un pronóstico, a la libra más cercana, de la cantidad de libras producidas para el año.
57. **Peso en la infancia.** Un bebé pesa 10 libras (lb) al nacer y tres años después alcanza 30 lb. Supón que el peso W (en lb) en la infancia está relacionado linealmente con la edad t (en años).
- Expresa W en términos de t .
 - ¿Cuál será W cuando el niño cumpla 6 años?
 - ¿A qué edad pesará 70 lb?
 - En un plano tW traza una gráfica que muestre la relación entre W y t para $0 \leq t \leq 12$.
58. **Pago de un préstamo.** Un universitario recibe, por parte de un familiar, un préstamo de \$8250 sin intereses. El estudiante pagará \$125 al mes hasta saldar la deuda.
- Indica la cantidad P (en dólares) restantes a pagar en términos de t (en meses).
 - ¿Después de cuántos meses deberá \$5000?
 - En un plano tP traza una gráfica que muestre la relación entre P y t en toda la duración del préstamo.
59. **Vaporización del agua.** La cantidad de calor H (en joules) requerida para convertir un gramo de agua en vapor está linealmente relacionada con la temperatura T (en $^{\circ}\text{C}$) de la atmósfera. A 10°C esta conversión requiere 2480 joules, y cada aumento de 15°C baja 40 joules la cantidad de calor necesaria. Expresa H en términos de T .
60. **Capacidad aeróbica.** En la fisiología del ejercicio, la capacidad aeróbica P se define en términos de la máxima aspiración de oxígeno. En altitudes de hasta 1800 m, la capacidad es óptima (esto es, 100%). A alturas mayores de 1800 m, P disminuye linealmente desde el máximo de 100% hasta un valor cercano al 40% a 5000 metros.
- Indica la capacidad aeróbica P en función de la altitud h en metros, para $1800 \leq h \leq 5000$.
 - Estima la capacidad aeróbica en la ciudad de México (altitud: 2400 m), sede de los juegos olímpicos de verano en 1968.
61. **Isla de calor urbano.** El fenómeno de la isla de calor urbano se ha observado en Tokio. El promedio de temperatura era de 13.5°C en 1915, y desde entonces ha subido 0.032°C por año.
- Considera que la temperatura T (en $^{\circ}\text{C}$) está linealmente relacionada con el tiempo t (en años) y que $t = 0$ corresponde a 1915; expresa T en términos de t .
 - Haz un pronóstico del promedio de temperatura para el año 2000.
62. **Temperatura creciente del suelo.** En 1870, la temperatura promedio del suelo en París era de 11.8°C . Desde entonces, ha subido a un ritmo casi constante, hasta llegar a los 13.5°C en 1969.
- Expresa la temperatura T (en $^{\circ}\text{C}$) en términos del tiempo t (en años), donde $t = 0$ corresponde al año 1870 y $0 \leq t \leq 99$.
 - ¿Durante qué año la temperatura promedio del suelo fue de 12.5°C ?
63. **Gastos de un negocio.** El dueño de una franquicia de helados debe pagar a la casa matriz \$1000 por mes, más 5% de los ingresos mensuales; esto es: R . Los costos de operación de la franquicia incluyen un costo fijo de \$2600 por mes.

por servicios y mano de obra. Además, el costo de los helados y materias primas comprende el 50% de los ingresos.

- Determina los gastos mensuales E del dueño en términos de R .
- Expresa la utilidad mensual P en términos de R .
- Indica el ingreso mensual necesario para que no haya pérdida ni ganancia.

64. **Dosis de medicamento** Los productos farmacéuticos deben especificar las dosis recomendadas para adultos y niños. Dos fórmulas que permiten modificar la dosificación en adultos y niños son

$$\text{regla de Cowling: } y = \frac{1}{24}(t + 1)a$$

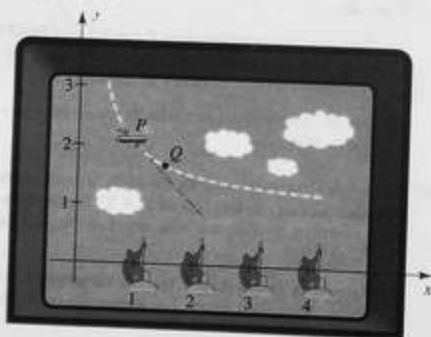
$$\text{regla de Friend: } y = \frac{1}{25}at$$

donde a denota la dosis para adultos (en mg) y t , la edad de los niños (en años).

- Si $a = 100$, grafica las dos ecuaciones lineales en el mismo plano coordenado para $0 \leq t \leq 12$.
- ¿Para qué edad las dos fórmulas especifican la misma dosis?

65. **Juegos de vídeo** En un juego de vídeo como el que aparece en la figura, un avión vuela de izquierda a derecha a lo largo de una trayectoria dada por $y = 1 + (1/x)$ y dispara en dirección tangente a unos objetivos puestos a lo largo del eje x en $x = 1, 2, 3, 4$.

Ejercicio 65



Mediante cálculo, se sabe que la pendiente de la línea tangente a la trayectoria en $P(1, 2)$ es $m = -1$ y en $Q(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ es $m = -\frac{4}{3}$. Ahora bien, establece si el avión hará blanco disparando desde

- P
- Q

66. **Escala de temperatura** La relación entre las lecturas de temperatura F y C en las escalas Fahrenheit y Celsius está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

- Encuentra la temperatura a la que la lectura es la misma en ambas escalas.
- ¿En qué momento la lectura en Fahrenheit es el doble de la lectura en Celsius?

67. **Viento transversal vertical** El viento transversal vertical se presenta cuando la velocidad del viento varía a diferentes alturas sobre el suelo. El viento transversal es de gran importancia para los pilotos durante despegues y aterrizajes. Si la velocidad del viento es v_1 a una altura h_1 y v_2 a una altura h_2 , el promedio de viento transversal s está dado por la fórmula de la pendiente

$$s = \frac{v_2 - v_1}{h_2 - h_1}$$

Si la velocidad del viento a nivel del suelo es de 22 mph y se ha determinado que s es de 0.07, encuentra la velocidad del viento a 185 pies sobre el suelo.

68. **Viento transversal vertical** En el estudio del viento transversal vertical, a veces se usa la fórmula

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p$$

donde P es una variable que depende del terreno y estructuras cercanas al nivel del suelo. En Montreal, se determinó que el promedio de los valores diarios para P con vientos del norte de más de 29 mph era de 0.13. Si se mide un viento de 32 mph a 20 pies sobre el suelo, calcula el promedio de viento transversal (consulta el ejercicio 67) entre 20 y 200 pies.

Ejercicios 69 y 70: los puntos dados se encontraron mediante métodos empíricos. Indica si se encuentran en la misma línea $y = ax + b$; si es así, encuentra los valores de a y b .

69. $A(-1.3, -1.3598)$, $B(-0.55, -1.11905)$,
 $C(1.2, -0.5573)$, $D(3.25, 0.10075)$

70. $A(-0.22, 1.6968)$, $B(-0.12, 1.6528)$,
 $C(1.3, 1.028)$, $D(1.45, 0.862)$

Ejercicios 71 y 72: grafica las rectas en el mismo plano coordenado y halla las coordenadas de los puntos de intersección (las coordenadas son enteros).

71. $x - 3y = -58$; $3x - y = -70$

72. $x + 10y = 123$; $2x - y = -6$

Ejercicios 73 y 74: grafica las rectas en el mismo plano coordenado y calcula las coordenadas de los puntos de intersección. Identifica el polígono determinado por las rectas.

73 $2x - y = -1$; $x + 2y = -2$; $3x + y = 11$

74 $10x - 42y = -7.14$; $8.4x + 2y = -3.8$;
 $0.5x - 2.1y = 2.73$; $16.8x + 4y = 14$

Ejercicios 75 y 76: para la tabla de datos, encuentra una recta de la forma $y = ax + b$ que sea un modelo aproximado de los datos. Grafica la recta y los datos en los mismos ejes coordenados. *Nota:* en los ejercicios que requieran un modelo aproximado, las respuestas pueden variar dependiendo de los puntos de datos seleccionados.

75

x	y
-7	-25
-5.8	-21
-5	-18.5
-4	-15.4
0.6	-0.58
1.8	3.26
3	7.1
4.6	12.2

76

x	y
0.4	2.88
1.2	2.45
2.2	1.88
3.6	1.12
4.4	0.68
6.2	-0.30

77 Costos de TV en el Supertazón. La tabla adjunta indica el costo (en miles de dólares) por un anuncio de 30 segundos en televisión durante el Supertazón durante varios años.

Año	Costo
1982	325
1983	400
1985	510
1986	550
1987	600

- Localiza los datos en el plano xy .
- Determina una recta en la forma $y = ax + b$, donde x es el año y y es el costo que sirve de modelo para los datos. Traza recta y datos en los mismos ejes coordenados. Las respuestas pueden variar.
- Utiliza esta recta para pronosticar el costo de un comercial de 30 segundos en 1984 y 1995. Compara tus respuestas con los valores reales de \$450 000 y \$1 000 000, respectivamente.

78 Tiempos récord en la milla. Los tiempos de marca mundial (en s) para la carrera de una milla se detallan en la tabla siguiente.

Año	Tiempo
1954	238.0
1957	237.2
1958	234.5
1962	234.4
1964	234.1
1965	233.6
1966	231.3
1967	231.1
1975	229.4
1979	229.1
1980	228.8
1981	227.3

- Grafica los datos.
- Encuentra una recta de la forma $T = aY + b$ que aproxime estos datos, donde T es el tiempo y Y es el año. Grafica la recta y los datos en los mismos ejes coordenados.
- Utiliza la recta para pronosticar el tiempo récord en 1985, y compáralo con la marca real de 226.3 segundos.
- Interpreta la pendiente de esta recta.

3.4

Definición de función

La noción de **correspondencia** se presenta a menudo en la vida diaria. En la ilustración que sigue damos algunos ejemplos.

ILUSTRACIÓN Correspondencia

- A cada libro de una biblioteca le corresponde la cantidad de páginas de ese libro.
- A cada ser humano le corresponde una fecha de nacimiento.
- Si la temperatura del aire se registra durante todo un día, a cada instante le corresponde una temperatura.

En cada correspondencia de la ilustración anterior intervienen dos conjuntos, D y E . En la primera ilustración, D denota el conjunto de libros de una biblioteca y E es el conjunto de enteros positivos. A cada libro x en D corresponde un entero positivo y en E ; es decir, la cantidad de páginas del libro.

A veces describimos las correspondencias mediante diagramas del tipo que se presenta en la figura 1, donde los conjuntos D y E están representados por puntos dentro de regiones del plano. La flecha curva indica que el elemento y de E corresponde al elemento x de D . Los dos conjuntos pueden tener elementos en común. De hecho, muchas veces ocurre que $D = E$. Es importante observar que *para cada x en D , corresponde exactamente una y en E* . Ahora bien, el mismo elemento de E puede corresponder a diversos elementos de D ; por ejemplo, dos libros con la misma cantidad de páginas, dos personas con la misma fecha de nacimiento y la temperatura puede ser la misma a diferentes horas.

En la mayor parte de nuestro trabajo, D y E serán conjuntos de números. Para ilustrar lo anterior, D y E denotarán el conjunto \mathbb{R} de números reales, y a todo número real x le asignaremos su cuadrado x^2 . Esto nos dará una correspondencia de \mathbb{R} a \mathbb{R} .

Cada uno de nuestros ejemplos de una correspondencia es una **función**, la cual se define a continuación.

Definición de función

Una **función** f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna exactamente un elemento y de E a cada elemento x de D .

Para muchos casos, simplemente podemos recordar que el dominio es el conjunto de valores x y que la imagen es el conjunto de valores y .

El elemento x de D es el **argumento** de f . El conjunto D es el **dominio** de la función. El elemento y de E es el **valor** de f en x (o la **imagen** de x bajo f) y se denota con $f(x)$, que se lee "f de x". La **imagen** de f es el subconjunto R de E formado por todos los valores posibles $f(x)$ para x en D . Observarás que algunos elementos del conjunto E quizá no estén en la imagen R de f .

Figura 1

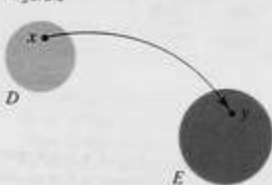
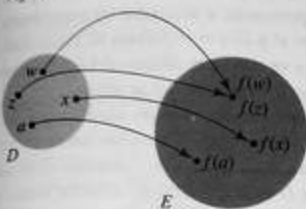


Figura 2



Considera el diagrama de la figura 2. Las flechas curvas indican que los elementos $f(w)$, $f(z)$, $f(x)$ y $f(a)$ de E corresponden a los elementos w , z , x , y a de D . A cada elemento de D hay asignado exactamente un valor de la función en E ; sin embargo, un elemento distinto de D , como w y z en la figura 2, puede tener el mismo valor en E .

Los símbolos

$$D \xrightarrow{f} E, \quad f: D \rightarrow E, \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} f \\ \curvearrowright \\ D \quad E \end{array}$$

significan que f es una función de D a E , y decimos que f transforma a D en E . En un principio las notaciones f y $f(x)$ pueden ser confusas. Recuerda que f representa la función; no está en D ni en E . Por su lado, $f(x)$ es un elemento de la imagen R : el elemento que la función f asigna al elemento x , que está en el dominio D .

Dos funciones f y g de D a E son iguales y escribimos

$$f = g \text{ siempre que } f(x) = g(x) \text{ para toda } x \text{ en } D.$$

Por ejemplo, si $g(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 6) + 3$ y $f(x) = x^2$ para toda x en \mathbb{R} , entonces $g = f$.

EJEMPLO 1 Determinación de los valores de función

Sea f la función con dominio \mathbb{R} tal que $f(x) = x^2$ para toda x en \mathbb{R} .

(a) Encuentra $f(-6)$, $f(\sqrt{3})$, $f(a+b)$ y $f(a) + f(b)$, donde a y b son números reales.

(b) ¿Cuál es la imagen de f ?

SOLUCIÓN

(a) Encontramos valores de f al sustituir x en la ecuación $f(x) = x^2$:

$$f(-6) = (-6)^2 = 36$$

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$f(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$f(a) + f(b) = a^2 + b^2$$

(b) Por definición, la imagen de f está formada por todos los números de la forma $f(x) = x^2$ para x en \mathbb{R} . En vista de que el cuadrado de todo número real es no negativo, el intervalo está contenido en el conjunto de todos los números reales no negativos. Además, todo número real no negativo c es un valor de f porque $f(\sqrt{c}) = (\sqrt{c})^2 = c$. Por tanto, la imagen de f es el conjunto de todos los números reales no negativos.

Observa que, en general,

$$f(a+b) \neq f(a) + f(b).$$

Si se define una función como en el ejemplo 1, los símbolos usados para la función y la variable no tienen importancia; o sea, todas las expresiones del tipo de $f(x) = x^2$, $f(s) = s^2$, $g(t) = t^2$ y $k(r) = r^2$ definen la misma función. Lo anterior es cierto porque si a es cualquier número del dominio, se obtiene el mismo valor a^2 sea cual sea la expresión que se utilice.

En el resto de nuestra obra, la frase *f es una función*, significa que dominio e imagen son conjuntos de números reales. Si una función se define por medio de una expresión, como en el ejemplo 1, y el dominio D no se expresa, entonces consideramos que D es la totalidad de números reales x tales que $f(x)$ es real. A veces esto recibe el nombre de **dominio implícito** de f . Para ilustrar lo anterior, si $f(x) = \sqrt{x-2}$, el dominio implícito es el conjunto de números reales x tal que $\sqrt{x-2}$ es real; esto es, $x-2 \geq 0$, o $x \geq 2$; por tanto, el dominio es el intervalo infinito $[2, \infty)$. Si x está en el dominio, decimos que *f está definida en x* o que *f(x) existe*. Si un conjunto S está contenido en el dominio, *f está definida en S*. La expresión *f no está definida en x* quiere decir que x no está en el dominio de f .

EJEMPLO 2 Determinación de valores de función

$$\text{Sea } g(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{1-x}.$$

- (a) Encuentra el dominio de g .
 (b) Halla $g(5)$, $g(-2)$, $g(-a)$ y $-g(a)$.

SOLUCIÓN

(a) La expresión $\sqrt{4+x}/(1-x)$ es un número real si y sólo si el radicando $4+x$ es no negativo y el denominador $1-x$ no es igual a 0; por tanto, $g(x)$ existe si y sólo si

$$4+x \geq 0 \quad \text{y} \quad 1-x \neq 0$$

o bien, lo que es igual,

$$x \geq -4 \quad \text{y} \quad x \neq 1.$$

Podemos expresar el dominio en términos de intervalos como $[-4, 1) \cup (1, \infty)$.

(b) Para hallar valores de g , sustituimos con x :

$$g(5) = \frac{\sqrt{4+5}}{1-5} = \frac{\sqrt{9}}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$g(-2) = \frac{\sqrt{4+(-2)}}{1-(-2)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$g(-a) = \frac{\sqrt{4+(-a)}}{1-(-a)} = \frac{\sqrt{4-a}}{1+a}$$

$$-g(a) = -\frac{\sqrt{4+a}}{1-a} = \frac{\sqrt{4+a}}{a-1}$$

Figura 3



Las funciones son algo común en la vida diaria y se presentan en varias formas. Por ejemplo, el menú de un restaurante (figura 3) puede considerarse como una función f de un conjunto de alimentos a un conjunto de precios. Observará que f está dada en forma de tabla. Aquí, $f(\text{Hamburguesa}) = 1.69$, $f(\text{Papas a la francesa}) = 0.99$ y $f(\text{Bebida}) = 0.79$.

Un ejemplo de función dada por una regla puede encontrarse en las tablas de impuestos federales (figura 4). Específicamente, en 2003, para una persona soltera con un ingreso gravable de \$120 000, el impuesto estaba dado por la regla

$$\$14\,010 \text{ más } 28\% \text{ de la cantidad que rebasa } \$68\,800.$$

Figura 4

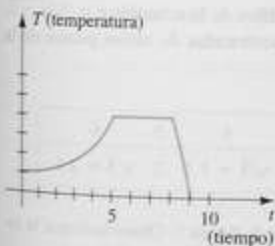
Tarifas de impuestos para 2003

Tarifa X —Úselo si su estado civil es soltero			
Si la cantidad en la forma 1040, renglón 40, es:	Pero no más de	Escriba en el renglón 41 Forma 1040,	de la cantidad que rebasa más de
Más de			
\$0	\$7000	-----	10%
7000	28 400	\$700.00 + 15%	7000
28 400	68 800	\$3 910.00 + 25%	28 400
68 800	143 500	\$14 010.00 + 28%	68 800
143 500	311 950	\$4 926.00 + 33%	143 500
311 950	-----	\$9 514.50 + 35%	311 950

En este caso, el impuesto debe ser

$$\$14\,010 + 0.28(\$120\,000 - \$68\,800) = \$28\,346.$$

Figura 5



A menudo las gráficas sirven para describir la variación de las cantidades físicas; por ejemplo, un científico puede usar la gráfica de la figura 5 con objeto de indicar la temperatura T de cierta solución en diferentes tiempos t durante un experimento. El trazo muestra que la temperatura aumentó en forma gradual del tiempo $t = 0$ al tiempo $t = 5$, no cambió entre $t = 5$ y $t = 8$, y luego disminuyó con rapidez de $t = 8$ a $t = 9$.

Análogamente, si f es una función, podemos emplear una gráfica para indicar el cambio de $f(x)$ a medida que x varía en todo el dominio de f . En términos específicos, tenemos esta definición.

Definición de gráfica de una función

La **gráfica de una función** f es la gráfica de una ecuación $y = f(x)$ para x en el dominio de f .

Con frecuencia, colocamos la leyenda $y = f(x)$ en el dibujo de la gráfica. Si $P(a, b)$ es un punto de la gráfica, la coordenada y igual a b es el valor de la función $f(a)$, como se ilustra en la figura 6 siguiente. La figura muestra el dominio de f (conjunto de valores posibles de x) y la imagen de f (valores correspondientes de y). Aun cuando hemos trazado el dominio y la imagen como intervalos cerrados, pueden ser intervalos infinitos u otros conjuntos de números reales.

Puesto que como hay exactamente un valor $f(a)$ para cada a del dominio de f , sólo un punto de la gráfica de f tiene una coordenada x igual a a . En general, la siguiente prueba gráfica ayuda a establecer si una gráfica es una función.

Prueba de recta vertical

La gráfica de un conjunto de puntos de un plano coordenado es la gráfica de una función si toda recta vertical corta la gráfica en un punto cuando mucho.

Figura 6

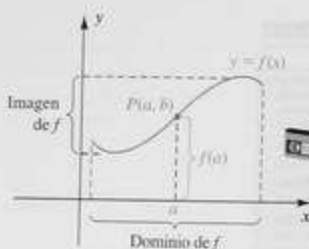
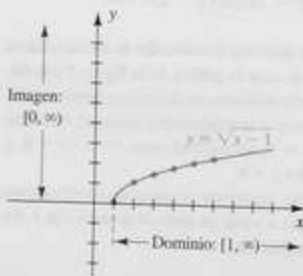


Figura 7



Por tanto, toda recta vertical corta la gráfica de una función en un punto cuando mucho; en consecuencia, la gráfica de una función no puede ser una figura circular, pues una recta vertical podría cortarla en más de un punto.

Las intersecciones x de la gráfica de una función f son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Estos números se llaman **ceros** de la función. La intersección y de la gráfica es $f(0)$, si existe.

EJEMPLO 3 Trazado de la gráfica de una función

Sea $f(x) = \sqrt{x-1}$.

- Traza la gráfica de f .
- Encuentra el dominio y la imagen de f .

SOLUCIÓN

(a) Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{x-1}$. En la tabla siguiente se enumeran las coordenadas de varios puntos de la gráfica.

x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	$\sqrt{5} \approx 2.2$

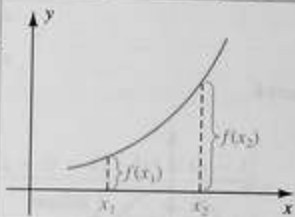
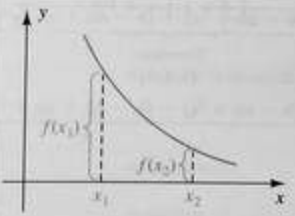
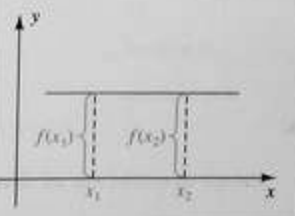
Al trazar los puntos se obtiene el dibujo de la figura 7. Observarás que la intersección en x es 1 y no hay intersección en y .

(b) Al consultar la figura 7, vemos que el dominio de f está formado por todos los números reales x tales que $x \geq 1$ o, lo que es equivalente, el intervalo $[1, \infty)$. La imagen de f es el conjunto de todos los números reales y tales que $y \geq 0$ o, lo que es equivalente, $[0, \infty)$.

La **función raíz cuadrada**, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, tiene una gráfica similar a la de la figura 7, pero el punto extremo está en $(0, 0)$. El valor y de un punto de esta gráfica es la cifra que se visualiza en una calculadora cuando se pide raíz cuadrada. Esta relación gráfica puede ayudarnos a recordar que $\sqrt{9}$ es 3 y que $\sqrt{9}$ no es ± 3 . Del mismo modo, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ y $f(x) = \sqrt[3]{x}$ suelen llamarse **función cuadrática**, **función cúbica** y **función raíz cúbica**, respectivamente.

En el ejemplo 3, a medida que x aumenta, lo mismo ocurre con el valor de la función $f(x)$ y decimos que la gráfica de f se *eleva* (figura 7). Consideramos que una función de este tipo es *creciente*. Para ciertas funciones, $f(x)$ disminuye a medida que x aumenta. En este caso la gráfica *desciende* y f es una función *decreciente*. En general, manejaremos funciones que crecen o decrecen en un intervalo I , según se describe en la tabla siguiente, donde x_1 y x_2 denotan números en I .

Funciones crecientes, decrecientes y constantes

Terminología	Definición	Interpretación de gráfica
f es creciente en un intervalo I	$f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$	
f es decreciente en un intervalo I	$f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$	
f es constante en un intervalo I	$f(x_1) = f(x_2)$ para toda x_1 y x_2	

Un ejemplo de *función creciente* es la **función identidad**, cuya ecuación es $f(x) = x$ y cuya gráfica es la recta que pasa por el origen con pendiente 1. Un ejemplo de *función decreciente* es $f(x) = -x$, ecuación de la recta que pasa por el origen con pendiente -1 . Si $f(x) = c$ para todo número real x , entonces f se llama *función constante*.

Utilizaremos en forma indistinta las frases *f* es creciente y *f(x)* es creciente, al igual que los términos *decreciente* y *constante*.



EJEMPLO 4 Uso de una gráfica para hallar el dominio, la imagen y dónde crece o decrece una función

Sea $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

- Traza la gráfica de f .
- Encuentra el dominio y la imagen de f .
- Halla los intervalos en que f crece o decrece.

SOLUCIÓN

(a) Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{9 - x^2}$. Por nuestro trabajo con circunferencias en la sección 3.2 sabemos que la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$ es una circunferencia de radio 3 con centro en el origen. Al despejar y de la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ obtenemos $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Deducimos que la gráfica de f es la mitad superior de la circunferencia (figura 8).

(b) Al consultar la figura 8, vemos que el dominio de f es el intervalo cerrado $[-3, 3]$ y la imagen de f es el intervalo $[0, 3]$.

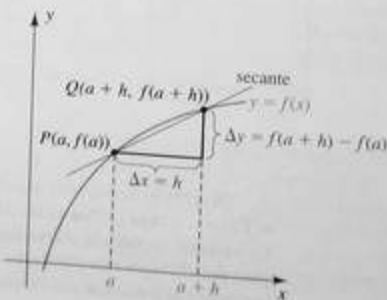
(c) La gráfica se eleva a medida que x aumenta de -3 a 0 , así que f crece en el intervalo cerrado $[-3, 0]$; por tanto, según se aprecia en la tabla anterior, si $x_1 < x_2$ en $[-3, 0]$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$ (advierte que quizá $x_1 = -3$ o bien $x_2 = 0$).

La gráfica desciende conforme x aumenta de 0 a 3 , de manera que f decrece en el intervalo cerrado $[0, 3]$. En este caso, la tabla indica que si $x_1 < x_2$ en $[0, 3]$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$ (notarás que posiblemente $x_1 = 0$ o bien $x_2 = 3$).

En cálculo, un problema que reviste especial interés es del tipo siguiente.

Problema: Encontrar la pendiente de la secante que pasa por los puntos P y Q que se muestran en la figura 9.

Figura 9



La pendiente de m_{PQ} está dada por

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

La última expresión (con $h \neq 0$) suele denominarse **cociente de diferencias**. Veamos algo del álgebra necesaria para simplificar un cociente de diferencias. (En el ejercicio de análisis 5 al final del capítulo se presenta un problema semejante.)

EJEMPLO 5 Simplificación de un cociente de diferencias

Simplifica el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

usando la función $f(x) = x^2 + 6x - 4$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{[(x+h)^2 + 6(x+h) - 4] - [x^2 + 6x - 4]}{h} && \text{definición de } f \\ &= \frac{(x^2 + 2xh + h^2 + 6x + 6h - 4) - (x^2 + 6x - 4)}{h} && \text{desarrollar el numerador} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 6x + 6h - 4 - x^2 - 6x + 4}{h} && \text{restar términos} \\ &= \frac{2xh + h^2 + 6h}{h} && \text{simplificar} \\ &= \frac{h(2x + h + 6)}{h} && \text{factorizar } h \\ &= 2x + h + 6 && \text{cancelar } h \neq 0 \end{aligned}$$

El tipo de función que viene es uno de los más básicos en álgebra.

Definición de función lineal

Una función f es una **función lineal** si

$$f(x) = ax + b,$$

donde x es cualquier número real y a y b son constantes.

La gráfica de f de la definición anterior es la gráfica de $y = ax + b$, que, por la forma pendiente-intersección, es una recta con pendiente a y ordenada

al origen igual a b ; por tanto, la gráfica de una función lineal es una recta. Dado que $f(x)$ existe para toda x , el dominio de f es \mathbb{R} . Como se ilustra en el siguiente ejemplo si $a \neq 0$, la imagen de f también es \mathbb{R} .

EJEMPLO 6 Trazado de la gráfica de una función lineal

Sea $f(x) = 2x + 3$.

- Traza la gráfica de f .
- Encuentra el dominio y la imagen de f .
- Determina dónde f es creciente y dónde decreciente.

SOLUCIÓN

(a) Puesto que $f(x)$ tiene la forma $ax + b$, con $a = 2$ y $b = 3$, f es una función lineal. La gráfica de $y = 2x + 3$ es una recta con pendiente 2 y ordenada al origen igual a 3 (figura 10).

(b) Con base en la gráfica vemos que x y y pueden ser cualesquiera números reales, así que tanto el dominio como la imagen de f son \mathbb{R} .

(c) En vista de que la pendiente a es positiva, la gráfica de f sube a medida que x aumenta; esto es, $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$; por tanto, f crece en todo su dominio.

En aplicaciones, a veces es necesario determinar una función lineal específica de los datos dados, como sucede en este ejemplo.

EJEMPLO 7 Determinación de una función lineal

Si f es una función lineal tal que $f(-2) = 5$ y $f(6) = 3$, encuentra $f(x)$, donde x es cualquier número real.

SOLUCIÓN Por la definición de función lineal, $f(x) = ax + b$, donde a y b son constantes. Además, los valores de la función dada indican que los puntos $(-2, 5)$ y $(6, 3)$ están en la gráfica de f ; esto es, en la recta $y = ax + b$ de la figura 11. La pendiente a de esta recta es

$$a = \frac{5 - 3}{-2 - 6} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4},$$

y, por tanto, $f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = -\frac{1}{4}x + b.$$

A fin de hallar el valor de b , aprovechamos que $f(6) = 3$, de esta manera:

$$f(6) = -\frac{1}{4}(6) + b \quad \text{sea } x = 6 \text{ en } f(x) = -\frac{1}{4}x + b$$

$$3 = -\frac{3}{2} + b \quad f(6) = 3$$

$$b = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{despejar } b$$

Figura 10

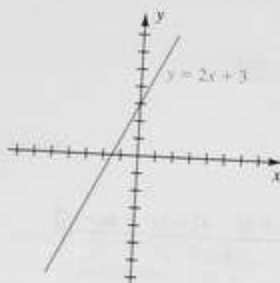
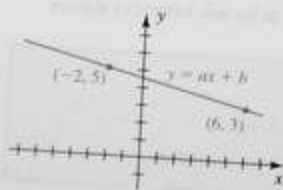


Figura 11



En consecuencia, la función lineal que satisface $f(-2) = 5$ y $f(6) = 3$ es

$$f(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}.$$

Muchas fórmulas que se presentan en matemáticas y ciencias determinan funciones; por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$ para encontrar el área A de una circunferencia de radio r asigna exactamente un valor de A a cada número real positivo r . Esto define una función f tal que $f(r) = \pi r^2$, y podemos escribir $A = f(r)$. La letra r , que denota un número arbitrario del dominio de f , se llama **variable independiente**. La letra A , que representa un número de la imagen de f , es una **variable dependiente**, puesto que su valor depende del número asignado a r . Si dos variables r y A están relacionadas de este modo, A es una **función de r** . En aplicaciones, las variables independiente y dependiente a veces se llaman **variable de entrada** y **variable de salida**, respectivamente. Como otro ejemplo, si un automóvil se desplaza a una velocidad uniforme de 50 mph, la distancia d (en mi) recorrida en el tiempo t (en h) está dada por $d = 50t$ y, por tanto, la distancia d es una función del tiempo t .

EJEMPLO 8 Expresión del volumen de un tanque como función de su radio

Hay que fabricar un tanque de acero para gas en forma de cilindro circular recto de 10 pies de altura, con una semiesfera unida a cada extremo. Aún no se establece el radio r . Expresa el volumen V (en pies³) del tanque como función de r (en pies).

Figura 12



SOLUCIÓN El tanque aparece en la figura 12. Hallamos el volumen de la parte cilíndrica del tanque multiplicando la altura de 10 por el área πr^2 de la base del cilindro. Esto nos dará

$$\text{volumen del cilindro} = 10(\pi r^2) = 10\pi r^2.$$

Los dos extremos semiesféricos, considerados juntos, forman una esfera de radio r . Con la fórmula para encontrar el volumen de una esfera, obtenemos

$$\text{volumen de los dos extremos} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Por tanto, el volumen V del tanque es

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + 10\pi r^2.$$

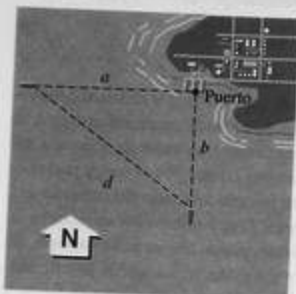
Esta fórmula expresa V como función de r . En forma factorizada,

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2(4r + 30) = \frac{2}{3}\pi r^2(2r + 15).$$

EJEMPLO 9 Expresión de una distancia como función del tiempo

Dos barcos salen de puerto al mismo tiempo, uno hacia el oeste a razón de 17 mph y el otro al sur a 12 mph. Si t es el tiempo (en h) después de su salida, expresa la distancia d entre los barcos como función de t .

Figura 13



SOLUCIÓN. Para ayudar a visualizar el problema, comencemos por elaborar un dibujo y etiquetarlo (figura 13). Por el teorema de Pitágoras,

$$d^2 = a^2 + b^2, \quad \text{o} \quad d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Puesto que la distancia = (velocidad)(tiempo) y las velocidades son 17 y 12, respectivamente,

$$a = 17t \quad \text{y} \quad b = 12t.$$

La sustitución en $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ nos dará

$$d = \sqrt{(17t)^2 + (12t)^2} = \sqrt{289t^2 + 144t^2} = \sqrt{433t^2} \approx (20.8)t.$$

Los pares ordenados sirven para obtener un planteamiento alternativo respecto de las funciones. Primero observamos que una función f de D a E define el siguiente conjunto W de pares ordenados:

$$W = \{(x, f(x)): x \text{ está en } D\}$$

Por tanto, W está formado por todos los pares ordenados tales que el primer número x está en D y el segundo número es el valor de la función $f(x)$. En el ejemplo 1, donde $f(x) = x^2$, W es el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (x, x^2) . Es importante advertir que, para cada x , hay exactamente un par ordenado (x, y) en W con x en la primera posición.

A la inversa, si comenzamos con un conjunto W de pares ordenados tales que cada x en D aparece exactamente una vez en la primera posición de un par ordenado, entonces W determina una función. Esto es, para cada x en D hay exactamente un par (x, y) en W ; luego, haciendo que y corresponda a x , obtenemos una función con dominio D . La imagen consiste en todos los números reales y que aparecen en la segunda posición de los pares ordenados.

Del análisis anterior inferimos que el próximo enunciado también puede usarse como definición de función.

**Definición alternativa
de función**

Una **función** con dominio D es un conjunto W de pares ordenados tales que, para cada x en D , hay exactamente un par ordenado (x, y) en W que tiene a x en la primera posición.

En términos de esta definición, los pares ordenados $(x, \sqrt{x-1})$ establecen la función del ejemplo 3 dado por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Ahora bien, si

$$W = \{(x, y): x^2 = y^2\},$$

entonces W no es una función, puesto que para una x dada puede haber más de un par en W con x en la primera posición; por ejemplo, si $x = 2$, entonces $(2, 2)$ y $(2, -2)$ están en W .

En el ejemplo adjunto mostramos cómo estudiar algunos conceptos de esta sección con ayuda de una graficadora. De aquí en adelante, al establecer asignaciones en una graficadora, con frecuencia nos referiremos a las variables Y_1 y Y_2 como las *funciones* Y_1 y Y_2 .

EJEMPLO 10 Análisis de la gráfica de una función

Sea $f(x) = x^{2/3} - 3$.

- Encuentra $f(-2)$.
- Traza la gráfica de f .
- Expresa el dominio y la imagen de f .
- Señala los intervalos en que f crece o decrece.
- Calcula las intersecciones x de la gráfica con una precisión de un lugar decimal.

SOLUCIÓN.

TI-83 Plus

TI-86

(a) Abajo se muestran cuatro representaciones de f , todas válidas en la TI-83 Plus y en la TI-86. En algunas calculadoras graficadoras más antiguas sólo puede obtenerse el lado derecho de la gráfica de la figura 14. Si ocurre esto, cambia la representación de f .

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=X^(2/3)-3
Y2=(X^(1/3))^2-3
Y3=(X^2)^(1/3)-3
Y4=(3^(1/3)*X)^(2/3)-3
Y5=
  
```

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=X^(2/3)-3
Y2=(X^(1/3))^2-3
Y3=(X^2)^(1/3)-3
Y4=(3^(1/3)*X)^(2/3)-3
Y5=
MODE MODE2 TRACE GRAPH
X Y INSP DELT ZLCN
  
```

A continuación se muestran dos métodos para encontrar un valor de la función. En el primero, simplemente encontramos el valor de $Y_1(-2)$; en el segundo, almacenamos -2 en X y luego encontramos el valor de Y_1 .

VARS \rightarrow 1 1 \rightarrow -2 \rightarrow ENTER
 ENTER

2nd alpha Y 1 \rightarrow -2 \rightarrow ENTER

```

Y1(-2)
-2+X
Y1
-1.412598948
-2
-1.412598948
  
```

```

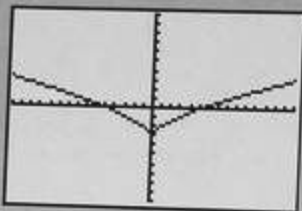
Y1(-2)
-2+X
Y1
-1.41259894883
-2
-1.41259894883
  
```

(b) Usando la pantalla de $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$ para graficar Y_1 obtenemos un desplegado semejante al de la figura 14. La parte en forma de V de la gráfica de f en $x = 0$ se denomina **cúspide**.

(c) El dominio de f es \mathbb{R} , ya que podemos teclear cualquier valor de x . La figura indica que $y \geq -3$, por lo que concluimos que la imagen de f es $[-3, \infty)$

(continúa)

- (d) Con base en la figura vemos que f decrece en $(-\infty, 0]$ y crece en $[0, \infty)$.
 (e) Usando la función root encontramos que la intersección x positiva en la figura 14 es aproximadamente 5.2. Dado que f es simétrica con respecto al eje y , la intersección x negativa es aproximadamente -5.2 .

Figura 14 $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$ 

Como ayuda de referencia, algunas gráficas comunes y sus ecuaciones se detallan en el apéndice I. Buena parte de estas gráficas son de funciones.

3.4 Ejercicios

- 1 Si $f(x) = -x^2 - x - 4$, halla $f(-2)$, $f(0)$ y $f(4)$.
 2 Si $f(x) = -x^3 - x^2 + 3$, halla $f(-3)$, $f(0)$ y $f(2)$.
 3 Si $f(x) = \sqrt{x-4} - 3x$, halla $f(4)$, $f(8)$ y $f(13)$.
 4 Si $f(x) = \frac{x}{x-3}$, halla $f(-2)$, $f(0)$ y $f(3)$.

Ejercicios 11 al 14: si a es un número real positivo, encuentra

(a) $g\left(\frac{1}{a}\right)$ (b) $\frac{1}{g(a)}$ (c) $g(\sqrt{a})$ (d) $\sqrt{g(a)}$

11 $g(x) = 4x^2$

12 $g(x) = 2x - 5$

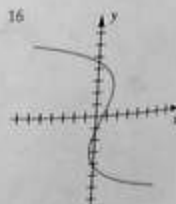
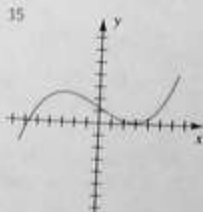
13 $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

14 $g(x) = \frac{x^2}{x+1}$

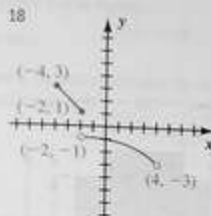
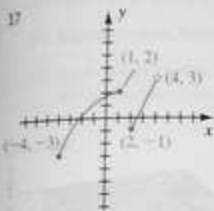
Ejercicios 15 y 16: explica por qué la gráfica corresponde o no a una función.

Ejercicios 5 al 10: si a y h son números reales, encuentra

- (a) $f(a)$ (b) $f(-a)$ (c) $-f(a)$ (d) $f(a+h)$
 (e) $f(a) + f(h)$ (f) $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, si $h \neq 0$
 5 $f(x) = 5x - 2$ 6 $f(x) = 3 - 4x$
 7 $f(x) = -x^2 + 4$ 8 $f(x) = 3 - x^2$
 9 $f(x) = x^2 - x + 3$ 10 $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$

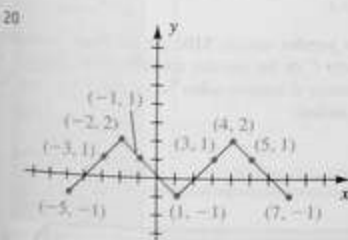
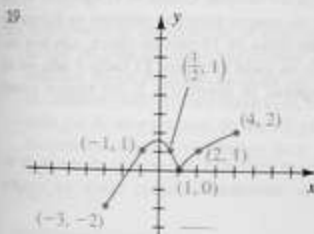


Ejercicios 17 y 18: determina el dominio D y la imagen R de la función representada en la figura.



Ejercicios 19 y 20: para la gráfica de la función f dibujada en la figura, determina

- (a) El dominio (b) La imagen (c) $f(1)$
 (d) Toda x tal que $f(x) = 1$
 (e) Toda x tal que $f(x) > 1$



Ejercicios 21 al 32: encuentra el dominio de f .

21 $f(x) = \sqrt{2x+7}$

22 $f(x) = \sqrt{8-3x}$

23 $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

24 $f(x) = \sqrt{x^2-25}$

25 $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x}$

26 $f(x) = \frac{4x}{6x^2+13x-5}$

27 $f(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x^2-5x+4}$

28 $f(x) = \frac{\sqrt{4x-3}}{x^2-4}$

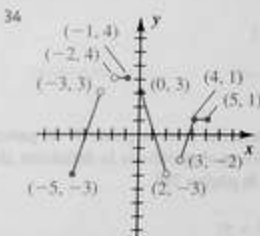
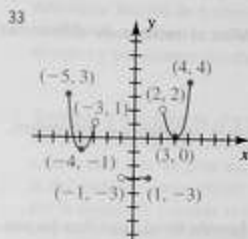
29 $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x-2}}$

30 $f(x) = \frac{1}{(x-3)\sqrt{x+3}}$

31 $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$

32 $f(x) = \sqrt{(x-2)(x-6)}$

Ejercicios 33 y 34: (a) Halla el dominio D y la imagen R de f . (b) Determina los intervalos en los que f aumenta, disminuye o es constante.



35 Traz la gráfica de una función que crece en $(-\infty, -3]$ y $[2, \infty)$ y decrece en $[-3, 2]$.

36 Traz la gráfica de una función que decrece en $(-\infty, -2]$ y $[1, 4]$ y crece en $[-2, 1]$ y $[4, \infty)$.

Ejercicios 37 al 46: (a) traza la gráfica de f ; (b) encuentra el dominio D y la imagen R de f y (c) halla los intervalos en los que f es creciente, decreciente o constante.

37 $f(x) = 3x - 2$

38 $f(x) = -2x + 3$

39 $f(x) = 4 - x^2$

40 $f(x) = x^2 - 1$

41 $f(x) = \sqrt{x+4}$

42 $f(x) = \sqrt{4-x}$

43. $f(x) = -2$

44. $f(x) = 3$

45. $f(x) = -\sqrt{36 - x^2}$

46. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

Ejercicios 47 y 48: simplifica el cociente de diferencias $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ si $h \neq 0$.

47. $f(x) = x^2 - 3x$

48. $f(x) = -2x^2 + 3$

Ejercicios 49 y 50: simplifica el cociente de diferencias $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ si $h \neq 0$.

49. $f(x) = x^2 + 5$

50. $f(x) = 1/x^2$

Ejercicios 51 y 52: simplifica el cociente de diferencias $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ si $x \neq a$.

51. $f(x) = \sqrt{x-3}$ (Sugerencia: racionaliza el numerador).

52. $f(x) = x^3 - 2$

Ejercicios 53 y 54: si una función lineal f satisface las condiciones dadas, halla $f(x)$.

53. $f(-3) = 1$ y $f(3) = 2$

54. $f(-2) = 7$ y $f(4) = -2$

Ejercicios 55 al 64: determina si el conjunto W de pares ordenados es una función en el sentido de la definición alternativa de función de la página 188.

55. $W = \{(x, y): 2y = x^2 + 5\}$

56. $W = \{(x, y): x = 3y + 2\}$

57. $W = \{(x, y): x^2 + y^2 = 4\}$

58. $W = \{(x, y): y^2 - x^2 = 1\}$

59. $W = \{(x, y): y = 3\}$

60. $W = \{(x, y): x = 3\}$

61. $W = \{(x, y): xy = 0\}$

62. $W = \{(x, y): x + y = 0\}$

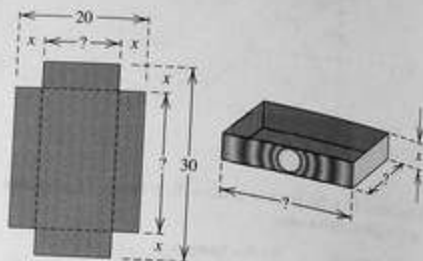
63. $W = \{(x, y): |y| = |x|\}$

64. $W = \{(x, y): y < x\}$

65. Construcción de una caja A partir de una pieza rectangular de cartón de 20×30 polg. hay que elaborar una caja, cortando cuadrados idénticos de área x^2 de cada esquina y

volteando hacia arriba los lados (ve la figura). Expresa el volumen V de la caja como función de x .

Ejercicio 65



66. Construcción de un tanque Consulta el ejemplo 8. Se debe construir un tanque para gas propano en forma de cilindro circular recto de 10 pies de altura, con una semiesfera unida en cada extremo. El radio r aún no se determina. Expresa la superficie S del tanque como función de r .

67. Dimensiones de un edificio Una pequeña oficina ha de tener 500 pies² de superficie (la figura exhibe un croquis simplificado).

- Expresa la longitud y del edificio como función del ancho x .
- Si las paredes cuestan \$100 por pie lineal, encuentra el costo C de las paredes como función del ancho x (desprecia el espacio sobre las puertas y el grueso de las paredes).

Ejercicio 67



- 68 Dimensiones de un acuario. Un acuario de 1.5 pies de altura ha de contener un volumen de 6 pies³. Aquí x denota la longitud de la base y y el ancho (ve la figura).

- (a) Expresa y como función de x .
 (b) Encuentra el número total S de pies cuadrados de vidrio necesarios como función de x .

Ejercicio 68



- 69 Reglamento de construcción de edificios. Un consejo municipal propone un nuevo reglamento de construcción de edificios, el cual exige una distancia mínima de 100 pies entre cualquier edificio y una residencia, más otros 6 pies por cada pie de altura arriba de los 25 pies. Encuentra una función lineal para S en términos de h .

Ejercicio 69



- 70 Impuesto a energéticos. Hay que calcular un impuesto T a la gasolina que afectará el costo de uso de los vehículos. Con este fin se multiplicará la cantidad x de galones que compras por 125000 (número de BTU* por galón de gasolina), y luego se multiplicará el total de BTU por el impuesto, esto es, 34.2 centavos por millón de BTU. Encuentra una función lineal para T en términos de x .

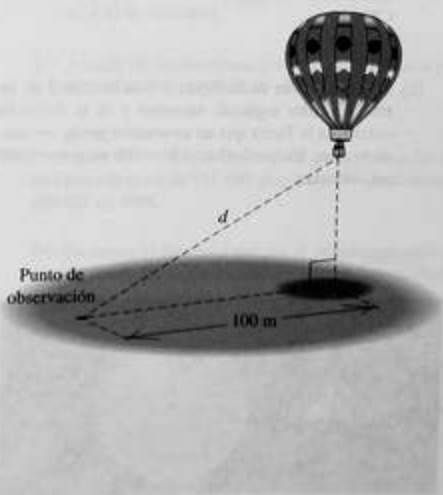
- 71 Crecimiento durante la infancia. A menudo, la estatura y (en pulg) es una función lineal de la edad t (en años) para los niños entre 6 y 10 años. Un menor mide 48 pulg a los 6 años y 50.5 pulg a los 7.

- (a) Expresa y como función de t .
 (b) Traza la recta del inciso (a) e interpreta la pendiente.
 (c) Pronostica la estatura del niño a los 10 años.

- 72 Contaminación radiactiva. Se ha calculado que 1000 curies de una sustancia radiactiva, introducidos en un punto del mar abierto, se extenderían por una superficie de 40 000 km² en 40 días. Expresa el radio r de la contaminación como función de t , suponiendo que la superficie cubierta por la sustancia radiactiva sea una función lineal del tiempo t y sea siempre circular.

- 73 Distancia a un globo de aire caliente. A la 1:00 P.M., se suelta un globo de aire caliente que se eleva verticalmente a razón de 2 m/s. Se pone un punto de observación a 100 m del punto del suelo situado directamente bajo el globo (ve la figura). Si t denota el tiempo (en s) después de la 1:00 P.M., expresa la distancia d entre el globo y el punto de observación como función de t .

Ejercicio 73



* N. del E. Siglas de Board Trade Unit, unidades de energía eléctrica igual a 1 kilowatt-hora.

74. El triángulo ABC está inscrito en una semicircunferencia de diámetro 15 (consulta la figura).

- Si x denota la longitud del lado AC , expresa la longitud y del lado BC como función de x . (Sugerencia: el ángulo ACB es un ángulo recto.)
- Proporciona el área A del triángulo ABC como función de x y expresa el dominio de esta función.

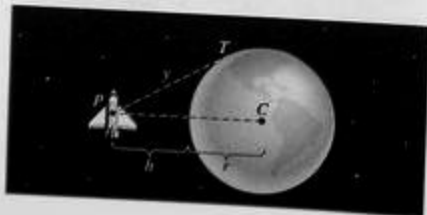
Ejercicio 74



75. Distancia a la Tierra Desde un punto exterior P que está h unidades de una circunferencia de radio r , se traza una recta tangente a la circunferencia (ve la figura). La distancia desde el punto P al punto de tangencia T se representa con y .

- Expresa y como función de h . (Sugerencia: si C es el centro de la circunferencia, PT es perpendicular a CT .)
- Si r es el radio de la Tierra y h es la altitud de un transbordador espacial, entonces y es la distancia máxima a la Tierra que un astronauta puede ver desde la nave. En particular, si $h = 200$ mi y $r = 4000$ mi, calcula y .

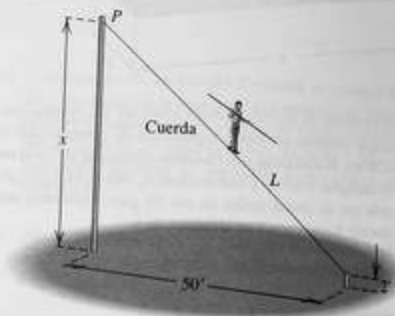
Ejercicio 75



76. Longitud de una cuerda floja La figura ilustra el aparato para un equilibrista. Dos postes se colocan a 50 pies uno de otro, pero aún no se determina el punto P de colocación de la cuerda.

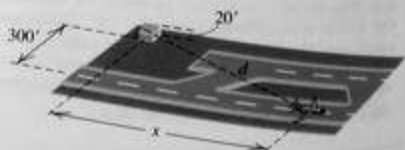
- Halla la longitud L de la cuerda como función de la distancia x de P al suelo.
- Si la caminata total debe ser de 75 pies, encuentra la distancia de P al suelo.

Ejercicio 76



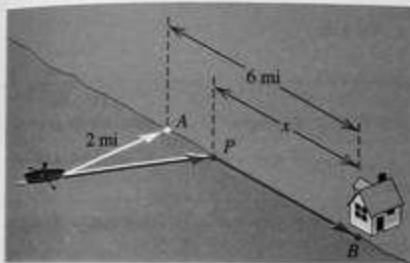
77. Pista de aterrizaje Las posiciones relativas de una pista y una torre de control de 20 pies de altura se muestran en la figura. El comienzo de la pista está a 300 pies de la base de la torre en sentido perpendicular. Si x denota la distancia que un avión ha recorrido en la pista, expresa la distancia d entre la nave y la torre de control como función de x .

Ejercicio 77



- 78 **Tiempo de llegada a un destino** Un remero se encuentra a 2 mi del punto más cercano de una orilla recta (representado con A) y desea llegar a una casa ubicada en un punto B a 6 mi corriente abajo en la orilla (ve la figura). Piensa remar al punto P , que está entre A y B y a x mi de la casa, y luego caminar el resto de la distancia. Supón que rema a razón de 3 millas por hora (miph) y camina a 5 miph. Ahora bien, si T es el tiempo total requerido para llegar a la casa, expresa T como función de x .

Ejercicio 78



- Ejercicios 79 al 82:** (a) traza la gráfica de f en el intervalo dado $[a, b]$; (b) a continuación calcula la imagen de f en $[a, b]$; y (c) calcula los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

79 $f(x) = \frac{x^{1/3}}{1 + x^4}$ $[-2, 2]$

80 $f(x) = x^4 - 0.4x^3 - 0.8x^2 + 0.2x + 0.1$ $[-1, 1]$

81 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ $[-0.7, 1.4]$

82 $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^4}$ $[-4, 4]$

- Ejercicios 83 y 84:** en los ejercicios 51 y 52 de la sección 2.5, empleamos métodos algebraicos con objeto de resolver cada una de estas ecuaciones. Ahora, resuélvelas gráficamente asignando la expresión del lado izquierdo a Y_1 , el número del lado derecho a Y_2 y encuentra las coordenadas x de todos los puntos de intersección de las dos gráficas.

83 (a) $x^{2/3} = 32$ (b) $x^{4/3} = 16$ (c) $x^{3/2} = -36$

(d) $x^{3/4} = 125$ (e) $x^{3/5} = -27$

84 (a) $x^{2/3} = -27$ (b) $x^{2/3} = 25$ (c) $x^{4/3} = -49$
(d) $x^{3/2} = 27$ (e) $x^{3/4} = -8$

- 85 **Pantalla de calculadora** La pantalla de una calculadora graficadora mide 95 píxeles de ancho y 63 de alto.

- (a) Indica el número total de píxeles de la pantalla.
(b) Si se grafica una función en el modo de puntos, determina el número máximo de píxeles que quedarán oscuros en la pantalla.



- 86 **Distancias de parada** En la tabla se indican las distancias D (en pies) de paradas prácticas para vehículos que se mueven a velocidades S (en miph) en superficies niveladas, como la que utiliza la American Association of State Highway and Transportation Officials (Asociación de Funcionarios de Carreteras Estatales y Transporte de los Estados Unidos).

S	20	30	40	50	60	70
D	33	86	167	278	414	593

- (a) Traza los datos.
(b) Determina si la distancia de parada es una función lineal de la velocidad.
(c) Analiza las implicaciones prácticas de estos datos para conducir con seguridad.



- 87 **Precios de autos nuevos** En 1985, el precio promedio de un carro nuevo era de \$11 450, pero aumentó linealmente a \$20 021 en 1994.

- (a) Encuentra la función f que sea el modelo matemático del precio promedio pagado por un auto nuevo. Grafica f con los dos puntos de datos.
(b) Interpreta la pendiente de la gráfica de f .
(c) Estima gráficamente el año en que el precio promedio pagado sea de \$25 000.

3.5

Gráficas de funciones

En esta sección estudiaremos las ayudas para trazar las gráficas de ciertos tipos de funciones. Una función f se llama **par** si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio. En este caso, la ecuación $y = f(x)$ no cambia si x se sustituye por $-x$ y, por tanto, por la prueba de simetría 1 de la sección 3.2, la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y .

Una función f se denomina **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en su dominio. Si aplicamos la prueba de simetría 3 de la sección 3.2 a la ecuación $y = f(x)$, vemos que la gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Estos hechos se resumen en las primeras dos columnas de la siguiente tabla.

Funciones pares e impares

Terminología	Definición	Ejemplo	Tipo de simetría de gráfica
f es una función par .	$f(-x) = f(x)$ para toda x del dominio.	$y = f(x) = x^2$	con respecto al eje y
f es una función impar .	$f(-x) = -f(x)$ para toda x del dominio.	$y = f(x) = x^3$	con respecto al origen

EJEMPLO 1 Determinación del tipo de función (par o impar)

Determina si f es par, impar o ninguna de las dos.

- (a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ (b) $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$
 (c) $f(x) = x^3 + x^2$

SOLUCIÓN En cada caso el dominio de f es \mathbb{R} . A fin de establecer si f es par o impar, comenzamos por examinar $f(-x)$, donde x es cualquier número real.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 && \text{sustituir } -x \text{ con } x \text{ en } f(x) \\
 &= 3x^4 - 2x^2 + 5 && \text{simplificar} \\
 &= f(x) && \text{definición de } f
 \end{aligned}$$

Dado que $f(-x) = f(x)$, f es una función par.

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad f(-x) &= 2(-x)^5 - 7(-x)^3 + 4(-x) && \text{sustituir } -x \text{ con } x \text{ en } f(x) \\
 &= -2x^5 + 7x^3 - 4x && \text{simplificar} \\
 &= -(2x^5 - 7x^3 + 4x) && \text{factorizar } -1 \\
 &= -f(x) && \text{definición de } f
 \end{aligned}$$

Puesto que $f(-x) = -f(x)$, f es una función impar.

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad f(-x) &= (-x)^3 + (-x)^2 \\ &= -x^3 + x^2 \end{aligned}$$

sustituir $-x$ con x en $f(x)$
simplificar

Como $f(-x) \neq f(x)$, y $f(-x) \neq -f(x)$ (observemos que $-f(x) = -x^3 - x^2$), la función f no es par ni impar.

En el ejemplo siguiente consideramos la **función valor absoluto** f , definida por $f(x) = |x|$.

EJEMPLO 2 Trazado de la gráfica de la función valor absoluto

Sea $f(x) = |x|$.

- Indica si f es par o impar.
- Gráfica f .
- Encuentra los intervalos en que f crece o decrece.

SOLUCIÓN

(a) El dominio de f es \mathbb{R} , porque el valor absoluto de x funciona para todo número real x . Si x está en \mathbb{R} , entonces

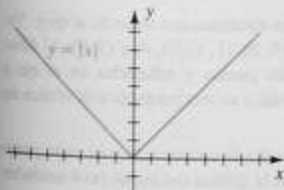
$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Por tanto, f es una función par porque $f(-x) = f(x)$.

(b) En vista de que f es par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y . Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$; así pues, la parte de la gráfica del primer cuadrante coincide con la recta $y = x$. Trazaremos esta semirrecta, y usando la simetría llegamos a la figura 1.

(c) Al consultar la gráfica vemos que f decrece en $(-\infty, 0]$ y crece en $[0, \infty)$.

Figura 1



Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, es fácil graficar

$$y = f(x) + c \quad \text{y} \quad y = f(x) - c$$

para cualquier número real positivo c . Al igual que en la tabla que sigue, para $y = f(x) + c$, se suma c a la coordenada y de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$. Esto *desplaza* la gráfica *hacia arriba* una distancia c . Para $y = f(x) - c$ con $c > 0$, se resta c de cada coordenada y , lo cual *desplaza* la gráfica de f una distancia c *hacia abajo*. Estos cambios se llaman **desplazamientos verticales** de gráficas.

Desplazamiento vertical de la gráfica de $y = f(x)$

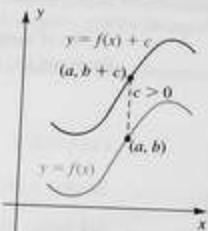
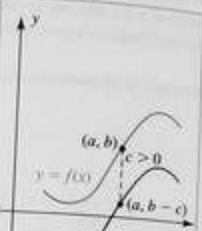
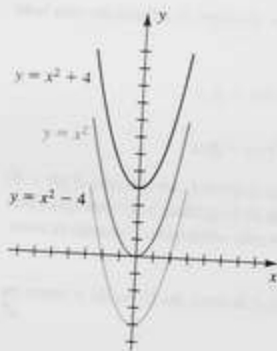
Ecuación	$y = f(x) + c$ con $c > 0$	$y = f(x) - c$ con $c > 0$
Efecto sobre la gráfica	La gráfica de f se desplaza hacia arriba una distancia c .	La gráfica de f se desplaza hacia abajo una distancia c .
Interpretación gráfica		

Figura 2

**EJEMPLO 3** Desplazamiento vertical de una gráficaTrazamos la gráfica de f .

$$(a) f(x) = x^2 \quad (b) f(x) = x^2 + 4 \quad (c) f(x) = x^2 - 4$$

SOLUCIÓN Trazaremos todas las gráficas en el mismo plano coordenado.

(a) Como

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

la función f es par; por tanto, su gráfica es simétrica con respecto al eje y . Varios puntos de la gráfica de $y = x^2$ son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ y $(3, 9)$. Al dibujar una curva suave que pase por estos puntos y reflejarlos en el eje y obtenemos el trazo de la figura 2. La gráfica es una parábola con vértice en el origen que abre hacia arriba.

(b) Para graficar $y = x^2 + 4$, sumamos 4 a la coordenada y de cada punto de la gráfica de $y = x^2$; esto es, corremos la gráfica del inciso (a) 4 unidades hacia arriba, como en la figura.

(c) A fin de graficar $y = x^2 - 4$, disminuimos las coordenadas y de $y = x^2$ en 4; o sea, desplazamos la gráfica del inciso (a) 4 unidades hacia abajo.

También podemos considerar **desplazamientos horizontales** de gráficas. En particular, si $c > 0$, considere las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x) = f(x - c)$ trazadas en el mismo plano coordenado, según se ilustra en la próxima tabla. Puesto que

$$g(a + c) = f[(a + c) - c] = f(a),$$

el punto con coordenada x igual a a en la gráfica de $y = f(x)$ tiene la misma coordenada y que el punto con coordenada x igual a $a + c$ en la gráfica de

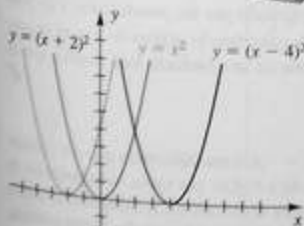
$y = g(x) = f(x - c)$. Esto significa que la gráfica de $y = g(x) = f(x - c)$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha una distancia c . En forma análoga, la gráfica de $y = h(x) = f(x + c)$ se obtiene corriendo la gráfica de f a la izquierda una distancia c , como se muestra en la gráfica.

Desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	Efecto en la gráfica	Interpretación gráfica
$y = g(x)$ $= f(x - c)$ con $c > 0$	La gráfica de f se desplaza en sentido horizontal a la derecha una distancia c .	
$y = h(x)$ $= f(x + c)$ con $c > 0$	La gráfica de f se desplaza en sentido horizontal a la izquierda una distancia c .	

Los desplazamientos horizontales y verticales también se denominan *traslaciones*.

Figura 3



EJEMPLO 4 Desplazamiento horizontal de una gráfica

Traza la gráfica de f :

- (a) $f(x) = (x - 4)^2$ (b) $f(x) = (x + 2)^2$

SOLUCIÓN La gráfica de $y = x^2$ aparece en la figura 3.

(a) Desplazar la gráfica de $y = x^2$ a la derecha 4 unidades nos dará la gráfica de $y = (x - 4)^2$ de la figura.

(b) Correr la gráfica de $y = x^2$ a la izquierda 2 unidades nos dará la gráfica $y = (x + 2)^2$ de la figura.

Con objeto de obtener la gráfica de $y = cf(x)$ para algún número real c , multiplicamos por c las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = f(x)$; por ejemplo, si $y = 2f(x)$, duplicamos las coordenadas y ; o si $y = \frac{1}{2}f(x)$, multiplicamos por $\frac{1}{2}$ cada coordenada y . Este procedimiento se conoce como **alargar verticalmente** la gráfica de f (si $c > 1$), o **comprimir verticalmente** la gráfica (si $0 < c < 1$) y se resume en la tabla que viene.

Alargamiento o compresión vertical de la gráfica de $y = f(x)$

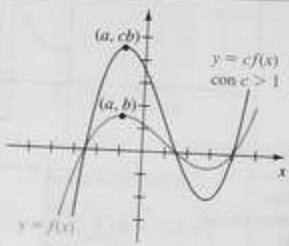
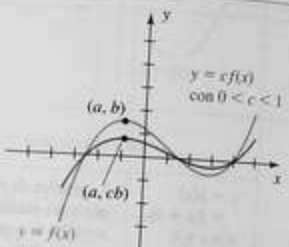
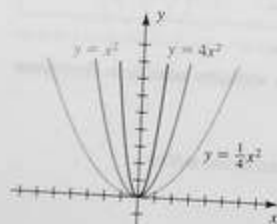
Ecuación	$y = cf(x)$ con $c > 1$	$y = cf(x)$ con $0 < c < 1$
Efecto en la gráfica	La gráfica de f se alarga en sentido vertical en un factor c .	La gráfica de f se comprime en sentido vertical en un factor $1/c$.
Interpretación gráfica		

Figura 4



Al sustituir y con $-y$, la gráfica de $y = f(x)$ se refleja en el eje x .

EJEMPLO 5 Elongamiento o compresión vertical de una gráfica

Traza la gráfica de la ecuación:

(a) $y = 4x^2$ (b) $y = \frac{1}{4}x^2$

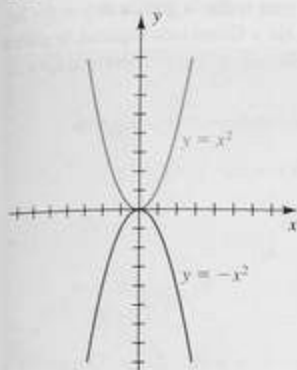
SOLUCIÓN

(a) Para graficar $y = 4x^2$, podemos consultar la gráfica de $y = x^2$ de la figura 4 y multiplicar por 4 la coordenada y de cada punto. Esto alarga verticalmente la gráfica de $y = x^2$ un factor de 4 y nos da una parábola más angosta que es más aguda en el vértice, como se ve en la figura.

(b) $y = \frac{1}{4}x^2$ se puede graficar multiplicando por las coordenadas y de puntos de la gráfica de $y = x^2$ por $\frac{1}{4}$. Esto comprime la gráfica de $y = x^2$ en sentido vertical un factor de $1/\frac{1}{4} = 4$ y nos da una parábola más plana, que es más plana en el vértice (figura 4).

Podemos obtener la gráfica de $y = -f(x)$ multiplicando por -1 la coordenada y de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$; por tanto, todo punto (a, b) de la gráfica de $y = f(x)$ que se encuentre arriba del eje x , determina un punto $(a, -b)$ de la gráfica de $y = -f(x)$ que esté abajo del eje x . En forma análoga,

Figura 5



si (c, d) se halla abajo del eje x (esto es, $d < 0$), entonces $(c, -d)$ queda arriba del eje x . La gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x .

EJEMPLO 6 Reflexión de una gráfica en el eje x

Traza la gráfica de $y = -x^2$.

SOLUCIÓN La gráfica se halla trazando puntos, pero como ya conocemos la gráfica de $y = x^2$, la dibujamos igual que en la figura 5 y luego multiplicamos por -1 las coordenadas y de puntos. Este procedimiento nos dará la reflexión en el eje x que se indica en la figura.

A veces es útil comparar las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(cx)$ si $c \neq 0$. En este caso los valores de la función $f(x)$ para

$$a \leq x \leq b$$

son los mismos que los de la función $f(cx)$ para

$$a \leq cx \leq b \quad \text{o bien, lo que es igual} \quad \frac{a}{c} \leq x \leq \frac{b}{c}.$$

Esto significa que la gráfica de f está **horizontalmente comprimida** (si $c > 1$) u **horizontalmente alargada** (si $0 < c < 1$), de acuerdo con el resumen de la siguiente tabla.

Compresión o elongamiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	Efecto en la gráfica	Interpretación gráfica
$y = f(cx)$ con $c > 1$	La gráfica de f se comprime en sentido horizontal en un factor de c .	
$y = f(cx)$ con $0 < c < 1$	La gráfica de f se alarga en sentido horizontal en un factor de $1/c$.	

Al sustituir x con $-x$, la gráfica de $y = f(x)$ se refleja en el eje y .

Si $c < 0$, es posible obtener la gráfica de $y = f(cx)$ reflejando la gráfica de $y = f(c|x|)$ en el eje y ; por ejemplo, para trazar la gráfica de $y = f(-2x)$, reflejamos la gráfica de $y = f(2x)$ en el eje y . Como caso especial, la gráfica de $y = f(-x)$ es una **reflexión** de la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje y .

■ EJEMPLO 7 Compresión o elongación horizontal de una gráfica

Si $f(x) = x^3 - 4x^2$, traza las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(2x)$ y $y = f(\frac{1}{2}x)$.

SOLUCIÓN Tenemos:

$$y = f(x) = x^3 - 4x^2 = x^2(x - 4)$$

$$y = f(2x) = (2x)^3 - 4(2x)^2 = 8x^3 - 16x^2 = 8x^2(x - 2)$$

$$y = f(\frac{1}{2}x) = (\frac{1}{2}x)^3 - 4(\frac{1}{2}x)^2 = \frac{1}{8}x^3 - x^2 = \frac{1}{8}x^2(x - 8)$$

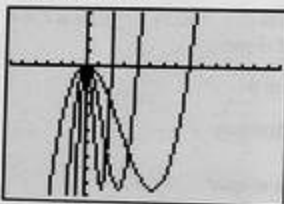
Observarás que las intersecciones en x de la gráfica de $y = f(2x)$ son 0 y 2, que son la mitad de las intersecciones de 0 y 4 para $y = f(x)$. Esto manifiesta una compresión horizontal en un factor de 2.

Las intersecciones en x de la gráfica de $y = f(\frac{1}{2}x)$ son 0 y 8, que son dos veces las intersecciones en x para $y = f(x)$. Esto indica una elongación horizontal en un factor de $1/\frac{1}{2} = 2$.

En la figura 6 se muestran las gráficas que se obtuvieron con una calculadora graficadora con pantalla $[-6, 15]$ por $[-10, 4]$.

Figura 6

$[-6, 15]$ por $[-10, 4]$



En ocasiones las funciones se describen con más de una expresión, como en los siguientes ejemplos; dichas funciones se denominan **funciones seccionadas** o **funciones definidas por pedazos**.

EJEMPLO 8 Trazado de la gráfica de una función seccionada

Traza la gráfica de la función f si

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } |x| < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

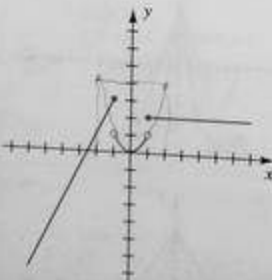
SOLUCIÓN Si $x \leq -1$, entonces $f(x) = 2x + 5$ y la gráfica de f coincide con la recta $y = 2x + 5$ y está representada por la porción de la gráfica a la izquierda de la recta $x = -1$ en la figura 7. El punto pequeño indica que el punto $(-1, 3)$ está en la gráfica.

Si $|x| < 1$ (o, en forma equivalente, $-1 < x < 1$), usamos x^2 para encontrar valores de f y, por tanto, esta parte de la gráfica coincide con la parábola $y = x^2$, como se indica en la figura. Observa que los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ no pertenecen a la gráfica.

Por último, si $x \geq 1$, los valores de f siempre son iguales a 2. Así, la gráfica de f para $x \geq 1$ es la semirrecta horizontal de la figura 7.

Nota: Una vez que acabes de dibujar la gráfica de una función definida por pedazos, comprueba que satisface la prueba de la recta vertical.

Figura 7



El siguiente ejemplo muestra cómo podemos graficar con una calculadora la función definida por pedazos del ejemplo previo.

EJEMPLO 9 Trazado de la gráfica de una función definida por pedazos
Traza la gráfica de la función f si

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } |x| < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Comenzamos por hacer la asignación

$$Y_1 = \underbrace{(2x + 5)(x \leq -1)}_{\text{primera parte}} + \underbrace{x^2(\text{abs}(x) < 1)}_{\text{segunda parte}} + \underbrace{2(x \geq 1)}_{\text{tercera parte}}.$$

TI-83 Plus

Haz las asignaciones Y.

Y= CLEAR
(2 X,T,θ,n + 5)
(X,T,θ,n 2nd TEST 6 -1)
+ X,T,θ,n x²
(MATH > 1 X,T,θ,n)
2nd TEST 5 1)
+ 2
(X,T,θ,n 2nd TEST 4 1)

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=(2X+5)(X≤-1)
+X²(abs(X)<1)+2(X
≥1)
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=

```

TI-86

GRAPH y(x)=f(x) CLEAR ()
2 x-VAR + 5) (x-VAR 2nd
TEST ≤(F4) -1) ENTER x-VAR
x² (2nd MATH NUM(F1)
abs(F5) x-VAR 2nd TEST <(F2) 1
) ENTER 2 (x-VAR 2nd TEST
=(F5) 1) ENTER EXIT y(F2)
1 + y(F2) 2 + y(F2) 3

Consulta la nota de la página 205 sobre cómo apagar Y_1 , Y_2 y Y_3 . Podemos teclear toda la función en Y_1 . Como se muestra en la figura de la izquierda de la TI-83 Plus.

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=(2X+5)(X≤-1)
Y2=X²(abs(X)<1)
Y3=2(X≥1)
Y4=Y1+Y2+Y3
Y5=

```

A medida que la variable x asume valores de X_{\min} a X_{\max} , la desigualdad $x \leq -1$ en la primera parte tendrá un valor de 1 (si $x \leq -1$) o 0 (si $x > -1$). Este valor se multiplica por el valor de $2x + 5$ y se asigna a Y_1 . En la segunda parte, observarás que *ambos* $-1 < x$ y $x < 1$ (lo que equivale a $|x| < 1$) deben cumplirse para poder asignar el valor de x^2 a Y_1 (Y_2 para la TI-86). La idea general es que cada parte esté "encendida" sólo cuando x asume los valores del dominio asociado.

(continúa)

Prepare la pantalla.

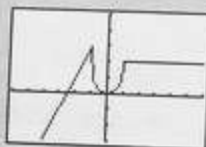
WINDOW -6 ▾ 6 ▾ 1 ▾
-3 ▾ 5 ▾ 1 ▾

2nd WINDOW -6 ▾ 6 ▾ 1 ▾
-3 ▾ 5 ▾ 1 ▾

WINDOW
Xmin=-6
Xmax=6
Xscl=1
Ymin=-3
Ymax=5
Yscl=1
Xres=1

WINDOW
xMin=-6
xMax=6
xScl=1
yMin=-3
yMax=5
yScl=1
F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7 F8

Graticar la función en el *modo conectado* estándar permite ver las características más importantes de la gráfica. En el modo conectado, la calculadora incluye líneas entre los puntos extremos de las partes. Presiona **GRAPH** o **GRAPH(F5)**.



Para eliminar estas líneas, cambiamos al *modo de punto* y volvemos a graficar. Observa que la calculadora graficadora no distingue entre incluir y excluir un punto extremo (algunos paquetes de software sí lo hacen).

Cambia al modo de punto.

MODE ▾ (4 times) ▸ ENTER
GRAPH

MORE FORMT(F3)
▾ ▾ ▸ ENTER GRAPH(F5)

Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected **Dot**
Sequencial Simul
Real a+b i re^ti
Horiz G-T

RectOn Polarc
CoordOn CoordOff
DrawLine **On**
Seq Simul
GridOff GridOn
AxesOn AxesOff
LabelOff LabelOn
F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7 F8



Nota: Como se mostró en la TI-86, un método alternativo para representar la función f es asignar cada parte a un valor Y como sigue:

$$Y_1 = (2x + 5)(x \leq -1), Y_2 = x^2(\text{abs}(x) < 1), Y_3 = 2(x \geq 1)$$

No obstante, el graficado de las tres pantallas es un proceso más bien lento. La velocidad puede mejorarse graficando $Y_4 = Y_1 + Y_2 + Y_3$ para obtener la gráfica de f (asegúrate de desactivar Y_1 , Y_2 y Y_3). Para desactivar Y_1 en la TI-83 Plus, pon el cursor sobre el signo $=$ a la derecha de Y_1 y oprime $\boxed{\text{ENTER}}$. En la TI-86, pon el cursor en cualesquier parte sobre la línea de $y1$ y oprime $\boxed{\text{SELECT/F5}}$.

Un método más para representar la función f es asignar cada parte a un valor Y usando la división, como sigue:

$$Y_1 = (2x + 5)/(x \leq -1), Y_2 = x^2/(\text{abs}(x) < 1), Y_3 = 2/(x \geq 1)$$

Al graficar los tres valores Y obtenemos una vez más la gráfica de f . La ventaja de ese método resulta evidente cuando se usa el modo conectado. ¡Inténtalo!

Nota sobre la calculadora: Recuerda que $|x| < 1$ o, en forma equivalente, $-1 < x < 1$ también puede escribirse como $-1 < x$ y $x < 1$. Los operadores “y” y “o” se encuentran en el menú TEST LOGIC de la TI-83 Plus y en el menú BASE POOL de la TI-86. Podemos usar “y” para hacer una asignación alternativa para la función del ejemplo 9 según se muestra en la figura.

Plot1	Plot2	Plot3
$\sqrt{Y_1} = (2X+5)(X \leq -1)$		
$+X^2(-1 < X \text{ and } X < 1)$		
$+2(X \geq 1)$		
$\sqrt{Y_2} =$		
$\sqrt{Y_3} =$		
$\sqrt{Y_4} =$		
$\sqrt{Y_5} =$		

Es un error muy común pensar que si pasas a una categoría tributaria más alta, todos tus ingresos serán gravados según esa tasa más alta. El siguiente ejemplo de la gráfica de una función definida por pedazos nos ayuda a descartar esa idea.

EjemPlo 10 Aplicación en la que se usa una función definida por pedazos

Traza una gráfica de la clasificación tributaria X para 2003 que se presenta en la figura 8. Supongamos que x representa el ingreso gravable y T representa el monto del impuesto. (Supón que el dominio es el conjunto de los números reales no negativos.)

Figura 8

Tarifas de impuestos para 2003

Tarifa X—Úsalo si tu estado civil es soltero			
Si la cantidad en la forma 1040, renglón 40, es:	Pero no más de	Escribe en el renglón 41 Forma 1040,	de la cantidad que rebases más de
\$0	\$7000	----- 10%	\$0
7000	28 400	\$700.00 + 15%	7000
28 400	68 800	\$3 910.00 + 25%	28 400
68 800	143 500	\$4 910.00 + 28%	68 800
143 500	311 950	\$4 926.00 + 33%	143 500
311 950	-----	\$9 514.50 + 35%	311 950

SOLUCIÓN La tabla de impuestos se puede representar mediante una función definida por pedazos de esta manera:

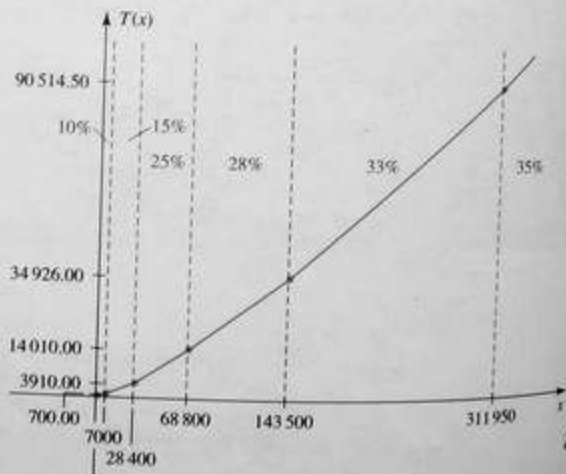
$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 0.10x & \text{si } 0 < x \leq 7000 \\ 700.00 + 0.15(x - 7000) & \text{si } 7000 < x \leq 28\,400 \\ 3910.00 + 0.25(x - 28\,400) & \text{si } 28\,400 < x \leq 68\,800 \\ 14\,010.00 + 0.28(x - 68\,800) & \text{si } 68\,800 < x \leq 143\,500 \\ 34\,926.00 + 0.33(x - 143\,500) & \text{si } 143\,500 < x \leq 311\,950 \\ 90\,514.50 + 0.35(x - 311\,950) & \text{si } x > 311\,950 \end{cases}$$

Habrás observado que la asignación para la categoría tributaria de 15% no es $0.15x$, sino el 10% de los primeros \$7 000 del ingreso gravable más el 15% de la cantidad que *rebuse* esta última cantidad; es decir,

$$0.10(7000) + 0.15(x - 7000) = 700.00 + 0.15(x - 7000).$$

Las otras partes se pueden establecer en forma similar. La gráfica de T se ilustra en la figura 9; notarás que la pendiente de cada parte representa la tasa del impuesto.

Figura 9



Si x es un número real, definimos el símbolo $[x]$ de esta manera:

$$[x] = n, \quad \text{donde } n \text{ es el mayor entero tal que } n \leq x$$

Si identificamos a \mathbb{R} con puntos en una recta coordenada, entonces n es el primer entero a la izquierda de (o igual a) x .

ILUSTRACIÓN Símbolo $\lfloor x \rfloor$

Para graficar $y = \lfloor x \rfloor$, grafica $Y_1 = \text{int}(X)$ en el modo de punto. En la TI-83 Plus y en la TI-86, int está debajo de MATH, NUM.

- $\lfloor 0.5 \rfloor = 0$ ■ $\lfloor 1.8 \rfloor = 1$ ■ $\lfloor \sqrt{5} \rfloor = 2$
 ■ $\lfloor 3 \rfloor = 3$ ■ $\lfloor -3 \rfloor = -3$ ■ $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$
 ■ $\lfloor -\sqrt{3} \rfloor = -2$ ■ $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$

La función mayor entero f está definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

EJEMPLO 11 Trazado de la gráfica de la función mayor entero
 Traza la gráfica de la función mayor entero.

SOLUCIÓN Las coordenadas x y y de algunos puntos de la gráfica pueden enumerarse así:

Valores de x	$f(x) = \lfloor x \rfloor$
\vdots	\vdots
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
\vdots	\vdots

Siempre que x esté entre enteros sucesivos, la parte correspondiente de la gráfica es un segmento de una recta horizontal. Parte de la gráfica se traza en la figura 10. La gráfica continúa indefinidamente a derecha e izquierda.

El próximo ejemplo contiene valores absolutos.

EJEMPLO 12 Trazado de la gráfica de una ecuación que contiene un valor absoluto

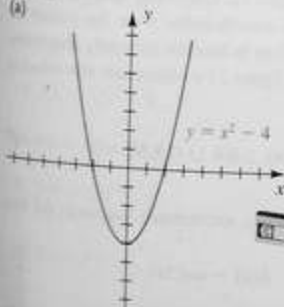
Traza la gráfica de $y = |x^2 - 4|$.

SOLUCIÓN La gráfica de $y = x^2 - 4$ apareció en la figura 2 y vuelve a manejarse en la figura 11(a). Observarás estos datos:

- (1) Si $x \leq -2$ o $x \geq 2$, luego $x^2 - 4 \geq 0$, y por tanto $|x^2 - 4| = x^2 - 4$.
 (2) Si $-2 < x < 2$, entonces $x^2 - 4 < 0$, y por tanto $|x^2 - 4| = -(x^2 - 4)$.

De (1) se deduce que las gráficas de $y = |x^2 - 4|$ y de $y = x^2 - 4$ coinciden para $|x| \geq 2$. A partir de (2) vemos que si $|x| < 2$, entonces la gráfica de $y = |x^2 - 4|$ es el reflejo de la gráfica de $y = x^2 - 4$ en el eje x . Esto nos da el trazo de la figura 11(b).

Figura 10

Figura 11
(a)

(b)



En general, si la gráfica de $y = f(x)$ contiene un punto $P(c, -d)$ con d positiva, entonces la gráfica de $y = |f(x)|$ contiene al punto $Q(c, d)$; esto es, Q es el reflejo de P en el eje x . Los puntos con valores y no negativos son los mismos para las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$.

En el capítulo 2 usamos métodos algebraicos para resolver desigualdades con valores absolutos de polinomios de grado 1; por ejemplo

$$12x - 51 < 7 \quad \text{y} \quad 15x + 21 \geq 3.$$

Es posible investigar desigualdades mucho más complicadas con una calculadora graficadora, como verás en este ejemplo.

EJEMPLO 13 Solución gráfica de una desigualdad con valor absoluto

Calcula las soluciones de

$$10.14x^2 - 13.721 > 10.58x + 11.$$

SOLUCIÓN Para resolver la desigualdad, efectuamos las asignaciones

$$Y_1 = \text{ABS}(0.14x^2 - 13.72) \quad \text{y} \quad Y_2 = \text{ABS}(0.58x + 11)$$

y calculamos los valores de x para los que la gráfica de Y_1 está arriba de la gráfica de Y_2 (ya que deseamos una Y_1 más grande que Y_2). Quizá después de varios intentos, escogemos la pantalla $[-30, 30, 5]$ por $[0, 40, 5]$ y obtenemos gráficas semejantes a las de la figura 12. Como hay simetría con respecto al eje y , es suficiente hallar las coordenadas x de los puntos de intersección de las gráficas para $x > 0$. Con la función intersect, obtenemos $x = 2.80$ y $x = 15.52$. Nos referimos a la figura 12 y obtenemos una solución aproximada.

$$(-\infty, -15.52) \cup (-2.80, 2.80) \cup (15.52, \infty).$$

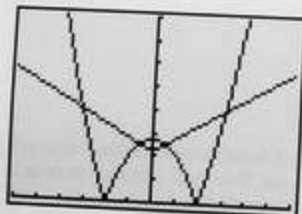
Más adelante en este texto, y en cálculo, encontrarás funciones del tipo

$$g(x) = \ln |x| \quad \text{y} \quad h(x) = \sin |x|.$$

Ambas funciones son de la forma $y = f(|x|)$. El efecto de sustituir $|x|$ con x se puede describir de este modo: si la gráfica de $y = f(x)$ contiene un punto $P(c, d)$ con c positiva, entonces la gráfica de $y = f(|x|)$ contiene al punto $Q(-c, d)$; es decir, Q es el reflejo de P en el eje y . Los puntos del eje y ($x = 0$) son los mismos para las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(|x|)$. Los puntos con valores negativos de x en la gráfica de $y = f(x)$ no son de la gráfica de $y = f(|x|)$, puesto que el resultado del valor absoluto es siempre no negativo.

En general, el proceso de desplazar, elongar, comprimir y reflejar una gráfica puede llamarse *transformación* de una gráfica; la gráfica resultante se denomina *transformación* de la gráfica original. El apéndice II ofrece un resumen gráfico de los tipos de transformaciones de esta sección.

Figura 12
[-30, 30, 5] por [0, 40, 5]



Gráfica $y = f(|x|)$

3.5 Ejercicios

Ejercicios 1 y 2: supón que f es una función par y g es una función impar. Completa la tabla si es posible.

x	-2	2
$f(x)$		7
$g(x)$		-6

x	-3	3
$f(x)$		-5
$g(x)$		15

Ejercicios 3 al 12: determina si f es par, impar o ninguno de los dos.

3 $f(x) = 5x^3 + 2x$

4 $f(x) = |x| - 3$

5 $f(x) = 3x^2 + 2x^2 - 5$

6 $f(x) = 7x^3 - 4x^3$

7 $f(x) = 8x^2 - 3x^2$

8 $f(x) = 12$

9 $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

10 $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

11 $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$

12 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$

Ejercicios 13 al 26: traza las gráficas de f para los valores dados de c en el mismo plano coordenado. (Utiliza la simetría, desplazamiento, elongación, compresión o reflexión.)

13 $f(x) = |x| + c$; $c = -3, 1, 3$

14 $f(x) = |x - c|$; $c = -3, 1, 3$

15 $f(x) = -x^2 + c$; $c = -4, 2, 4$

16 $f(x) = 2x^2 - c$; $c = -4, 2, 4$

17 $f(x) = 2\sqrt{x} + c$; $c = -3, 0, 2$

18 $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + c$; $c = -3, 0, 2$

19 $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - c}$; $c = -2, 0, 3$

20 $f(x) = -\frac{1}{2}(x - c)^2$; $c = -2, 0, 3$

21 $f(x) = c\sqrt{4 - x^2}$; $c = -2, 1, 3$

22 $f(x) = (x + c)^3$; $c = -2, 1, 2$

23 $f(x) = cx^3$; $c = -\frac{1}{3}, 1, 2$

24 $f(x) = (cx)^3 + 1$; $c = -1, 1, 4$

25 $f(x) = \sqrt{cx} - 1$; $c = -1, \frac{1}{9}, 4$

26 $f(x) = -\sqrt{16 - (cx)^2}$; $c = 1, \frac{1}{2}, 4$

Ejercicios 27 al 32: si el punto P está en la gráfica de una función f , encuentra el punto correspondiente en la gráfica de la función dada.

27 $P(0, 5)$; $y = f(x + 2) - 1$

28 $P(3, -1)$; $y = 2f(x) + 4$

29 $P(3, -2)$; $y = 2f(x - 4) + 1$

30 $P(-2, 4)$; $y = \frac{1}{2}f(x - 3) + 3$

31 $P(3, 9)$; $y = \frac{1}{3}f(\frac{1}{3}x) - 1$

32 $P(-2, 1)$; $y = -3f(2x) - 5$

Ejercicios 33 al 40: explica cómo la gráfica de la función se compara con la gráfica de $y = f(x)$. Por ejemplo, para $y = 2f(x + 3)$, la gráfica de f se desplazó a la izquierda 3 unidades y se elongó verticalmente en un factor de 2.

33 $y = f(x - 2) + 3$ 34 $y = 3f(x - 1)$

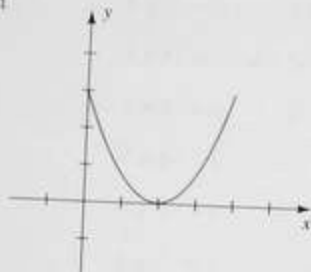
35 $y = f(-x) - 2$ 36 $y = -f(x + 4)$

37 $y = -\frac{1}{2}f(x)$ 38 $y = f(\frac{1}{3}x) - 3$

39 $y = -2f(\frac{1}{3}x)$ 40 $y = \frac{1}{3}|f(x)|$

Ejercicios 41 y 42: la gráfica de la función f con dominio $[0, 4]$ se muestra en la figura. Traza la gráfica de la ecuación dada.

41



(a) $y = f(x + 3)$

(b) $y = f(x - 3)$

(c) $y = f(x) + 3$

(d) $y = f(x) - 3$

(e) $y = -3f(x)$

(f) $y = -\frac{1}{3}f(x)$

(g) $y = f(-\frac{1}{2}x)$

(h) $y = f(2x)$

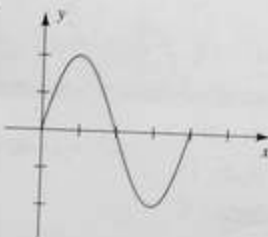
(i) $y = -f(x + 2) - 3$

(j) $y = f(x - 2) + 3$

(k) $y = |f(x)|$

(l) $y = f(|x|)$

42



(a) $y = f(x - 2)$

(b) $y = f(x + 2)$

(c) $y = f(x) - 2$

(d) $y = f(x) + 2$

(e) $y = -2f(x)$

(f) $y = -\frac{1}{2}f(x)$

(g) $y = f(-2x)$

(h) $y = f(\frac{1}{2}x)$

(i) $y = -f(x + 4) - 2$

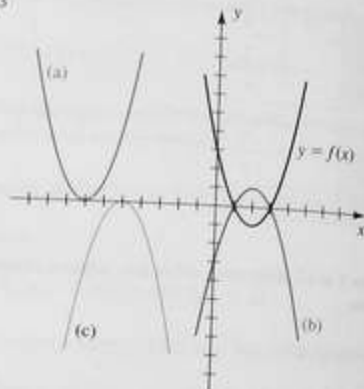
(j) $y = f(x - 4) + 2$

(k) $y = |f(x)|$

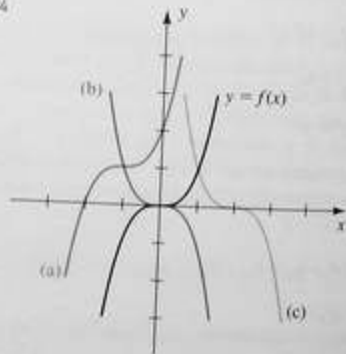
(l) $y = f(|x|)$

Ejercicios 43 al 46: la gráfica de una función f se presenta junto con las gráficas de otras tres funciones (a), (b) y (c). Usa las propiedades de simetría, desplazamiento y reflexión para hallar ecuaciones para las gráficas (a), (b) y (c) en términos de f .

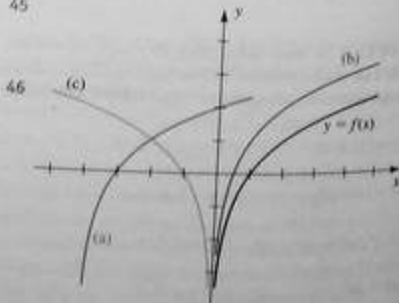
43



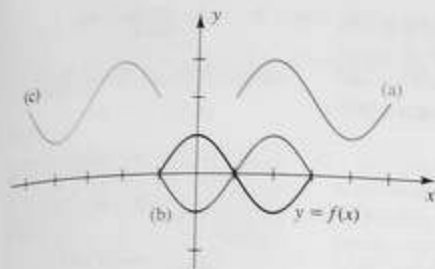
44



45



46



Ejercicios 47 al 52: traza la gráfica de f .

$$47. f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq -1 \\ -2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$48. f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \text{ es un entero} \\ -2 & \text{si } x \text{ no es un entero} \end{cases}$$

$$49. f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -2 \\ -x + 1 & \text{si } |x| \leq 2 \\ -3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$50. f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$51. f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 & \text{si } |x| < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$52. f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -x + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicios 53 y 54: el símbolo $[x]$ denota valores de la función mayor entero. Traza la gráfica de f .

$$53. (a) f(x) = [x - 3] \quad (b) f(x) = [x] - 3$$

$$(c) f(x) = 2[x] \quad (d) f(x) = [2x]$$

$$(e) f(x) = [-x]$$

$$54. (a) f(x) = [x + 2] \quad (b) f(x) = [x] + 2$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{2}[x] \quad (d) f(x) = [\frac{1}{2}x]$$

$$(e) f(x) = -[-x]$$

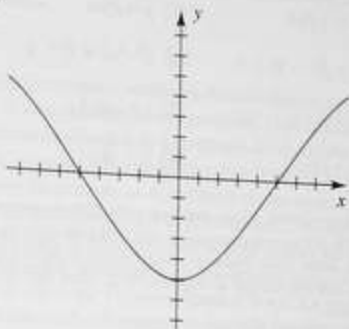
Ejercicios 55 y 56: explica por qué la gráfica de la ecuación no es la gráfica de una función.

$$55. x = y^2$$

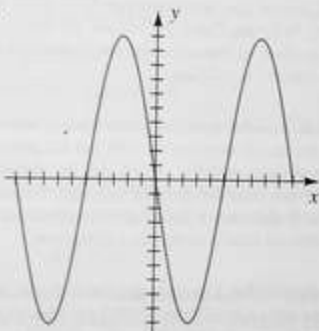
$$56. x = -|y|$$

Ejercicios 57 y 58: para la gráfica de $y = f(x)$ (ve la figura), traza la gráfica de $y = |f(x)|$.

57



58



Ejercicios 59 a 62 traza la gráfica de la ecuación.

$$59. y = |9 - x^2|$$

$$60. y = |x^3 - 1|$$

$$61. y = |\sqrt{x} - 1|$$

$$62. y = ||x| - 1|$$

63. Sea $y = f(x)$ una función con dominio $D = [-2, 6]$ e imagen $R = [-4, 8]$. Encuentra el dominio D y la imagen R para cada función. Suponga que $f(2) = 8$ y $f(6) = -4$.

$$(a) y = -2f(x)$$

$$(b) y = f(\frac{1}{2}x)$$

$$(c) y = f(x - 3) + 1$$

$$(d) y = f(x + 2) - 3$$

$$(e) y = f(-x)$$

$$(f) y = -f(x)$$

$$(g) y = f(1/x)$$

$$(h) y = |f(x)|$$

- 64 Sea $y = f(x)$ una función con dominio $D = [-6, -2]$ e imagen $R = [-10, -4]$. Halla el dominio D y la imagen R para cada función.

(a) $y = \frac{1}{2}f(x)$ (b) $y = f(2x)$

(c) $y = f(x-2) + 5$ (d) $y = f(x+4) - 1$

(e) $y = f(-x)$ (f) $y = -f(x)$

(g) $y = f(|x|)$ (h) $y = |f(x)|$

- 65 Tasas impositivas. Cierta país grava con 15% los primeros \$20 000 del ingreso personal, y con 20% todo ingreso que rebasa dicha cifra. Encuentra una función T definida por partes que especifique el impuesto total sobre ingresos de x dólares.

- 66 Tasas de impuestos sobre la propiedad. Un estado grava los primeros \$500 000 de valor de las propiedades con una tasa de 1%; todo el valor que rebasa esos \$500 000 se grava a 1.25%. Halla una función T definida por partes que permita especificar el impuesto total por pagar sobre una propiedad valuada en x dólares.

- 67 Porcentaje de derechos de autor. Cierta libro se vende en \$12. El autor recibe derechos de 10% por los primeros 10 000 ejemplares vendidos, 12.5% por los siguientes 5000 y 15% por cualquier ejemplar adicional. Encuentra una función R definida por partes que especifique los derechos totales del autor si se venden x ejemplares.

- 68 Tarifas de electricidad. Una compañía generadora de energía eléctrica cobra a sus clientes \$0.0577 por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 1000 kWh usados, \$0.0532 por los siguientes 4000 kWh y \$0.0511 por cualquier kWh que pase de 5000. Encuentra una función C definida por partes para la cuenta de x kWh de un cliente.

Ejercicios 69 al 72: calcula las soluciones de la desigualdad.

69 $11.3x + 2.81 < 1.2x + 5$

70 $10.3x - 2 > 2.2 - 0.63x^2$

71 $11.2x^2 - 10.81 > 1.36x + 4.08$

72 $|\sqrt{16-x^2} - 3| < 0.12x^2 - 0.3$

Ejercicios 73 al 78: grafica f en la pantalla $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$. Utiliza la gráfica de f para pronosticar la gráfica de g . Comprueba tu pronóstico graficando g en la misma pantalla.

73 $f(x) = 0.5x^3 - 4x - 5$; $g(x) = 0.5x^3 - 4x - 1$

74 $f(x) = 0.25x^3 - 2x + 1$; $g(x) = -0.25x^3 + 2x - 1$

75 $f(x) = x^2 - 5$; $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5$

76 $f(x) = |x + 2|$; $g(x) = |x - 3| - 3$

77 $f(x) = x^3 - 5x$; $g(x) = |x^3 - 5x|$

78 $f(x) = 0.5x^2 - 2x - 5$; $g(x) = 0.5x^2 + 2x - 5$

- 79 Tarifa de renta de autos. Hay dos opciones de renta para un viaje de cuatro días. La primera es de \$29.95 por día, con 200 millas gratis y \$0.25 por milla adicional. La segunda es de \$39.95 diarios, con un cargo de \$0.15 por milla.

- (a) Calcula el costo de un viaje de 500 millas con cada opción.

- (b) Elabora un modelo de los datos con una función de costo por cada opción de cuatro días.

- (c) Haz una tabla que exprese la distancia recorrida y el cobro por cada opción para viajes entre 100 y 1200 millas, usando incrementos de 100 millas.

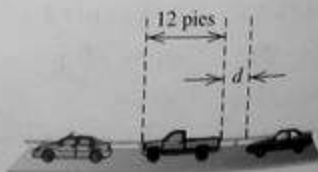
- (d) Usa la tabla para hallar las millas recorridas en que cada opción es preferible.

- 80 Flujo vehicular. Por un puente de 1 milla de largo circular automóviles. Cada automóvil mide 12 pies de largo y debe guardar una distancia de por lo menos d pies con el automóvil de adelante (ve la figura).

- (a) Demuestra que el máximo número de automóviles que puede haber en el puente a la vez es $\lfloor 5280/(12+d) \rfloor$, donde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la función mayor entero.

- (b) Si la velocidad de cada automóvil es v mi/h, demuestra que el máximo flujo vehicular F (en automóviles/hora) está dado por $F = \lfloor 5280v/(12+d) \rfloor$.

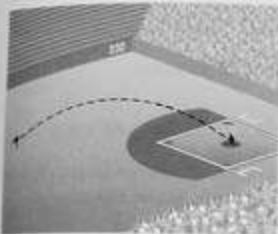
Ejercicio 80



3.6

Funciones cuadráticas

Figura 1



Si $a \neq 0$, entonces la gráfica de $y = ax^2$ es una parábola con vértice en el origen $(0, 0)$, que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$ (ve las figs. 4 y 5 de la sección 3.5). En esta sección demostraremos que la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

se puede obtener por desplazamientos verticales, horizontales o ambos de la gráfica de $y = ax^2$, por lo cual también es una parábola. Una aplicación importante de tales ecuaciones es describir la trayectoria de un objeto cerca de la superficie de la Tierra, cuando nada más actúa sobre el objeto la atracción gravitacional. Para ilustrar lo anterior, si el jardinero de un equipo de béisbol lanza una pelota al campo (figura 1), y si la resistencia del aire y otras fuerzas externas se desprecian, la trayectoria de la bola es una parábola. Si se introducen ejes coordenados apropiados, la trayectoria coincide con la gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ para alguna a , b y c . La función determinada por esta ecuación recibe el nombre de *función cuadrática*.

Definición de función cuadrática

Una función f es una **función cuadrática** si

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde a , b y c son números reales con $a \neq 0$.

Si $b = c = 0$ en la definición anterior, entonces $f(x) = ax^2$ y la gráfica es una parábola con vértice en el origen. Si $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces

$$f(x) = ax^2 + c,$$

y, de acuerdo con nuestro análisis de desplazamientos verticales de la sección 3.5, la gráfica es una parábola con vértice en el punto $(0, c)$ en el eje de las y . El próximo ejemplo proporciona demostraciones específicas.

EJEMPLO 1 Trazado de la gráfica de una función cuadrática

Traza la gráfica de f si

$$(a) f(x) = -\frac{1}{2}x^2 \quad (b) f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$$

SOLUCIÓN

(a) Dado que f es par, la gráfica de f (esto es, de $y = -\frac{1}{2}x^2$) es simétrica con respecto al eje y . Es similar en forma, pero más ancha que la parábola $y = -x^2$, trazada en la figura 5 de la sección 3.5. Varios puntos de la gráfica son $(0, 0)$, $(1, -\frac{1}{2})$, $(2, -2)$ y $(3, -\frac{9}{2})$. Graficamos y usamos simetría y llegamos al trazo de la figura 2.

(b) Para hallar la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$, desplazamos hacia arriba la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ una distancia de 4 y obtenemos el trazo de la figura 3.

Figura 2

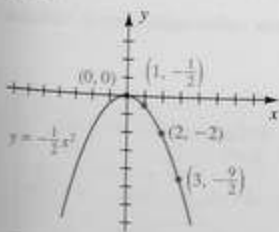


Figura 3



Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $b \neq 0$, entonces, completamos el cuadrado y podemos cambiar la forma a

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

para algunos números reales h y k . Esta técnica se presenta en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 2 Expresión de una función cuadrática como

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Si $f(x) = 3x^2 + 24x + 50$, expresa $f(x)$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

SOLUCIÓN 1 Antes de completar el cuadrado, es esencial factorizar el coeficiente de x^2 de los primeros dos términos de $f(x)$, de esta manera:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 && \text{dado} \\ &= 3(x^2 + 8x + \quad) + 50 && \text{factorizar 3 de } 3x^2 + 24x \end{aligned}$$

Ahora completamos el cuadrado para la expresión $x^2 + 8x$ dentro del paréntesis sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x ; esto es, $(\frac{8}{2})^2$, o sea 16. Sin embargo, si sumamos 16 a la expresión dentro del paréntesis, entonces, debido al factor 3, en realidad estamos sumando 48 a $f(x)$; por tanto, debemos compensar restando 48:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 8x + \quad) + 50 && \text{dado} \\ &= 3(x^2 + 8x + 16) + (50 - 48) && \text{completar el cuadrado para } x^2 + 8x \\ &= 3(x + 4)^2 + 2 && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

La última expresión tiene la forma $a(x - h)^2 + k$ con $a = 3$, $h = -4$ y $k = 2$.

SOLUCIÓN 2 Comenzamos por dividir ambos lados entre el coeficiente de x^2 .

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 && \text{dado} \\ \frac{f(x)}{3} &= x^2 + 8x + \frac{50}{3} && \text{dividir entre 3} \\ &= x^2 + 8x + \frac{16}{3} + \frac{50}{3} - 16 && \text{sumar y restar 16, el número que completa el cuadrado para } x^2 + 8x \\ &= (x + 4)^2 + \frac{2}{3} && \text{ecuación equivalente} \\ f(x) &= 3(x + 4)^2 + 2 && \text{multiplicar por 3} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{2}(8)\right]^2 = 16 \rightarrow$$

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces, al completar el cuadrado como en el ejemplo 2, vemos que la gráfica de f es la misma que la gráfica de una ecuación del tipo

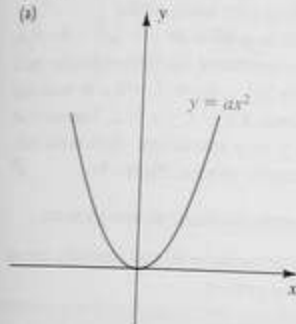
$$y = a(x - h)^2 + k.$$

Podemos obtener la gráfica de esta ecuación a partir de la gráfica de $y = ax^2$ [figura 4(a)] por medio de un desplazamiento horizontal y uno vertical:

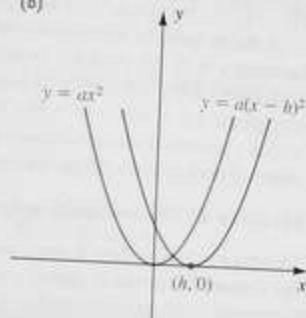
primero, igual que en la figura 4(b), obtenemos la gráfica de $y = a(x - h)^2$ corriendo la gráfica de $y = ax^2$ a la izquierda o a la derecha, dependiendo del signo de h (la figura ilustra el caso con $h > 0$). A continuación, como en la figura 4(c), desplazamos la gráfica en (b) en sentido vertical una distancia $|k|$ (la figura presenta el caso con $k > 0$). Se deduce que la gráfica de una función cuadrática es una parábola con un eje vertical.

Figura 4

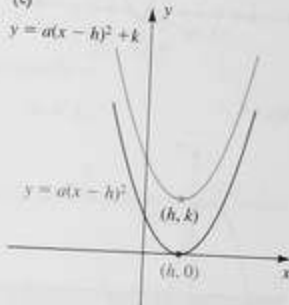
(a)



(b)



(c)



El dibujo de la figura 4(c) ilustra una posible gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Si $a > 0$, el punto (h, k) es el más bajo de la parábola, y la función f tiene un **valor mínimo** $f(h) = k$. Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y su punto (h, k) es el punto más alto. En este caso, la función f tiene un **valor máximo** $f(h) = k$.

Hemos obtenido este resultado.

Ecuación estándar de una parábola con eje vertical

La gráfica de la ecuación

$$y = a(x - h)^2 + k$$

para $a \neq 0$ es una parábola con vértice $V(h, k)$ y un eje vertical. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

Por conveniencia, muchas veces nos referimos a la parábola $y = ax^2 + bx + c$ al considerar la gráfica de esta ecuación.

EJEMPLO 3 Determinación de la ecuación estándar de una parábola

Expresa $y = 2x^2 - 6x + 4$ como una ecuación estándar de una parábola con un eje vertical. Encuentra el vértice y traza la gráfica.

Figura 5

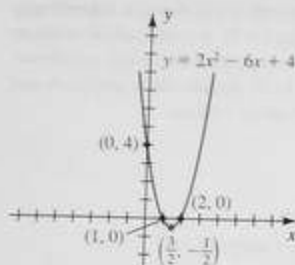


Figura 6

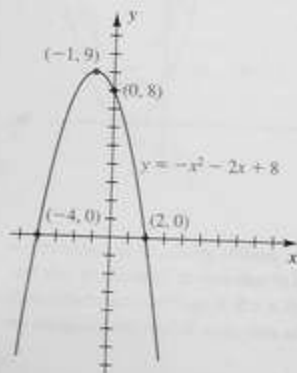
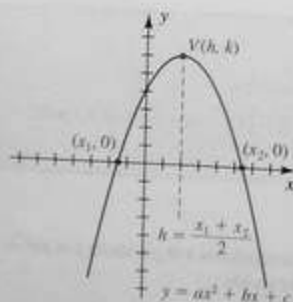


Figura 7



SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 y &= 2x^2 - 6x + 4 \\
 &= 2(x^2 - 3x + \quad) + 4 \\
 &= 2(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + (4 - \frac{9}{2}) \\
 &= 2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

dada
 factorizar 2 de $2x^2 - 6x$
 completar el cuadrado para $x^2 - 3x$
 ecuación equivalente

La última ecuación tiene la forma de la ecuación estándar de una parábola con $a = 2$, $h = \frac{3}{2}$ y $k = -\frac{1}{2}$. Por tanto, el vértice $V(h, k)$ de la parábola es $V(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Puesto que $a = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba.

A fin de hallar la intersección en y de la gráfica de $y = 2x^2 - 6x + 4$, hacemos $x = 0$, con lo cual $y = 4$. Para encontrar las intersecciones en x igualamos y a 0 y resolvemos la ecuación $2x^2 - 6x + 4 = 0$ o la ecuación equivalente $2(x - 1)(x - 2) = 0$ y llegamos a $x = 1$ y $x = 2$. Trazamos el vértice y usamos las intersecciones en x y en y , con lo que obtenemos suficientes puntos para un dibujo razonablemente preciso (figura 5).

EJEMPLO 4 Determinación de la ecuación estándar de una parábola

Expresa $y = -x^2 - 2x + 8$ como ecuación estándar de una parábola con un eje vertical. Encuentra el vértice y traza la gráfica.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 y &= -x^2 - 2x + 8 \\
 &= -(x^2 + 2x + \quad) + 8 \\
 &= -(x^2 + 2x + 1) + (8 + 1) \\
 &= -(x + 1)^2 + 9
 \end{aligned}$$

dada
 factorizar -1 de $-x^2 - 2x$
 completa el cuadrado para $x^2 + 2x$
 ecuación equivalente

Esta es la ecuación estándar de una parábola con $h = -1$, $k = 9$ y, por tanto, el vértice es $(-1, 9)$. Dado que $a = -1 < 0$, la parábola abre hacia abajo.

La intersección en y de la gráfica de $y = -x^2 - 2x + 8$ es el término constante 8. Para encontrar las intersecciones en x , resolvemos $-x^2 - 2x + 8 = 0$ o bien, lo que es equivalente, $x^2 + 2x - 8 = 0$. Al factorizar obtenemos $(x + 4)(x - 2) = 0$; en consecuencia, las intersecciones son $x = -4$ y $x = 2$. El uso de esta información nos dará el trazo de la figura 6.

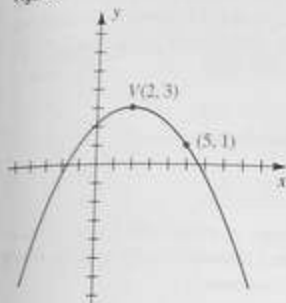
Si una parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene intersecciones en x x_1 y x_2 , como se ilustra en la figura 7 para el caso $a < 0$, el eje de la parábola es la recta vertical $x = (x_1 + x_2)/2$ que pasa por el punto medio de $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$. Así pues, la coordenada x igual a h del vértice (h, k) es $h = (x_1 + x_2)/2$. En las figuras 5 y 6 se exhiben algunos casos especiales.

En el ejemplo siguiente encontramos una ecuación de una parábola a partir de los datos dados.

EJEMPLO 5 Determinación de la ecuación de una parábola con un vértice dado

Encuentra la ecuación de una parábola con vértice $V(2, 3)$ y un eje vertical que pasa por el punto $(5, 1)$.

Figura 8



SOLUCIÓN La figura 8 muestra el vértice V , el punto $(5, 1)$ y una posible posición de la parábola. Con la ecuación estándar

$$y = a(x - h)^2 + k$$

con $h = 2$ y $k = 3$ obtenemos

$$y = a(x - 2)^2 + 3.$$

Para hallar a , aprovechamos que $(5, 1)$ está en la parábola; así pues, es una solución de la última ecuación; por tanto,

$$1 = a(5 - 2)^2 + 3, \quad \text{o} \quad a = -\frac{2}{9}.$$

En consecuencia, una ecuación para la parábola es

$$y = -\frac{2}{9}(x - 2)^2 + 3.$$

El teorema adjunto nos da una fórmula sencilla para localizar el vértice de una parábola.

Teorema para localizar el vértice de una parábola

El vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene la coordenada x

$$-\frac{b}{2a}.$$

DEMOSTRACIÓN Comencemos por escribir $y = ax^2 + bx + c$ como

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c.$$

En seguida completamos el cuadrado sumando $\left(\frac{1}{2} \frac{b}{a}\right)^2$ a la expresión dentro del paréntesis:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Advertirás que si $b^2/(4a^2)$ se suma *dentro* del paréntesis, entonces, debido al factor a de *fuera*, hemos sumado $b^2/(4a)$ a y ; por tanto, debemos compensarlo restando $b^2/(4a)$. La última ecuación se escribe

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Ésta es la ecuación de una parábola que tiene vértice (h, k) con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$.

No es necesario recordar la fórmula para la coordenada y del vértice de la parábola en el resultado anterior. Una vez que encontramos la coordenada x , estamos en posibilidad de calcular la coordenada y al sustituir $-b/(2a)$ para x en la ecuación de la parábola.



EJEMPLO 6 Determinación del vértice de una parábola

Encuentra el vértice de la parábola $y = 2x^2 - 6x + 4$.

SOLUCIÓN Consideramos esta parábola en el ejemplo 3 y encontramos el vértice al completar el cuadrado; ahora usaremos la fórmula del vértice con $a = 2$ y $b = -6$ y obtendremos la coordenada x

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Luego, encontramos la coordenada y al sustituir x con $\frac{3}{2}$ en la ecuación dada:

$$y = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{2}\right) + 4 = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, el vértice es $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (figura 5).

Puesto que la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ para $a \neq 0$ es una parábola, podemos usar la fórmula del vértice para ayudarnos a encontrar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática. En términos específicos, dado que la coordenada x del vértice V es $-b/(2a)$, la coordenada y de V es el valor de función $f(-b/(2a))$. Además, como la parábola abre hacia abajo si $a < 0$ y hacia arriba si $a > 0$, este valor de función es el valor máximo o mínimo, respectivamente, de f . Estos datos se pueden resumir de esta manera.

Teorema del valor máximo o mínimo de una función cuadrática

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, entonces $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ es

- (1) el valor máximo de f si $a < 0$
- (2) el valor mínimo de f si $a > 0$

Usaremos este teorema en los dos ejemplos que vienen.

EJEMPLO 7 Determinación de un valor máximo (o mínimo)

Encuentra el vértice de la parábola $y = f(x) = -2x^2 - 12x - 13$.

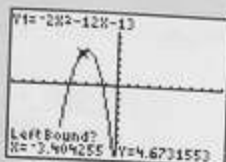
SOLUCIÓN Dado que el coeficiente de x^2 es -2 y $-2 < 0$, la parábola abre hacia abajo y el valor y del vértice es un valor máximo. Asignamos $-2x^2 - 12x - 13$ a Y_1 y graficamos Y_1 en una pantalla estándar.

Encuentra un valor máximo.

TI-83 Plus

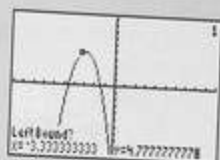
2nd CALC 4

Usa la tecla del cursor izquierdo para mover el cursor parpadeante a la izquierda del vértice y oprime **ENTER**.

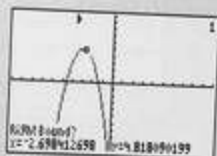
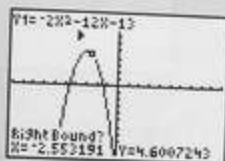


TI-86

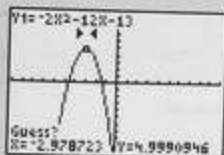
GRAPH MORE MATH(F1) FMAX(F5)



Ahora mueve el cursor a la derecha del vértice y oprime **ENTER**.



Como intento, pon el cursor entre las cotas izquierda y derecha y oprime **ENTER**.

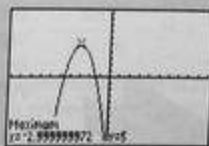
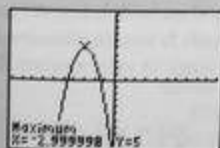


Nota sobre la calculadora: En forma alternativa, podemos teclear los valores x para las respuestas. Las siguientes respuestas producen un máximo de 5 en $x = -3$.

Left Bound? -4 **ENTER**

Right Bound? -2 **ENTER**

Guess? -3 **ENTER**



La calculadora indica que el vértice es aproximadamente $(-3, 5)$. (Puedes obtener diferentes resultados, dependiendo de las ubicaciones del cursor.)

(continúa)

También podemos encontrar un valor máximo a partir de la pantalla original como sigue. (Supón que ya vimos la gráfica y calculamos que la coordenada x del vértice está entre -3.5 y -2.5 .) Primero encontramos el valor x del vértice.

Usa la función máximo.

MATH 7 VARS > 1 1 +
X,T,θ,n , -3.5 , -2.5) ENTER

2nd CALC MORE fMax(F2) 2nd
alpha Y 1 , x-VAR , -2.5) ENTER

Luego encontramos el valor y del vértice usando el resultado de fMax (está guardado en ANS).

VARS > 1 1
(2nd ANS) ENTER

2nd alpha Y 1
(2nd ANS) ENTER

fMax(Y1,X,-3.5,-
2.5)
-3.000001138
Y1(Ans)
5

fMax(Y1,X,-3.5,-2.5)
-2.99999997232
Y1(Ans)
5
fMax fMax arc

Observa los resultados "extraños" dados por fMax. (Tu profesor no se impresionará tanto si te dice que el vértice es $(-3.000001138, 5)$.) En este caso una calculadora es de utilidad aunque es fácil calcular

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2(-2)} = -3 \quad \text{y} \quad f(-3) = 5.$$

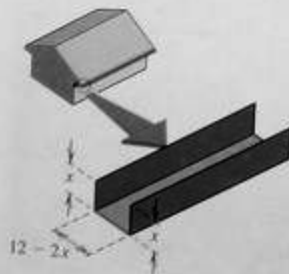
con lo que obtenemos el vértice de $(-3, 5)$, y una respuesta que le gustará a tu profesor. ✓



EJEMPLO 8 Determinación del valor máximo de una función cuadrática

A partir de una lámina metálica rectangular y larga, de 12 pulg de ancho, hay que fabricar un canal doblando hacia arriba dos lados, de modo que sean perpendiculares a la lámina. ¿Cuántas pulgadas deben doblarse para dar al canal su máxima capacidad?

Figura 9



SOLUCIÓN El canal se ilustra en la figura 9. Si x denota la cantidad de pulgadas dobladas en cada lado, el ancho de la base del canal es de $12 - 2x$ pulg. La capacidad será máxima cuando la sección transversal del rectángulo con lados de longitudes x y $12 - 2x$ tenga su valor máximo. Denotamos este valor con $f(x)$ y llegamos a

$$\begin{aligned} f(x) &= x(12 - 2x) \\ &= 12x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 12x, \end{aligned}$$

que tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a = -2$, $b = 12$ y $c = 0$. En vista de que f es una función cuadrática y $a = -2 < 0$, del teorema anterior se

deduce que el valor máximo de f se da en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-2)} = 3.$$

Por tanto, hay que doblar hacia arriba 3 pulg en cada lado a fin de alcanzar la capacidad máxima.

Como solución alternativa, podemos observar que la gráfica de la función $f(x) = x(12 - 2x)$ tiene intersecciones x en $x = 0$ y $x = 6$. En consecuencia, el promedio de las intersecciones,

$$x = \frac{0 + 6}{2} = 3,$$

es la coordenada x del vértice de la parábola y el valor que produce la capacidad máxima.

En el capítulo 2 resolvimos algebraicamente algunas ecuaciones cuadráticas y desigualdades. El próximo ejemplo indica cómo proceder con ayuda de una calculadora graficadora.

EJEMPLO 9 Análisis del vuelo de un proyectil

Un proyectil es disparado verticalmente hacia arriba desde una altura de 600 pies sobre el suelo. Su altura $h(t)$ en pies sobre el suelo, después de t segundos, está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 803t + 600.$$

- Define una pantalla razonable que incluya todas las características pertinentes de la gráfica de h .
- Estima cuándo la altura del proyectil será de 5000 pies.
- Indica cuándo el proyectil estará a más de 5000 pies sobre el suelo.
- ¿Cuánto tiempo estará el proyectil en vuelo?

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de h es una parábola que abre hacia abajo. Para evaluar Y_{\max} (advertirá que usamos x y y con t y h en forma indistinta), calculemos el valor máximo de h . Con

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{803}{2(-16)} \approx 25.1,$$

vemos que la altura máxima es aproximadamente $h(25) \approx 10675$.

El proyectil sube durante los primeros 25 s aproximadamente, y debido a que su altura de 600 pies en $t = 0$ es pequeña en comparación con 10675, tardará sólo un poco más de otros 25 s en caer a tierra. Puesto que h y t son positivas, una pantalla adecuada es

$$[0, 60, 5] \quad \text{por} \quad [0, 11\,000, 1000].$$

(continúa)

Nota sobre la calculadora: Una vez que determinamos los valores X_{\min} y X_{\max} podemos usar la función ZoomFit para graficar una función sobre el intervalo $[X_{\min}, X_{\max}]$. En este ejemplo asignamos 0 a X_{\min} y 51 a X_{\max} , y luego escogemos ZoomFit en el menú ZOOM.

(b) Deseamos evaluar cuándo cortará la gráfica de h la recta horizontal $h(t) = 5000$, por lo que efectuamos las asignaciones

$$Y_1 = -16x^2 + 803x + 600 \quad \text{y} \quad Y_2 = 5000$$

y obtenemos una imagen semejante a la de la figura 10. Es importante recordar que la gráfica de Y_1 muestra sólo la altura en el tiempo t , no es la trayectoria del proyectil, que es vertical. Con la función intersect, encontramos que el mínimo valor de t para el que $h(t) = 5000$ es de unos 6.3 segundos.

En virtud de que el vértice está en el eje de la parábola, el otro tiempo en que $h(t)$ es 5000 es de alrededor de $25.1 - 6.3$, o sea 18.8 s después de 25.1; esto es, en $t = 25.1 + 18.8 = 43.9$ segundos.

(c) El proyectil estará a más de 5000 pies sobre el suelo cuando la gráfica de la parábola de la figura 10 se encuentre sobre la recta horizontal; esto es, cuando

$$6.3 < t < 43.9.$$

(d) El proyectil permanecerá en vuelo hasta que $h(t) = 0$. Esto corresponde a la intersección x de la figura 10. Con una función cero o raíz, obtenemos $t = 50.9$ s. [Notarás que como la intersección en y no es cero, es incorrecto simplemente duplicar el valor de t del vértice para hallar el tiempo total del vuelo; sin embargo, esto sería aceptable en problemas donde $h(0) = 0$.]

Al trabajar con funciones cuadráticas, a menudo nos interesa encontrar el vértice y las intersecciones en x . Por lo general, una función cuadrática dada es muy similar a una de las tres formas que se enumeran en la tabla.

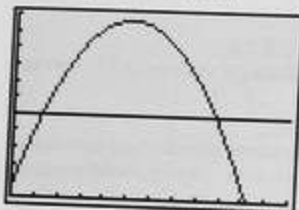
Relación entre formas de función cuadrática y su vértice y las intersecciones en x

Forma	Vértice (h, k)	Intersecciones en x (si hay alguna)
(1) $y = f(x) = a(x - h)^2 + k$	h y k como en la forma	$x = h \pm \sqrt{-k/a}$ (ve abajo)
(2) $y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$h = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad k = f(h)$	$x = x_1, x_2$
(3) $y = f(x) = ax^2 + bx + c$	$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = f(h)$	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (ve abajo)

Si los radicandos en (1) o (3) son negativos, no hay intersecciones en x . Para hallar las intersecciones en x con la forma (1), usamos la ecuación

Figura 10

$[0, 60, 5]$ por $[0, 11\,000, 1000]$



cuadrática especial de la página 82. Si tienes una función cuadrática de la forma (3) y deseas hallar el vértice y las intersecciones en x , primero encuentra las intersecciones en x mediante la fórmula cuadrática. Entonces podrás obtener la coordenada x del vértice h , con facilidad porque

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = h \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por supuesto que si la función de la forma (3) es fácilmente factorizable, no es necesario usar la fórmula cuadrática.

En un capítulo posterior abundaremos sobre las parábolas.

3.6 Ejercicios

Ejercicios 1 al 4: encuentra la ecuación estándar de cualquier parábola que tenga vértice V .

1 $V(-3, 1)$

2 $V(4, -2)$

3 $V(0, -3)$

4 $V(-2, 0)$

Ejercicios 5 al 12: expresa $f(x)$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

5 $f(x) = -x^2 - 4x - 8$

6 $f(x) = x^2 - 6x + 11$

7 $f(x) = 2x^2 - 12x + 22$

8 $f(x) = 5x^2 + 20x + 17$

9 $f(x) = -3x^2 - 6x - 5$

10 $f(x) = -4x^2 + 16x - 13$

11 $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 9x - 34$

12 $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{22}{3}$

Ejercicios 13 al 22: (a) usa la fórmula cuadrática para hallar los ceros de f ; (b) encuentra el valor máximo o mínimo de $f(x)$ y (c) traza la gráfica de f .

13 $f(x) = x^2 - 4x$

14 $f(x) = -x^2 - 6x$

15 $f(x) = -12x^2 + 11x + 15$

16 $f(x) = 6x^2 + 7x - 24$

17 $f(x) = 9x^2 + 24x + 16$

18 $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

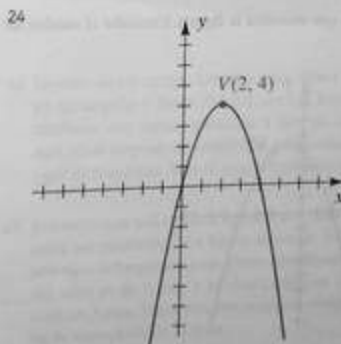
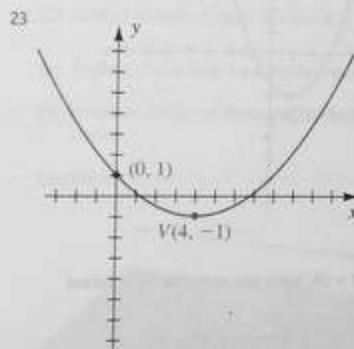
19 $f(x) = x^2 + 4x + 9$

20 $f(x) = -3x^2 - 6x - 6$

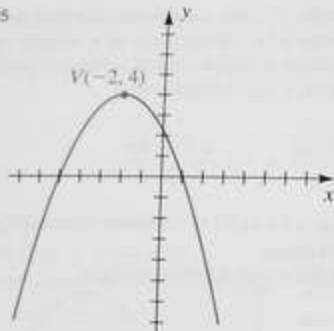
21 $f(x) = -2x^2 + 20x - 43$

22 $f(x) = 2x^2 - 4x - 11$

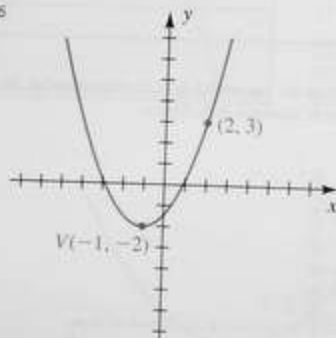
Ejercicios 23 al 26: encuentra la ecuación estándar de la parábola que se muestra en la figura.



25



26

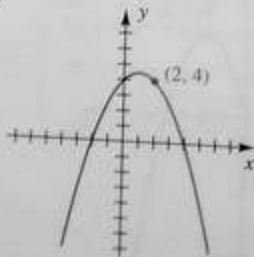


Ejercicios 27 y 28: halla una ecuación de la forma

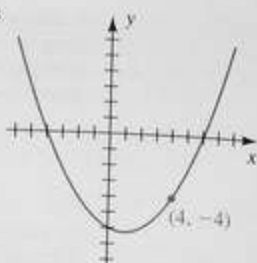
$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

de la parábola que muestra la figura. Consulta el cuadro de la pág. 222.

27



28

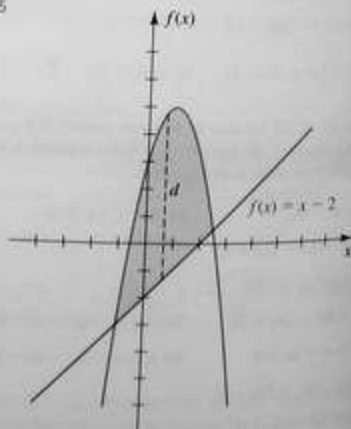


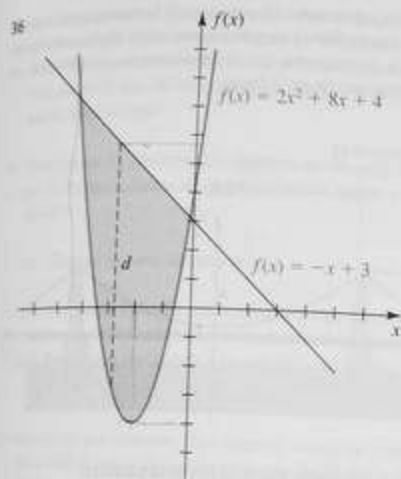
Ejercicios 29 al 34: determina la ecuación estándar de una parábola que tenga un eje vertical y satisfaga las condiciones dadas.

- 29 Vértice $(0, -2)$, que pase por $(3, 25)$
- 30 Vértice $(0, 5)$, que pase por $(2, -3)$
- 31 Vértice $(3, 5)$, intersección en x igual a 0
- 32 Vértice $(4, -7)$, intersección en x igual a -4
- 33 Intersecciones en $x = 3$ y 5 , el punto más alto tiene coordenada y de 4
- 34 Intersecciones en $x = 8$ y 0 , el punto más bajo tiene coordenada y de -48

Ejercicios 35 y 36: encuentra la máxima distancia vertical d entre la parábola y la recta para la región azul.

35





Ejercicios 37 y 38: el ozono se presenta en todos los niveles de la atmósfera terrestre y su densidad varía según la estación del año y la latitud. En Edmonton, Canadá, la densidad $D(h)$ del ozono (en 10^{-3} cm/km) para altitudes h entre 20 km y 35 km se determinó a nivel experimental. Para cada $D(h)$ y estación del año, calcula la altitud a la que la densidad del ozono es máxima.

37 $D(h) = -0.058h^2 + 2.867h - 24.239$ (otoño)

38 $D(h) = -0.078h^2 + 3.811h - 32.433$ (primavera)

39 Rapidez de crecimiento infantil. La rapidez de crecimiento (en libras por mes) de un menor está relacionada con el peso actual x (en libras: lb) por la fórmula $y = cx(21 - x)$, donde c es una constante positiva y $0 < x < 21$. ¿A qué peso se presentará la máxima rapidez de crecimiento?

40 Rendimiento de gasolina. El número de millas M que cierto automóvil puede recorrer con un galón de gasolina, a una velocidad de v mph, está dado por

$$M = -\frac{1}{30}v^2 + \frac{5}{3}v \quad \text{para } 0 < v < 70.$$

(a) Indica la velocidad más económica para un viaje.

(b) Proporciona el valor máximo de M .

41 Altura de un proyectil. Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio con una velocidad inicial de 144 pies/s. Su distancia $s(t)$ en pies sobre el suelo, después de t s, está dada por la ecuación

$$s(t) = -16t^2 + 144t + 100.$$

(a) Encuentra su máxima distancia arriba del suelo.

(b) Indica la altura del edificio.

42 Vuelo de un proyectil. Un objeto es lanzado en forma vertical hacia arriba con una velocidad inicial de v_0 pies/s, y su distancia $s(t)$ en pies sobre el suelo después de t s está dada por $s(t) = -16t^2 + v_0t$.

(a) Si el objeto toca tierra después de 12 s, encuentra su velocidad inicial v_0 .

(b) Halla su distancia máxima sobre el suelo.

43 Proporciona dos números reales positivos cuya suma sea 40 y su producto sea un máximo.

44 Encuentra dos números reales cuya diferencia sea 40 y su producto sea mínimo.

45 Construcción de jaulas. En la construcción de seis jaulas para animales han de utilizarse 1000 pies de enrejado, según se ve en la figura.

(a) Expresa el ancho y como función de la longitud x .

(b) Expresa el área total A encerrada como función de x .

(c) Encuentra las dimensiones que maximicen el área encerrada.

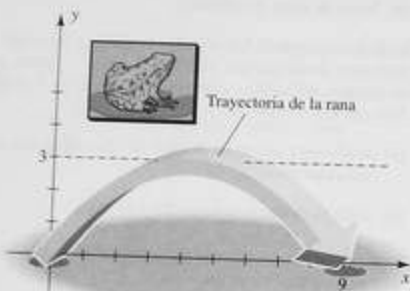
Ejercicio 45



46 Cercado de un campo. Un agricultor desea cercar un campo rectangular y luego dividirlo en tres lotes rectangulares mediante dos cercas paralelas a uno de los lados. Si el agricultor dispone de sólo 1000 yd (yardas) de enrejado, ¿qué dimensiones dará el área rectangular máxima?

47 Animales que saltan. La trayectoria del salto de un animal suele ser parabólica. La figura siguiente ilustra el salto de una rana sobrepuesto a un plano coordenado. La longitud del salto es de 9 pies y la altura máxima con respecto al suelo es 3 pies. Encuentra una ecuación estándar para calcular la trayectoria de la rana.

Ejercicio 47



48 **Proyectil humano** En la década de 1940, Emmanuel Zacchini realizaba con regularidad el acto de la bala humana en el circo Ringling Brothers and Barnum & Bailey. La boca del cañón estaba a 15 pies del suelo y la distancia horizontal total que recorría era de 175 pies. Cuando el cañón se apunta a un ángulo de 45° , la ecuación del tiro parabólico (ve la figura) tiene la forma $y = ax^2 + x + c$.

- Con la información dada, determina una ecuación del vuelo.
- Encuentra la altura máxima alcanzada por la bala humana.

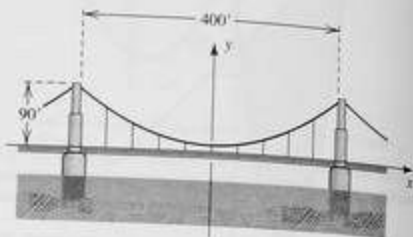
Ejercicio 48



49 **Forma de un puente colgante** El peso de una sección de un puente colgante se distribuye de manera uniforme entre dos torres gemelas que están a 400 pies una de otra y se elevan 90 pies sobre la calzada horizontal (ve la figura). El

cable sujeto entre los extremos de las torres tiene la forma de una parábola y su punto central está a 10 pies sobre la calzada. Supongamos que se introducen ejes coordenados, como se aprecia en la figura.

Ejercicio 49



- Encuentra una ecuación de la parábola.
- Se utilizan nueve cables verticales equidistantes para sostener el puente (ve figura). Indica la longitud total de estos soportes.

50 **Diseño de una carretera** Un grupo de ingenieros diseña un tramo que enlazará una autopista horizontal con otra que tiene una pendiente de 20% (esto es, pendiente $\frac{1}{5}$), como se muestra en la figura. La transición suave se efectuará a lo largo de 800 pies, y un tramo parabólico de la carretera servirá para enlazar los puntos A y B. Si la ecuación del segmento parabólico es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, es posible demostrar que la pendiente de la línea tangente al punto $P(x, y)$ sobre la parábola está dada por $m = 2ax + b$.

- Encuentra una ecuación de la parábola que tenga una línea tangente de pendiente 0 en A y $\frac{1}{5}$ en B.
- Proporciona las coordenadas de B.

Ejercicio 50



52. **Entrada parabólica** La entrada a un edificio tiene la forma de un arco parabólico y mide 9 pies de alto en el centro y 6 pies de ancho en la base. Si hay que meter una caja rectangular de 8 pies de alto, ¿cuál es el ancho máximo que puede tener la caja?

53. **Rectángulo de alambre** Un alambre de 24 pulg de largo se dobla en forma de rectángulo con ancho x y longitud y .

- Expresa y como función de x .
- Determina el área A del rectángulo como función de x .
- Demuestra que el área A es máxima si el rectángulo es un cuadrado.


54. **Descuento por volumen** Una empresa comercial vende tenis a \$40 el par si el pedido es menor de 50 pares. Si un distribuidor solicita 50 o más pares (hasta 600), el precio por par se reduce 4 centavos por la cantidad solicitada. ¿De cuántos pares debe ser el pedido para producir la máxima utilidad para el fabricante?

54. **Descuento por grupo** Una agencia ofrece viajes en grupo a razón de \$60 por persona para los primeros 30 participantes. En grupos más grandes, hasta de 90, cada integrante recibe un descuento de \$0.50 por participante después de los primeros 30; por ejemplo, con 31 turistas, el costo por persona es de \$59.50. Indica de cuántas personas debe ser el grupo a fin de que resulte la máxima ganancia para la agencia.

55. **Tarifas de cable** Una compañía de televisión por cable da servicio a 5000 usuarios y cobra \$20 por mes. Un estudio de mercado indica que por cada dólar menos en la tarifa mensual, se suscribirán 500 nuevos clientes. Ahora bien, $R(x)$ denota el ingreso total mensual cuando el cobro es de x dólares mensuales.


- Determina la función de ingreso R .
- Traza la gráfica de R para hallar el valor de x que produzca un ingreso máximo mensual.


56. **Renta de departamentos** Una inmobiliaria posee 180 departamentos que mantiene ocupados cuando los renta a \$300 al mes. La compañía estima que por cada \$10 de aumento en la renta, se desocuparán cinco departamentos. ¿Cuál debe ser el monto de la renta de modo que la compañía reciba el máximo ingreso mensual?

 **Ejercicios 57 y 58:** grafica $y = x^3 - x^{1/3}$ y f en el mismo plano coordenado y calcula los puntos de intersección.

57 $f(x) = x^2 - x - \frac{1}{4}$

 58 $f(x) = -x^2 + 0.5x + 0.4$

 59 En el mismo plano coordenado, grafica $y = ax^2 + x + 1$, para $a = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$, y 4, y describe cómo el valor de a afecta la gráfica.

 60 En el mismo plano coordenado grafica, $y = x^2 + bx + 1$, para $b = 0, \pm 1, \pm 2$ y ± 3 , y describe cómo el valor de b afecta la gráfica.

61. **Precipitación en Seattle** La precipitación mensual promedio (en pulg) para Seattle aparece en esta tabla. (Nota: excepto abril.)

- Gráfica la precipitación mensual promedio.
- Elabora un modelo matemático de los datos con una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Grafica f y los datos en los mismos ejes coordenados.
- Pronostica el promedio de lluvia en abril con f . Compara tu pronóstico con el valor real de 2.4 pulg.

Mes	Precipitación
Ene.	5.7
Feb.	4.2
Mar.	3.8
May.	1.7
Jun.	1.6
Jul.	0.8
Ago.	1.0
Sep.	1.8
Oct.	2.1
Nov.	4.0
Dic.	5.4

82. Homicidios con arma de fuego. En la tabla que sigue aparecen los números anuales de homicidios con arma de fuego (en miles) de 1982 a 1993.

Año	Homicidios
1982	8.3
1983	8.0
1984	7.6
1985	7.9
1986	8.3
1987	8.0
1988	8.3
1989	9.2
1990	10.0
1991	11.6
1992	12.5
1993	13.3

- (a) Grafica los datos. Analiza cualquier tendencia general de los datos.
- (b) Haz un modelo matemático de estos datos con la función cuadrática de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.
- (c) Grafica f junto con los datos.

83. Curvas verticales en cimas. Cuando los ingenieros planean la construcción de carreteras, deben diseñar colinas a fin de producir una visibilidad adecuada para los conductores; las colinas se conocen como *curvas verticales en cimas*. Las curvas verticales en cimas modifican la pendiente de una carretera. Los ingenieros usan una forma parabólica para una colina de carretera, con el vértice ubicado en la cima. Dos carriles con diferentes pendientes han de unirse con una curva de cima parabólica. La carretera pasa por los puntos $A(-800, -48)$, $B(-500, 0)$, $C(0, 40)$, $D(500, 0)$ y $E(800, -48)$, según se aprecia en la figura. El carril es lineal entre A y B , parabólico entre B y D , y otra vez lineal entre D y E .

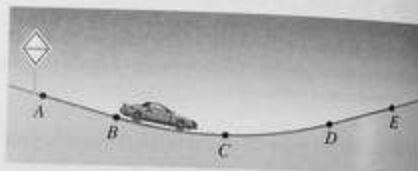
Ejercicio 63



- (a) Encuentra una función f definida por partes que sea modelo matemático del carril entre los puntos A y E .
- (b) Grafica f en la pantalla $[-800, 800, 100]$ por $[-100, 200, 100]$.

84. Curvas verticales en depresiones. Consulta el ejercicio 63. Los valles u hondonadas en autopistas se conocen como *curvas verticales en depresiones*, mismas que también se pueden modelar matemáticamente con parábolas. En cierto trabajo, deben unirse dos carreteras con diferentes pendientes que se encuentran en una curva en depresión. La carretera pasa por los puntos $A(-500, 243\frac{1}{2})$, $B(0, 110)$, $C(750, 10)$, $D(1500, 110)$ y $E(2000, 243\frac{1}{2})$, como se ve en la figura, y es lineal entre A y B , parabólica entre B y D y lineal entre D y E .

Ejercicio 64



- (a) Halla una función f definida por partes que sea modelo matemático de la carretera entre los puntos A y E .
- (b) Grafica f en la pantalla $[-500, 2000, 500]$ por $[0, 800, 100]$.

85. Trayectoria parabólica. En condiciones ideales, un objeto lanzado desde el suelo seguirá una trayectoria parabólica de la forma $f(x) = ax^2 + bx$, donde a y b son constantes y x representa la distancia horizontal recorrida por el objeto.

- (a) Determina a y b de modo que el objeto alcance una altura máxima de 100 pies y recorra una distancia horizontal de 150 pies antes de tocar tierra.
- (b) Grafica $f(x) = ax^2 + bx$ en la pantalla $[0, 180, 50]$ por $[0, 120, 50]$.
- (c) Grafica $y = kx^2 + bx$, donde $k = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, 2, 4$, en la misma pantalla de $[0, 600, 50]$ por $[0, 400, 50]$. ¿En qué forma afecta la constante k la trayectoria del objeto?

3.7

Operaciones
sobre funciones

A menudo las funciones se definen en términos de sumas, diferencias, productos o divisiones de varias expresiones; por ejemplo, si

$$h(x) = x^2 + \sqrt{5x+1},$$

podemos considerar $h(x)$ como una suma de valores de las funciones f y g dadas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{5x+1}.$$

Nos referimos a h como la *suma* de f y g y la denotamos con $f + g$. Así,

$$h(x) = (f + g)(x) = x^2 + \sqrt{5x+1}.$$

En general, si f y g son funciones *cualesquiera*, usamos la terminología y notación de la siguiente tabla.

Suma, diferencia, producto y cociente de funciones

Términos	Valor de la función
suma $f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
diferencia $f - g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
producto fg	$(fg)(x) = f(x)g(x)$
cociente $\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

Aunque es verdad que

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

recuerda que, en general,

$$f(a + b) \neq f(a) + f(b).$$

Los dominios de $f + g$, $f - g$ y fg son la intersección I de los dominios de f y g ; esto es, los números que son *comunes* a ambos dominios. El dominio de $\frac{f}{g}$ es el subconjunto de I formado por toda x en I tal que $g(x) \neq 0$.

EJEMPLO 1 Determinación de los valores de función de $f + g$, $f - g$, fg y $\frac{f}{g}$

Si $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = x^3$, encuentra $(f + g)(2)$, $(f - g)(2)$, $(fg)(2)$ y $(\frac{f}{g})(2)$.

SOLUCIÓN Como $f(2) = 3(2) - 2 = 4$ y $g(2) = 2^3 = 8$, tenemos

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 4 + 8 = 12$$

$$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 4 - 8 = -4$$

$$(fg)(2) = f(2)g(2) = (4)(8) = 32$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

EJEMPLO 2 Determinación de $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$ y $(\frac{f}{g})(x)$

Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 3x + 1$, halla $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$ y $(\frac{f}{g})(x)$ e indica los dominios de las funciones respectivas.

SOLUCIÓN El dominio de f es el intervalo cerrado $[-2, 2]$, y el dominio de g es \mathbb{R} . La intersección de estos dominios es $[-2, 2]$, que es el dominio de $f + g$, $f - g$ y fg . Para el dominio de f/g , se excluye todo número x en $[-2, 2]$ tal que $g(x) = 3x + 1 = 0$ (es decir, $x = -\frac{1}{3}$), por tanto, tenemos:

$$(f + g)(x) = \sqrt{4 - x^2} + (3x + 1), \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{4 - x^2} - (3x + 1), \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$(fg)(x) = \sqrt{4 - x^2}(3x + 1), \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{3x + 1}, \quad -2 \leq x \leq 2 \text{ y } x \neq -\frac{1}{3}$$

Una función f es una **función polinomial** si $f(x)$ es un polinomio; esto es, si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n son números reales y los exponentes son enteros no negativos. Una función polinomial puede considerarse como una suma de funciones cuyos valores son del tipo cx^k , donde c es un número real y k es un entero no negativo. Observarás que las funciones cuadráticas consideradas en la sección anterior son funciones polinomiales.

Una **función algebraica** es una función que se puede manejar en términos de sumas, diferencias, productos, cocientes o raíces de funciones polinomiales.

ILUSTRACIÓN Función algebraica

$$\blacksquare \quad f(x) = 5x^4 - 2\sqrt{x} + \frac{x(x^2 + 5)}{\sqrt{x^3 + \sqrt{x}}}$$

Las funciones que no son algebraicas son **transcendentes**; por ejemplo, las funciones exponenciales y logarítmicas (capítulo 5).

En el resto de esta sección estudiaremos la forma en que dos funciones f y g se pueden usar para obtener las **funciones compuestas** $f \circ g$ y $g \circ f$ (que se leen “ f círculo g ” y “ g círculo f ”, respectivamente). Las funciones de este tipo son muy importantes en cálculo. La función $f \circ g$ se define a continuación.

Definición de función compuesta

La **función compuesta** $f \circ g$ de dos funciones f y g está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en el dominio de g tal que $g(x)$ esté en el dominio de f .

* Nota del RT: $f \circ g$ también se lee como “ f composición g ” y también como “ g seguida de f ”.

Un número está en el dominio de $(f \circ g)(x)$ si y solo si ambas $g(x)$ y $f(g(x))$ están definidas.

Figura 1



La figura 1 es un esquema de las relaciones entre f , g y $f \circ g$. Notarás que para x en el dominio de g , primero encontramos $g(x)$ (que debe estar en el dominio de f) y luego hallamos $f(g(x))$.

Para la función compuesta $g \circ f$ invertimos el orden; o sea, primero nos enfocamos en $f(x)$ y después en $g(f(x))$. El dominio de $g \circ f$ es el conjunto de toda x en el dominio de f tal que $f(x)$ esté en el dominio de g .

Puesto que la notación $g(x)$ se lee “ g de x ”, a veces decimos que g es una función de x . Para la función compuesta $f \circ g$, la notación $f(g(x))$ se lee “ f de g de x ”, y podríamos ver f como una función de $g(x)$. En este sentido, una función compuesta es la función de una función o, en términos más precisos, una función de los valores de otra función.

EJEMPLO 3 Determinación de funciones compuestas

Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$.

(a) Encuentra $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

(b) Halla $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

(c) Determina $f(g(2))$ en dos formas: primero con las funciones f y g por separado y luego con la función composición $f \circ g$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{definición de } f \circ g \\
 &= f(3x + 5) && \text{definición de } g \\
 &= (3x + 5)^2 - 1 && \text{definición de } f \\
 &= 9x^2 + 30x + 24 && \text{simplificando}
 \end{aligned}$$

Los dominios de f y g son \mathbb{R} . Puesto que para cada x en \mathbb{R} (el dominio de g), el valor de función $g(x)$ está en \mathbb{R} (el dominio de f), el dominio de $f \circ g$ también es \mathbb{R} . Observa que tanto $g(x)$ y $f(g(x))$ están definidas para todos los números reales.

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{definición de } g \circ f \\
 &= g(x^2 - 1) && \text{definición de } f \\
 &= 3(x^2 - 1) + 5 && \text{definición de } g \\
 &= 3x^2 + 2 && \text{simplificando}
 \end{aligned}$$

En vista de que para cada x en \mathbb{R} (el dominio de f), el valor de función $f(x)$ está en \mathbb{R} (el dominio de g), el dominio de $g \circ f$ es \mathbb{R} . Observa que ambas $f(x)$ y $g(f(x))$ están definidas para todos los números reales.

(c) A fin de hallar $f(g(2))$ usando $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$ por separado, procedemos de esta manera:

$$\begin{aligned}
 g(2) &= 3(2) + 5 = 11 \\
 f(g(2)) &= f(11) = 11^2 - 1 = 120
 \end{aligned}$$

Para encontrar $f(g(2))$ utilizando $f \circ g$, consultamos el inciso (a), donde encontramos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 9x^2 + 30x + 24.$$

(continúa)

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(g(2)) &= 9(2)^2 + 30(2) + 24 \\ &= 36 + 60 + 24 = 120. \end{aligned}$$

En el ejemplo 3, notarás que $f(g(x))$ y $g(f(x))$ no son siempre las mismas; esto es, $f \circ g \neq g \circ f$.

Si dos funciones f y g poseen ambas un dominio \mathbb{R} , el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$ también es \mathbb{R} (ejemplo 3). El ejemplo que viene muestra que el dominio de una función compuesta puede diferir de los de las dos funciones dadas.



EJEMPLO 4 Determinación de funciones compuestas

Sean $f(x) = x^2 - 16$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

(a) Encuentra $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

(b) Halla $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

SOLUCIÓN Primero observa que el dominio de f es \mathbb{R} y el dominio de g es el conjunto de todos los números reales no negativos; esto es, el intervalo $[0, \infty)$. Procedemos de este modo:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{definición de } f \circ g \\ &= f(\sqrt{x}) && \text{definición de } g \\ &= (\sqrt{x})^2 - 16 && \text{definición de } f \\ &= x - 16 && \text{simplificado} \end{aligned}$$

Si tomamos sólo la expresión final $x - 16$, podemos creer que el dominio de $f \circ g$ es \mathbb{R} , porque $x - 16$ está definida para todo número real x ; pero no es el caso. Por definición, el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en $[0, \infty)$ (el dominio de g) tal que $g(x)$ está en \mathbb{R} (el dominio de f). Puesto que $g(x) = \sqrt{x}$ está en \mathbb{R} para toda x en $[0, \infty)$, se deduce que el dominio de $f \circ g$ es $[0, \infty)$. Observa que ambas $g(x)$ y $f(g(x))$ están definidas para x en $[0, \infty)$.

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{definición de } g \circ f \\ &= g(x^2 - 16) && \text{definición de } f \\ &= \sqrt{x^2 - 16} && \text{definición de } g \end{aligned}$$

Por definición, el dominio de $g \circ f$ es el conjunto de toda x en \mathbb{R} (el dominio de f) tal que $f(x) = x^2 - 16$ se halla en $[0, \infty)$ (el dominio de g). La expresión " $x^2 - 16$ está en $[0, \infty)$ " equivale a cada una de las desigualdades

$$x^2 - 16 \geq 0, \quad x^2 \geq 16, \quad |x| \geq 4.$$

Así pues, el dominio de $g \circ f$ es la unión $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$. Observa que ambas $f(x)$ y $g(f(x))$ están definidas para x en $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$. También que este dominio es diferente de los dominios de f y de g .

El próximo ejemplo ilustra la forma en que los valores especiales de funciones compuestas se pueden llegar a obtener a partir de tablas.

EJEMPLO 5 Determinación de los valores de una función compuesta

En las tablas que siguen se enumeran diversos valores de dos funciones f y g .

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	4	2	1

x	1	2	3	4
$g(x)$	4	1	3	2

Encuentra $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(2)$, $(f \circ f)(2)$ y $(g \circ g)(2)$.

SOLUCIÓN Con la definición de función compuesta y las tablas citadas, obtenemos

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 3$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 2$$

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(4) = 1$$

$$(g \circ g)(2) = g(g(2)) = g(1) = 4.$$

En algunos problemas aplicados es necesario expresar una cantidad y como función del tiempo t . El ejemplo adjunto ilustra que a menudo es más fácil introducir una tercera variable x , expresar x como función de t (esto es, $x = g(t)$) y y como función de x (es decir, $y = f(x)$), y terminar tomando la función compuesta dada por $y = f(x) = f(g(t))$.

**EJEMPLO 6** Uso de una función compuesta para hallar el volumen de un globo

Un meteorólogo infla un globo esférico con helio. Si el radio del globo cambia a razón de 1.5 cm/s, expresa el volumen V del globo como función del tiempo t (en segundos: s).

SOLUCIÓN La literal x denota el radio del globo. Si suponemos que el radio primero es 0 entonces, después de t s,

$$x = 1.5t, \quad \text{radio del globo luego de } t \text{ s}$$

A modo de aclaración: después de 1 s, el radio es 1.5 cm; al cabo de 2 s, es 3.0 cm; luego de 3, es de 4.5 cm, etcétera.

A continuación se escribe

$$V = \frac{4}{3}\pi x^3, \quad \text{volumen de una esfera de radio } x$$

Esto nos dará una relación de función compuesta en que V es una función de x y x es una función de t . Por sustitución, obtenemos

$$V = \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{4}{3}\pi (1.5t)^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3}{2}t\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{27}{8}t^3\right).$$

Simplificamos y obtenemos la siguiente fórmula para V como función de t :

$$V(t) = \frac{9}{2}\pi t^3$$

Si f y g son funciones tales que

$$y = f(u) \quad \text{y} \quad u = g(x),$$

entonces sustituimos u con $y = f(u)$ y llegamos a

$$y = f(g(x)).$$

Para ciertos problemas en cálculo *invertimos* este procedimiento; esto es, dada $y = h(x)$ para alguna función h , encontramos una *forma de función compuesta* $y = f(u)$ y $u = g(x)$ tal que $h(x) = f(g(x))$.

EJEMPLO 7 Determinación de una forma de función compuesta

Expresa $y = (2x + 5)^8$ como forma de función compuesta.

SOLUCIÓN Supongamos que se desea evaluar la expresión $(2x + 5)^8$ para un número real x , usando calculadora. Primero calcularíamos el valor de $2x + 5$ y luego elevaríamos el resultado a la octava potencia. Esto sugiere que tomemos

$$u = 2x + 5 \quad \text{y} \quad y = u^8,$$

que es una forma de función compuesta para $y = (2x + 5)^8$.

Este método se puede ampliar a otras funciones. En general, supongamos que nos dan $y = h(x)$. Para escoger la expresión *interior* $u = g(x)$ en una forma de función compuesta utilizando calculadora, nos preguntaríamos ¿qué parte de la expresión $h(x)$ debo evaluar primero? Esto nos lleva muchas veces a una opción apropiada para $u = g(x)$. Después de escoger u , nos referimos a $h(x)$ a fin de hallar $y = f(u)$. En la ilustración que sigue te presentamos problemas típicos.

ILUSTRACIÓN Formas de función compuesta

Valor de función	Opción para $u = g(x)$	Opción para $y = f(u)$
■ $y = (x^3 - 5x + 1)^4$	$u = x^3 - 5x + 1$	$y = u^4$
■ $y = \sqrt{x^2 - 4}$	$u = x^2 - 4$	$y = \sqrt{u}$
■ $y = \frac{2}{3x + 7}$	$u = 3x + 7$	$y = \frac{2}{u}$

La forma de función compuesta nunca es única; por ejemplo, consideremos la primera expresión en la ilustración anterior:

$$y = (x^3 - 5x + 1)^4$$

Si n es un entero distinto de cero, escogeríamos

$$u = (x^3 - 5x + 1)^n \quad \text{y} \quad y = u^{4/n}.$$

Por tanto, hay un número *ilimitado* de formas de función compuesta. Por lo general, nuestra meta es escoger una forma tal que la expresión para y sea sencilla, según hicimos en la ilustración.

En el ejemplo siguiente se aclara cómo una calculadora graficadora puede ayudar a determinar el dominio de una función compuesta. Usamos las mismas funciones del ejemplo 4.

EJEMPLO 8 Análisis gráfico de una función compuesta

Sean $f(x) = x^2 - 16$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

- (a) Encuentra $f(g(3))$.
 (b) Traza $y = (f \circ g)(x)$ y con la gráfica halla el dominio de $f \circ g$.

SOLUCIÓN

- (a) Comenzamos estableciendo las asignaciones

$$Y_1 = \sqrt{x} \quad y \quad Y_2 = (Y_1)^2 - 16.$$

Notarás que sustituimos Y_1 por x en $f(x)$ y asignamos esta expresión a Y_2 , de un modo muy parecido a como sustituimos x por $g(x)$ en el ejemplo 4.

A continuación guardamos en memoria el valor 3 para x y luego pedimos el valor de Y_2 . Vemos que el valor de Y_2 en 3 es -13 ; esto es, $f(g(3)) = -13$.

- (b) Para determinar la pantalla de la gráfica de $f \circ g$, observamos primero que $f(x) \geq -16$ para toda x y, por tanto, escogemos Y_{\min} menor que -16 ; por ejemplo, $Y_{\min} = -20$. Si queremos que la pantalla tenga una dimensión vertical de 40, escogemos $Y_{\max} = 20$.

Si la pantalla está en proporción 1:1 (horizontal:vertical), una opción razonable para $[X_{\min}, X_{\max}]$ sería $[-10, 30]$, una dimensión horizontal de 40; si está en proporción de 3:2, ponemos a $[X_{\min}, X_{\max}]$ en $[-10, 50]$ (es decir, una dimensión horizontal de 60).

Al seleccionar Y_2 y luego visualizar la gráfica de Y_2 en la pantalla $[-10, 50, 5]$ por $[-20, 20, 5]$ llegamos a una gráfica similar a la figura 2. Se trata de una semirrecta con punto extremo $(0, -16)$; por tanto, el dominio de Y_2 es toda $x \geq 0$.

El ejemplo adjunto demuestra cómo usar una calculadora graficadora para graficar funciones compuestas de la forma $af(bx)$. Aplicaremos la función del ejemplo 7, sección 3.5.

EJEMPLO 9 Graficación de funciones compuestas

Si $f(x) = x^3 - 4x^2$, traza la gráfica de $y = -\frac{1}{2}f(\frac{1}{3}x)$.

SOLUCIÓN Con base en nuestro estudio sobre compresión y elongación de gráficas de la sección 3.5, reconocemos que la gráfica de f se comprimirá verticalmente un factor 2 y se elongará horizontalmente un factor de 3. A fin de vincular este problema con las funciones compuestas, podemos pensar que

$$y = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{3}x\right) \quad \text{como} \quad y = -\frac{1}{2}f(g(x)), \quad \text{donde } g(x) = \frac{1}{3}x.$$

La última ecuación para y sugiere las asignaciones

$$Y_1 = \frac{1}{3}x, \quad Y_2 = (Y_1)^3 - 4(Y_1)^2, \quad y \quad Y_3 = -\frac{1}{2}Y_2.$$

Observarás que $Y_2 = f(Y_1) = f(g(x))$. Nada más seleccionamos Y_3 para graficar y escogemos la pantalla $[-7, 14]$ por $[-3, 11]$, a fin de obtener la figura 3.

(continúa)

Figura 2

$[-10, 50, 5]$ por $[-20, 20, 5]$

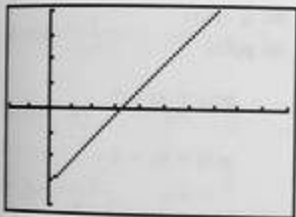


Figura 3

$[-7, 14]$ por $[-3, 11]$

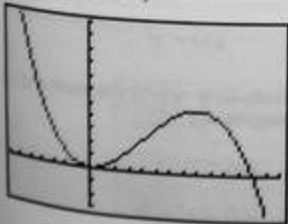
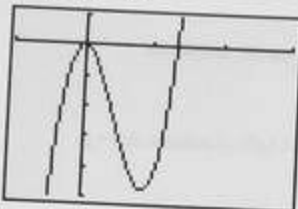


Figura 4

[-1, 3] por [-5, 1]



Hay dos ventajas de asignar las funciones en la forma arriba indicada:

- (1) No tenemos que calcular la función polinomial a graficar, como hicimos en el ejemplo 7 de la sección 3.5.
- (2) Con sólo cambiar los coeficientes de Y_1 y Y_2 , comprobamos su efecto en la gráfica de Y_3 .

Como ilustración del segundo punto, grafica $y = \frac{1}{2}f(3x)$ cambiando Y_1 por $3x$, Y_2 por $\frac{1}{2}Y_2$, la pantalla a [-1, 3] por [-5, 1] y luego grafica Y_3 para obtener la figura 4.

3.7 Ejercicios

Ejercicios 1 y 2: encuentra

- (a) $(f + g)(3)$ (b) $(f - g)(3)$
(c) $(fg)(3)$ (d) $(f/g)(3)$

1 $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2$

2 $f(x) = -x^2$, $g(x) = 2x - 1$

Ejercicios 3 al 8: halla

- (a) $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$ y $(f/g)(x)$

- (b) El dominio de $f + g$, $f - g$ y fg

- (c) El dominio de f/g

3 $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = 2x^2 - 1$

4 $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 - 3$

5 $f(x) = \sqrt{x + 5}$, $g(x) = \sqrt{x + 3}$

6 $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$, $g(x) = \sqrt{x + 4}$

7 $f(x) = \frac{2x}{x - 4}$, $g(x) = \frac{x}{x + 5}$

8 $f(x) = \frac{x}{x - 2}$, $g(x) = \frac{3x}{x + 4}$

Ejercicios 9 y 10: determina

- (a) $(f \circ g)(x)$ (b) $(g \circ f)(x)$

- (c) $(f \circ f)(x)$ (d) $(g \circ g)(x)$

9 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x^2$

10 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x - 1$

Ejercicios 11 al 20: encuentra

- (a) $(f \circ g)(x)$ (b) $(g \circ f)(x)$

- (c) $f(g(-2))$ (d) $g(f(3))$

11 $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = 3x + 7$

12 $f(x) = 5x + 2$, $g(x) = 6x - 1$

13 $f(x) = 3x^2 + 4$, $g(x) = 5x$

14 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 4x^2$

15 $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, $g(x) = 2x - 1$

16 $f(x) = 5x - 7$, $g(x) = 3x^2 - x + 2$

17 $f(x) = 4x$, $g(x) = 2x^3 - 5x$

18 $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x$

19 $f(x) = |x|$, $g(x) = -7$

20 $f(x) = 5$, $g(x) = x^2$

Ejercicios 21 al 34: halla (a) $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$ y (b) $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

21 $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = \sqrt{x + 2}$

22 $f(x) = \sqrt{x - 15}$, $g(x) = x^2 + 2x$

23 $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \sqrt{3x}$

24 $f(x) = -x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$

25 $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x+5}$

26 $f(x) = \sqrt{3-x}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$

27 $f(x) = \sqrt{3-x}$, $g(x) = \sqrt{x^2-16}$

28 $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt[3]{x-5}$

29 $f(x) = \frac{3x+5}{2}$, $g(x) = \frac{2x-5}{3}$

30 $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = x-1$

31 $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$

32 $f(x) = \frac{x}{x-2}$, $g(x) = \frac{3}{x}$

33 $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$, $g(x) = \frac{x-3}{x-4}$

34 $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $g(x) = \frac{x-5}{x+4}$

Ejercicios 35 y 36: resuelve la ecuación $(f \circ g)(x) = 0$.

35 $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = x + 3$

36 $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = 2x - 1$

37 En las siguientes tablas se enumeran diversos valores de dos funciones f y g :

x	5	6	7	8	9
$f(x)$	8	7	6	5	4

x	5	6	7	8	9
$g(x)$	7	8	6	5	4

Si es posible, encuentra

(a) $(f \circ g)(6)$ (b) $(g \circ f)(6)$ (c) $(f \circ f)(6)$

(d) $(g \circ g)(6)$ (e) $(f \circ g)(9)$

38 En las tablas que siguen se listan diversos valores de dos funciones T y S :

t	0	1	2	3	4
$T(t)$	2	3	1	0	5

x	0	1	2	3	4
$S(x)$	1	0	3	2	5

Si es posible, encuentra

(a) $(T \circ S)(1)$ (b) $(S \circ T)(1)$ (c) $(T \circ T)(1)$

(d) $(S \circ S)(1)$ (e) $(T \circ S)(4)$

39 Si $D(t) = \sqrt{400 + t^2}$ y $R(x) = 20x$, encuentra $(D \circ R)(x)$.40 Si $S(r) = 4\pi r^2$ y $D(t) = 2t + 5$, encuentra $(S \circ D)(t)$.41 Si f es una función impar y g es una función par, ¿ fg será par, impar o ninguna de las dos?42 Hay una función con dominio \mathbb{R} que es par e impar; encuétrala.43 Funciones de lista de pago La función de impuesto del seguro social SSTAX se define como $SSTAX(x) = 0.0715x$, donde $x \geq 0$ es el ingreso semanal. Sea ROUND2 la función que redondea una cifra a dos lugares decimales. Encuentra $(ROUND2 \circ SSTAX)(437.21)$.44 Funciones científicas de computadoras La función CHR se define con $CHR(65) = "A"$, $CHR(66) = "B"$, ..., $CHR(90) = "Z"$, y la función ORD con $ORD("A") = 65$, $ORD("B") = 66$, ..., $ORD("Z") = 90$. Encuentra

(a) $(CHR \circ ORD)("C")$ (b) $CHR(ORD("A") + 3)$

45 Incendio que se propaga Un incendio ha comenzado en un campo abierto y seco y se propaga en forma de círculo. Si el radio de éste aumenta a razón de 6 pies/min, expresa el área total A del incendio como función del tiempo t (en min).

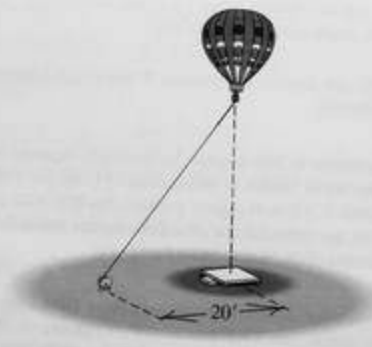
46 Dimensiones de un globo Se infla un globo esférico a $\frac{3}{2}\pi$ pies³/min. Expresa su radio r como función del tiempo t (en min). Sea $r = 0$ cuando $t = 0$.

47 Dimensiones de un montón de arena El volumen de un montón cónico de arena aumenta a 243 π pies³/min y la altura del montón siempre es igual al radio r de la base. Determina r como función del tiempo t (en min). Sea $r = 0$ cuando $t = 0$.

48 Diagonal de un cubo La diagonal d de un cubo es la distancia entre dos vértices opuestos. Expresa d como función del borde x del cubo. (Sugerencia: expresa primero la diagonal y de una cara como función de x .)

49 Altitud de un globo Un globo de aire caliente sube verticalmente desde el suelo 5 pies/s conforme se suelta una cuerda atada a su base (ve la figura). La polea que suelta la cuerda está a 20 pies de la plataforma en que los pasajeros abordan el globo. Encuentra la altitud h del globo como función del tiempo t .

Ejercicio 49



50 Equilibrista de la cuerda floja Consulta el ejercicio 76, sección 3.4. El equilibrista comienza en el punto más bajo y avanza por la cuerda a razón de 2 pies/s. Si la cuerda está sujeta en un punto a 30 pies de la base del poste, halla la altura h del equilibrista sobre el suelo como función del tiempo t . (Sugerencia: d denota la distancia total recorrida a lo largo del alambre. Expresa primero d como función de t y luego h como función de d .)

51 Despegue de aviones Consulta el ejercicio 77, de la sección 3.4. Cuando el avión ha avanzado 500 pies por la pista, ha alcanzado una velocidad de 150 pies/s (alrededor de 102 mph), que mantendrá hasta el despegue. Expresa la distancia d del acroplano desde la torre de control como función del tiempo t (en s). (Sugerencia: en la figura, escribe primero x como función de t .)

52 Corrosión de cables Un cable de 100 pies de largo y 4 pulg de diámetro está sumergido en el mar. Debido a la corrosión, el área superficial del cable disminuye a razón de 750 pulg² por año. Expresa el diámetro d del cable como función del tiempo t (en años). (Desprecia la corrosión en los extremos del cable.)

Ejercicios 53 al 60: encuentra una forma de función compuesta para y .

$$53 \quad y = (x^2 + 3x)^{1/3}$$

$$54 \quad y = \sqrt[3]{x^2 - 16}$$

$$55 \quad y = \frac{1}{(x-3)^4}$$

$$56 \quad y = 4 + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$57 \quad y = (x^4 - 2x^2 + 5)^5$$

$$58 \quad y = \frac{1}{(x^2 + 3x - 5)^3}$$

$$59 \quad y = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2}$$

$$60 \quad y = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

61 Si $f(x) = \sqrt{x} - 1$ y $g(x) = x^3 + 1$, calcula $(f \circ g)(0.0001)$. Para evitar calcular un valor cero para $(f \circ g)(0.0001)$, escribe la fórmula de $f \circ g$ como

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^3 + 1} + 1}$$

62 Si $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x + 2}$ y $g(x) = (\sqrt{3x} - x)^{1/2}$, aproxima

$$\frac{(f \circ g)(1.12) - (f/g)(1.12)}{[(f \circ g)(5.2)]^2}$$

63 Consulta el ejercicio 63 de la sección 3.5. Haz las asignaciones $Y_1 = x$ y $Y_2 = 3\sqrt{(Y_1 + 2)(6 - Y_1)} - 4$. Halla las asignaciones para Y_1 (y Y_2 si es necesario) que permitirán graficar cada función en (a)–(h), y luego graficar la función. (Comprueba el dominio y la imagen con la respuesta al ejercicio indicado.)

- (a) $y = -2f(x)$ (b) $y = f(\frac{1}{2}x)$
 (c) $y = f(x - 3) + 1$ (d) $y = f(x + 2) - 3$
 (e) $y = f(-x)$ (f) $y = -f(x)$
 (g) $y = f(|x|)$ (h) $y = |f(x)|$



64 Consulta el ejercicio 64, sección 3.5. Haz las asignaciones $Y_1 = x$ y $Y_2 = 3\sqrt{(-Y_1 - 6)(Y_1 + 2)} - 10$. Encuentra las asignaciones para Y_1 y Y_2 que harán posible graficar cada función, y luego grafica la función.

- (a) $y = \frac{1}{2}f(x)$ (b) $y = f(2x)$
 (c) $y = f(x - 2) + 5$ (d) $y = f(x + 4) - 1$
 (e) $y = f(-x)$ (f) $y = -f(x)$
 (g) $y = f(|x|)$ (h) $y = |f(x)|$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

- Describe el conjunto de todos los puntos (x, y) de un plano coordenado, tal que $y/x < 0$.
- Demuestra que el triángulo con vértices $A(3, 1)$, $B(-5, -3)$ y $C(4, -1)$ es un triángulo rectángulo y encuentra su área.
- Dados $P(-5, 9)$ y $Q(-8, -7)$, halla
 - La distancia $d(P, Q)$
 - El punto medio del segmento PQ
 - Un punto R tal que Q sea el punto medio de PR
- Encuentra todos los puntos del eje y y localizados a una distancia 13 de $P(12, 6)$.
- Para qué valores de a la distancia entre $P(a, 1)$ y $Q(-2, 6)$ es menor de 3?
- Encuentra una ecuación de la circunferencia que tenga centro $C(7, -4)$ y pase por $P(-3, 3)$.
- Formula una ecuación de la circunferencia que tenga puntos extremos de un diámetro $A(8, 10)$ y $B(-2, -14)$.
- Halla una ecuación para la mitad izquierda de la circunferencia dada por $(x + 2)^2 + y^2 = 9$.
- Determina la pendiente de la recta que pasa por $C(11, -5)$ y $D(-8, 6)$.
- Demuestra que $A(-3, 1)$, $B(1, -1)$, $C(4, 1)$ y $D(3, 5)$ son vértices de un trapecio.
- Encuentra una ecuación de la recta que pasa por $A(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ que es
 - Paralela a la recta $6x + 2y + 5 = 0$
 - Perpendicular a la recta $6x + 2y + 5 = 0$
- Expresa $8x + 3y - 24 = 0$ en forma de punto-pendiente.
- Formula una ecuación de la circunferencia que tenga centro $C(-5, -1)$ y sea tangente a la recta $x = 4$.
- Encuentra una ecuación de la recta que tiene intersección en $x = -3$ y pase por el centro de la circunferencia con $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 26 = 0$.
- Halla la forma general de una ecuación de la recta que pasa por $P(4, -3)$ con pendiente 5.
- Dados $A(-1, 2)$ y $B(3, -4)$, encuentra una forma general de una ecuación para la mediatriz del segmento AB .

Ejercicios 17 y 18: encuentra el centro y radio de la circunferencia con la ecuación dada.

- 17 $x^2 + y^2 - 12y + 31 = 0$
 18 $4x^2 + 4y^2 + 24x - 16y + 39 = 0$

19 Si $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$, halla

(a) $f(1)$ (b) $f(-1)$ (c) $f(0)$ (d) $f(-x)$

(e) $-f(x)$ (f) $f(x^2)$ (g) $[f(x)]^2$

Ejercicios 20 y 21: determina el signo de $f(4)$ sin hallar en realidad $f(4)$.

20 $f(x) = \frac{-32(x^2 - 4)}{(9 - x^2)^{3/2}}$

21 $f(x) = \frac{-2(x^2 - 20)(5 - x)}{(6 - x^2)^{3/2}}$

22 Encuentra el dominio y la imagen de f si

(a) $f(x) = \sqrt{3x - 4}$ (b) $f(x) = \frac{1}{(x + 3)^2}$

Ejercicios 23 y 24: halla $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ si $h \neq 0$.

23 $f(x) = -x^2 + x + 5$

24 $f(x) = \frac{1}{x+2}$

25 Expresa una función lineal f tal que $f(1) = 2$ y $f(3) = 7$.26 Determina si f es par, impar o ninguna de las dos.

(a) $f(x) = \sqrt{x^3 + 4x}$ (b) $f(x) = \sqrt{3x^3 - x^3}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 5}$

Ejercicios 27 al 40: traza la gráfica de la ecuación y nombra (o etiqueta) las intersecciones en x y en y .

27 $x + 5 = 0$

28 $2y - 7 = 0$

29 $2y + 5x - 8 = 0$

30 $x = 3y + 4$

31 $9y + 2x^2 = 0$

32 $3x - 7y^2 = 0$

33 $y = \sqrt{1-x}$

34 $y = (x-1)^3$

35 $y^2 = 16 - x^2$

36 $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 64 = 0$

37 $x^2 + y^2 - 8x = 0$

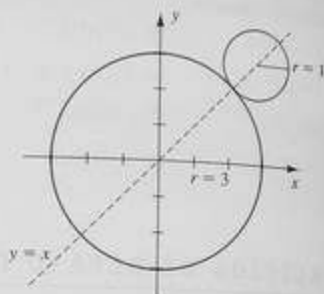
38 $x = -\sqrt{9-y^2}$

39 $y = (x-3)^2 - 2$

40 $y = -x^2 - 2x + 3$

41 Encuentra el centro de la circunferencia pequeña.

Ejercicio 41

42 Explica cómo la gráfica de $y = -f(x-2)$ se compara con la gráfica de $y = f(x)$.Ejercicios 43 al 52: (a) traza la gráfica de f ; (b) encuentra el dominio D y la imagen R de f ; y (c) halla los intervalos en que f es creciente, decreciente o constante.

43 $f(x) = \frac{1-3x}{2}$

44 $f(x) = 1000$

45 $f(x) = |x+3|$

46 $f(x) = -\sqrt{10-x^2}$

47 $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$

48 $f(x) = \sqrt{2-x}$

49 $f(x) = 9 - x^2$

50 $f(x) = x^2 + 6x + 16$

51 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

52 $f(x) = 1 + 2[x]$

53 Traza las gráficas de las siguientes ecuaciones, usando desplazamiento, elongación o reflexión:

(a) $y = \sqrt{x}$

(b) $y = \sqrt{x+4}$

(c) $y = \sqrt{x} + 4$

(d) $y = 4\sqrt{x}$

(e) $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$

(f) $y = -\sqrt{x}$

54 En la figura se muestra la gráfica de la función f con dominio $[-3, 3]$. Traza la gráfica de la ecuación dada.

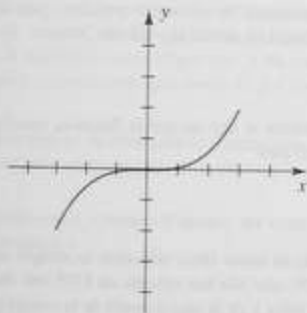
(a) $y = f(x - 2)$ (b) $y = f(x) - 2$

(c) $y = f(-x)$ (d) $y = f(2x)$

(e) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ (f) $y = |f(x)|$

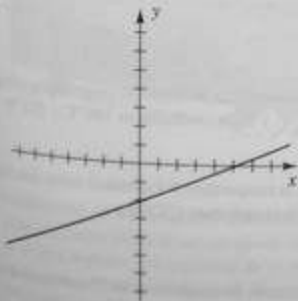
(g) $y = f(|x|)$

Ejercicio 54

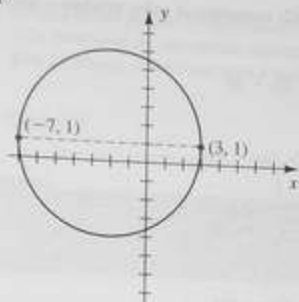


Ejercicios 55 al 58: formula una ecuación para la gráfica de la figura.

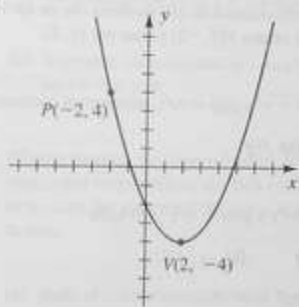
55



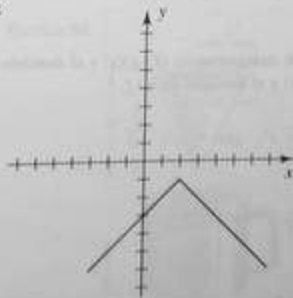
56



57



58



Ejercicios 59 al 62: encuentra el valor máximo o mínimo de $f(x)$.

59 $f(x) = 5x^2 + 30x + 49$

60 $f(x) = -3x^2 + 30x - 82$

61 $f(x) = -12(x+1)^2 - 37$

62 $f(x) = 3(x+2)(x-10)$

63 Expresa la función $f(x) = -2x^2 + 12x - 14$ en la forma $a(x-h)^2 + k$.

64 Halla la ecuación estándar de una parábola con un eje vertical que tenga vértice $V(3, -2)$ y pase por $(5, 4)$.

65 Si $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, encuentra el dominio de
(a) fg (b) f/g

66 Si $f(x) = 8x - 1$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$, halla
(a) $(f \circ g)(2)$ (b) $(g \circ f)(2)$

Ejercicios 67 y 68: encuentra (a) $(f \circ g)(x)$ y (b) $(g \circ f)(x)$.

67 $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $g(x) = 3x + 2$

68 $f(x) = \sqrt{3x+2}$, $g(x) = 1/x^2$

Ejercicios 69 y 70: determina (a) $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$ y (b) $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

69 $f(x) = \sqrt{25-x^2}$, $g(x) = \sqrt{x-3}$

70 $f(x) = \frac{x}{3x+2}$, $g(x) = \frac{2}{x}$

71 Encuentra una función compuesta para $y = \sqrt{x^2 - 5x}$.

72 Rampas para sillas de ruedas. La ley para norteamericanos discapacitados, de 1990, garantiza a todas las personas el derecho al acceso a lugares públicos. El acceso a un edificio a menudo representa la construcción de una rampa para sillas de ruedas. Las rampas tienen alrededor de 1 pulg de ascenso vertical por cada 12 a 20 pulg de distancia horizontal. Si la base de una puerta exterior está 3 pies sobre la banqueta, encuentra el rango de longitudes apropiadas de una rampa para sillas de ruedas.

73 Lanzamiento de disco. Con base en las marcas olímpicas, la distancia ganadora en el lanzamiento de disco se puede calcular mediante la ecuación $d = 181 + 1.065t$, donde d está en pies y $t = 0$ corresponde a 1948.

(a) Pronostica la distancia ganadora para los Juegos Olímpicos del verano del año 2008.

(b) Calcula el año en que la distancia ganadora será de 265 pies.

74 Avalúos de casas. Hace seis años se compró una casa en \$89 000; este año fue valuada en \$125 000. Supongamos que el valor V de la casa después de la compra es una función lineal del tiempo t (en años).

(a) Expresa V en términos de t .

(b) ¿Cuántos años después de la fecha de compra la casa valía \$103 000?

75 Escalas de temperatura. El punto de congelación del agua es 0°C o 32°F , y el de ebullición es 100°C o 212°F .

(a) Expresa la temperatura F Fahrenheit como función lineal de la temperatura C Celsius.

(b) ¿Qué aumento de temperatura en $^\circ\text{F}$ corresponde a un incremento de 1°C ?

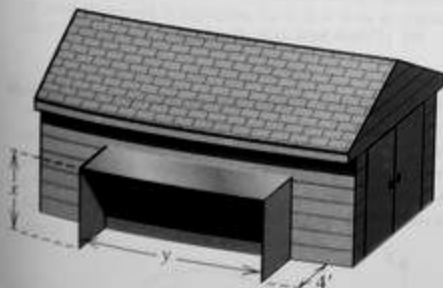
76 Rendimiento de gasolina. Consideremos que el costo de conducir un automóvil es una función lineal del número x de millas recorridas, y que la gasolina cuesta \$1.25 por galón. Cierta automóvil recorre 20 mi/gal y una afinación del motor que mejorará su rendimiento en 10% cuesta \$50.00.

- Halla el costo C_1 de usar el automóvil sin afinación en términos de x .
- Expresa el costo C_2 de usar el auto afinado en términos de x .
- Cuántas millas debe recorrer el automóvil después de una afinación para recuperar el costo de la misma?

77 Construcción de un cobertizo. Un cobertizo rectangular abierto, hecho de dos lados verticales de 4 pies de ancho y un techo plano, ha de construirse junto a una estructura ya existente, como se ilustra en la figura. El techo plano está hecho de hojalata y cuesta \$5 por pie², y los dos lados son de madera contrachapada que cuesta \$2 por pie².

- Si se dispone de \$400 para la construcción, expresa la longitud y como función de la altura x .
- Encuentra el volumen V dentro del cobertizo como función de x .

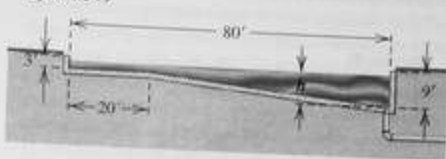
Ejercicio 77



78 Construcción de un recipiente cilíndrico. Una compañía planea la manufactura de un recipiente cilíndrico, abierto en la parte superior, con capacidad de 24π pulg³. Si el costo del material para el fondo es \$0.30 por pulg² y el de los lados curvos es \$0.10 por pulg², expresa el costo C del material como función del radio r de la base del recipiente.

79 Llenado de una piscina. En la figura que sigue se ve la sección transversal de una piscina rectangular de 80 por 40 pies. La piscina se llena con agua a razón de 10 pies³/min.

Ejercicio 79



- Halla el volumen V del agua de la piscina como función del tiempo t .
- Expresa V como función de la profundidad h del extremo profundo para $0 \leq h \leq 6$ y luego para $6 < h \leq 9$.
- Expresa h como función de t para $0 \leq h \leq 6$ y luego para $6 < h \leq 9$.

80 Filtrado de agua. Se vierten 5 pulg³ de agua en un filtro cónico que luego caen en una taza (ve la figura). x denota la altura del agua en el filtro y y , la altura del agua en la taza.

- Halla el radio r mostrado en la figura como función de x . (Sugerencia: utiliza triángulos semejantes.)
- Expresa la altura y del agua de la taza como función de x . (Sugerencia: ¿cuál es la suma de los dos volúmenes mostrados en la figura?)

Ejercicio 80



- 81 Tronco de un cono La forma de la primera nave espacial del programa Apolo tenía la forma del tronco de un cono circular recto; esto es, un sólido formado por un cono truncado por un plano paralelo a su base. Para el tronco de la figura, los radios a y b ya se definieron.

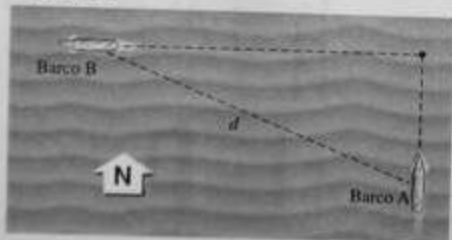
Ejercicio 81



- (a) Utiliza triángulos semejantes y expresa y como función de h .
- (b) Deriva una fórmula para hallar el volumen del tronco como función de h .
- (c) Si $a = 6$ pies y $b = 3$ pies, ¿para qué valor de h el volumen del tronco alcanza 600 pies³?

- 82 Distancia entre barcos A la 1:00 P.M. el barco A está a 30 mi al sur del barco B y navega hacia el norte a razón de 15 mph. Si el barco B se dirige al oeste a una velocidad de 10 mph, encuentra la hora en que la distancia d entre ambos es mínima (ve la figura).

Ejercicio 82



- 83 Dimensiones de una pista de carreras El interior de una pista de carreras de media milla consta de un rectángulo con semicírculos en dos extremos opuestos. Encuentra las dimensiones que harán máxima el área del rectángulo.

- 84 Saltos verticales Cuando un jugador de baloncesto salta para encestar, la altura del jugador $f(t)$ (en pies) desde el piso después de t segundos está dada por la fórmula $f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 16t$, donde g es una constante gravitacional.

- (a) Si $g = 32$, encuentra el número total de segundos que el jugador está en el aire.
- (b) Halla el salto vertical del jugador, esto es, la distancia máxima de sus pies al piso.
- (c) En la Luna, $g = \frac{32}{9}$. Vuelve a calcular lo que se pide en (a) y (b) para el jugador si se encontrara en la Luna.

- 85 Trayectoria de un cohete Un cohete es disparado hacia lo alto de una colina, siguiendo una trayectoria dada por $y = -0.016x^2 + 1.6x$. El costado de la colina tiene una pendiente de $\frac{1}{5}$, como se ilustra en la figura.

- (a) ¿Dónde toca suelo el cohete?
- (b) Encuentra la altura máxima del cohete por encima del suelo.

Ejercicio 85



EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 3

1 Compara las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x$, $y = x^2$ y $y = x^3$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2$. Escribe una generalización con base en lo que investigues sobre gráficas de ecuaciones de la forma $y = x^p$, donde $x \geq 0$ y p y q son enteros positivos.

2 Formula una expresión para $g(x)$ si la gráfica de g se obtiene de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ al reflejar f alrededor de

- (a) el eje x (b) el eje y
(c) la recta $y = 2$ (d) la recta $x = 3$

3 Considera la gráfica de $g(x) = \sqrt{f(x)}$, donde f está dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Analiza la forma general de g , incluyendo su dominio e imagen. Estudia las ventajas y desventajas de graficar g como composición de las funciones $h(x) = \sqrt{x}$ y $f(x)$. (Sugerencia: usa las siguientes expresiones para f : $x^2 - 2x - 8$, $-x^2 + 2x + 8$, $x^2 - 2x + 2$, $-x^2 + 2x - 2$.)

4 Simplifica el cociente de diferencia en los ejercicios 49 y 50 de la sección 3.4 para una función cuadrática arbitraria de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

5 Consulta el ejemplo 5 de la sección 3.4. Geométricamente, ¿qué representa la expresión $2x + h + 6$ en la gráfica de f ? ¿Qué crees que representa si $h = 0$?

6 La fórmula del punto medio se puede considerar como la fórmula del "medio camino", porque indica el punto que está a la mitad de la distancia del punto $P(x_1, y_1)$ al punto $Q(x_2, y_2)$. Desarrolla una fórmula de "m-n-ésimo camino" que dé el punto $R(x, y)$ que está a m/n de la distancia de P a Q (supón que m y n son enteros positivos con $m < n$).

7 Considera las gráficas de ecuaciones de la forma cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ que tienen dos intersecciones x . Denota con d la distancia del eje de la parábola a cualquiera de las intersecciones x y con h el valor de la coordenada y al vértice. Explora la relación entre d y h en varias ecuaciones específicas y luego desarrolla una fórmula para esta relación.

8 Facturación por servicio Un método común de facturación para llamadas de servicio es cargar una cuota fija más una cuota adicional por cada cuarto de hora empleado en la llamada. Proponga una función para una compañía que repara lavadoras y cobra \$40 más \$20 por cada cuarto de hora o fracción de ahí en adelante; por ejemplo, una llamada de servicio para una máquina cuya reparación tarda 30 minutos costaría \$80, en tanto que una reparación que requiera 31 minutos costaría \$100. La entrada para su función es cualquier entero positivo. [Sugerencia: consulta el ejercicio 54 (e), sección 3.5.]



9 Densidad de la capa de ozono La densidad D (en 10^{-3} cm/km) de la capa de ozono a altitudes x entre 3 y 15 km durante el invierno en Edmonton, Canadá, se determinó a nivel experimental en

$$D = 0.0833x^2 - 0.4996x + 3.5491.$$

Expresa x como función de D .



10 Precipitación en Minneapolis En la tabla siguiente se lista la precipitación mensual promedio en pulgadas en Minneapolis.

Mes	Precipitación
Ene.	0.7
Feb.	0.8
Mar.	1.5
Abr.	1.9
May.	3.2
Jun.	4.0
Jul.	3.3
Ago.	3.2
Sep.	2.4
Oct.	1.6
Nov.	1.4
Dic.	0.9

(a) Grafica la precipitación mensual promedio.

(b) Elabora un modelo matemático de estos datos con una función por partes f que sea primero cuadrática y luego lineal.

(c) Grafica f junto con los datos.

Funciones polinomiales y racionales

Las funciones polinomiales son las más básicas en matemáticas porque se definen sólo en términos de suma, resta y multiplicación. En la práctica, a menudo es necesario dibujar sus gráficas y encontrar (o aproximar) sus ceros. En la primera parte de este capítulo estudiaremos resultados que sirven para obtener esta información y luego dirigiremos nuestra atención a los cocientes de funciones polinomiales; esto es, a las funciones racionales.

- 4.1 Funciones polinomiales de grado mayor que 2
- 4.2 Propiedades de la división
- 4.3 Ceros de polinomios
- 4.4 Ceros complejos y racionales de polinomios
- 4.5 Funciones racionales
- 4.6 Variación

4.1

Funciones polinomiales
de grado mayor que 2

Si f es una función polinomial con coeficientes reales de grado n entonces

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

con $a_n \neq 0$. Los casos especiales que se incluyen en la tabla se estudiaron con anterioridad.

Grado de f	Forma de $f(x)$	Gráfica de f (con intersección en y a_0)
0	$f(x) = a_0$	Recta horizontal
1	$f(x) = a_1 x + a_0$	Recta con pendiente a_1
2	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	Parábola con eje vertical

Figura 1

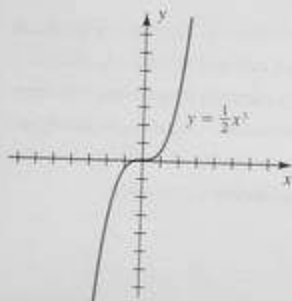
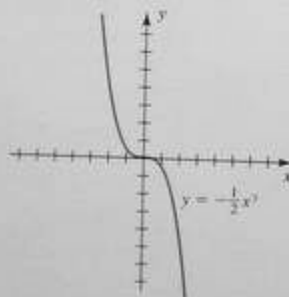


Figura 2



En esta sección estudiaremos gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que 2. Todas las funciones polinomiales son **funciones continuas**, es decir, sus gráficas se pueden dibujar sin cortes o interrupciones.

Si f tiene grado n y todos los coeficientes excepto a_n son cero, entonces

$$f(x) = ax^n \quad \text{para algunas } a = a_n \neq 0.$$

En este caso, si $n = 1$, la gráfica de f es una línea que pasa por el origen. Si $n = 2$, la gráfica es una parábola con vértice en el origen. En el ejemplo que sigue se dan dos ilustraciones con $n = 3$ (**polinomios cúbicos**).

EJEMPLO 1 Trazado de gráficas de $y = ax^3$

Traza la gráfica de f si

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ (b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$

SOLUCIÓN

(a) En la tabla que sigue aparecen varios puntos en la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{16} \approx 0.06$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{16} \approx 1.7$	4	$\frac{125}{16} \approx 7.8$

Puesto que f es una función impar, la gráfica de f es simétrica con respecto al origen; por ello, los puntos como $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16})$ y $(-1, -\frac{1}{2})$ también están en la gráfica (figura 1).

(b) Si $y = -\frac{1}{2}x^3$, la gráfica se puede obtener a partir de la que se incluye en el inciso (a) multiplicando todas las coordenadas y por -1 [o sea, reflejando la gráfica del inciso (a) en todo el eje x]; esto da el trazo de la figura 2.

Si $f(x) = ax^n$ y n es un entero positivo impar, entonces f es una función impar y la gráfica de f es simétrica con respecto al origen (figuras 1 y 2).

Para $a > 0$, el aspecto de la gráfica es similar al de la figura 1; sin embargo, conforme n o a crecen, la gráfica se crece con más rapidez para $x > 1$. Si $a < 0$, reflejamos la gráfica a través del eje x como en la figura 2.

Si $f(x) = ax^n$ y n es un entero positivo *par*, entonces f es una función par y la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y , según se ilustra en la figura 3 para el caso $a = 1$ y $n = 4$. Observa que a medida que el exponente aumenta, la gráfica se aplana en el origen. También crece con más rapidez para $x > 1$. Si $a < 0$, reflejamos la gráfica a través del eje x . También advierte que la gráfica *corta* el eje x en el origen, pero no *cruza* este eje (cambia de signo).

Figura 3

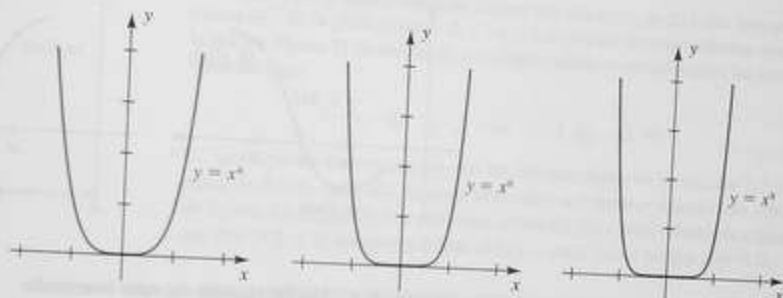
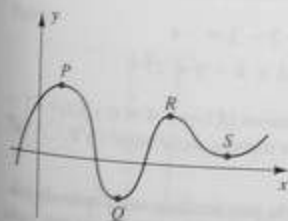


Figura 4



Un análisis completo de las gráficas de las funciones polinómicas de grado mayor que 2 requiere de los métodos que se emplean en cálculo. Conforme aumenta el grado, las gráficas suelen complicarse más; pero siempre tienen aspecto alisado con varios puntos altos y bajos—como P , Q y S en la figura 4—, que se llaman **puntos extremos** de la gráfica. Debe tener en mente que un polinomio de grado n posee a lo sumo $n - 1$ **puntos extremos**. Cada valor de función (coordenada y) correspondiente a un punto alto o bajo se denomina **valor extremo** de la función f . En un valor extremo, f cambia de una función creciente a una decreciente o viceversa.

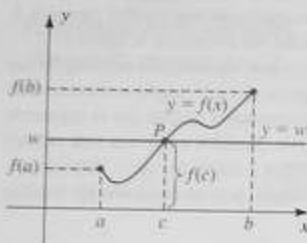
El teorema del valor intermedio especifica otra propiedad importante de las funciones polinómicas.

Teorema del valor intermedio para las funciones polinómicas

Si f es una función polinomial y $f(a) \neq f(b)$ para $a < b$, entonces f toma todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$ en el intervalo $[a, b]$.

El teorema del valor intermedio señala que si w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, por lo menos hay un número c entre a y b tal que $f(c) = w$. Si consideramos la gráfica de f como una que se extiende continuamente des-

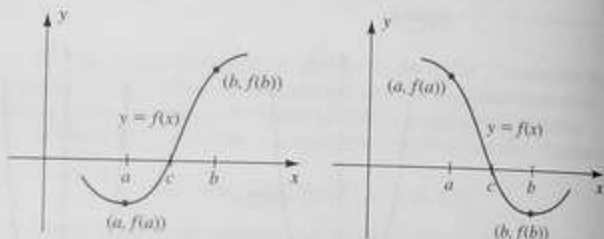
Figura 5



de el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$, según se ve en la figura 5, entonces para cualquier número w entre $f(a)$ y $f(b)$, la recta horizontal $y = w$ interseca la gráfica por lo menos en un punto P . La coordenada x igual a c de P es un número tal que $f(c) = w$.

Una consecuencia del teorema del valor intermedio es que si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios (uno positivo y uno negativo), al menos hay un número c entre a y b tal que $f(c) = 0$; esto es, f tiene un **cero** en c ; por tanto, si el punto $(a, f(a))$ se encuentra por debajo del eje x y el punto $(b, f(b))$ está arriba del eje x o viceversa, la gráfica cruza el eje x por lo menos una vez entre $x = a$ y $x = b$ (figura 6).

Figura 6



EJEMPLO 2 Uso del teorema del valor intermedio

Demuestra que $f(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 3$ tiene un cero entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Al sustituir x por 1 y 2 se obtienen estos valores de función:

$$f(1) = 1 + 2 - 6 + 2 - 3 = -4$$

$$f(2) = 32 + 32 - 48 + 4 - 3 = 17$$

Dado que $f(1)$ y $f(2)$ tienen signos contrarios ($f(1) = -4 < 0$ y $f(2) = 17 > 0$), vemos que $f(c) = 0$ para al menos un número real c entre 1 y 2.

En el ejemplo 2 se expone un método para localizar ceros reales de polinomios. Mediante *aproximaciones sucesivas* es factible aproximar cada cero hasta cualquier grado de precisión al ubicarlo en intervalos más y más pequeños.

Si c y d son ceros reales *sucesivos* de $f(x)$, es decir, no hay otros ceros entre c y d , entonces $f(x)$ *no cambia de signo en el intervalo* (c, d) ; por tanto, si escogemos cualquier número k tal que $c < k < d$ y si $f(k)$ sea positivo, entonces $f(x)$ es positivo en todo (c, d) . Del mismo modo, si $f(k)$ es negativo, entonces $f(x)$ es negativo en todo (c, d) . Llamaremos a $f(k)$ el **valor de prueba** para $f(x)$ en el intervalo (c, d) . Los valores de prueba también se pueden usar en intervalos infinitos de la forma $(-\infty, a)$ o (a, ∞) siempre que $f(x)$ no tenga ceros en estos intervalos. El uso de valores de prueba al graficar es semejante a la técnica que se usó para las desigualdades en la sección 2.7.


EJEMPLO 3 Trazado de la gráfica de una función polinomial de grado 3

Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$, halla todos los valores de x tales que $f(x) > 0$, y que $f(x) < 0$ y traza la gráfica de f .

SOLUCIÓN Podemos factorizar $f(x)$ de esta forma:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 + x^2 - 4x - 4 && \text{dado} \\
 &= (x^3 + x^2) + (-4x - 4) && \text{agrupar términos} \\
 &= x^2(x + 1) - 4(x + 1) && \text{factorizar } x^2 \text{ y } -4 \\
 &= (x^2 - 4)(x + 1) && \text{factorizar } (x + 1) \\
 &= (x + 2)(x - 2)(x + 1) && \text{diferencia de cuadrados}
 \end{aligned}$$

A partir de la última ecuación vemos que los ceros de $f(x)$ (las intersecciones en x de la gráfica) son -2 , -1 y 2 . Los puntos correspondientes sobre la gráfica (figura 7) dividen el eje x en cuatro partes y consideramos los intervalos abiertos

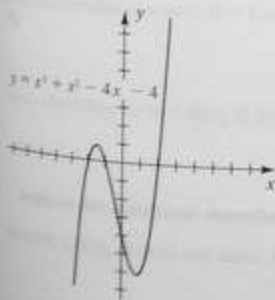
$$(-\infty, -2), (-2, -1), (-1, 2), (2, \infty).$$

Al igual que en nuestro trabajo con las desigualdades en la sección 2.7, el signo de $f(x)$ en cada uno de estos intervalos se establece usando una tabla de signos. La gráfica de f se encuentra arriba del eje x para valores de x tales que $f(x) > 0$, y se encuentra debajo del eje x para toda x tal que $f(x) < 0$.

Figura 7



Figura 8



Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $x + 2$	-	+	+	+
Signo de $x + 1$	-	-	+	+
Signo de $x - 2$	-	-	-	+
Signo de $f(x)$	-	+	-	+
Posición en la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x

Con base en el signo de $f(x)$ de la tabla, concluimos que

$$f(x) > 0 \text{ si } x \text{ está en } (-2, -1) \cup (2, \infty)$$

y

$$f(x) < 0 \text{ si } x \text{ está en } (-\infty, -2) \cup (-1, 2).$$

Usar esta información nos lleva al trazo de la figura 8. Hallar los puntos extremos de la gráfica entraña el uso de calculadora (como en el ejemplo 6) o de métodos que se estudian en cálculo.

La gráfica de toda función polinomial de grado 3 tiene un aspecto semejante al de la figura 8, o de una versión invertida de esa gráfica si el coeficiente de x^3 es negativo; sin embargo, en ocasiones sólo tiene una intersección en x o la forma puede estar elongada (figuras 1 y 2).

EJEMPLO 4 Trazado de la gráfica de una función polinomial de grado 4

Sea $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$. Encuentra todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$ y traza la gráfica de f .

SOLUCIÓN Comenzamos por factorizar $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 4x^3 + 3x^2 && \text{dado} \\ &= x^2(x^2 - 4x + 3) && \text{factorizar } x^2 \\ &= x^2(x - 1)(x - 3) && \text{factorizar } x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

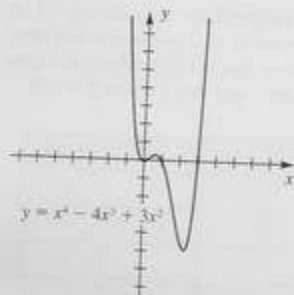
A continuación elaboramos la tabla de signos de la figura 9, donde las líneas verticales muestran los ceros 0, 1 y 3 de los factores. Puesto que el factor x^2 siempre es positivo si $x \neq 0$, no afecta el signo del producto y, por lo tanto, se puede omitir de la tabla.

Figura 9

Signo de $f(x)$	+	+	-	+
Signo de $x - 3$	-	-	+	+
Signo de $x - 1$	-	-	+	+

0 1 3

Figura 10



Al consultar el signo de $f(x)$ en la tabla vemos que

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 && \text{si } x \text{ está en } (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty) \\ \text{y} \quad f(x) &< 0 && \text{si } x \text{ está en } (1, 3). \end{aligned}$$

Observa que el signo de $f(x)$ no cambia en $x = 0$. Usar esta información lleva al trazo de la figura 10.

En el ejemplo que sigue construimos la gráfica de un polinomio conociendo sólo su signo.



EJEMPLO 5 Trazado de la gráfica de un polinomio conociendo sólo su signo

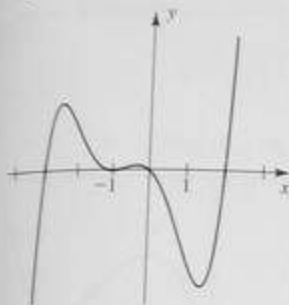
Dada la tabla de signos de la figura 11, traza una posible gráfica del polinomio f .

Figura 11

Signo de $f(x)$	-	+	+	-	+
-----------------	---	---	---	---	---

-3 -1 0 2

Figura 12



SOLUCIÓN Dado que el signo de $f(x)$ es *negativo* en el intervalo $(-\infty, -3)$, la gráfica de f debe estar *abajo* del eje x , como se observa en la figura 12. En el intervalo $(-3, -1)$, el signo de $f(x)$ es *positivo*, de modo que la gráfica de f está *arriba* del eje x .

El signo de $f(x)$ también es *positivo* en el siguiente intervalo, $(-1, 0)$. Así, la gráfica de f debe tocar el eje x en la intersección en $x = -1$ y por tanto permanece *arriba* del eje x . (La gráfica de f es *tangente* al eje x en $x = -1$.)

En el intervalo $(0, 2)$ el signo de $f(x)$ es *negativo*, de modo que la gráfica de f está *abajo* del eje x . Por último, el signo de $f(x)$ es *positivo* en el intervalo $(2, \infty)$, y la gráfica de f está *arriba* del eje x .

En el último ejemplo usamos la función

$$f(x) = (x + 3)(x + 1)^2(x - 2).$$

Observa cómo la gráfica de f se relaciona con las soluciones de las siguientes desigualdades.

Desigualdad	Solución	Posición de la gráfica en relación al eje x
(1) $f(x) > 0$	$(-3, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, \infty)$	Arriba
(2) $f(x) \geq 0$	$[-3, 0] \cup [2, \infty)$	Arriba o en él
(3) $f(x) < 0$	$(-\infty, -3) \cup (0, 2)$	Abajo
(4) $f(x) \leq 0$	$(-\infty, -3] \cup [-1] \cup [0, 2]$	Abajo o en él

Observa que todo número real debe estar en la solución de la desigualdad (1) o de la desigualdad (4); podemos decir lo mismo para las desigualdades (2) y (3).

En el ejemplo siguiente calcularemos las coordenadas de puntos importantes de una gráfica con una calculadora graficadora.



EJEMPLO 6 Cálculo de ceros y puntos extremos

- (a) Calcula los ceros reales de $f(x) = x^3 - 4.6x^2 + 5.72x - 0.656$ a tres lugares decimales.
 (b) Calcula las coordenadas de los puntos extremos de la gráfica.

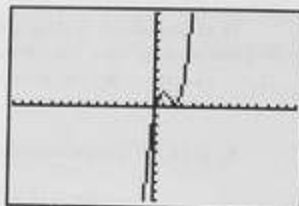
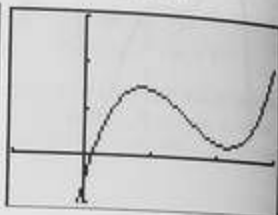
SOLUCIÓN

(a) Asignamos $f(x)$ a Y_1 y usamos una pantalla estándar con objeto de obtener una imagen semejante a la figura 13(a). Como resulta evidente que todas las raíces reales están entre 0 y 3, graficamos de nuevo, pero ahora utilizando una pantalla de $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$. Esto da una imagen semejante a la

(continúa)

de la figura 13(b), la cual muestra que hay una sola intersección en x y, por tanto, una raíz real. Con la función raíz o cero, calculamos que el cero real es 0.127.

Figura 13

(a) $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$ (b) $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$ 

(b) Con la función "maximum", encontramos que el punto alto es (0.867, 1.497) y con "minimum" vemos que el punto bajo es (2.200, 0.312).

En la sección 2.7 resolvimos desigualdades parecidas a las del ejemplo que sigue, pero nos apoyamos en el hecho de que, de alguna manera, podríamos factorizar la expresión. Ahora usamos una calculadora graficadora para resolver una desigualdad donde hay una expresión (un polinomio cúbico) que no se factoriza con facilidad.

**EJEMPLO 7** Solución gráfica de una desigualdad

Calcula las soluciones de la desigualdad

$$6x^2 - 3x^3 < 2.$$

SOLUCIÓN Restemos 2 de ambos lados y consideremos la desigualdad equivalente

$$6x^2 - 3x^3 - 2 < 0.$$

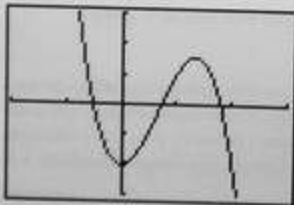
Asignamos $6x^2 - 3x^3 - 2$ a Y_1 y usamos una pantalla en $[-2, 3]$ por $[-3, 3]$ para obtener una imagen semejante a la figura 14. Hay tres intersecciones en x ; si las denominamos x_1 , x_2 y x_3 (con $x_1 < x_2 < x_3$), las soluciones de la desigualdad están dadas por

$$(x_1, x_2) \cup (x_3, \infty),$$

porque son éstos los intervalos en que Y_1 es menor que 0 (la gráfica está abajo del eje x). Al usar una función cero o raíz (*root*) para cada intersección en el eje x , encontramos que

$$x_1 \approx -0.515, \quad x_2 \approx 0.722, \quad x_3 \approx 1.793.$$

Figura 14

 $[-2, 3]$ por $[-3, 3]$ 

Uso de la función POLY de la TI-86

La TI-86 tiene una función especial POLY que calcula los ceros de un polinomio. Aplicaremos esta función al polinomio $6x^2 - 3x^3 - 2$ del ejemplo 7, que puede escribirse como $-3x^3 + 6x^2 + 0x - 2$.

Teclea el grado del polinomio.

2nd POLY 3 ENTER

```
POLY
order=3
```

Teclea los coeficientes del polinomio.

-3 6 0 -2

```
a1x^3 + a2x^2 + a3x + a4 = 0
a1 = -3
a2 = 6
a3 = 0
a4 = -2
```

Calcula los ceros del polinomio.

SOLVE(F5)

```
a1x^3 + a2x^2 + a3x + a4 = 0
X1 = 1.79251721397
X2 = 2.22581724464
X3 = -1.514868338439
```

4.1 Ejercicios

Ejercicios 1 al 4: traza la gráfica de f para el valor indicado de c o a .

1 $f(x) = 2x^3 + c$

(a) $c = 3$ (b) $c = -3$

2 $f(x) = -2x^3 + c$

(a) $c = -2$ (b) $c = 2$

3 $f(x) = ax^3 + 2$

(a) $a = 2$ (b) $a = -\frac{1}{2}$

4 $f(x) = ax^3 - 3$

(a) $a = -2$ (b) $a = \frac{1}{2}$

Ejercicios 5 al 10: con el teorema del valor intermedio demuestra que f tiene un cero entre a y b .

5 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$; $a = 3$, $b = 4$

6 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3$; $a = -3$, $b = -2$

7 $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x + 1$; $a = 2$, $b = 3$

8 $f(x) = 2x^4 + 3x - 2$; $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$

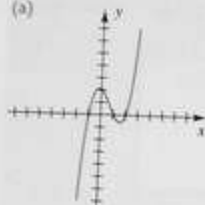
9 $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$

10 $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 9x - 6$;
 $a = 3$, $b = 4$

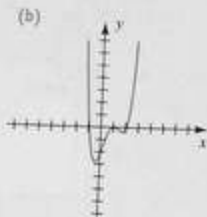
Ejercicios 11 y 12: relaciona cada gráfica con una ecuación.

11

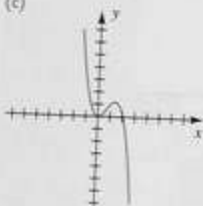
(a)



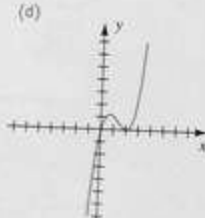
(b)



(c)



(d)



(A) $f(x) = x(x-2)^2$

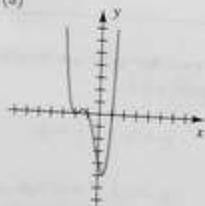
(B) $f(x) = -x^2(x-2)$

(C) $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$

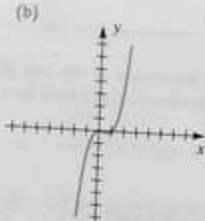
(D) $f(x) = (x+1)(x-1)^2(x-2)$

12

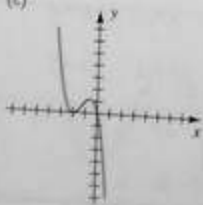
(a)



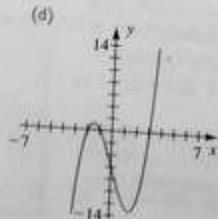
(b)



(c)



(d)



(A) $f(x) = x^2(x-1)$

(B) $f(x) = -x(x+2)^2$

(C) $f(x) = (x+2)(x+1)(x-3)$

(D) $f(x) = (x+2)^2(x+1)(x-1)$

Ejercicios 13 al 28: encuentra todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$ y traza la gráfica de f .

13 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2$

14 $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 - 3$

15 $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + 1$

16 $f(x) = x^3 + 1$

17 $f(x) = x^4 - 4x^2$

18 $f(x) = 9x - x^3$

19 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 10x$

20 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2$

21 $f(x) = \frac{1}{6}(x+2)(x-3)(x-4)$

22 $f(x) = -\frac{1}{8}(x+4)(x-2)(x-6)$

23 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

24 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$

25 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

26 $f(x) = -x^4 + 12x^2 - 27$

27 $f(x) = x^2(x+2)(x-1)^2(x-2)$

28 $f(x) = x^3(x+1)^2(x-2)(x-4)$

Ejercicios 29 y 30: dibuja la gráfica de un polinomio dada la tabla de signos.

29



30



31 (a) Traza la gráfica de

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

donde $a < 0 < b < c$.

(b) ¿Cuál es la intersección en y ?

(c) ¿Cuál es la solución de $f(x) < 0$?

(d) ¿Cuál es la solución de $f(x) \geq 0$?

32 (a) Dibuja la gráfica de

$$f(x) = (x - a)^2(x - b)(x - c),$$

donde $a < b < 0 < c$.

(b) ¿Cuál es la intersección en y ?

(c) ¿Cuál es la solución de $f(x) > 0$?

(d) ¿Cuál es la solución de $f(x) \leq 0$?

33 Sea $f(x)$ un polinomio tal que el coeficiente de toda potencia impar de x es 0. Demuestra que f es una función par.

34 Sea $f(x)$ un polinomio tal que el coeficiente de toda potencia par de x es 0. Demuestra que f es una función impar.

35 Si $f(x) = 3x^3 - kx^2 + x - 5k$, halla el número k tal que la gráfica de f contenga el punto $(-1, 4)$.

36 Si $f(x) = kx^3 + x^2 - kx + 2$, halla el número k tal que la gráfica de f contenga el punto $(2, 12)$.

37 Si un cero de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 16k$ es 2, encuentra los otros dos ceros.

38 Si un cero de $f(x) = x^3 - 3x^2 - kx + 12$ es -2 , encuentra los otros dos ceros.

39 Polinomio de Legendre El polinomio de Legendre de tercer grado $P(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ aparece en la solución de problemas de transferencia de calor en física e ingeniería. Halla todos los valores de x tales que $P(x) > 0$ y $P(x) < 0$ y traza la gráfica de P .

40 Polinomio de Chebyshev El polinomio de Chebyshev de cuarto grado $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ aparece en estudios de estadística. Determina todos los valores de x tales que $f(x) > 0$. (Sugerencia: sea $z = x^2$ y usa la fórmula cuadrática.)

41 Construcción de una caja Se va a fabricar una caja sin tapa a partir de un cartón rectangular de 20×30 pulgadas, cortando cuadrados idénticos de área x^2 en cada esquina y doblando hacia arriba los lados (véase el ejercicio 65, sección 3.4).

(a) Demuestra que el volumen de la caja está dado por la función $V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x)$.

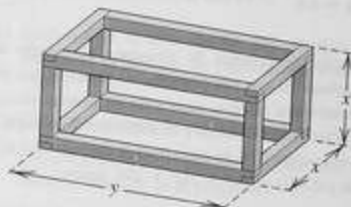
(b) Encuentra todos los valores positivos de x tales que $V(x) > 0$ y traza la gráfica de V para $x > 0$.

42 Construcción de una caja de embalaje El bastidor para esta debe construirse con 24 pies de madera de 2×2 pulgadas (véase la figura).

(a) Si la caja debe tener extremos cuadrados de x pies por lado, proporciona el volumen exterior V del armazón como función de x (desprecia el grosor de la madera).

(b) Dibuja la gráfica de V para $x > 0$.

Ejercicio 42



43 Determinación de temperaturas Un meteorólogo concluye que la temperatura T (en $^{\circ}\text{F}$) para cierto periodo de 24 horas en invierno estuvo dado por la fórmula $T = \frac{1}{30}t(t - 12)(t - 24)$ para $0 \leq t \leq 24$, donde t es el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a las 6:00 a.m.

(a) ¿A qué hora era $T > 0$ y a qué otra $T < 0$?

(b) Grafica T .

(c) Demuestra que la temperatura era de 32°F entre las 12 a.m. y la 1:00 p.m. (Sugerencia: usa el teorema del valor intermedio.)

44 Flexiones de trampolines Un clavadista está de pie en el borde de un trampolín antes de iniciar un clavado. la flexión d

Ejercicio 44



del trampolín en la posición s pies desde el extremo está dada por $d = cs^2(3L - s)$ para $0 \leq s \leq L$, donde L es la longitud del trampolín y c es una constante positiva que depende del peso del clavadista y de las propiedades físicas del trampolín (véase la figura). Supón que el trampolín mide 10 pies de largo.

- (a) Si la flexión del extremo del trampolín es de 1 pie, encuentra c .
- (b) Demuestra que la flexión es $\frac{1}{2}$ pie entre $s = 6.5$ y $s = 6.6$.

45 Población de venados Se introduce un rebaño de 100 ejemplares en una isla pequeña. Al principio los venados aumentan con rapidez; pero a fin de cuentas disminuyen los recursos alimentarios y la población disminuye. Supón que el número $N(t)$ de especímenes después de t años está dado por $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$, donde $t > 0$.

- (a) Halla los valores de t para los que $N(t) > 0$ y traza la gráfica de N .
- (b) ¿Se extingue la población de venados? Si es así, ¿cuándo desaparecerá?

46 Población de venados Consulta el ejercicio 45. Por medio del cálculo se puede demostrar que la rapidez R (en venados por año) con que cambia la población en el tiempo t está dada por $R = -4t^3 + 42t$.

- (a) ¿Cuándo deja de crecer la población?
- (b) Determina los valores positivos de t para los que $R > 0$.



48 (a) Grafica los polinomios cúbicos

$$f(x) = -3x^3,$$

$$g(x) = -3x^3 - x^2 + 1,$$

$$h(x) = -3x^3 + x^2 - 1,$$

y

$$k(x) = -3x^3 - 2x^2 + 2x$$

en el mismo plano coordenado, usando cada una de las siguientes pantallas:

(1) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$

(2) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

(3) $[-50, 50, 10]$ por $[-5000, 5000, 1000]$

(4) $[-100, 100, 10]$ por $[-5 \times 10^4, 5 \times 10^4, 10^3]$

- (b) A medida que la pantalla se expande, ¿cómo se comparan las gráficas de las cuatro funciones?
- (c) ¿Qué término tiene la máxima influencia en el valor de cada una de las funciones cuando $|x|$ es grande?



49 (a) Grafica cada uno de estos polinomios f cúbicos en la pantalla $[-9, 9]$ por $[-6, 6]$.

(1) $f(x) = x^3 - x + 1$

(2) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x - 1$

(3) $f(x) = 0.1x^3 - 1$

(4) $f(x) = -x^3 + 4x + 2$

- (b) Determina la forma de la gráfica de f a medida que $|x|$ se agranda.
- (c) Plantea una generalización respecto del comportamiento final de la función: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



50 (a) Grafica cada uno de los siguientes polinomios de cuarto grado en la pantalla $[-9, 9]$ por $[-6, 6]$.

(1) $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 6x - 3$

(2) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$

(3) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - x + 1$

(4) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{7}{2}x + 3$

- (b) Determina la forma de la gráfica de f cuando $|x|$ se hace más grande.
- (c) Haz una generalización acerca del comportamiento final de la función: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.



47 (a) Elabora una tabla que contenga los valores de los polinomios de cuarto grado

$$f(x) = 2x^4,$$

$$g(x) = 2x^4 - 5x^2 + 1,$$

$$h(x) = 2x^4 + 5x^2 - 1,$$

y

$$k(x) = 2x^4 - x^3 + 2x,$$

cundo $x = \pm 20, \pm 40, y \pm 60$.

- (b) Conforme $|x|$ se agranda, ¿cómo se comparan los valores de cada función?
- (c) ¿Cuál término tiene máxima influencia en el valor de cada función cuando $|x|$ es grande?



Ejercicios 51 al 54: grafica f y calcula sus ceros.

51 $f(x) = x^3 + 0.2x^2 - 2.6x + 1.1$

52 $f(x) = -x^4 + 0.1x^3 + 4x^2 - 0.5x - 3$

53 $f(x) = x^3 - 3x + 1$

54 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$

Ejercicios 55 al 58: grafica f y calcula todos los valores de x tales que $f(x) > k$.

55 $f(x) = x^2 + 5x - 2$; $k = 1$

56 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8x + 5$; $k = 3$

57 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$; $k = -2$

58 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 10x - 26$; $k = -1$

Ejercicios 59 y 60: grafica f y g en el mismo plano coordenado y calcula los puntos de intersección.

59 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1.5x + 2.8$;
 $g(x) = -x^3 - 1.7x^2 + 2x + 2.5$

60 $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$;
 $g(x) = x^4 - 3x^3 - 0.25x^2 + 3.75x$

61 Beneficiarios del servicio médico del estado. La función $f(x) = 0.0014z^3 - 0.0388z^2 + 0.8783z + 23.82$,

donde $z = x - 1975$, aproxima la cantidad total de beneficiarios del servicio médico del Estado en Estados Unidos (Medicare) en millones de 1975 a 1995.

- (a) Grafica f y analiza la forma en que la cantidad de beneficiarios ha cambiado en este periodo.
(b) Calcula gráficamente el año en que hubo 34.4 millones de beneficiarios.

62 Participantes en el programa Head Start. La función de f dada por $f(x) = 4.363x^4 - 236.3x^3 + 5527x^2 - 46.519x + k$ donde $k = 475.913$ es una aproximación de la cantidad total de preescolares estadounidenses que participaron en el programa gubernamental Head Start entre 1970 y 1995, donde $x = 0$ corresponde al año 1970.

- (a) Grafica f en el intervalo $[0, 25]$. Analiza cómo ha cambiado el número de participantes entre 1970 a 1995.
(b) Calcula el número de niños inscritos en 1976.
(c) Calcula gráficamente los años en que hubo 400 000 menores inscritos en el programa.

4.2

Propiedades de la división

En esta sección usaremos $f(x)$, $g(x)$, etc., para denotar polinomios en x . Si $g(x)$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(x)$ es **divisible** por $g(x)$; por ejemplo, $x^4 - 16$ es divisible entre $x^2 - 4$, entre $x^2 + 4$, entre $x + 2$ y entre $x - 2$.

El polinomio $x^4 - 16$ no es divisible entre $x^2 + 3x + 1$; pero podemos usar el proceso llamado **división larga** para hallar un **cociente** y un **residuo**, como en la siguiente ilustración, donde hemos insertado términos con coeficientes cero.

ILUSTRACIÓN División larga de polinomios

$$\begin{array}{r}
 \text{cociente} \\
 x^2 - 3x + 8 \\
 x^4 + 3x + 1 \overline{) x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 16} \\
 \underline{x^4 + 3x^3 + x^2} \\
 -3x^3 - x^2 \\
 \underline{-3x^3 - 9x^2 - 3x} \\
 8x^2 + 3x - 16 \\
 \underline{8x^2 + 24x + 8} \\
 -21x - 24 \\
 \hline
 \text{residuo}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x^2(x^2 + 3x + 1) \\
 \text{restar} \\
 -3x(x^2 + 3x + 1) \\
 \text{restar} \\
 8(x^2 + 3x + 1) \\
 \text{restar}
 \end{array}$$

El proceso de división larga termina cuando llegamos a un polinomio (el residuo) que es 0 o tiene menor grado que el divisor. El resultado de la división larga en esta ilustración se escribe

$$\frac{x^4 - 16}{x^2 + 3x + 1} = (x^2 - 3x + 8) + \left(\frac{-21x - 24}{x^2 + 3x + 1} \right).$$

Al multiplicar ambos lados de esta ecuación por $x^2 + 3x + 1$, se obtiene $x^4 - 16 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 8) + (-21x - 24)$.

$$x^4 - 16 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 8) + (-21x - 24).$$

Este ejemplo aclara el teorema que sigue.

**Algoritmo de la división
para polinomios**

Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios y si $p(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x),$$

donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $p(x)$. El polinomio $q(x)$ es el **cociente** y $r(x)$ es el **residuo** en la división de $f(x)$ entre $p(x)$.

Un caso especial útil del algoritmo de división se presenta cuando se divide $f(x)$ entre $x - c$, donde c es un número real. Si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces

$$f(x) = (x - c)q(x)$$

para algún cociente $q(x)$, y el residuo $r(x)$ es 0. Si $x - c$ no es factor de $f(x)$, entonces el grado del residuo $r(x)$ es menor que el grado de $x - c$ y, por tanto, $r(x)$ debe tener grado 0. Esto significa que el residuo es un número diferente de cero y, en consecuencia, para toda $x - c$ tenemos

$$f(x) = (x - c)q(x) + d,$$

donde el residuo d es un número real (quizá $d = 0$). Si c sustituye a x , obtenemos

$$\begin{aligned} f(c) &= (c - c)q(c) + d \\ &= 0 \cdot q(c) + d \\ &= 0 + d = d. \end{aligned}$$

Esto demuestra el teorema siguiente.

Teorema del residuo

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

EJEMPLO 1 Uso del teorema del residuo

Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$, usa el teorema del residuo para hallar $f(2)$.

SOLUCIÓN Según este teorema, $f(2)$ es el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 2$. Por división larga

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x + 1 \\
 x-2 \overline{) x^3 - 3x^2 + x + 5} \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \\
 -x^2 + x \\
 \underline{-x^2 + 2x} \\
 -x + 5 \\
 \underline{-x + 2} \\
 3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x^2(x-2) \\
 \text{restar} \\
 -x(x-2) \\
 \text{restar} \\
 (-1)(x-2) \\
 \text{restar}
 \end{array}$$

Por tanto, $f(2) = 3$. Este dato se puede comprobar mediante sustitución directa:

$$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 + 5 = 3$$

Con el teorema del residuo demostraremos este importante resultado.

Teorema del factor

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Por el teorema del residuo,

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$$

para algún cociente $q(x)$.

Si $f(c) = 0$, entonces $f(x) = (x - c)q(x)$; es decir, $x - c$ es un factor de $f(x)$. A la inversa, si $x - c$ es un factor de $f(x)$, el residuo de la división de $f(x)$ entre $x - c$ debe ser 0 y, en consecuencia, por el teorema del residuo, $f(c) = 0$.

El teorema del factor es útil para hallar factores de polinomios, según se expone en este ejemplo:

EJEMPLO 2 Uso del teorema del factor

Prueba que $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.

SOLUCIÓN Como $f(2) = 8 - 16 + 6 + 2 = 0$, vemos por el teorema del factor que $x - 2$ es un factor de $f(x)$. Otro método de solución sería dividir $f(x)$ entre $x - 2$ y probar que el residuo es 0. El cociente de la división sería otro factor de $f(x)$.

La división sintética no sustituye a la división larga; simplemente es un método más rápido y es aplicable sólo cuando el divisor es de la forma $x - c$.

Los ejemplos que vienen exponen la división sintética de algunos casos particulares.

EJEMPLO 4 Uso de la división sintética para hallar un cociente y residuo. Utiliza la división sintética para hallar el cociente $q(x)$ y el residuo r si el polinomio $2x^4 + 5x^3 - 2x - 8$ se divide entre $x + 3$.

SOLUCIÓN Ya que el divisor es $x + 3 = x - (-3)$, el valor de c en la expresión $x - c$ es -3 ; por tanto, la división sintética adopta esta forma:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 2 & 5 & 0 & -2 & -8 \\ & & -6 & 3 & -9 & 33 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & -11 & 25 \end{array}$$

coeficientes residuo
del cociente

Según hemos indicado, las cuatro primeras cifras del tercer renglón son los coeficientes del cociente $q(x)$ y el último número es el residuo r . En consecuencia,

$$q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 11 \quad \text{y} \quad r = 25.$$

La división sintética sirve para hallar valores de funciones polinomiales, lo cual se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Uso de la división sintética para hallar valores de un polinomio

Si $f(x) = 3x^5 - 38x^3 + 5x^2 - 1$, halla $f(4)$ mediante la división sintética.

SOLUCIÓN Por el teorema del residuo, $f(4)$ es el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 4$. Al dividir sintéticamente se obtiene

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 4 & 3 & 0 & -38 & 5 & 0 & -1 \\ & & 12 & 48 & 40 & 180 & 720 \\ \hline & 3 & 12 & 10 & 45 & 180 & 719 \end{array}$$

coeficientes residuo
del cociente

En consecuencia, $f(4) = 719$.

La división sintética ayuda a encontrar ceros de polinomios. Por el método ilustrado en el ejemplo anterior, $f(c) = 0$ si y sólo si el residuo en la división sintética entre $x - c$ es 0.

EJEMPLO 6 Uso de la división sintética para hallar ceros de un polinomio

Demuestra que -11 es un cero del polinomio

$$f(x) = x^3 + 8x^2 - 29x + 44.$$

SOLUCIÓN Al dividir sintéticamente entre $x - (-11) = x + 11$ se obtiene

$$\begin{array}{r|rrrr} -11 & 1 & 8 & -29 & 44 \\ & & -11 & 33 & -44 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & 0 \end{array}$$

coeficientes residuo
del cociente

Por tanto, $f(-11) = 0$ y -11 es un cero de f .

El ejemplo 6 evidencia que el número -11 es una solución de la ecuación $x^3 + 8x^2 - 29x + 44 = 0$. En la sección 4.4 usaremos la división sintética para hallar soluciones racionales de ecuaciones.

En esta etapa ya debes reconocer que las tres expresiones que siguen son equivalentes para una función polinomial f cuya gráfica es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

expresiones
equivalentes
para $f(a) = b$

- (1) El punto (a, b) está en la gráfica de f .
- (2) El valor de f en $x = a$ es igual a b ; esto es, $f(a) = b$.
- (3) Si $f(x)$ se divide entre $x - a$, el residuo es b .

Además, si $b = 0$, las cuatro expresiones que vienen también son equivalentes.

otras
expresiones
equivalentes
para $f(a) = 0$

- (1) El número a es un cero de la función f .
- (2) El punto $(a, 0)$ está en la gráfica de f ; es decir, a es una intersección en x .
- (3) El número a es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.
- (4) El binomio $x - a$ es un factor del polinomio $f(x)$.

Debes acostumbrarte tanto a estas expresiones, que con sólo saber que si una de ellas es verdadera puedas recordar y aplicar cualquier expresión equivalente con facilidad.

EJEMPLO 7 Relación de una gráfica con la división

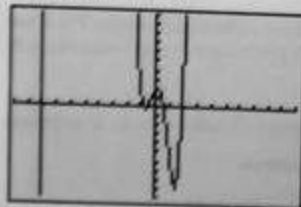
Utiliza la gráfica

$$f(x) = 0.5x^5 + 3.5x^4 - 5.5x^3 - 7.5x^2 + 2x + 2$$

y aproxima (a dos lugares decimales) el residuo si $f(x)$ se divide entre $x + 1.37$.

SOLUCIÓN Asignamos $f(x)$ a Y_1 y graficamos f con una pantalla estándar (figura 1). Según nuestro análisis anterior, para hallar un residuo b utilizando una gráfica debemos encontrar el punto (a, b) que corresponde a dividir $f(x)$ entre $x - a$. En este caso, $a = -1.37$, y el punto de la gráfica con coordenada x igual a -1.37 es aproximadamente $(-1.37, 9.24)$; por tanto, el residuo b es alrededor de 9.24.

Figura 1
[-10, 10] por [-10, 10]



La forma más fácil de hallar el residuo con una calculadora gráfica es pedir a la máquina el valor Y_1 cuando $x = -1.37$; sin embargo, el propósito de este ejemplo fue señalar la relación gráfica con el proceso de división.

4.2 Ejercicios

Ejercicios 1 al 8: encuentra el cociente y residuo si $f(x)$ se divide entre $p(x)$.

1 $f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 12$; $p(x) = x^2 - 3$

2 $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$; $p(x) = x^2 + 1$

3 $f(x) = 3x^3 + 2x - 4$; $p(x) = 2x^2 + 1$

4 $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4x - 8$; $p(x) = 2x^2 + x$

5 $f(x) = 7x + 2$; $p(x) = 2x^2 - x - 4$

6 $f(x) = -5x^2 + 3$; $p(x) = x^3 - 3x + 9$

7 $f(x) = 9x + 4$; $p(x) = 2x - 5$

8 $f(x) = 7x^2 + 3x - 10$; $p(x) = x^2 - x + 10$

18 grado 3; ceros $\pm 2, 3$

19 grado 4; ceros $-2, \pm 1, 4$

20 grado 4; ceros $-3, 0, 1, 5$

Ejercicios 21 al 28: usa la división sintética para hallar el cociente y el residuo si el primer polinomio se divide entre el segundo.

21 $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$; $x - 2$

22 $3x^3 - 4x^2 - x + 8$; $x + 4$

23 $x^3 - 8x - 5$; $x + 3$

24 $5x^3 - 6x^2 + 15$; $x - 4$

25 $3x^3 + 6x^2 + 7$; $x + 2$

26 $-2x^4 + 10x - 3$; $x - 3$

27 $4x^4 - 5x^2 + 1$; $x - \frac{1}{2}$

28 $9x^3 - 6x^2 + 3x - 4$; $x - \frac{1}{3}$

Ejercicios 9 al 12: usa el teorema del residuo para hallar $f(c)$.

9 $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 4$; $c = 2$

10 $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$; $c = 3$

11 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x - 8$; $c = -3$

12 $f(x) = x^4 + 3x^2 - 12$; $c = -2$

Ejercicios 13 al 16: demuestra que $x - c$ es un factor de $f(x)$ mediante el teorema del factor.

13 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 12$; $c = -3$

14 $f(x) = x^3 + x^2 - 11x + 10$; $c = 2$

15 $f(x) = x^3 - 4096$; $c = -2$

16 $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 6$; $c = 2$

Ejercicios 17 al 20: halla un polinomio $f(x)$ con coeficiente principal 1 y el grado y ceros dados.

17 grado 3; ceros $-2, 0, 5$

Ejercicios 29 al 34: encuentra $f(c)$ por medio de la división sintética.

29 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 4$; $c = 3$

30 $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x$; $c = -2$

31 $f(x) = 0.3x^3 + 0.04x - 0.034$; $c = -0.2$

32 $f(x) = 8x^3 - 3x^2 + 7$; $c = \frac{1}{2}$

33 $f(x) = x^2 + 3x - 5$; $c = 2 + \sqrt{3}$

34 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8$; $c = 1 + \sqrt{2}$

Ejercicios 35 al 38: prueba que c es un cero de $f(x)$ usando la división sintética.

35 $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 10x + 4$; $c = -2$

36 $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 8x - 3$; $c = 3$

37. $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x - 3; \quad c = \frac{1}{2}$

38. $f(x) = 27x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 6x + 1; \quad c = -\frac{1}{3}$

Ejercicios 39 y 40: encuentra todos los valores de k tales que $f(x)$ sea divisible entre el polinomio lineal dado.

39. $f(x) = kx^3 + x^2 + k^2x + 3k^2 + 11; \quad x + 2$

40. $f(x) = k^2x^3 - 4kx + 3; \quad x - 1$

Ejercicios 41 y 42: demuestra que $x - c$ no es un factor de $f(x)$ para cualquier número real c .

41. $f(x) = 3x^4 + x^2 + 5 \quad 42. f(x) = -x^4 - 3x^2 - 2$

43. Encuentra el residuo si el polinomio

$$3x^{100} + 5x^{45} - 4x^{18} + 2x^{17} - 6$$

se divide por $x + 1$.

Ejercicios 44 al 46: comprueba el enunciado con el teorema del factor.

44. $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todo entero positivo n .

45. $x + y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todo entero positivo n par.

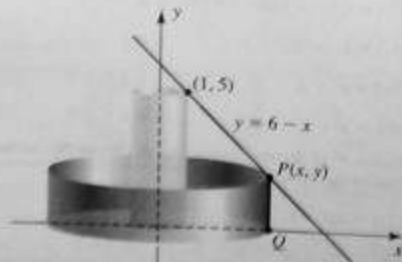
46. $x + y$ es un factor de $x^n + y^n$ para todo entero positivo n impar.

47. Sea $P(x, y)$ un punto del primer cuadrante en $y = 6 - x$; considera el segmento de recta vertical PQ de la figura.

(a) Si PQ gira alrededor del eje y , determina el volumen V del cilindro resultante.

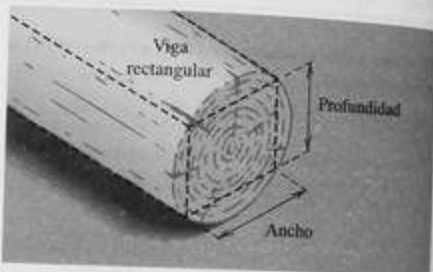
(b) ¿Para qué punto $P(x, y)$ con $x \neq 1$ el volumen V del inciso (a) es el mismo que el volumen del cilindro de radio 1 y altura 5 de la figura?

Ejercicio 47



48. **Resistencia de una viga.** La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto de su ancho y el cuadrado de la profundidad de una sección transversal (ve la figura). Se cortó una viga de 1.5 pies de ancho de un tronco cilíndrico de 1 pie de radio. Encuentra el ancho de una segunda viga rectangular de igual resistencia que se puede cortar del tronco.

Ejercicio 48

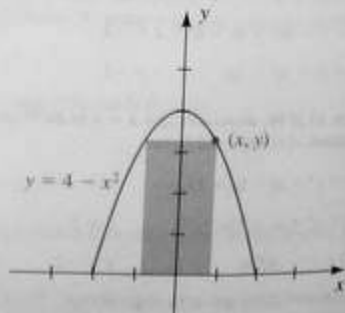


49. **Arco parabólico.** Un arco tiene la forma de la parábola $y = 4 - x^2$. Se escoge un punto (x, y) de la parábola y se coloca un rectángulo bajo el arco (vea la figura).

(a) Expresa el área A del rectángulo en términos de x .

(b) Si $x = 1$, el rectángulo tiene base 2 y altura 3. Halla la base de un segundo rectángulo que tenga la misma área.

Ejercicio 49



50. **Dimensiones de una tableta.** Una tableta de aspirina en forma de cilindro circular recto tiene una altura de $\frac{1}{2}$ cm y radio $\frac{1}{2}$ cm; el fabricante desea vender la aspirina en tabletas

de $\frac{1}{2}$ cm de largo, en forma de cilindro circular recto con extremos redondeados (ve la figura).

- (a) Si r denota el radio de una semiesfera, encuentra una fórmula para establecer el volumen de la tableta.
- (b) Encuentra el radio de la tableta, de modo que su volumen sea igual al de la otra.

Ejercicio 50



Ejercicios 51 y 52: usa la gráfica de f con objeto de aproximar el residuo de f si se divide entre $x - 0.21$.

$$51 \quad f(x) = x^4 - 7.9x^3 - 0.8x^2 + x^3 + 1.2x - 9.81$$

$$52 \quad f(x) = 3.33x^4 - 2.5x^3 + 6.9x^2 - 4.1x^2 + 1.22x - 6.78$$

Ejercicios 53 y 54: utiliza la gráfica de f para estimar todos los valores de k tales que $f(x)$ sea divisible entre el polinomio lineal dado.

$$53 \quad f(x) = x^3 + k^2x^2 + 2kx - 2k^2; \quad x - 1.6$$

$$54 \quad f(x) = k^3x^3 - 2.1x^2 + k^3x - 1.2k^2; \quad x + 0.4$$

4.3

Ceros de polinomios

Los **ceros de un polinomio** $f(x)$ son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Cada cero real es una intersección en x de la gráfica de f . En la práctica, generalmente se usan calculadoras y computadoras para encontrar o calcular ceros pero, antes de usar cualquiera de estos dispositivos, vale la pena saber qué tipo de ceros esperar. Algunas posibles preguntas son:

- (1) ¿Cuántos ceros de $f(x)$ son reales y cuántos imaginarios?
- (2) ¿Cuántos ceros reales de $f(x)$ son positivos y cuántos negativos?
- (3) ¿Cuántos ceros reales de $f(x)$ son racionales y cuántos irracionales?
- (4) ¿Los ceros reales de $f(x)$ son de valor pequeño o grande?

En esta sección y en la siguiente analizaremos resultados que ayudarán a responder algunas de estas preguntas. Dichos resultados forman la base de la *teoría de las ecuaciones*.

Los teoremas del factor y del residuo se pueden extrapolar al sistema de los números complejos; por tanto, el número complejo $c = a + bi$ es un cero de un polinomio $f(x)$ si y sólo si $x - c$ es un factor de $f(x)$. Excepto en casos especiales, los ceros de polinomios son muy difíciles de hallar; por ejemplo, no hay ceros obvios de $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x - 10$. Aun cuando no exista una fórmula para hallar los ceros, el teorema que sigue expresa que hay por lo menos un cero c y, por tanto, por el teorema del factor, $f(x)$ posee un factor de la forma $x - c$.

Teorema fundamental del álgebra

Si un polinomio $f(x)$ tiene grado positivo y coeficientes complejos, entonces $f(x)$ posee por lo menos un cero complejo.

La prueba habitual de este teorema requiere resultados de un campo avanzado de las matemáticas, llamado *funciones de una variable compleja*. Un requisito previo de este campo es el dominio del cálculo. El matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777–1855) —considerado por muchos como el matemático más grande de todos los tiempos— desarrolló la primera prueba del teorema fundamental del álgebra.

Un caso especial del teorema fundamental es: si todos los coeficientes de $f(x)$ son reales, entonces $f(x)$ tiene por lo menos un cero complejo. Si $a + bi$ es un cero complejo, quizá $b = 0$, en cuyo caso el número a es un cero real.

El teorema fundamental del álgebra hace posible, por lo menos en teoría, expresar todo polinomio $f(x)$ de grado positivo como un producto de polinomios de grado 1, lo cual se expone en el teorema siguiente.

Teorema de factorización completa para polinomios

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces existen n números complejos c_1, c_2, \dots, c_n tales que

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

donde a es el coeficiente principal de $f(x)$. Cada número c_k es un cero de $f(x)$.

DEMOSTRACIÓN Si $f(x)$ tiene grado $n > 0$ entonces, por el teorema fundamental del álgebra, $f(x)$ posee un cero complejo c_1 . En consecuencia, por el teorema del factor, $f(x)$ tiene un factor de $x - c_1$; por tanto,

$$f(x) = (x - c_1)f_1(x),$$

donde $f_1(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Si $n - 1 > 0$, entonces, usando el mismo argumento, $f_1(x)$ tiene un cero complejo c_2 y, por tanto, un factor $x - c_2$. Entonces

$$f_1(x) = (x - c_2)f_2(x),$$

donde $f_2(x)$ es un polinomio de grado $n - 2$. Por esto,

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)f_2(x).$$

De continuar este proceso, después de n pasos llegamos a un polinomio $f_n(x)$ de grado 0. Así pues, $f_n(x) = a$ para algún número a distinto de cero, y podemos escribir

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

donde cada número complejo c_i es un cero de $f(x)$. El coeficiente principal del polinomio del lado derecho de la última ecuación es a ; por lo tanto, a es el coeficiente principal de $f(x)$.

ILUSTRACIÓN Teorema de factorización completa para polinomios

Un polinomio $f(x)$	Una forma factorizada de $f(x)$	Ceros de $f(x)$
■ $3x^2 - (12 + 6i)x + 24i$	$3(x - 4)(x - 2i)$	$4, 2i$
■ $-6x^3 - 2x^2 - 6x - 2$	$-6(x + \frac{1}{3})(x + i)(x - i)$	$-\frac{1}{3}, \pm i$
■ $5x^3 - 30x^2 + 65x$	$5(x - 0)[x - (3 + 2i)][x - (3 - 2i)]$	$0, 3 \pm 2i$
■ $\frac{2}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{2}{3}x - 8$	$\frac{2}{3}(x + 12)(x + 1)(x - 1)$	$-12, \pm 1$

Ahora podemos probar lo siguiente.

Teorema sobre el número máximo de ceros de un polinomio

Un polinomio de grado $n > 0$ tiene cuando mucho n ceros complejos diferentes.

DEMOSTRACIÓN Daremos una demostración indirecta; esto es, supondremos que $f(x)$ tiene más de n ceros complejos diferentes y demostraremos que esta suposición lleva a una contradicción. Escogamos $n + 1$ de los ceros y nombrémoslos c_1, c_2, \dots, c_n y c . Podemos usar los c_k para obtener la factorización indicada en la expresión del teorema de factorización completa. Sustituimos x con c y aprovechamos que $f(c) = 0$, con lo cual

$$0 = a(c - c_1)(c - c_2) \cdots (c - c_n).$$

Sin embargo, cada factor del lado derecho es diferente de cero porque $c \neq c_k$ para toda k . Puesto que el producto de números distintos de cero no puede ser igual a cero, tenemos una contradicción.

EJEMPLO 1 Determinación de un polinomio con ceros prescritos

Encuentra un polinomio $f(x)$ mediante la forma de factorización que tenga grado 3, con ceros 2, -1 y 3 que satisfaga $f(1) = 5$.

SOLUCIÓN Por el teorema del factor $f(x)$ tiene factores $x - 2$, $x + 1$ y $x - 3$. No existen otros factores de grado 1 porque, por el teorema del factor, otro factor lineal $x - c$ produciría un cuarto cero de $f(x)$, contrario al teorema anterior, por tanto, $f(x)$ adopta la forma

$$f(x) = a(x - 2)(x + 1)(x - 3)$$

para algún número a . Dado que $f(1) = 5$, vemos que

$$5 = a(1 - 2)(1 + 1)(1 - 3) \quad \text{sea } x = 1 \text{ en } f(x)$$

$$5 = a(-1)(2)(-2) \quad \text{simplificar}$$

$$a = \frac{5}{4} \quad \text{despejar } a$$

(continúa)

En consecuencia,

$$f(x) = \frac{5}{4}(x-2)(x+1)(x-3).$$

Si multiplicamos los factores, obtenemos el polinomio

$$f(x) = \frac{5}{4}x^3 - 5x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{15}{2}.$$

Los números c_1, c_2, \dots, c_n del teorema de factorización completa no son necesariamente todos distintos. Para ilustrarlo, $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ tiene la factorización

$$f(x) = (x+3)(x-1)(x-1).$$

Si un factor $x - c$ se presenta m veces en la factorización, entonces c es un **cero de multiplicidad m** del polinomio $f(x)$, o una **raíz de multiplicidad m** de la ecuación $f(x) = 0$. En el esquema anterior, 1 es un cero de multiplicidad 2 y -3 es un cero de multiplicidad 1.

Si c es un cero real de $f(x)$ de multiplicidad m , entonces $f(x)$ tiene el factor $(x - c)^m$ y la gráfica de f presenta una intersección en x de c . La forma general de la gráfica en $(c, 0)$ depende de si m es entero impar o par. Si m es impar, entonces $(x - c)^m$ cambia de signo conforme x crece en todo c ; en consecuencia, la gráfica de f cruza el eje x en $(c, 0)$, como se ve en el primer renglón de la siguiente tabla. Las figuras de la tabla no presentan toda la gráfica de f , sino sólo su forma general cerca de $(c, 0)$. Si m es par, entonces $(x - c)^m$ no cambia signo en c y la gráfica de f cerca de $(c, 0)$ se parece a una de las dos figuras del segundo renglón.


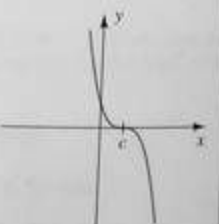
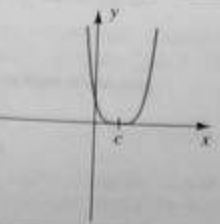

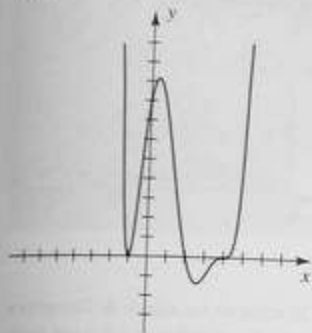
Factor de $f(x)$	Aspecto general de la gráfica de f cerca de $(c, 0)$	
$(x - c)^m$, con m impar y $m \neq 1$		
$(x - c)^m$, con m par		

Figura 1

**EJEMPLO 2** Búsqueda de las multiplicidades de ceros

Encuentra los ceros del polinomio $f(x) = \frac{1}{16}(x-2)(x-4)^3(x+1)^2$, expresa la multiplicidad de cada uno y traza la gráfica de f .

SOLUCIÓN Con la forma factorizada vemos que $f(x)$ tiene tres ceros distintos, 2, 4 y -1. El cero 2 posee multiplicidad 1; el 4, multiplicidad 3, y el cero -1, multiplicidad 2. Observa que $f(x)$ tiene grado 6.

Las intersecciones en x de la gráfica de f son los ceros reales -1, 2 y 4. Dado que la multiplicidad de -1 es un entero par, la gráfica interseca pero no cruza el eje x en $(-1, 0)$. Como las multiplicidades de 2 y 4 son impares, la gráfica cruza el eje x en $(2, 0)$ y $(4, 0)$. (Advertirás que la gráfica es "más plana" en 4 que en 2.) La intersección en y es $f(0) = \frac{1}{16}(-2)(-4)^3(1)^2 = 8$. La gráfica se muestra en la figura 1.

Si $f(x) = a(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n)$ es un polinomio de grado n , entonces los n números complejos c_1, c_2, \dots, c_n son ceros de $f(x)$. Contar un cero de multiplicidad m como m ceros significa que $f(x)$ tiene por lo menos n ceros (no necesariamente todos distintos). La combinación de este dato con que $f(x)$ tiene a lo más n ceros da este resultado.

Teorema sobre el número exacto de ceros de un polinomio

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$ y si un cero de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n ceros.

Observa cómo el polinomio de grado 6 en el ejemplo 2 se relaciona con el último teorema. Las multiplicidades son 1, 3 y 2, por lo que f tiene precisamente $1 + 3 + 2 = 6$ ceros.

EJEMPLO 3 Determinación de los ceros de un polinomio

Expresa $f(x) = x^5 - 4x^4 + 13x^3$ como producto de factores lineales y encuentra los cinco ceros de $f(x)$.

SOLUCIÓN Comenzamos por factorizar x^3 :

$$f(x) = x^3(x^2 - 4x + 13)$$

Por la fórmula cuadrática, los ceros del polinomio $x^2 - 4x + 13$ son

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Así pues, por el teorema del factor, $x^2 - 4x + 13$ tiene factores $x - (2 + 3i)$ y $x - (2 - 3i)$ y obtenemos la factorización

$$f(x) = x \cdot x \cdot x \cdot (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i).$$

Dado que $x = 0$ se presenta tres veces como factor, el número 0 es un cero de multiplicidad 3 y los cinco ceros de $f(x)$ son 0, 0, 0, $2 + 3i$ y $2 - 3i$.

Regla de los signos de Descartes

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales y término constante diferente de cero.

- (1) El número de ceros reales *positivos* de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $f(x)$ o es menor que ese número por un entero par.
- (2) El número de ceros reales *negativos* de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $f(-x)$ o es menor que ese número por un entero par.

No probaremos la regla de Descartes.

EJEMPLO 4 Uso de la regla de los signos de Descartes

Analiza el número de posibles soluciones reales positivas, negativas e imaginarias de la ecuación $f(x) = 0$, donde

$$f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5.$$

SOLUCIÓN El polinomio $f(x)$ se dio en las dos ilustraciones anteriores. Puesto que hay tres variaciones de signo en $f(x)$, la ecuación tiene tres soluciones reales positivas o una solución real positiva.

En vista de que $f(-x)$ presenta dos variaciones de signo, la ecuación tiene o dos soluciones negativas o ninguna solución negativa. Debido a que $f(x)$ tiene grado 5 hay un total de cinco soluciones. Las soluciones que no son números reales positivos o negativos son números imaginarios. En la tabla siguiente se resumen las diversas posibilidades que pueden darse para las soluciones de la ecuación.

Número de soluciones reales positivas	3	3	1	1
Número de soluciones reales negativas	2	0	2	0
Número de soluciones imaginarias	0	2	2	4
Número total de soluciones	5	5	5	5

La regla de Descartes estipula que el término constante del polinomio $f(x)$ es diferente de 0. Si el término constante es 0, como en la ecuación

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x = 0,$$

factorizamos la mínima potencia de x y obtenemos

$$x(x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = 0.$$

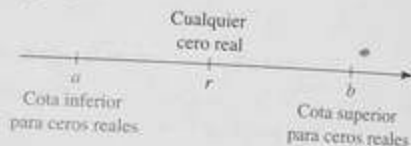
Por tanto, una solución es $x = 0$ y aplicamos la regla de Descartes al polinomio $x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ para establecer la naturaleza de las tres soluciones restantes.

Cuando apliques la regla de Descartes, considera las raíces de multiplicidad k como k raíces; por ejemplo, dada $x^2 - 2x + 1 = 0$, el polinomio

$x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene dos variaciones de signo y por ello la ecuación presenta dos raíces reales positivas o ninguna. La forma factorizada de la ecuación es $(x - 1)^2 = 0$ y, en consecuencia, 1 es una raíz de multiplicidad 2.

En seguida estudiamos las **cotas** para los ceros reales de un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales. Por definición, un número real b es una **cota superior** para los ceros si ningún cero es mayor que b . Un número real a es una **cota inferior** para los ceros si ningún cero es menor que a . De esta forma, si r es cualquier cero real de $f(x)$, entonces $a \leq r \leq b$; esto es, r está en el intervalo cerrado $[a, b]$ (figura 2). Observarás que las cotas superior e inferior no son únicas, ya que cualquier número mayor que b también es una cota superior y cualquier número menor que a también es una cota inferior.

Figura 2



Podemos usar la división sintética para hallar las cotas superior e inferior para los ceros de $f(x)$. Recordemos que si dividimos $f(x)$ sintéticamente entre $x - c$, el tercer renglón del proceso de división contiene los coeficientes del cociente $q(x)$ y el residuo $f(c)$. El teorema que sigue expone cómo se puede usar este tercer renglón para encontrar las cotas superior e inferior de las soluciones reales.

Primer teorema de cotas para ceros reales de polinomios

Supongamos que $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y un coeficiente inicial positivo, y que $f(x)$ se divide sintéticamente entre $x - c$.

- (1) Si $c > 0$ y todos los números del tercer renglón del proceso de división son positivos o cero, entonces c es una cota superior para los ceros reales de $f(x)$.
- (2) Si $c < 0$ y los números del tercer renglón del proceso de división son alternativamente positivos y negativos (y un cero del tercer renglón se considera como positivo o negativo), entonces c es una cota inferior para los ceros reales de $f(x)$.



EJEMPLO 5 Determinación de cotas para las soluciones de una ecuación

Encuentra las cotas superior e inferior de las soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$.

SOLUCIÓN Dividimos $f(x)$ sintéticamente entre $x - 1$ y $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & 2 & 7 & -1 \\ \hline & 2 & 7 & -1 & -8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & 4 & 18 & 20 \\ \hline & 2 & 9 & 10 & 13 \end{array}$$

El tercer renglón de la división sintética entre $x - 1$ contiene números negativos y, por tanto, no aplica el inciso (1) del teorema sobre cotas para ceros reales. Sin embargo, ya que todos los números del tercer renglón de la división sintética entre $x - 2$ son positivos, del inciso (1) se deduce que 2 es una cota superior para las soluciones reales de la ecuación. Este hecho también es evidente si expresamos la división entre $x - 2$ en la forma de algoritmo de división

$$2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = (x - 2)(2x^2 + 9x + 10) + 13,$$

porque si $x > 2$, el lado derecho de la ecuación es positivo (¿por qué?) y en consecuencia, $f(x)$ no es cero.

Ahora encontramos una cota inferior. Tras algunos intentos de prueba y error usando $x - (-1)$, $x - (-2)$ y $x - (-3)$, la división sintética entre $x - (-4)$ da

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & -8 & 12 & -16 \\ \hline & 2 & -3 & 4 & -23 \end{array}$$

Dado que los números del tercer renglón son alternativamente positivos y negativos, del inciso (2) del teorema anterior deducimos que -4 es una cota inferior para las soluciones reales. También podemos demostrarlo expresando la división entre $x + 4$ en la forma

$$2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = (x + 4)(2x^2 - 3x + 4) - 23,$$

porque si $x < -4$, entonces el lado derecho de esta ecuación es negativo (¿por qué?) y, por tanto, $f(x)$ no es cero.

Puesto que las cotas inferior y superior de las soluciones reales son -4 y 2 , se deduce que todas las soluciones reales pertenecen al intervalo cerrado $[-4, 2]$.

La gráfica de f de la figura 3 muestra que los tres ceros de f están en los intervalos $[-4, -3]$, $[-1, 0]$ y $[1, 2]$, respectivamente.

Cuando se usa un equipo graficador, el siguiente teorema es útil para hallar una pantalla que muestre todos los ceros de un polinomio.

Segundo teorema de cotas para ceros reales de un polinomio

Supongamos que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ es un polinomio con coeficientes reales. Todos los ceros reales de $f(x)$ están en el intervalo

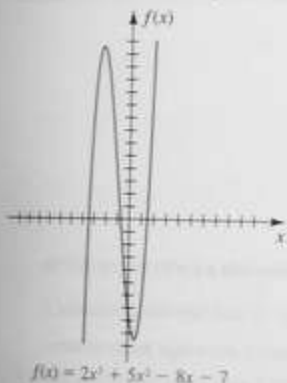
$$(-M, M),$$

$$\text{en donde } M = \frac{\max(|a_n|, |a_{n-1}|, \dots, |a_1|, |a_0|)}{|a_n|} + 1.$$

En palabras, el valor de M es igual a la razón del coeficiente más grande (en magnitud) entre el valor absoluto del coeficiente principal, más 1; por ejemplo, con el polinomio $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$ del ejemplo 5, tenemos

$$M = \frac{|-8|}{|2|} + 1 = 4 + 1 = 5.$$

Figura 3



Cuando utilizas una calculadora graficadora *sólo* para hallar los ceros de un polinomio $f(x)$, no precisas ver los puntos extremos del polinomio; en consecuencia, puedes empezar a buscar los ceros de $f(x)$ con la pantalla

$$[-M, M] \text{ por } [-1, 1]$$

Si graficas $Y_1 = f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$ (del ejemplo 5) en la pantalla $[-5, 5]$ por $[-1, 1, 0.5]$ de la figura 4, casi podrás tener a la vista las soluciones aproximadas -3.4 , -0.7 y 1.5 .

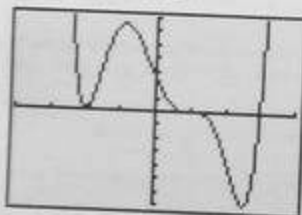
Figura 4

$[-5, 5]$ por $[-1, 1, 0.5]$



Figura 5

$[-4, 4]$ por $[-35, 35, 5]$



■ EJEMPLO 6 Determinación de un polinomio a partir de una gráfica

En la figura 5 se ilustran todos los ceros de una función polinomial f .

- Encuentra una forma factorizada para f que tenga grado mínimo.
- Sea $f = 1$ el coeficiente principal de f ; encuentra la intersección en y .

SOLUCIÓN

(a) El cero de $x = -2$ debe tener una multiplicidad que sea un número par, ya que f no cambia signo en $x = -2$. El cero en $x = 1$ debe poseer una multiplicidad impar de 3 o mayor, ya que f cambia signo en $x = 1$ y se nivela. El cero en $x = 3$ es de multiplicidad 1, porque f cambia signo y no se nivela. Por tanto, una forma factorizada de f es

$$f(x) = a(x + 2)^n(x - 1)^3(x - 3),$$

Como buscamos la función con grado mínimo, hacemos $m = 2$ y $n = 3$ y obtenemos

$$f(x) = a(x + 2)^3(x - 1)^3(x - 3),$$

que es un polinomio de sexto grado.

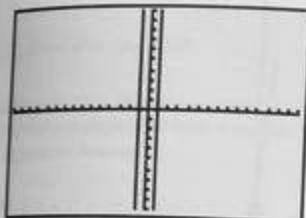
(b) Si el coeficiente principal de f debe ser 1, entonces, por el teorema de factorización completa para polinomios, sabemos que el valor de a es 1. Para hallar la intersección en y igualamos x a 0 y calculamos $f(0)$:

$$f(0) = 1(0 + 2)^3(0 - 1)^3(0 - 3) = 1(4)(-1)(-3) = 12$$

En consecuencia, la intersección en y es el punto 12.

Figura 6

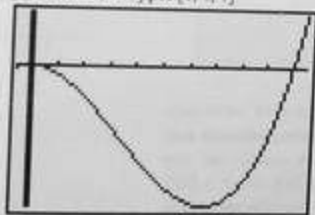
[-15, 15] por [-10, 10]

**EJEMPLO 7** Exploración de la gráfica de un polinomioEncuentra los ceros de $f(x) = x^3 - 1000x^2 - x + 1000$.**SOLUCIÓN** Asignamos $f(x)$ a Y_1 y usamos una pantalla predefinida con objeto de obtener la figura 6. Es evidente que 1 es una raíz de f , lo cual demostramos mediante división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1000 & -1 & 1000 \\ & & 1 & -999 & -1000 \\ \hline & 1 & -999 & -1000 & 0 \end{array}$$

Con la ecuación reducida $x^2 - 999x - 1000 = 0$, también podemos probar que -1 es una raíz de f :

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -999 & -1000 \\ & & -1 & 1000 \\ \hline & 1 & -1000 & 0 \end{array}$$

En la última división sintética vemos que $x - 1000$ es un factor de f , por tanto, la raíz tercera de 1000.Debido a las magnitudes relativas de las raíces 1 y 1000, es muy difícil obtener una pantalla que exhiba los tres ceros; sin embargo al fijar X_{\min} en -50, X_{\max} en 1050 y X_{scel} en 100 y usando ZoomFit (opción 0 en la TI-83 Plus o F1 en el segundo submenú del menú ZOOM en la TI-86), obtenemos la gráfica de f en la figura 7, que muestra sus ceros y puntos extremos.Ahora comprobemos los valores de Y_{\min} y Y_{\max} para ver la pantalla necesaria.Figura 7 Usando ZoomFit
[-50, 1050, 100] por [?, ?, ?]**4.3 Ejercicios****Ejercicio 1 al 6:** encuentra un polinomio $f(x)$ de grado 3 que tenga los ceros indicados y satisfaga la condición dada.

1. -1, 2, 3; $f(-2) = 80$

2. -5, 2, 4; $f(3) = -24$

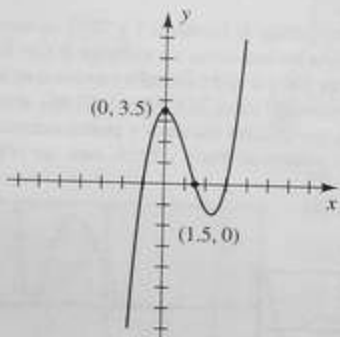
3. -4, 3, 0; $f(2) = -36$

4. -3, -2, 0; $f(-4) = 16$

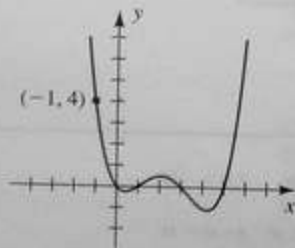
5. -2i, 2i, 3; $f(1) = 20$

$$6 \quad -3i, 3i, 4; \quad f(-1) = 50$$

- 7 Halla un polinomio $f(x)$ de cuarto grado con coeficiente inicial 1 tal que -4 y 3 sean ceros de multiplicidad 2 y traza la gráfica de f .
- 8 Encuentra un polinomio $f(x)$ de cuarto grado con coeficiente inicial 1 tal que -5 y 2 sean ceros de multiplicidad 2 y traza la gráfica de f .
- 9 Halla un polinomio $f(x)$ de sexto grado tal que 0 y 3 sean ceros de multiplicidad 3 y $f(2) = -24$. Traza la gráfica de f .
- 10 Encuentra un polinomio $f(x)$ de séptimo grado tal que -2 y 2 sean ceros de multiplicidad 2, 0 es un cero de multiplicidad 3 y $f(-1) = 27$. Traza la gráfica de f .
- 11 Halla la función polinomial de tercer grado cuya gráfica se muestra en la figura.

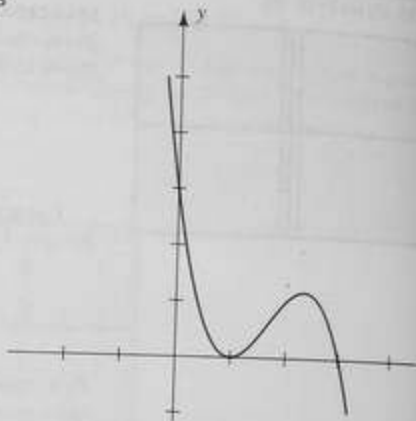


- 12 Encuentra la función polinomial de cuarto grado cuya gráfica se presenta en la figura.

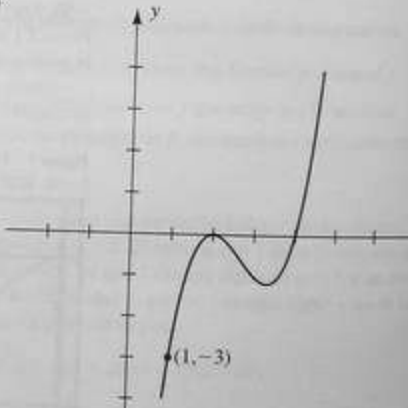


Ejercicios 13 y 14: halla la función polinomial de tercer grado cuya gráfica aparece en la figura.

13



14



Ejercicios 15 al 22: encuentra los ceros de $f(x)$ y expresa la multiplicidad de cada cero.

15 $f(x) = x^2(3x + 2)(2x - 5)^3$

16 $f(x) = x(x + 1)^4(3x - 7)^2$

17 $f(x) = 4x^5 + 12x^4 + 9x^3$

18 $f(x) = (4x^2 - 5)^2$

19 $f(x) = (x^2 + x - 12)^3(x^2 - 9)^2$

20 $f(x) = (6x^2 + 7x - 5)^4(4x^2 - 1)^2$

21 $f(x) = x^4 + 7x^2 - 144$

22 $f(x) = x^4 + 21x^2 - 100$

Ejercicios 23 al 26: demuestra que el número es un cero de $f(x)$ de la multiplicidad dada y expresa $f(x)$ como producto de factores lineales.

23 $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 - 3x - 18$;

-3 (multiplicidad 2)

24 $f(x) = x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 32$;

4 (multiplicidad 2)

25 $f(x) = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 + 4x - 1$;

1 (multiplicidad 5)

26 $f(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 14x - 3$;

-1 (multiplicidad 4)

Ejercicios 27 al 34: usa la regla de Descartes para determinar el número de soluciones positivas, negativas y no reales de la ecuación.

27 $4x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0$

28 $5x^3 - 6x - 4 = 0$

29 $4x^5 + 2x^2 + 1 = 0$

30 $3x^3 - 4x^2 + 3x + 7 = 0$

31 $3x^4 + 2x^3 - 4x + 2 = 0$

32 $2x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 4 = 0$

33 $x^3 + 4x^2 + 3x^2 - 4x + 2 = 0$

34 $2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = 0$

Ejercicios 35 al 40: aplica el primer teorema sobre cotas para ceros reales de polinomios con objeto de establecer los mínimos y máximos enteros que sean cotas superior e inferior, respectivamente, para las soluciones reales de la ecuación. Analiza la validez de las cotas con una calculadora gráfica.

35 $x^3 - 4x^2 - 5x + 7 = 0$

36 $2x^3 - 5x^2 + 4x - 8 = 0$

37 $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + 6 = 0$

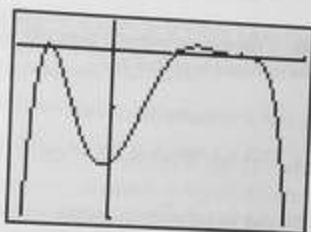
38 $2x^4 - 9x^3 - 8x - 10 = 0$

39 $2x^5 - 13x^3 + 2x - 5 = 0$

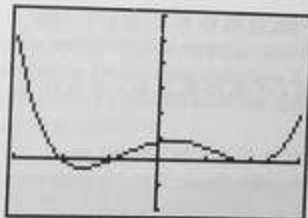
40 $3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7 = 0$

Ejercicios 41 y 42: halla una forma factorizada para una función polinomial f de grado mínimo. Imagina que los valores de intersección son enteros y que $X_{\text{sc1}} = Y_{\text{sc1}} = 1$.

41.

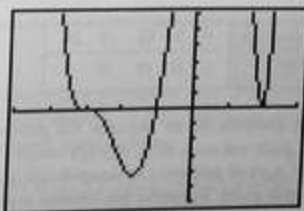


42.

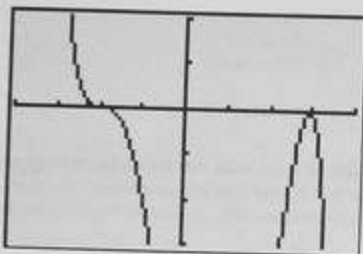


Ejercicios 43 y 44: (a) halla una forma factorizada de una función polinomial f de grado mínimo. Imagina que los valores de intersección son enteros $X_{\text{sc1}} = 1$ y $Y_{\text{sc1}} = 5$, (b) si el coeficiente inicial de f es a , encuentra la intersección en y .

43 $a = 1$



44. $a = -1$



Ejercicios 45 y 46: la función polinomial f tiene sólo ceros reales; factorízala mediante la gráfica de f .

45. $f(x) = x^5 - 16.75x^3 + 12.75x^2 + 49.5x - 54$

46. $f(x) = x^5 - 2.5x^4 - 12.75x^3 + 19.625x^2 + 27.625x + 7.5$

Ejercicios 47 al 50: ¿hay un polinomio de grado n dado cuya gráfica contenga los puntos indicados?

47. $n = 4$;
 $(-2, 0), (0, -24), (1, 0), (3, 0), (2, 0), (-1, -52)$

48. $n = 5$;
 $(0, 0), (-3, 0), (-1, 0), (2, 0), (3, 0), (-2, 5), (1, 2)$

49. $n = 3$;
 $(1.1, -49.815), (2, 0), (3.5, 25.245), (5.2, 0),$
 $(6.4, -29.304), (10.1, 0)$

50. $n = 4$;
 $(1.25, 0), (2, 0), (2.5, 56.25), (3, 128.625), (6.5, 0),$
 $(9, -307.75), (10, 0)$

51. Uso de datos limitados Un científico tiene información limitada sobre la temperatura T (en $^{\circ}\text{C}$) durante un periodo de 24 h. Si t denota el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a la medianoche, encuentra el polinomio de cuarto grado que se ajusta a la información en la tabla adjunta.

t (horas)	0	5	12	19	24
T ($^{\circ}\text{C}$)	0	0	10	0	0

52. Polinomio de interpolación de Lagrange Un polinomio $f(x)$ de tercer grado con ceros en c_1, c_2 y c_3 y con $f(c) = 1$ para $c_2 < c < c_3$ es un polinomio de interpolación de Lagrange de tercer grado. Encuentra una fórmula explícita para $f(x)$ en términos de c_1, c_2, c_3 y c .

Ejercicios 53 y 54: grafica f para cada valor de n en el mismo plano coordenado y describe cómo es que la multiplicidad de un cero afecta la gráfica de f .

53. $f(x) = (x - 0.5)^n(x^2 + 1); \quad n = 1, 2, 3, 4$

54. $f(x) = (x - 1)^n(x + 1)^n; \quad n = 1, 2, 3, 4$

Ejercicios 55 y 56: grafica f , calcula todos los ceros reales y determina la multiplicidad de cada cero.

55. $f(x) = x^3 + 1.3x^2 - 1.2x - 1.584$

56. $f(x) = x^5 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{10}{8}x^2 - \frac{9}{32}x^2 + \frac{405}{256}x + \frac{405}{1024}$

57. Efecto invernadero Debido a la incineración de combustibles fósiles, la concentración de bióxido de carbono en la atmósfera está aumentando. Las investigaciones indican que esto se manifestará en un efecto invernadero que modificará el promedio de temperatura de la superficie del planeta. Si el uso del carbón aumenta de modo importante, la cantidad futura $A(t)$ de la concentración de bióxido de carbono atmosférico puede calcularse (en partes por millón) mediante la ecuación.

$$A(t) = -\frac{1}{2400}t^3 + \frac{1}{30}t^2 + \frac{7}{6}t + 340,$$

donde t está en años, $t = 0$ corresponde a 1980 y $0 \leq t \leq 60$. Con la gráfica de A , calcula el año en que la concentración de bióxido de carbono sea de 400.

58. Efecto invernadero El promedio del aumento de temperatura de la superficie del planeta debido al efecto invernadero se calcula con la ecuación.

$$T(t) = \frac{21}{5\,000\,000}t^3 - \frac{127}{1\,000\,000}t^2 + \frac{1293}{50\,000}t,$$

donde $0 \leq t \leq 60$ y $t = 0$ corresponde a 1980. Calcula el año en que la temperatura promedio se elevará 1°C mediante la gráfica de T .

Ejercicios 59 y 60: el promedio mensual de temperatura en $^{\circ}\text{F}$ de dos localidades canadienses se detalla en las siguientes tablas.

Mes	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.
Bahía ártica	-22	-26	-18	-4
Lago Trout	-11	-6	7	25

Mes	Mayo	Jun.	Jul.	Ago.
Bahía ártica	19	36	43	41
Lago Trout	39	52	61	59

Mes	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
Bahía ártica	28	12	-8	-17
Lago Trout	48	34	16	-4

- (a) Si el 15 de enero corresponde a $x = 1$, el 15 de febrero a $x = 2$, ..., y el 15 de diciembre a $x = 12$, establece gráficamente cuál de los tres polinomios dados produce un mejor modelo de la información.
- (b) Usa el teorema del valor intermedio para calcular un intervalo para x cuando el promedio de temperatura es 0°F .
- (c) Con la elección que hiciste en el inciso (a) estima x cuando la temperatura promedio sea 0°F .

59 Temperaturas de la bahía ártica

(1) $f(x) = -1.97x^2 + 28x - 67.95$

(2) $g(x) = -0.23x^3 + 2.53x^2 + 3.6x - 36.28$


(3) $h(x) = 0.089x^4 - 2.55x^3 + 22.48x^2 - 59.68x + 19$

60 Temperaturas del Lago Trout

(1) $f(x) = -2.14x^2 + 28.01x - 55$

(2) $g(x) = -0.22x^3 + 1.84x^2 + 11.70x - 29.90$


(3) $h(x) = 0.046x^4 - 1.39x^3 + 11.81x^2 - 22.2x + 1.03$

 Ejercicios 61 y 62: una esfera sólida de madera flotará, puesto que su densidad es menor que la del agua. Ahora bien, la profundidad d a la que la esfera se hundirá está determinada por la ecuación siguiente:

$$\frac{4k}{3}\pi r^3 - \pi d^2r + \frac{1}{3}\pi d^3 = 0,$$

donde r es el radio de la esfera y k es una constante positiva menor o igual que 1. Si $r = 6$ cm, estima d en forma gráfica para cada constante k .

61 Esfera de pino en el agua $k = 0.7$ 62 Esfera de roble en el agua $k = 0.85$

 63 Consulta los ejercicios 61 y 62. El agua tiene un valor k de 1. Si una esfera de radio 6 posee el mismo valor k de 1, ¿cuál es el valor resultante de d ? Interpreta este resultado.

4.4

Ceros complejos y racionales de polinomios

El ejemplo 3 de la sección anterior expone un hecho importante sobre polinomios con coeficientes reales: los dos ceros complejos $2 + 3i$ y $2 - 3i$ de $x^5 - 4x^4 + 13x^3$ son conjugados. La relación no es accidental, puesto que el siguiente resultado general es verdadero.

Teorema sobre parejas de ceros conjugados de un polinomio

Si un polinomio $f(x)$ de grado $n > 1$ tiene coeficientes reales y si $z = a + bi$ con $b \neq 0$ es un cero complejo de $f(x)$, entonces el conjugado $\bar{z} = a - bi$ también es un cero de $f(x)$.

Se deja una demostración como ejercicio para análisis al final del capítulo.

EJEMPLO 1 Determinación de un polinomio con ceros prescritos

Encuentra un polinomio $f(x)$ de cuarto grado que tenga coeficientes reales y ceros $2 + i$ y $-3i$.

SOLUCIÓN Por el teorema de parejas de ceros conjugados de un polinomio, $f(x)$ también debe tener ceros $2 - i$ y $3i$. Aplicamos el teorema del factor y encontramos que $f(x)$ tiene estos factores:

$$x - (2 + i), x - (2 - i), x - (-3i), x - (3i)$$

(continúa)

Al multiplicar estos cuatro factores obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= [x - (2 + i)][x - (2 - i)](x + 3i)(x - 3i) \\ &= (x^2 - 4x + 5)(x^2 + 9) \\ &= x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 36x + 45. \end{aligned} \quad (*)$$

Advertirás que en (*) el símbolo i no aparece. Esto no es coincidencia puesto que si $a + bi$ es un cero de un polinomio con coeficientes reales, $a - bi$ también es un cero y podemos multiplicar los factores asociados de esta manera:

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

En el ejemplo 1 tenemos $a = 2$ y $b = 1$, así que $-2a = -4$ y $a^2 + b^2 = 5$ y el factor cuadrático asociado es $x^2 - 4x + 5$. Este factor cuadrático resultante siempre tendrá coeficientes reales, como se indica en el siguiente teorema.

Teorema sobre la expresión de un polinomio como producto de factores lineales y cuadráticos

Todo polinomio con coeficientes reales y grado positivo n se puede expresar como un producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales tales que los factores cuadráticos sean irreducibles sobre \mathbb{R} .

DEMOSTRACIÓN Dado que $f(x)$ tiene precisamente n ceros complejos c_1, c_2, \dots, c_n , podemos escribir

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

donde a es el coeficiente principal de $f(x)$. Por supuesto, algunos ceros pueden ser reales. En tales casos obtenemos los factores lineales mencionados en el planteamiento del teorema.

Si un cero c_k no es real, entonces, por el teorema sobre parejas de ceros conjugados de un polinomio, el conjugado \bar{c}_k también es un cero de $f(x)$ y, por tanto, debe ser uno de los números c_1, c_2, \dots, c_n . Esto implica que ambos $x - c_k$ y $x - \bar{c}_k$ aparecen en la factorización de $f(x)$. Si multiplicamos estos factores, obtenemos

$$(x - c_k)(x - \bar{c}_k) = x^2 - (c_k + \bar{c}_k)x + c_k\bar{c}_k,$$

que tiene coeficientes reales, ya que $c_k + \bar{c}_k$ y $c_k\bar{c}_k$ son números reales. Entonces, si c_k es un cero complejo, entonces el producto $(x - c_k)(x - \bar{c}_k)$ es un polinomio cuadrático irreducible sobre \mathbb{R} . Esto completa la demostración.

EJEMPLO 2 Expresión de un polinomio como producto de factores lineales y cuadráticos

Expresa $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$ como un producto de

- (a) polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales irreducibles sobre \mathbb{R}
- (b) polinomios lineales

SOLUCIÓN

$$(a) \quad x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$$

$$= (x^5 - 4x^3) + (x^2 - 4)$$

$$= x^3(x^2 - 4) + 1(x^2 - 4)$$

$$= (x^3 + 1)(x^2 - 4)$$

$$= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 2)(x - 2)$$

agrupar términos

factorizar x^3 factorizar $(x^2 - 4)$

factorizar como la suma de cubos y la diferencia de cuadrados

Con la fórmula cuadrática, vemos que el polinomio $x^2 - x + 1$ tiene los ceros complejos

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

y, por tanto, es irreducible sobre \mathbb{R} . Así pues, la factorización deseada es

$$(x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 2)(x - 2).$$

(b) Dado que el polinomio $x^2 - x + 1$ del inciso (a) posee ceros $\frac{1}{2} \pm (\sqrt{3}/2)i$, por el teorema del factor deducimos que el polinomio tiene factores

$$x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad \text{y} \quad x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Al sustituir en la factorización encontrada en el inciso (a), llegamos a esta factorización completa en polinomios lineales:

$$(x + 1)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x + 2)(x - 2)$$

Antes señalamos que —por lo general— es muy difícil encontrar los ceros de un polinomio de alto grado; pero si todos los coeficientes son enteros, hay un método para encontrar los ceros racionales, si existen. El método es una consecuencia de este resultado:

Teorema sobre los ceros racionales de un polinomio

Si el polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

tiene coeficientes enteros y c/d es un cero racional de $f(x)$ tal que c y d no posean un factor primo común, entonces

- (1) el numerador c del cero es un factor del término constante a_0
- (2) el denominador d del cero es un factor del coeficiente inicial a_n .

DEMOSTRACIÓN Supón que $c > 0$. (La demostración para $c < 0$ es semejante.) Mostraremos que c es un factor de a_0 . El caso $c = 1$ es trivial, ya

(continúa)

que 1 es factor de cualquier número. Así, Supón $c \neq 1$. En este caso $c/d \neq 1$, ya que si $c/d = 1$, obtenemos $c = d$, esto implica que $c/d = 1$, y como c y d no tienen factores primos en común, es una contradicción. Por consiguiente, en el análisis que sigue tenemos $c \neq 1$ y $c \neq d$.

Dado que $f(c/d) = 0$,

$$a_n \frac{c^n}{d^n} + a_{n-1} \frac{c^{n-1}}{d^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{c}{d} + a_0 = 0.$$

Multiplicamos por d^n y luego sumamos $-a_0 d^n$ a ambos lados:

$$\begin{aligned} a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} d + \cdots + a_1 c d^{n-1} &= -a_0 d^n \\ c(a_n c^{n-1} + a_{n-1} c^{n-2} d + \cdots + a_1 d^{n-1}) &= -a_0 d^n \end{aligned}$$

La última ecuación muestra que c es un factor del entero $a_0 d^n$. Como c y d no tienen factores en común, c es un factor de a_0 . Para demostrar que d es un factor de a_n puede usarse un razonamiento similar.

Como ayuda para enumerar los posibles ceros racionales, recuerda el cociente:

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores del término constante } a_0}{\text{factores del coeficiente inicial } a_n}$$

El teorema sobre los ceros racionales se puede aplicar a ecuaciones con coeficientes racionales multiplicando ambos lados de la ecuación por el lcd de todos los coeficientes para obtener una ecuación con coeficientes enteros.



EJEMPLO 3 Demostración de la ausencia de ceros racionales en un polinomio

Prueba que $f(x) = x^3 - 4x - 2$ no cuenta con ceros racionales.

SOLUCIÓN Si $f(x)$ tiene un cero racional c/d tal que c y d no tienen factores primos comunes, entonces, por el teorema sobre los ceros racionales de un polinomio, c es un factor del término constante -2 y, por tanto, es 2 o -2 (lo que se escribe ± 2) o ± 1 . El denominador d es un factor del coeficiente inicial 1 , así que es ± 1 . De esta forma, las únicas posibilidades para c/d son

$$\frac{\pm 1}{\pm 1} \quad \text{y} \quad \frac{\pm 2}{\pm 1} \quad \text{o, su equivalente,} \quad \pm 1 \quad \text{y} \quad \pm 2.$$

Al sustituir cada uno de estos números por x , obtenemos

$$f(1) = -5, \quad f(-1) = 1, \quad f(2) = -2 \quad \text{y} \quad f(-2) = -2.$$

Dado que $f(\pm 1) \neq 0$ y $f(\pm 2) \neq 0$, deducimos que $f(x)$ no tiene ceros racionales.

En la solución del ejemplo que sigue supondremos que no se dispone de una calculadora graficadora. En el ejemplo 5 volveremos a trabajar el problema para demostrar la ventaja de usar dicho dispositivo.



EJEMPLO 4 Determinación de las soluciones racionales de una ecuación

Encuentra todas las soluciones racionales de la ecuación

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 0.$$

SOLUCIÓN El problema equivale a hallar los ceros racionales del polinomio del lado izquierdo de la ecuación. Si c/d es un cero racional y c y d no tienen factor común, entonces c es un factor del término constante -8 y d es un factor del coeficiente inicial 3. Todas las opciones posibles aparecen en la tabla que sigue.

Opciones para el numerador c	$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$
Opciones para el denominador d	$\pm 1, \pm 3$
Opciones para c/d	$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3}$

Podemos reducir las opciones encontrando las cotas superior e inferior para las soluciones reales, pero no lo haremos aquí. Es necesario determinar cuál(es) de las opciones para c/d , si las hay, son ceros. Vemos por sustitución que ni 1 ni -1 son soluciones. Si dividimos sintéticamente entre $x + 2$, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 3 & 14 & 14 & -8 & -8 \\ & & -6 & -16 & 4 & 8 \\ \hline & 3 & 8 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

Este resultado muestra que -2 es un cero. Además, la división sintética proporciona los coeficientes del cociente de la división del polinomio entre $x + 2$; en consecuencia, tenemos esta factorización del polinomio dado:

$$(x + 2)(3x^3 + 8x^2 - 2x - 4)$$

Las soluciones restantes de la ecuación deben ser ceros del segundo factor, así que usamos ese polinomio para comprobar las soluciones. No usamos el polinomio de la ecuación original. (Observa que $\pm \frac{8}{3}$ ya no son candidatos puesto que el numerador debe ser un factor de 4.) Otra vez por prueba y error, encontramos que la división sintética entre $x + \frac{2}{3}$ da:

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{2}{3} & 3 & 8 & -2 & -4 \\ & & -2 & -4 & 4 \\ \hline & 3 & 6 & -6 & 0 \end{array}$$

Así pues, $-\frac{2}{3}$ también es un cero.

(continúa)

Con los coeficientes del cociente sabemos que los ceros restantes son soluciones de la ecuación $3x^2 + 6x - 6 = 0$. Al dividir ambos lados entre 3 llegamos a la ecuación equivalente $x^2 + 2x - 2 = 0$. Por la fórmula cuadrática, esta ecuación tiene soluciones

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Por tanto, el polinomio dado tiene dos raíces racionales, -2 y $-\frac{2}{3}$, y dos raíces irracionales, $-1 + \sqrt{3} \approx 0.732$ y $-1 - \sqrt{3} \approx -2.732$.

EJEMPLO 5 Determinación de las soluciones racionales de una ecuación

Encuentra todas las soluciones racionales de la ecuación

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 0.$$

SOLUCIÓN Asignamos el polinomio indicado a Y_1 , escogemos la pantalla $[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$ y obtenemos un trazo similar a la figura 1. La gráfica indica que -2 es una solución y que hay una solución en cada uno de los intervalos $(-3, -2)$, $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. Con base en el ejemplo 4 sabemos que los ceros racionales posibles son

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3}.$$

Concluimos que las únicas posibilidades son $-\frac{8}{3}$ en $(-3, -2)$, $-\frac{2}{3}$ en $(-1, 0)$, y $\frac{2}{3}$ en $(0, 1)$; por tanto, al hacer referencia a la gráfica, hemos reducido el número de opciones para ceros de 16 a 3. La división sintética sirve ahora para establecer que las únicas soluciones racionales son -2 y $-\frac{2}{3}$.

Figura 1

$[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$

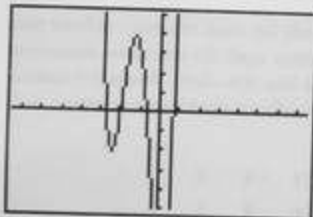


Figura 2



EJEMPLO 6 Determinación del radio de un silo

Un silo tiene forma de cilindro circular recto con una semiesfera unida en la parte superior. Si la altura total de la estructura es de 30 pies, encuentra el radio del cilindro que resulte en un volumen total de 1008π pies cúbicos.

SOLUCIÓN Sea x el radio del cilindro (figura 2). El volumen del cilindro es $\pi r^2 h = \pi x^2(30 - x)$, y el volumen de la semiesfera es $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi x^3$, al despejar x se obtiene

$$\pi x^2(30 - x) + \frac{2}{3}\pi x^3 = 1008\pi \quad \text{el volumen total es } 1008\pi$$

$$3x^2(30 - x) + 2x^3 = 3024 \quad \text{multiplicar por } \frac{3}{\pi}$$

$$90x^2 - x^3 = 3024 \quad \text{simplificar}$$

$$x^3 - 90x^2 + 3024 = 0 \quad \text{ecuación equivalente}$$

Puesto que el coeficiente principal del polinomio del lado izquierdo de la última ecuación es 1, cualquier raíz racional tiene la forma $c/1 = c$, donde c

es un factor de 3024. Si factorizamos 3024 en primos, $3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$. Se deduce que algunos de los factores positivos de 3024 son

$$1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, \dots$$

Hagamos un estimado rápido del radio al suponer que el silo tiene la forma de un cilindro recto circular de 30 pies de altura, con el fin de decidir cuál número probar primero. En este caso, el volumen sería $\pi r^2 h = 30\pi r^2$. Como este volumen estaría cerca de 1008π , vemos que

$$30r^2 = 1008, \quad \text{o} \quad r^2 = 1008/30 = 33.6.$$

Esto sugiere que usemos el 6 en nuestra primera división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & 1 & -90 & 0 & 3024 \\ & & 6 & -504 & -3024 \\ \hline & 1 & -84 & -504 & 0 \end{array}$$

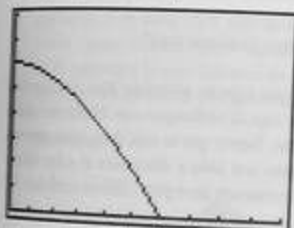
De esta forma, 6 es una solución de la ecuación $x^3 - 90x^2 + 3024 = 0$.

Las dos soluciones restantes de la ecuación se encuentran resolviendo la ecuación reducida $x^2 - 84x - 504 = 0$. Estos ceros son aproximadamente -5.62 y 89.62, ninguno de los cuales satisface las condiciones del problema. Por tanto, el radio deseado es de 6 pies.

La gráfica de $f(x) = x^3 - 90x^2 + 3024$ de la figura 3 muestra el cero $x = 6$. Una gráfica extendida también indicaría los otros dos ceros.

Figura 3

$[0, 10]$ por $[0, 4000, 500]$



4.4 Ejercicios

Ejercicios 1 al 10: un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales y coeficiente inicial 1 tiene el(los) cero(s) real(es) y el grado dados. Expresa $f(x)$ como producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales irreducibles sobre \mathbb{R} .

1 $3 + 2i$; grado 2

2 $-4 + 3i$; grado 2

3 $2 - 2 - 5i$; grado 3

4 $-3, 1 - 7i$; grado 3

5 $-1, 0, 3 + i$; grado 4

6 $0, 2 - 2 - i$; grado 4

7 $4 + 3i, -2 + i$; grado 4

8 $1 + 3i, 1 - i$; grado 4

9 $0, -2i, 1 - i$; grado 5

10 $0, 3i, 4 + i$; grado 5

Ejercicios 11 al 14: demuestra que la ecuación no tiene raíces racionales.

11 $x^3 + 3x^2 - 4x + 6 = 0$

12 $3x^3 - 4x^2 + 7x + 5 = 0$

13 $x^3 - 3x^2 + 4x^2 + x - 2 = 0$

14 $2x^3 + 3x^2 + 7 = 0$

Ejercicios 15 al 24: halla todas las soluciones de la ecuación.

15 $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$

16 $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$

17 $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = 0$

18 $12x^3 + 8x^2 - 3x - 2 = 0$

19 $x^4 + 3x^3 - 30x^2 - 6x + 56 = 0$

$$20 \quad 3x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$21 \quad 6x^5 + 19x^4 + x^3 - 6x^2 = 0$$

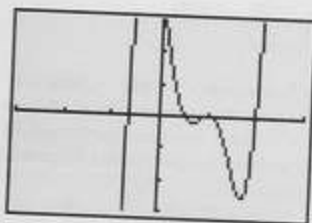
$$22 \quad 6x^4 + 5x^3 - 17x^2 - 6x = 0$$

$$23 \quad 8x^3 + 18x^2 + 45x + 27 = 0$$

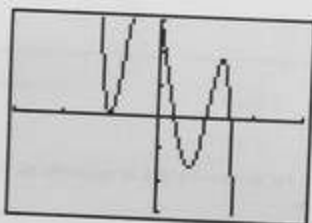
$$24 \quad 3x^3 - x^2 + 11x - 20 = 0$$


Ejercicios 25 y 26: encuentra una forma factorizada con coeficientes enteros del polinomio f de la figura. Supón que $X_{\text{sc1}} = Y_{\text{sc1}} = 1$.

$$25 \quad f(x) = 6x^5 - 23x^4 + 24x^3 + x^2 - 12x + 4$$



$$26 \quad f(x) = -6x^5 + 5x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 8x + 3$$



 Ejercicios 27 y 28: la función polinomial f tiene sólo ceros reales; factorízala con la gráfica de f .

$$27 \quad f(x) = 2x^3 - 25.4x^2 + 3.02x + 24.75$$

$$28 \quad f(x) = 0.5x^3 + 0.65x^2 - 5.365x + 1.5375$$

29 ¿Existe un polinomio de tercer grado con coeficientes reales que tenga ceros 1, -1 e i ? Justifica tu respuesta.

30 El polinomio $f(x) = x^3 - ix^2 + 2ix + 2$ tiene el número complejo i como un cero; sin embargo, el conjugado $-i$ de i no es cero. ¿Por qué este resultado no contradice al teorema sobre parejas de ceros conjugados de un polinomio?

31 Si n es un entero positivo impar, prueba que un polinomio de grado n con coeficientes reales tiene por lo menos un cero real.

32 Si un polinomio de la forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

donde cada a_i es un entero, tiene raíz racional r , prueba que r es un entero y es factor de a_0 .

33 Construcción de una caja Se va a elaborar una caja sin tapa a partir de un cartón de 20×30 pulgadas, cortando cuadrados idénticos de área x^2 en cada esquina y doblando hacia arriba los lados (ejercicio 41, sección 4.1).

(a) Demuestra que hay dos cajas con un volumen de 1000 pulgadas cúbicas.

(b) ¿Cuál caja tiene la menor área?

34 Construcción de una caja de embalaje Hay que construir el bastidor de una caja de embarques con 24 pies de madera de 2×2 pulgadas. Supón que la caja debe tener extremos cuadrados de x pies por lado y determina el o los valores de x que den un volumen de 4 pies cúbicos (ejercicio 42, sección 4.1).

35 Un triángulo rectángulo tiene 30 pies cuadrados de área y una hipotenusa que mide 1 pie más que uno de sus lados.

(a) Si x denota la longitud de este lado, demuestra que $2x^3 + x^2 - 3600 = 0$.

(b) Prueba que hay una raíz positiva de la ecuación del inciso (a) y que es menor que 13.

(c) Encuentra las longitudes de los lados del triángulo.

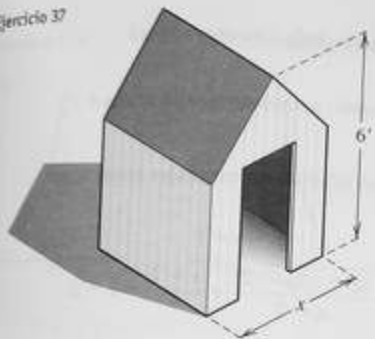
36 Construcción de un tanque de almacenamiento Se fabricará un tanque de gas propano en forma de cilindro circular recto de 10 pies de altura, con una semiesfera unida en cada extremo. Determina el radio x de modo que el volumen resultante sea 27π pies cúbicos (ver el ejemplo 8, sección 3.4).

37 Construcción de un cobertizo de almacenamiento Se va a construir un cobertizo en forma de cubo con un prisma triangular de techo (ver la figura); la longitud x de un lado del cubo todavía no se ha determinado.

(a) Si la altura total de la estructura debe ser de 6 pies, demuestra que su volumen V está dado por $V = x^3 + \frac{1}{2}x^2(6 - x)$.

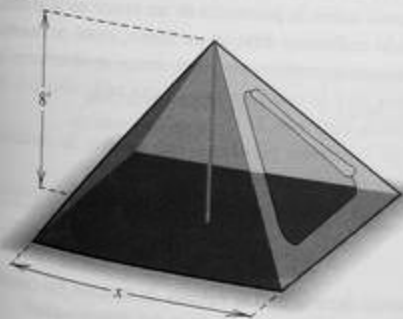
(b) Determina x de modo que el volumen sea de 80 pies cúbicos.

Ejercicio 37



- 38 Diseño de una tienda de campaña Se va a construir una tienda de campaña en forma de pirámide de base cuadrada con lonas, y un poste de 8 pies formará el soporte central (ver la figura). Encuentra la longitud x de un lado de la base, de modo que la cantidad total de lona necesaria para los lados y el fondo sea de 384 pies cuadrados.

Ejercicio 38



- Ejercicios 39 y 40: con una gráfica determina el número de soluciones no reales de la ecuación.

39 $x^3 + 1.1x^2 - 3.21x^2 - 2.835x^2 + 2.7x + 0.62 = -1$

40 $x^4 - 0.4x^3 - 2.6x^2 + 1.1x + 3.5 = 2$

- Ejercicios 41 y 42: usa una gráfica y la división sintética para hallar todas las soluciones de la ecuación.

41 $x^4 + 1.4x^3 + 0.44x^2 - 0.56x - 0.96 = 0$

42 $x^5 + 1.1x^4 - 2.62x^3 - 4.72x^2 - 0.2x + 5.44 = 0$

- 43 Densidad atmosférica La densidad $D(h)$ (en kg/m^3) de la atmósfera de la Tierra a una altitud de h m se puede calcular mediante

$$D(h) = 1.2 - ah + bh^2 - ch^3,$$

donde

$$a = 1.096 \times 10^{-4}, b = 3.42 \times 10^{-9}, c = 3.6 \times 10^{-14},$$

y $0 \leq h \leq 30\,000$. Con la gráfica de D calcula la altura h en la que la densidad es de 0.4.

- 44 Densidad de la Tierra La densidad $D(h)$ (en g/cm^3) de la Tierra a h m bajo la superficie se calcula con la ecuación

$$D(h) = 2.84 + ah + bh^2 - ch^3,$$

donde

$$a = 1.4 \times 10^{-3}, b = 2.49 \times 10^{-6}, c = 2.19 \times 10^{-9},$$

y $0 \leq h \leq 1000$. Usa la gráfica de D para calcular la profundidad h a la que la densidad de la Tierra es 3.7.

4.5

Funciones racionales

Una función f es una **función racional** si

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},$$

donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios. El dominio de f está formado por todos los números reales, *excepto* los ceros del denominador $h(x)$.

ILUSTRACIÓN Funciones racionales y sus dominios

■ $f(x) = \frac{1}{x-2}$; dominio: toda x *excepto* $x = 2$

(continúa)

Figura 1

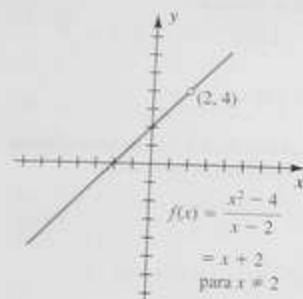


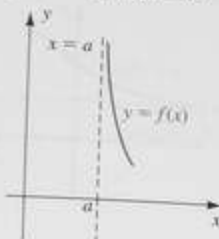
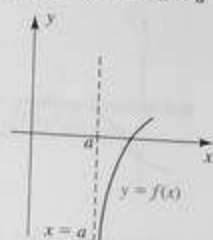
Figura 2



Figura 3

X	Y1
-1	1
0	2
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	11
10	12
11	13
12	14
13	15
14	16
15	17
16	18
17	19
18	20
19	21
20	22
21	23
22	24
23	25
24	26
25	27
26	28
27	29
28	30
29	31
30	32
31	33
32	34
33	35
34	36
35	37
36	38
37	39
38	40
39	41
40	42
41	43
42	44
43	45
44	46
45	47
46	48
47	49
48	50
49	51
50	52
51	53
52	54
53	55
54	56
55	57
56	58
57	59
58	60
59	61
60	62
61	63
62	64
63	65
64	66
65	67
66	68
67	69
68	70
69	71
70	72
71	73
72	74
73	75
74	76
75	77
76	78
77	79
78	80
79	81
80	82
81	83
82	84
83	85
84	86
85	87
86	88
87	89
88	90
89	91
90	92
91	93
92	94
93	95
94	96
95	97
96	98
97	99
98	100
99	101
100	102
101	103
102	104
103	105
104	106
105	107
106	108
107	109
108	110
109	111
110	112
111	113
112	114
113	115
114	116
115	117
116	118
117	119
118	120
119	121
120	122
121	123
122	124
123	125
124	126
125	127
126	128
127	129
128	130
129	131
130	132
131	133
132	134
133	135
134	136
135	137
136	138
137	139
138	140
139	141
140	142
141	143
142	144
143	145
144	146
145	147
146	148
147	149
148	150
149	151
150	152
151	153
152	154
153	155
154	156
155	157
156	158
157	159
158	160
159	161
160	162
161	163
162	164
163	165
164	166
165	167
166	168
167	169
168	170
169	171
170	172
171	173
172	174
173	175
174	176
175	177
176	178
177	179
178	180
179	181
180	182
181	183
182	184
183	185
184	186
185	187
186	188
187	189
188	190
189	191
190	192
191	193
192	194
193	195
194	196
195	197
196	198
197	199
198	200
199	201
200	202
201	203
202	204
203	205
204	206
205	207
206	208
207	209
208	210
209	211
210	212
211	213
212	214
213	215
214	216
215	217
216	218
217	219
218	220
219	221
220	222
221	223
222	224
223	225
224	226
225	227
226	228
227	229
228	230
229	231
230	232
231	233
232	234
233	235
234	236
235	237
236	238
237	239
238	240
239	241
240	242
241	243
242	244
243	245
244	246
245	247
246	248
247	249
248	250
249	251
250	252
251	253
252	254
253	255
254	256
255	257
256	258
257	259
258	260
259	261
260	262
261	263
262	264
263	265
264	266
265	267
266	268
267	269
268	270
269	271
270	272
271	273
272	274
273	275
274	276
275	277
276	278
277	279
278	280
279	281
280	282
281	283
282	284
283	285
284	286
285	287
286	288
287	289
288	290
289	291
290	292
291	293
292	294
293	295
294	296
295	297
296	298
297	299
298	300
299	301
300	302
301	303
302	304
303	305
304	306
305	307
306	308
307	309
308	310
309	311
310	312
311	313
312	314
313	315
314	316
315	317
316	318
317	319
318	320
319	321
320	322
321	323
322	324
323	325
324	326
325	327
326	328
327	329
328	330
329	331
330	332
331	333
332	334
333	335
334	336
335	337
336	338
337	339
338	340
339	341
340	342
341	343
342	344
343	345
344	346
345	347
346	348
347	349
348	350
349	351
350	352
351	353
352	354
353	355
354	356
355	357
356	358
357	359
358	360
359	361
360	362
361	363
362	364
363	365
364	366
365	367
366	368
367	369
368	370
369	371
370	372
371	373
372	374
373	375
374	376
375	377
376	378
377	379
378	380
379	381
380	382
381	383
382	384
383	385
384	386
385	387
386	388
387	389
388	390
389	391
390	392
391	393
392	394
393	395
394	396
395	397
396	398
397	399
398	400
399	401
400	402
401	403
402	404
403	405
404	406
405	407
406	408
407	409
408	410
409	411
410	412
411	413
412	414
413	415
414	416
415	417
416	418
417	419
418	420
419	421
420	422
421	423
422	424
423	425
424	426
425	427
426	428
427	429
428	430
429	431
430	432
431	433
432	434
433	435
434	436
435	437
436	438
437	439
438	440
439	441
440	442
441	443
442	444
443	445
444	446
445	447
446	448
447	449
448	450
449	451
450	452
451	453
452	454
453	455
454	456
455	457
456	458
457	459
458	460
459	461
460	462
461	463
462	464
463	465
464	466
465	467
466	468
467	469
468	470
469	471
470	472
471	473
472	474
473	475
474	476
475	477
476	478
477	479
478	480
479	481
480	482
481	483
482	484
483	485
484	486
485	487
486	488
487	489
488	490
489	491
490	492
491	493
492	494
493	495
494	496
495	497
496	498
497	499
498	500
499	501
500	502
501	503
502	504
503	505
504	506
505	507
506	508
507	509
508	510
509	511
510	512
511	513
512	514
513	515
514	516
515	517
516	518
517	519
518	520
519	521
520	522
521	523
522	524
523	525
524	526
525	527
526	528
527	529
528	530
529	531
530	532
531	533
532	534
533	535
534	536
535	537
536	538
537	539
538	540
539	541
540	542
541	543
542	544
543	545
544	546
545	547

Figura 4

 $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow a^-$  $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow a^+$  $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow a^-$  $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow a^+$ 

Los símbolos ∞ (infinito) y $-\infty$ (menos infinito) no representan números reales; sólo especifican ciertos tipos de comportamiento de funciones y variables.

La recta punteada $x = a$ de la figura 4 se llama **asíntota vertical**, igual que en esta definición:

Definición de asíntota vertical

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función f si

$$f(x) \rightarrow \infty \quad \text{o} \quad f(x) \rightarrow -\infty$$

a medida que x se aproxima a a ya sea desde la izquierda o la derecha.

Así la respuesta a la pregunta 1 es que si a es un cero del denominador de una función racional, la gráfica de f puede tener una asíntota vertical $x = a$. Hay funciones racionales donde éste *no* es el caso (como en la figura 1 de esta sección). Si el numerador y el denominador no tienen factor común, entonces f debe tener una asíntota vertical $x = a$.

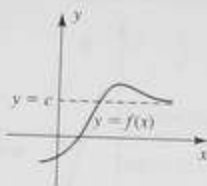
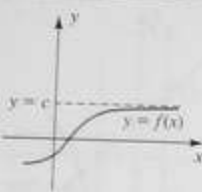
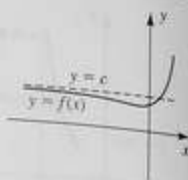
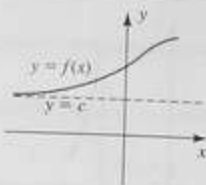
Consideremos a continuación la pregunta 2. Para x grande positiva o grande negativa, la gráfica de una función racional puede parecer como una de las de la figura 5, donde la notación

$$f(x) \rightarrow c \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow \infty$$

se lee " $f(x)$ se aproxima a c a medida que x aumenta sin límite" y la notación

$$f(x) \rightarrow c \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow -\infty$$

se lee " $f(x)$ se aproxima a c a medida que x disminuye sin límite".

Figura 5 $f(x) \rightarrow c$ como $x \rightarrow \infty$

 $f(x) \rightarrow c$ como $x \rightarrow -\infty$


La recta punteada de la figura 5 recibe el nombre de *asíntota horizontal*, como en la siguiente definición.

Definición de asíntota horizontal

La recta $y = c$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de una función f si

$$f(x) \rightarrow c \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow \infty \quad \text{o cuando} \quad x \rightarrow -\infty.$$

De esta forma, la respuesta a la pregunta 2 es que $f(x)$ puede ser muy cercana a algún número c cuando x es grande positiva o grande negativa; esto es, la gráfica de f puede tener una asíntota horizontal $y = c$. Hay funciones racionales donde éste no es el caso [como en los ejemplos 2(c) y 9].

Observa que, al igual que en los dibujos segundo y cuarto de la figura 5, la gráfica de f puede cruzar una asíntota horizontal.

En el ejemplo siguiente encontramos las asíntotas de la gráfica de una función racional sencilla.

EJEMPLO 1 Trazado de la gráfica de una función racional

Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{1}{x-2}.$$

SOLUCIÓN Comencemos por considerar la pregunta 1, planteada al principio de esta sección. El denominador $x - 2$ es cero en $x = 2$. Si x es cercana a 2 y $x > 2$, entonces $f(x)$ es grande positiva, según se muestra en la siguiente tabla.

x	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001
$\frac{1}{x-2}$	10	100	1000	10 000	100 000

Puesto que es factible aumentar $1/(x-2)$ tanto como se quiera tomando x cercana a 2 (y $x > 2$), vemos que

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow 2^+.$$

Si $f(x)$ es cercana a 2 y $x < 2$, entonces $f(x)$ es grande y negativa; por ejemplo, $f(1.9999) = -10\,000$ y $f(1.99999) = -100\,000$; así pues,

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow 2^-.$$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical para la gráfica de f , según se ilustra en la figura 6.

A continuación consideramos la pregunta 2. La tabla que sigue enumera algunos valores aproximados para $f(x)$ cuando x es grande y positiva.

x	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
$\frac{1}{x-2}$ (aprox.)	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001

Se puede describir este comportamiento de $f(x)$ escribiendo

$$f(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

En forma análoga, $f(x)$ es cercana a 0 cuando x es grande negativa; por ejemplo, $f(-100\,000) = -0.00001$; así pues,

$$f(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty.$$

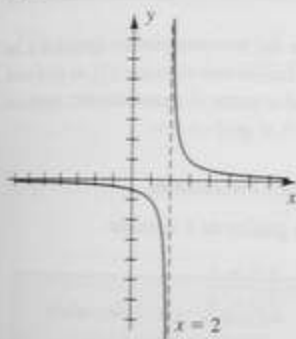
La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal (figura 6).

Trazar los puntos $(1, -1)$ y $(3, 1)$ ayuda a tener un trazo aproximado de la gráfica.

La función considerada en el ejemplo 1, $f(x) = 1/(x-2)$, es similar a una de las funciones racionales más sencillas, la **función recíproca**. La función recíproca tiene ecuación $f(x) = 1/x$, asíntota vertical $x = 0$ (el eje y) y la asíntota horizontal $y = 0$ (el eje x). La gráfica de la función recíproca (apéndice 1) es la gráfica de una *hipérbola* (analizadas más adelante en el texto). Observarás que es posible obtener la gráfica de $y = 1/(x-2)$ desplazando dos unidades a la derecha la gráfica de $y = 1/x$.

El teorema siguiente ayuda a encontrar la asíntota horizontal para la gráfica de una función racional.

Figura 6



**Teorema sobre
asíntotas horizontales**

Sea $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, donde $a_n \neq 0$ y $b_k \neq 0$.

- (1) Si $n < k$, entonces el eje x (la recta $y = 0$) es la asíntota horizontal para la gráfica de f .
- (2) Si $n = k$, entonces la recta $y = a_n/b_k$ (cociente entre coeficientes iniciales) es la asíntota horizontal para la gráfica de f .
- (3) Si $n > k$, la gráfica de f carece de asíntota horizontal. En lugar de ello: $f(x) \rightarrow \infty$ o bien $f(x) \rightarrow -\infty$ a medida que $x \rightarrow \infty$ o conforme $x \rightarrow -\infty$.

Las demostraciones para cada parte del teorema pueden ajustarse a las soluciones del ejemplo que sigue. En relación con el inciso (3), si $q(x)$ es el cociente obtenido al dividir el numerador entre el denominador, entonces $f(x) \rightarrow \infty$ si $q(x) \rightarrow \infty$ o bien $f(x) \rightarrow -\infty$ si $q(x) \rightarrow -\infty$.

EJEMPLO 2 Determinación de asíntotas horizontales

Encuentra la asíntota horizontal para la gráfica de f , si existe.

$$(a) f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - x - 6} \quad (b) f(x) = \frac{5x^2 + 1}{3x^2 - 4}$$

$$(c) f(x) = \frac{2x^4 - 3x^2 + 5}{x^2 + 1}$$

SOLUCIÓN

(a) El grado del numerador, 1, es menor que el grado del denominador, 2, así que por el inciso (1) del teorema sobre asíntotas horizontales, el eje x es una asíntota horizontal. Para comprobar esto directamente, dividimos el numerador y el denominador del cociente entre x^2 (ya que 2 es la potencia más alta en x en el denominador), con lo que resulta

$$f(x) = \frac{\frac{3x-1}{x^2}}{\frac{x^2-x-6}{x^2}} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} \quad \text{para } x \neq 0.$$

Si x es grande positiva o grande negativa, entonces $3/x$, $1/x^2$, $1/x$ y $6/x^2$ son cercanos a 0, y por tanto,

$$f(x) = \frac{0-0}{1-0-0} = \frac{0}{1} = 0.$$

En consecuencia,

$$f(x) \rightarrow 0 \quad \text{a medida que } x \rightarrow \infty \quad \text{o conforme } x \rightarrow -\infty.$$

Dado que $f(x)$ es la coordenada y de un punto de la gráfica, la última expresión significa que la recta $y = 0$ (esto es, el eje x) es una asíntota horizontal.

(b) Si $f(x) = (5x^2 + 1)/(3x^2 - 4)$, el numerador y el denominador tienen el mismo grado, 2, y los coeficientes iniciales son 5 y 3, respectivamente. En consecuencia, por el inciso (2) del teorema sobre asíntotas horizontales, la recta $y = \frac{5}{3}$ es la asíntota horizontal. También podríamos demostrar que $y = \frac{5}{3}$ es la asíntota horizontal al dividir el numerador y el denominador de $f(x)$ entre x^2 , como en el inciso (a).

(c) El grado del numerador, 4, es mayor que el grado del denominador, 2, así que, por el inciso (3) del teorema sobre asíntotas horizontales, la gráfica carece de asíntota horizontal. Si usamos división larga obtenemos

$$f(x) = 2x^2 - 5 + \frac{10}{x^2 + 1}.$$

A medida que $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$, el cociente $2x^2 - 5$ aumenta sin límite y $10/(x^2 + 1) \rightarrow 0$. Por tanto, $f(x) \rightarrow \infty$ conforme $x \rightarrow \infty$ o a medida que $x \rightarrow -\infty$.

A continuación damos algunas guías para trazar la gráfica de una función racional. Su uso se ilustra en los ejemplos 3, 6 y 7.

Guías para trazar la gráfica de una función racional

Supongamos que $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios sin factor común.

- 1 Encontrar las intersecciones en x —esto es, los ceros reales del numerador $g(x)$ —y trazar los puntos correspondientes en el eje x .
- 2 Hallar los ceros reales del denominador $h(x)$. Para cada cero real a , trazar la asíntota vertical $x = a$ con línea punteada.
- 3 Determinar la intersección en y $f(0)$, si existe, y trazar el punto $(0, f(0))$ en el eje y .
- 4 Aplicar el teorema sobre asíntotas horizontales. Si hay una asíntota horizontal $y = c$, trazarla con línea punteada.
- 5 Si hay una asíntota horizontal $y = c$, determinar si corta la gráfica. Las coordenadas x de los puntos de intersección son soluciones de la ecuación $f(x) = c$. Trazar estos puntos, si existen.
- 6 Trazar la gráfica f en cada una de las regiones del plano xy definido por las asíntotas verticales de la guía 2. Si es necesario, usar el signo de valores de función específicos a fin de señalar si la gráfica está arriba o abajo del eje x o de la asíntota horizontal. Usar la guía 5 para decidir si la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal desde arriba o desde abajo.

En los siguientes ejemplos, nuestro objetivo principal es establecer la forma general de la gráfica, poniendo especial atención en la forma en que

la gráfica se aproxima a las asíntotas. Trazaremos sólo unos cuantos puntos, como los correspondientes a las intersecciones en x e intersecciones en y o a la intersección de la gráfica con una asíntota horizontal.

EJEMPLO 3 Trazado de la gráfica de una función racional

Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{3x + 4}{2x - 5}$$

SOLUCIÓN Seguimos las guías.

Guía 1 Para encontrar las intersecciones en x determinaremos los ceros del numerador. Al resolver $3x + 4 = 0$ obtenemos $x = -\frac{4}{3}$, y trazamos el punto $(-\frac{4}{3}, 0)$ en el eje x , como se muestra en la figura 7.

Guía 2 El cero del denominador es $\frac{5}{2}$, por lo que la recta $x = \frac{5}{2}$ es una asíntota vertical. Esta recta la dibujamos con línea punteada como se muestra en la figura 7.

Guía 3 La intersección en y es $f(0) = -\frac{4}{5}$, y trazamos el punto $(0, -\frac{4}{5})$ en la figura 7.

Guía 4 El numerador y el denominador de $f(x)$ tienen el mismo grado, 1. Los coeficientes principales son 3 y 2, de modo que por el inciso (2) del teorema de las asíntotas horizontales, la recta $y = \frac{3}{2}$ es una asíntota horizontal. En la figura 7 dibujamos la recta con una línea punteada.

Guía 5 Las coordenadas x de los puntos en que la gráfica corta a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{2}$ son soluciones de la ecuación $f(x) = \frac{3}{2}$. Esta ecuación la resolvemos como sigue:

$$\frac{3x + 4}{2x - 5} = \frac{3}{2} \quad \text{sea } f(x) = \frac{3}{2}$$

$$2(3x + 4) = 3(2x - 5) \quad \text{multiplicar por } 2(2x - 5)$$

$$6x + 8 = 6x - 15 \quad \text{multiplicar}$$

$$8 = -15 \quad \text{restar } 6x$$

Dado que $8 \neq -15$ para cualquier valor x , este resultado indica que la gráfica de f no corta a la asíntota horizontal. Como ayuda para el trazado, ahora podemos pensar que la asíntota horizontal es una frontera que no puede cruzarse.

Guía 6 La asíntota vertical de la figura 7 divide el plano xy en dos regiones:

$$R_1: \text{ a la izquierda de } x = \frac{5}{2}$$

$$R_2: \text{ a la derecha de } x = \frac{5}{2}$$

Para R_1 , tenemos los dos puntos $(-\frac{4}{3}, 0)$ y $(0, -\frac{4}{5})$ por los que debe pasar la gráfica de f , así como las dos asíntotas a las que debe acercarse la gráfica. Esta porción se muestra en la figura 8.

Figura 7

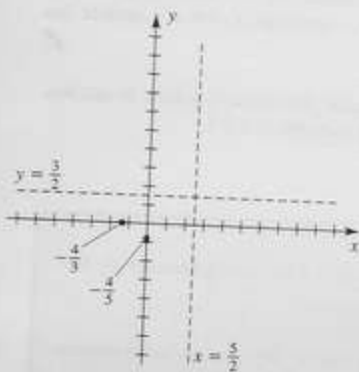


Figura 8

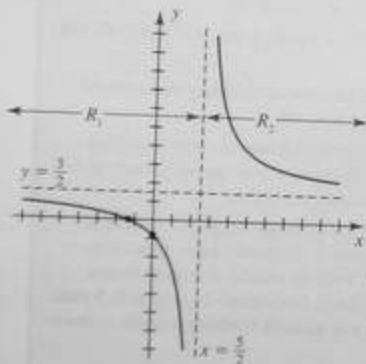
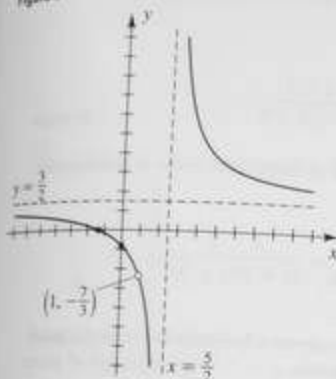


figura 9



Para R_2 , la gráfica nuevamente debe acercarse a las dos asíntotas. Dado que la gráfica no puede cruzar el eje x (en R_2 no hay intersección en x) debe estar arriba de la asíntota horizontal, como se muestra en la figura 8.

EJEMPLO 4 Trazado de una gráfica que tiene un hueco

Traza la gráfica de g si

$$g(x) = \frac{(3x + 4)(x - 1)}{(2x - 5)(x - 1)}$$

SOLUCIÓN El dominio de g son todos los números reales excepto $\frac{5}{2}$ y 1. Si se reduce g , obtenemos la función f del ejemplo previo. La única diferencia entre las gráficas de f y g es que g tiene un hueco en $x = 1$. Dado que $f(1) = -\frac{2}{3}$ sólo necesitamos hacer un hueco en la gráfica de la figura 8 para obtener la gráfica de g en la figura 9.



EJEMPLO 5 Determinación de una ecuación de una función racional que satisface condiciones prescritas

Halla una ecuación de una función racional f que cumpla las condiciones siguientes:

intersección en $x = 4$, asíntota vertical: $x = -2$,

asíntota horizontal: $y = -\frac{3}{5}$, y un hueco en $x = 1$

SOLUCIÓN Una intersección en x igual a 4 implica que $x - 4$ debe ser un factor en el numerador y una asíntota vertical de $x = -2$ implica que $x + 2$ es un factor en el denominador. Así, podemos empezar con la forma

$$\frac{x - 4}{x + 2}$$

La asíntota horizontal es $y = -\frac{3}{5}$. Podemos multiplicar el numerador por -3 y el denominador por 5 para obtener la forma

$$\frac{-3(x - 4)}{5(x + 2)}$$

(No escriba $(-3x - 4)/(5x + 2)$ porque cambiaría la intersección en x y la asíntota vertical.) Por último, dado que en $x = 1$ hay un hueco, debemos tener un factor de $x - 1$ tanto en el numerador como en el denominador. Así, una ecuación para f es

$$f(x) = \frac{-3(x - 4)(x - 1)}{5(x + 2)(x - 1)} \text{ o bien, en forma } f(x) = \frac{-3x^2 + 15x - 12}{5x^2 + 5x - 10}$$

EJEMPLO 6 Trazado de la gráfica de una función racional

Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$$

SOLUCIÓN Es útil factorizar tanto el numerador como el denominador, así, comenzamos por escribir

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6} = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$$

Figura 10



Guía 1 Para encontrar las intersecciones en x hallamos los ceros del numerador. Resolvemos $x-1=0$ y tenemos $x=1$, luego trazamos el punto $(1, 0)$ en el eje x (figura 10).

Guía 2 El denominador tiene ceros $-2, 3$; por tanto, las rectas $x = -2$ y $x = 3$ son asíntotas verticales; las trazamos con líneas punteadas (figura 10).

Guía 3 La intersección en y es $f(0) = \frac{1}{6}$, y trazamos el punto $(0, \frac{1}{6})$ en la figura 10.

Guía 4 El grado del numerador de $f(x)$ es menor que el grado del denominador, así que por el inciso 1 del teorema sobre asíntotas horizontales, el eje x es la asíntota horizontal.

Guía 5 Los puntos en donde la gráfica corta la asíntota horizontal (el eje x) encontrada en la guía 4 corresponde a las intersecciones x . Ya trazamos el punto $(1, 0)$ en la guía 1.

Guía 6 Las asíntotas verticales de la figura 10 dividen el plano xy en tres regiones:

R_1 : a la izquierda de $x = -2$

R_2 : entre $x = -2$ y $x = 3$

R_3 : a la derecha de $x = 3$

Para R_1 , tenemos $x < -2$. Sólo hay dos opciones para la forma de la gráfica de f en R_1 : a medida que $x \rightarrow -\infty$, la gráfica se aproxima al eje x por arriba o por abajo. A fin de establecer cuál opción es correcta, examinaremos el signo del valor de una función característica de R_1 . Escogemos -10 para x , usamos la forma factorizada de $f(x)$ para encontrar el signo de $f(-10)$ (este proceso es semejante al usado en la sección 2.7):

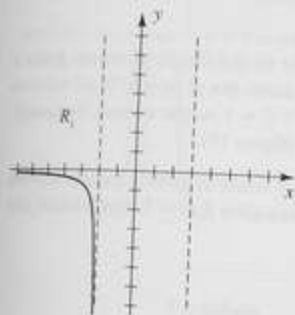
$$f(-10) = \frac{(-)}{(-)(-)} = -$$

El valor negativo de $f(-10)$ indica que la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal desde *abajo* a medida que $x \rightarrow -\infty$. Además, conforme $x \rightarrow -2^-$,

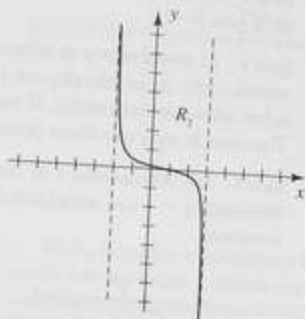
la gráfica se extiende *hacia abajo*; esto es, $f(x) \rightarrow -\infty$. En la figura 11(a) se presenta el trazo de f en R_1 .

Figura 11

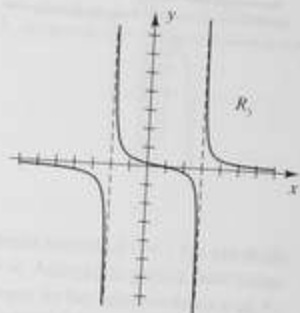
(a)



(b)



(c)



En R_2 , tenemos $-2 < x < 3$ y la gráfica cruza el eje x en $x = 1$. Puesto que $f(0)$ es positiva, se deduce que la gráfica se encuentra *arriba* del eje x si $-2 < x < 1$. Así, a medida que $x \rightarrow -2^+$, la gráfica se extiende *hacia arriba*, esto es, $f(x) \rightarrow \infty$. Dado que $f(2)$ se puede mostrar como negativa, la gráfica queda *abajo* del eje x si $1 < x < 3$. Por tanto, a medida que $x \rightarrow 3^-$ la gráfica se extiende *hacia abajo*, —esto es, $f(x) \rightarrow -\infty$. En la figura 11(b) aparece un trazo de f en R_2 .

Por último, en R_3 , $x > 3$, y la gráfica no cruza el eje x . En vista de que $f(4)$ se puede mostrar positiva, la gráfica está *arriba* del eje x . Se deduce que $f(x) \rightarrow \infty$ a medida que $x \rightarrow 3^+$ y que la gráfica se acerca a la asíntota horizontal desde *arriba* conforme $x \rightarrow \infty$. La gráfica de f se dibuja en la figura 11(c).



EJEMPLO 7 Trazado de la gráfica de una función racional

Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}.$$

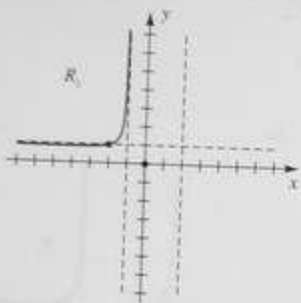
SOLUCIÓN Al factorizar el denominador obtenemos

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2}{(x+1)(x-2)}.$$

De nuevo seguimos las guías.

(continúa)

Figura 12



Guía 1 Para hallar las intersecciones en x encontramos los ceros del numerador. Resolvemos $x^2 = 0$, con lo cual $x = 0$, y trazamos el punto $(0, 0)$ en el eje x (figura 12).

Guía 2 El denominador tiene ceros -1 y 2 ; por tanto, las rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales y las trazamos con líneas punteadas (figura 12).

Guía 3 La intersección en y es $f(0) = 0$. Esto nos da el mismo punto $(0, 0)$ de la guía 1.

Guía 4 El numerador y el denominador de $f(x)$ tienen el mismo grado y ambos coeficientes iniciales son 1; por tanto, por el inciso (2) del teorema sobre asíntotas horizontales, la recta $y = \frac{1}{1} = 1$ es una asíntota horizontal. Trazamos la recta con líneas punteadas (figura 12).

Guía 5 Las coordenadas x de los puntos donde la gráfica corta la asíntota horizontal $y = 1$ son soluciones de la ecuación $f(x) = 1$. Resolvemos esta ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2 - x - 2} &= 1 && \text{sea } f(x) = 1 \\ x^2 &= x^2 - x - 2 && \text{multiplicar por } x^2 - x - 2 \\ x &= -2 && \text{restar } x^2 \text{ y sumar } x \end{aligned}$$

Este resultado indica que la gráfica corta la asíntota horizontal $y = 1$ sólo en $x = -2$; por tanto, trazamos el punto $(-2, 1)$ al igual que en la figura 12.

Guía 6 Las asíntotas verticales de la figura 12 dividen el plano xy en tres regiones:

R_1 : a la izquierda de $x = -1$

R_2 : entre $x = -1$ y $x = 2$

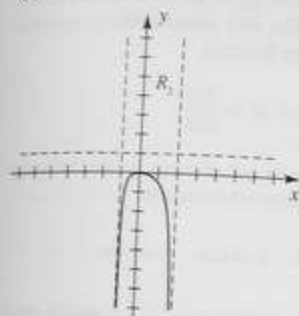
R_3 : a la derecha de $x = 2$

Para R_1 , consideremos primero la porción de la gráfica que corresponde a $-2 < x < -1$. Desde el punto $(-2, 1)$ en la asíntota horizontal, la gráfica debe extenderse *hacia arriba* a medida que $x \rightarrow -1^-$ (no se puede extender hacia abajo porque no hay intersección en x entre $x = -2$ y $x = -1$). Conforme $x \rightarrow -\infty$, habrá un punto bajo en la gráfica entre $y = 0$ y $y = 1$ y entonces la gráfica se aproximará a la asíntota horizontal $y = 1$ desde *abajo*. Es difícil ver dónde se presenta el punto bajo en la figura 12 porque los valores de función están muy cercanos entre sí. Con el uso de operaciones de cálculo es posible demostrar que el punto bajo es $(-4, \frac{8}{5})$.

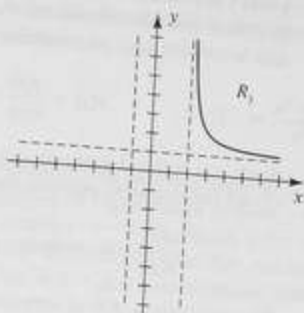
En R_2 , tenemos $-1 < x < 2$, y la gráfica corta al eje x en $x = 0$. Dado que la función no cruza la asíntota horizontal en esta región, sabemos que la gráfica se extiende *hacia abajo* a medida que $x \rightarrow -1^+$ y conforme $x \rightarrow 2^-$ [figura 13(a)].

Figura 13

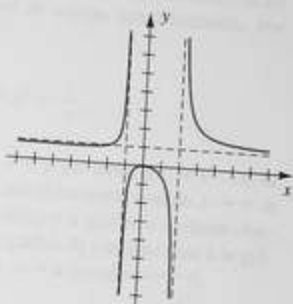
(a)



(b)



(c)



En R_3 , la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal $y = 1$ (ya sea desde arriba o desde abajo) a medida que $x \rightarrow \infty$. Además, la gráfica debe extenderse hacia arriba conforme $x \rightarrow 2^+$ porque no hay intersecciones x en R_3 . Esto significa que a medida que $x \rightarrow \infty$, la gráfica se acerca a la asíntota horizontal desde arriba [figura 13(b)].

La gráfica de f aparece en la figura 13(c).

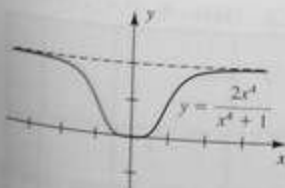
En las soluciones restantes no escribiremos formalmente cada una de las guías.

EJEMPLO 8 Trazado de la gráfica de una función racional

Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{2x^4}{x^4 + 1}.$$

Figura 14



SOLUCIÓN Observa que como $f(-x) = f(x)$, la función es par; así pues, la gráfica es simétrica con respecto al eje y .

La gráfica corta al eje x en $(0, 0)$. En virtud de que el denominador de $f(x)$ no tiene cero real, la gráfica carece de asíntota vertical.

El numerador y el denominador de $f(x)$ tienen el mismo grado. Dado que los coeficientes iniciales son 2 y 1, respectivamente, la recta $y = \frac{2}{1} = 2$ es la asíntota horizontal. La gráfica no cruza la asíntota horizontal $y = 2$ porque la ecuación $f(x) = 2$ no tiene solución real.

Trazar los puntos $(1, 1)$, $(2, \frac{32}{17})$ y aplicar simetría nos lleva a la gráfica de la figura 14.

Una **asíntota oblicua** para una gráfica es una recta $y = ax + b$, con $a \neq 0$, tal que la gráfica se aproxima a esta recta a medida que $x \rightarrow \infty$ o conforme $x \rightarrow -\infty$. (Si la gráfica es una recta, la consideramos como su

propia asíntota.) Si la función racional $f(x) = g(x)/h(x)$ para polinomios $g(x)$ y $h(x)$ y si el grado de $g(x)$ es mayor en uno que el grado de $h(x)$, la gráfica de f tiene una asíntota oblicua. Para hallar esta asíntota oblicua podemos usar la división larga para expresar $f(x)$ en la forma

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = (ax + b) + \frac{r(x)}{h(x)},$$

donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $h(x)$, del inciso (1) del teorema sobre asíntotas horizontales sabemos que

$$\frac{r(x)}{h(x)} \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty \text{ o cuando } x \rightarrow -\infty.$$

En consecuencia, $f(x)$ se aproxima a la recta $y = ax + b$ a medida que x aumenta o disminuye sin límite; esto es, $y = ax + b$ es una asíntota oblicua.

EJEMPLO 9 Determinación de una asíntota oblicua

Encuentra todas las asíntotas y traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x - 4}.$$

SOLUCIÓN Una asíntota vertical se presenta en $2x - 4 = 0$ (o sea, si $x = 2$).

El grado del numerador de $f(x)$ es mayor que el grado del denominador; por tanto, según (3) del teorema sobre asíntotas horizontales, no hay asíntota horizontal; pero como el grado de numerador, 2, es un grado mayor que el grado del denominador, 1, la gráfica tiene una asíntota oblicua. Por la división larga obtenemos

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x + 1 \\ 2x - 4 \overline{) x^2 - 9} \\ \underline{x^2 - 2x} \\ 2x - 9 \quad \text{restar} \\ \underline{2x - 4} \quad (1)(2x - 4) \\ 2x - 4 \\ \underline{2x - 4} \\ 5 \quad \text{restar} \end{array}$$

Así pues,

$$\frac{x^2 - 9}{2x - 4} = \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) - \frac{5}{2x - 4}.$$

Según indicamos en el estudio anterior a este ejemplo, la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ es una asíntota oblicua. Esta recta y la asíntota vertical $x = 2$ aparecen con líneas punteadas en la figura 15.

Las intersecciones en x de la gráfica son soluciones de $x^2 - 9 = 0$, por lo cual son 3 y -3 . La intersección en y es $f(0) = \frac{9}{4}$. Los puntos correspondientes aparecen en la figura 15. Ahora podemos demostrar que la gráfica tiene la forma indicada en la figura 16.

Figura 15

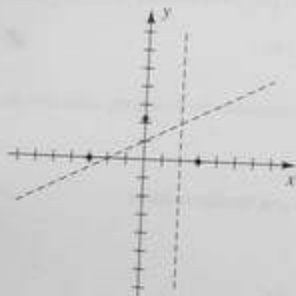
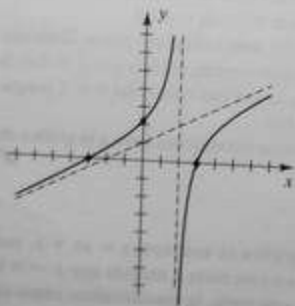


Figura 16



En el ejemplo 9, la gráfica de f se aproxima a la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ *asintóticamente* a medida que $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$. Las gráficas de funciones racionales pueden aproximar diferentes tipos de curvas *asintóticamente*. Por ejemplo, si

$$f(x) = \frac{x^4 - x}{x^2} = x^2 - \frac{1}{x},$$

entonces para valores grandes de $|x|$, $1/x \approx 0$ y, por tanto, $f(x) \approx x^2$. Así, la gráfica de f aproxima la parábola $y = x^2$ *asintóticamente* cuando $x \rightarrow \infty$ o cuando $x \rightarrow -\infty$. En general, si $f(x) = g(x)/h(x)$ y si $q(x)$ es el cociente obtenido al dividir $g(x)$ entre $h(x)$, entonces la gráfica de f se aproxima a la gráfica de $y = q(x)$ *asintóticamente* cuando $x \rightarrow \infty$ o cuando $x \rightarrow -\infty$.

EJEMPLO 10 Trazado de la gráfica de una función racional
Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{9x^3 - 9x^2 - 22x + 8},$$

y encuentra ecuaciones de las asíntotas verticales.

SOLUCIÓN Empezamos con las asignaciones

$$Y_1 = x^2 - x, \quad Y_2 = 9x^3 - 9x^2 - 22x + 8 \quad \text{y} \quad Y_3 = Y_1/Y_2.$$

Nada más graficaremos Y_3 (desactiva Y_1 y Y_2). Esto, aunado al uso de una pantalla predefinida, nos da una gráfica que prácticamente no da indicación alguna de la verdadera forma de f . Al cambiar a una pantalla $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$, tenemos idea de que las asíntotas verticales están confinadas al intervalo $-2 < x < 3$.

Con una pantalla $[-2, 3]$ por $[-1, 1]$ en *modo de punto* (para no graficar la función de un lado a otro de las asíntotas verticales) llegamos al trazo de la figura 17. Puesto que el grado del numerador, 2, es menor que el del denominador, 3, la asíntota horizontal es el eje x . Los ceros del numerador, 0 y 1, son las únicas intersecciones x .

A fin de hallar las ecuaciones de las asíntotas verticales, dejaremos la gráfica de Y_3 y examinaremos la gráfica de Y_2 en busca de sus ceros. Al graficar Y_2 en la misma pantalla, pero en el *modo conectado*, llegamos a la figura 18.

Por el teorema sobre ceros racionales de un polinomio sabemos que las posibles raíces racionales de $9x^3 - 9x^2 - 22x + 8 = 0$ son

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}, \pm \frac{4}{9}, \pm \frac{8}{9}.$$

En la gráfica vemos que la única opción razonable para el cero en el intervalo $(-2, -1)$ es $-\frac{4}{3}$. El número 2 parece ser cero, y usando la función

(continúa)

Figura 17

$[-2, 3]$ por $[-1, 1]$

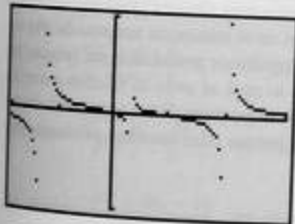
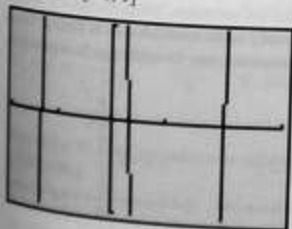


Figura 18

$[-2, 3]$ por $[-1, 1]$



cero o raíz (root) de la calculadora concluimos que $\frac{1}{3}$ también es un buen candidato para un cero. Es posible probar que $-\frac{4}{3}$, $\frac{1}{3}$, y 2 son ceros de Y_2 utilizando la división sintética. Así, las ecuaciones de las asíntotas verticales son

$$x = -\frac{4}{3}, \quad x = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad x = 2.$$

Las gráficas de funciones racionales se pueden complicar más y más conforme aumentan los grados de los polinomios del numerador y denominador. Las técnicas desarrolladas en cálculo son muy útiles para alcanzar un análisis más completo de dichas gráficas.

Las fórmulas que representan cantidades físicas pueden determinar funciones racionales; por ejemplo, considera la ley de Ohm en teoría eléctrica, que indica que $I = V/R$, donde R es la resistencia (en ohms) de un conductor, V es la diferencia de potencial (en volts) en las terminales del conductor, e I es la corriente (en amperes) que circula por el conductor. La resistencia de ciertas aleaciones se aproxima a cero conforme la temperatura se acerca al cero absoluto (alrededor de -273°C), y la aleación se convierte en superconductor de electricidad. Si la tensión V es fija, entonces, para dicho superconductor,

$$I = \frac{V}{R} \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad R \rightarrow 0^+;$$

esto es, a medida que R se aproxime a 0, la corriente aumenta sin límite. Los superconductores permiten usar corrientes muy altas en plantas generadoras y motores. También tienen aplicaciones en el transporte terrestre de alta velocidad, donde los intensos campos magnéticos producidos por imanes superconductores elevan los trenes, con lo cual se evita la fricción entre las ruedas y la vía. Quizá la aplicación más importante de los superconductores es en los circuitos para computadoras, porque tales circuitos producen muy poco calor.

4.5 Ejercicios

Ejercicios 1 y 2: (a) traza la gráfica de f ; (b) encuentra el dominio D y la imagen R de f ; y (c) halla los intervalos en que f crece o decrece.

1. $f(x) = \frac{4}{x}$

2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Ejercicios 3 y 4: identifica las asíntotas verticales, las asíntotas horizontales y los huecos.

3. $f(x) = \frac{-2(x+5)(x-6)}{(x-3)(x-6)}$

4. $f(x) = \frac{2(x+4)(x+2)}{5(x+2)(x-1)}$

Ejercicios 5 y 6: todas las asíntotas, intercepciones y huecos de una función racional f están marcados en la figura. Trazas una gráfica de f y encuentra una fórmula que la represente.



Ejercicios 7 al 32: traza la gráfica de f .

7 $f(x) = \frac{3}{x-4}$

8 $f(x) = \frac{-3}{x+3}$

9 $f(x) = \frac{-3x}{x+2}$

10 $f(x) = \frac{4x}{2x-5}$

11 $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$

12 $f(x) = \frac{5x+3}{3x-7}$

13 $f(x) = \frac{(4x-1)(x-2)}{(2x+3)(x-2)}$

14 $f(x) = \frac{(5x+3)(x+1)}{(3x-7)(x+1)}$

15 $f(x) = \frac{x-2}{x^2-x-6}$

16 $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$

17 $f(x) = \frac{-4}{(x-2)^2}$

18 $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

19 $f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$

20 $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4}$

21 $f(x) = \frac{2x^2-2x-4}{x^2+x-12}$

22 $f(x) = \frac{-3x^2-3x+6}{x^2-9}$

23 $f(x) = \frac{-x^2-x+6}{x^2+3x-4}$

24 $f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x^2+x-6}$

25 $f(x) = \frac{3x^2-3x-36}{x^2+x-2}$

26 $f(x) = \frac{2x^2+4x-48}{x^2+3x-10}$

27 $f(x) = \frac{-2x^2+10x-12}{x^2+x}$

28 $f(x) = \frac{2x^2+8x+6}{x^2-2x}$

29 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x}$

30 $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^3-9x}$

31 $f(x) = \frac{-3x^2}{x^2+1}$

32 $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$

Ejercicios 33 a 36: encuentra la asíntota oblicua y traza la gráfica de f .

33 $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x+1}$

34 $f(x) = \frac{2x^2-x-3}{x-2}$

35 $f(x) = \frac{8-x^3}{2x^2}$

36 $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2-9}$

Ejercicios 37 al 44: simplifica $f(x)$ y traza la gráfica de f .

37 $f(x) = \frac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2}$

38 $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$

39 $f(x) = \frac{x-1}{1-x^2}$

40 $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$

41 $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+2}$

42 $f(x) = \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x-2}$

43 $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}$

44 $f(x) = \frac{(x^2+x)(2x-1)}{(x^2-3x+2)(2x-1)}$

Ejercicios 45 al 48: encuentra la ecuación de una función racional f que satisfaga las condiciones dadas.

45 Asíntota vertical: $x = 4$

Asíntota horizontal: $y = -1$

Intersección en $x: 3$

46 Asíntotas verticales: $x = -2, x = 0$

Asíntota horizontal: $y = 0$

Intersección en $x: 2; f(3) = 1$

47 Asíntotas verticales: $x = -3, x = 1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

Intersección en $x: -1; f(0) = -2$

Hueco en $x = 2$

48 Asíntotas verticales: $x = -1, x = 3$

Asíntota horizontal: $y = 2$

Intersecciones en $x: -2, 1$; hueco en $x = 0$

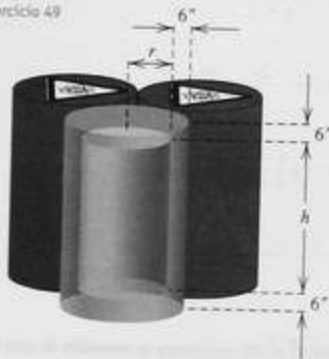
49 Un recipiente para desechos radiactivos. Se va a construir con plomo un recipiente cilíndrico para almacenar desechos radiactivos; las paredes deben ser de 6 pulgadas de grueso. El volumen del cilindro exterior que se muestra en la figura ha de tener 16π pies cúbicos.

- (a) Expresa la altura h del cilindro interior como función del radio interior r .
- (b) Demuestra que el volumen interior $V(r)$ está dado por

$$V(r) = \pi r^2 \left[\frac{16}{(r + 0.5)^2} - 1 \right]$$

- (c) ¿Qué valores de r deben excluirse del inciso (b)?

Ejercicio 48



- 50 Dosis de medicamento La regla de Young es una fórmula que se usa para modificar las dosis para adultos en niveles infantiles. Si a denota la dosis para adulto (en mg) y t es la edad del niño (en años), entonces la dosis y del menor está dada por $y = at/(t + 12)$. Traza la gráfica de esta ecuación para $t > 0$ y $a = 100$.

- 51 Concentración de sal Se hace circular agua salada de concentración igual a 0.1 libras (lb) de sal por galón (gal) a un gran tanque que contenía 50 gal de agua pura en un inicio.

- (a) Si el agua entra a 5 gal/min, encuentra el volumen $V(t)$ de agua y la cantidad $A(t)$ de sal en el tanque después de t min.

- (b) Propón una fórmula para hallar la concentración de sal $c(t)$ en lb/gal después de t min.

- (c) Analiza la variación de $c(t)$ conforme $t \rightarrow \infty$.

- 52 Cantidad de lluvia La cantidad total de pulgadas $R(t)$ de lluvia durante una tormenta de t h de duración se calcula por

$$R(t) = \frac{at}{t + b}$$

donde a y b son constantes positivas que dependen de la situación geográfica.

- (a) Analiza la variación de $R(t)$ conforme $t \rightarrow \infty$.

- (b) La intensidad I de la lluvia (en pulg/h) está definida por $I = R(t)/t$. Si $a = 2$ y $b = 8$, traza la gráfica de R e I en el mismo plano coordenado para $t > 0$.

- 53 Propagación del salmón Para una población particular de salmón, la relación entre el número S de ponedoras y la cantidad R de hijuelos que sobreviven hasta llegar a la edad adulta está dada por la fórmula

$$R = \frac{4500S}{S + 500}$$

- (a) ¿En qué condiciones es $R > S$?
- (b) Indica el número de ponedoras que produciría el 90% de la cantidad máxima posible de hijuelos que sobrevivan hasta la edad adulta.
- (c) Trabaja la parte (b) con 80% en lugar de 90%.
- (d) Compara los resultados para S y R (en términos de aumentos de porcentaje) de las partes (b) y (c).

- 54 Densidad de población La densidad de la población D (en personas/mi²) de una gran ciudad, se relaciona con la distancia x (en mi) desde el centro de la ciudad mediante

$$D = \frac{5000x}{x^2 + 36}$$

- (a) ¿Qué le sucede a la densidad conforme la distancia desde el centro de la ciudad pasa de 20 a 25 mi?

- (b) ¿Qué ocurre finalmente con la densidad?

- (c) ¿En qué partes de la ciudad la densidad de población rebasa las 400 personas/mi²?

Ejercicios 55 al 58: grafica f y encuentra ecuaciones de las asíntotas verticales.

55 $f(x) = \frac{20x^2 + 80x + 72}{10x^2 + 40x + 41}$

56 $f(x) = \frac{15x^2 - 60x + 68}{3x^2 - 12x + 13}$

57 $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-0.999)^2}$

58 $f(x) = \frac{x^2 - 9.01}{x - 3}$

59 Sea $f(x)$ el polinomio

$$(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3).$$

- (a) Describe la gráfica de $g(x) = f(x)/f(x)$.
- (b) Describe la gráfica de $h(x) = g(x)p(x)$, donde $p(x)$ es una función polinomial.

60 Consulta el ejercicio 59.

- (a) Describe la gráfica de $y = f(x)$.
- (b) Describe la gráfica de $k(x) = 1/f(x)$.

61 Promedio de punto de calificación (PPC)

- (a) Un estudiante terminó 48 horas crédito con un PPC de 2.75. ¿Cuántos créditos hora adicionales y de 4.0 aumentará el promedio del estudiante para alcanzar un valor deseado x ? (Determina y como una función de x .)
- (b) Haz una tabla de valores para x y y , empieza con $x = 2.8$ y usa incrementos de 0.2.
- (c) Grafica la función del inciso (a) en la pantalla $[2, 4]$ por $[0, 1000, 100]$.
- (d) ¿Cuál es la asíntota vertical de la gráfica en el inciso (c)?
- (e) Explica el significado práctico del valor $x = 4$.

4.6

Variación

En algunas investigaciones científicas se usan los términos *variación* o *proporción* para describir relaciones entre cantidades variables. En la tabla siguiente, k es un número real diferente de cero y se llama **constante de variación** o **constante de proporcionalidad**.

Terminología	Fórmula general	Ejemplo
y varía directamente con x , o y es directamente proporcional a x	$y = kx$	$C = 2\pi r$, donde C es la circunferencia de un círculo, r es el radio y $k = 2\pi$
y varía inversamente con x , o y es inversamente proporcional a x	$y = \frac{k}{x}$	$I = \frac{110}{R}$, donde I es la corriente de un circuito eléctrico, R es la resistencia y $k = 110$ es el voltaje

La variable x de la tabla también puede representar una potencia; por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$ expresa que el área A de un círculo varía directamente con el **cuadrado** del radio r , donde π es la constante de variación. De manera análoga, la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ indica que el volumen V de una esfera es directamente proporcional al **cubo** del radio. En este caso la constante de proporcionalidad es $\frac{4}{3}\pi$.

En general, las gráficas de variables relacionadas por **variación directa** se parecen a las gráficas de **funciones de potencia** de la forma $y = x^n$ con $n > 0$ (tales como $y = \sqrt{x}$ o $y = x^2$ para valores x no negativos, como muestra la figura 1). Con la **variación directa**, a medida que una variable aumenta, lo mismo sucede con la otra variable. Un ejemplo de dos cantidades directamente relacionadas es: el número de millas recorridas y el número de calorías quemadas.

Figura 1

Cuando x aumenta, y aumenta, o bien cuando x disminuye, y disminuye

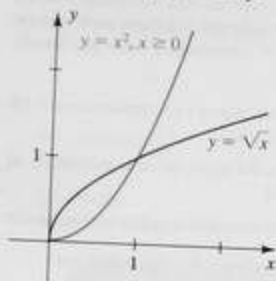
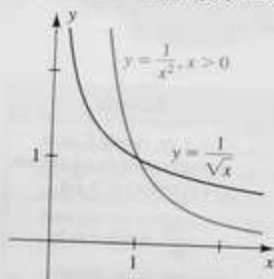


Figura 2

Cuando x aumenta, y disminuye, o bien, cuando x disminuye, y aumenta



Las gráficas de variables relacionadas por *variación inversa* se parecen a las gráficas de las funciones de potencia de la forma $y = x^n$ con $n < 0$ (tales como $y = 1/\sqrt{x}$ o $y = 1/x^2$ para valores positivos de x , como muestra la figura 2). En este caso, cuando una variable aumenta la otra variable disminuye. Un ejemplo de dos cantidades relacionadas inversamente es el número de pulgadas de lluvia y el número de incendios forestales.

EJEMPLO 1 Variables directamente proporcionales

Supongamos que una variable q es directamente proporcional a una variable z .

- Si $q = 12$ cuando $z = 5$, determina la constante de proporcionalidad.
- Encuentra el valor de q cuando $z = 7$ y traza una gráfica de esta relación.

SOLUCIÓN Como q es directamente proporcional a z ,

$$q = kz,$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

- Al sustituir $q = 12$ y $z = 5$ obtenemos

$$12 = k \cdot 5, \quad \text{o bien} \quad k = \frac{12}{5}.$$

- Dado que $k = \frac{12}{5}$, la fórmula $q = kz$ tiene la forma específica

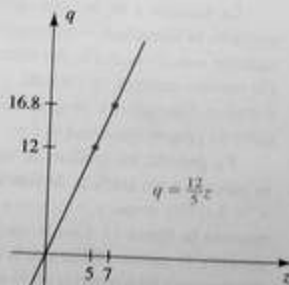
$$q = \frac{12}{5}z.$$

Por tanto, cuando $z = 7$,

$$q = \frac{12}{5} \cdot 7 = \frac{84}{5} = 16.8.$$

En la figura 3 se ilustra la relación de las variables q y z , una relación lineal simple.

Figura 3



Podemos usar estas guías para resolver problemas aplicados donde intervenga variación o proporción.

Guías para resolver problemas de variación

1. Escribir una fórmula *general* donde intervengan las variables y una constante de variación (o proporción) k .
2. Encontrar el valor de k en la guía (1) usando los datos iniciales dados en el enunciado del problema.
3. Sustituir el valor de k , encontrado en la guía (2), en la fórmula de la guía 1 para obtener una fórmula *específica* con las variables.
4. Usar los nuevos datos para resolver el problema.

Seguiremos estas guías en la solución del ejemplo que se incluye a continuación.



EJEMPLO 2 Presión y volumen son cantidades inversamente proporcionales

Si la temperatura permanece constante, la presión de un gas confinado es inversamente proporcional al volumen. La presión de cierto gas dentro de un globo esférico de 9 pulg de radio es 20 lb/pulg². Si el radio del globo aumenta a 12 pulg, calcula la nueva presión del gas. Traza una gráfica de la relación entre la presión y el volumen.

SOLUCIÓN

Guía 1 Si denotamos la presión por P (en lb/pulg²) y el volumen por V (en pulg³), puesto que P es inversamente proporcional a V ,

$$P = \frac{k}{V}$$

para alguna constante de proporcionalidad k .

Guía 2 Encontramos la constante de proporcionalidad k en la guía 1. Dado que el volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, el volumen inicial del globo es $V = \frac{4}{3}\pi(9)^3 = 972\pi$ pulg³. Esto lleva a lo siguiente:

$$20 = \frac{k}{972\pi}$$

$$P = 20 \text{ cuando } V = 972\pi$$

$$k = 20(972\pi) = 19440\pi \quad \text{resuelve para } k$$

Guía 3 Al sustituir $k = 19440\pi$ en $P = k/V$, encontramos que la presión correspondiente a cualquier volumen V está dada por

$$P = \frac{19440\pi}{V}$$

(continúa)

Guía 4 Si el nuevo radio del globo es de 12 pulg., entonces

$$V = \frac{4}{3}\pi(12)^3 = 2304\pi \text{ pulg}^3.$$

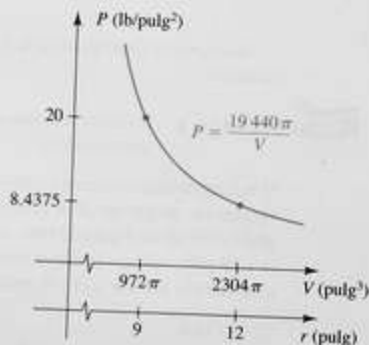
Al sustituir este número por V en la fórmula de la guía 3, obtendremos

$$P = \frac{19440\pi}{2304\pi} = \frac{135}{16} = 8.4375.$$

Por tanto, la presión disminuye unas 8.4 lb/pulg² cuando el radio aumenta a 12 pulg.

En la figura 4 se ilustra la relación de las variables P y V para $V > 0$. Como $P = 19440\pi/V$ y $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, podemos demostrar que $(P \circ V)(r) = 14580/r^3$, por lo cual también podríamos decir que P es inversamente proporcional a r^3 . Observarás que ésta es la gráfica de una función racional simple.

Figura 4



Hay otros tipos de variación. Si x , y y z son variables y $y = kxz$ para algún número real k , decimos que y **varía directamente con el producto de x y z** o **varía conjuntamente con x y z** . Si $y = k(x/z)$, entonces y **varía directamente con x e inversamente con z** . Como ilustración final, si una variable w varía directamente con el producto de x y el cubo de y e inversamente con el cuadrado de z , entonces

$$w = k \frac{xy^3}{z^2},$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Las gráficas de las ecuaciones correspondientes a este tipo de variación no serán consideradas en este texto.

EJEMPLO 3 Combinado de diversos tipos de variación

Una variable w varía directamente con el producto de u y v e inversamente con el cuadrado de s .

- Si $w = 20$ cuando $u = 3$, $v = 5$ y $s = 2$, encuentra la constante de variación.
- Halla el valor de w cuando $u = 7$, $v = 4$ y $s = 3$.

SOLUCIÓN Una fórmula general para w es

$$w = k \frac{uv}{s^2},$$

donde k es una constante de variación.

(a) Sustituir $w = 20$, $u = 3$, $v = 5$ y $s = 2$ para obtener

$$20 = k \frac{3 \cdot 5}{2^2}, \quad \text{o} \quad k = \frac{80}{15} = \frac{16}{3}.$$

(b) En vista de que $k = \frac{16}{3}$, la fórmula específica para w es

$$w = \frac{16}{3} \frac{uv}{s^2}.$$

Por tanto, cuando $u = 7$, $v = 4$ y $s = 3$,

$$w = \frac{16}{3} \cdot \frac{7 \cdot 4}{3^2} = \frac{448}{27} \approx 16.6.$$

En el ejemplo siguiente otra vez se utilizan las guías que se han expresado en esta sección.



EJEMPLO 4 Determinación de la carga de soporte de una viga rectangular

El peso que puede soportar con seguridad una viga de sección rectangular varía directamente con el producto del ancho y el cuadrado de la profundidad de la sección, e inversamente con la longitud de la viga. Si una viga de 2×4 pulg que mide 8 pies de largo soporta con seguridad una carga de 500 lb, ¿qué peso puede resistir con seguridad una viga de 2×8 pulg y 10 pies de largo? (Supón que el ancho es la dimensión *más corta* de la sección transversal.)

SOLUCIÓN

Guía 1 Si w , d , l y W denotan ancho, profundidad, longitud y peso, respectivamente, entonces una fórmula general para hallar W es

$$W = k \frac{wd^2}{l},$$

donde k es una constante de variación.

Guía 2 Para hallar el valor de k de la guía 1, con base en los datos vemos que

$$500 = k \frac{2(4^2)}{8} \quad \text{o} \quad k = 125.$$

Guía 3 Sustituimos $k = 125$ en la fórmula de la guía 1 y llegamos a la fórmula específica

$$W = 125 \frac{wd^2}{l}.$$

Guía 4 Para responder, reemplazamos $w = 2$, $d = 8$ y $l = 10$ en la fórmula de la guía 3 y obtenemos

$$W = 125 \cdot \frac{2 \cdot 8^2}{10} = 1600 \text{ lb}.$$

4.6 Ejercicios

Ejercicios 1 al 12: expresa el enunciado como una fórmula donde intervengan las variables dadas y una constante de proporcionalidad k , y luego encuentra el valor de k a partir de las condiciones dadas.

- 1 u es directamente proporcional a v . Si $v = 30$, entonces $u = 12$.
- 2 s varía directamente con t . Si $t = 10$, entonces $s = 18$.
- 3 r varía directamente con s e inversamente con t . Si $s = -2$ y $t = 4$, entonces $r = 7$.
- 4 w varía directamente con z e inversamente con la raíz cuadrada de u . Si $z = 2$ y $u = 9$, entonces $w = 6$.
- 5 y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional al cubo de z . Si $x = 5$ y $z = 3$, entonces $y = 25$.
- 6 q es inversamente proporcional a la suma de x y y . Si $x = 0.5$ y $y = 0.7$, entonces $q = 1.4$.
- 7 z es directamente proporcional al producto del cuadrado de x y el cubo de y . Si $x = 7$ y $y = -2$, entonces $z = 16$.
- 8 r es directamente proporcional al producto de s y v e inversamente proporcional al cubo de p . Si $s = 2$, $v = 3$ y $p = 5$, entonces $r = 40$.
- 9 y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional al cuadrado de z . Si $x = 4$ y $z = 3$, entonces $y = 16$.
- 10 y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional a la suma de r y s . Si $x = 3$, $r = 5$ y $s = 7$, entonces $y = 2$.
- 11 y es directamente proporcional a la raíz cuadrada de x e inversamente proporcional al cubo de z . Si $x = 9$ y $z = 2$, entonces $y = 5$.
- 12 y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de z . Si $x = 5$ y $z = 16$, entonces $y = 10$.
- 13 **Presión en líquidos** La presión P que actúa en un punto en un líquido es directamente proporcional a la distancia d desde la superficie del líquido al punto.
 - (a) Expresa P como función de d mediante una fórmula con una constante de proporcionalidad k .
 - (b) En determinado tanque de petróleo, la presión a una profundidad de 2 pies es de 118 lb/pie². Encuentra el valor de k del inciso (a).
 - (c) Halla la presión a una profundidad de 5 pies para el tanque de petróleo del inciso (b).
 - (d) Traza una gráfica de la relación entre P y d para $d \geq 0$.
- 14 **Ley de Hooke** La ley de Hooke señala que la fuerza F requerida para alargar un resorte x unidades, más allá de su longitud natural, es directamente proporcional a x .
 - (a) Encuentra F como función de x por medio de una fórmula con una constante de proporcionalidad k .
 - (b) Un peso de 4 lb alarga cierto resorte desde su longitud natural de 10 pulg a una longitud de 10.3 pulg. Encuentra el valor de k del inciso (a).
 - (c) ¿Qué peso alargará el resorte del inciso (b) hasta 11.5 pulg?
 - (d) Traza una gráfica de la relación entre F y x para $x \geq 0$.
- 15 **Resistencia eléctrica** La resistencia eléctrica R de un alambre varía directamente con su longitud l e inversamente con el cuadrado de su diámetro d .
 - (a) Expresa R en términos de l , d y una constante de variación k .
 - (b) Un alambre de 100 pies de largo y 0.01 pulg de diámetro tiene una resistencia de 25 ohms. Encuentra el valor de k del inciso (a).
 - (c) Traza una gráfica de la relación entre R y d para $l = 100$ y $d > 0$.
 - (d) Encuentra la resistencia de un alambre hecho del mismo material con un diámetro de 0.015 pulg y 50 pies de largo.
- 16 **Intensidad de iluminación** La intensidad de iluminación I desde una fuente de luz varía en sentido inverso al cuadrado de la distancia d desde la fuente.

- (a) Expresa I en términos de d y una constante de variación k .
- (b) Un reflector tiene una intensidad de 1 000 000 de bujías a 50 pies. Proporciona el valor de k del inciso (a).
- (c) Traza una gráfica de la relación entre I y d para $d > 0$.
- (d) Calcula la intensidad del faro del inciso (b) a 1 mi de distancia.
17. **Periodo de un péndulo** El periodo P de un péndulo sencillo, es decir, el tiempo requerido para una oscilación completa, es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud l .
- (a) Expresa P en términos de l y una constante de proporcionalidad k .
- (b) Si un péndulo de 2 pies de largo tiene un periodo de 1.5 s, encuentra el valor de k del inciso (a).
- (c) Proporciona el periodo de un péndulo de 6 pies de largo.
18. **Dimensiones de una extremidad humana** En fisiología, a veces se utiliza un cilindro circular como representación sencilla de una extremidad humana.
- (a) Expresa el volumen V de un cilindro en términos de su longitud L y el cuadrado de su circunferencia C .
- (b) La fórmula obtenida en el inciso (a) sirve para calcular el volumen de un miembro a partir de medidas de longitud y de circunferencia. Supón que la circunferencia (promedio) de un brazo humano es 22 cm y la longitud promedio es 27 cm. Calcula el volumen del brazo al centímetro cúbico más cercano.
19. **Periodo de un planeta** La tercera ley de Kepler expresa que el periodo T (tiempo necesario para completar una revolución alrededor del Sol) de un planeta es directamente proporcional a la potencia $\frac{3}{2}$ de su distancia promedio d desde el Sol.
- (a) Expresa T como función de d por medio de una fórmula donde intervenga una constante de proporcionalidad k .
- (b) Para la Tierra, $T = 365$ días y $d = 93$ millones de millas. Halla el valor de k en el inciso (a).
- (c) Calcula el periodo de Venus si su distancia promedio del Sol es de 67 millones de millas.
20. **Alcance de un proyectil** Por la física sabemos que el alcance R de un proyectil es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad v .
- (a) Expresa R como función de v por medio de una fórmula con una constante de proporcionalidad k .
- (b) Un motociclista acróbata ha realizado un salto de 150 pies. Si la velocidad al salir de la rampa era de 70 mph, encuentra el valor de k del inciso (a).
- (c) Si el motociclista puede alcanzar 80 mph al salir de la rampa y mantener el equilibrio apropiado, calcula la posible longitud del salto.
21. **Marcas de derrape de un automóvil** La velocidad V a la que se desplazaba un automóvil antes de aplicar los frenos se puede calcular a partir de la longitud L de las marcas de derrape. Supón que V es directamente proporcional a la raíz cuadrada de L .
- (a) Expresa V como función de L por medio de una fórmula donde haya una constante de proporcionalidad k .
- (b) Para determinado automóvil que se mueve en una superficie seca, $L = 50$ pies cuando $V = 35$ mph. Encuentra el valor de k del inciso (a).
- (c) Calcula la velocidad inicial del automóvil de la parte (b) si las marcas de derrape miden 150 pies de largo.
22. **Ley de Coulomb** La ley de Coulomb en teoría eléctrica expresa que la fuerza F de atracción entre dos partículas con cargas opuestas varía directamente como el producto de las magnitudes Q_1 y Q_2 de las cargas, e inversamente como el cuadrado de la distancia d entre las partículas.
- (a) Encuentra una fórmula para hallar F en términos de Q_1 , Q_2 , d y una constante de variación k .
- (b) ¿Cuál es el efecto de reducir la distancia entre las partículas por un factor de un cuarto?
23. **Umbral de peso** El peso de umbral W se define como el peso que al ser excedido incrementa en forma importante el riesgo de muerte. Para hombres de edad mediana, W es directamente proporcional a la tercera potencia de la estatura h .
- (a) Expresa W como función de h por medio de una fórmula donde haya una constante de proporcionalidad k .
- (b) Para un hombre de 6 pies de estatura, W es alrededor de 200 lb. Encuentra el valor de k del inciso (a).

(continúa)

- (c) Calcula, a la libra más cercana, el peso de umbral para un individuo de 5 pies, 6 pulg de estatura.
24. **Ley del gas ideal** La ley del gas ideal señala que el volumen V que ocupa un gas es directamente proporcional al producto del número n de moles de gas y la temperatura T (en K), e inversamente proporcional a la presión P (en atmósferas).
- (a) Expresa V en términos de n , T , P y una constante de proporcionalidad k .
- (b) ¿Cuál es el efecto del volumen si la cantidad de moles se duplica y tanto la temperatura como la presión se reducen a la mitad?
25. **Ley de Poiseuille** La ley de Poiseuille indica que la rapidez de la circulación sanguínea F (en L/min), que hay en una arteria principal, es directamente proporcional al producto de la cuarta potencia del radio r y la presión sanguínea P .
- (a) Encuentra F en términos de P , r y una constante de proporcionalidad k .
- (b) Durante el ejercicio fuerte, la rapidez normal de la circulación sanguínea a veces se triplica. Si el radio de una arteria importante aumenta 10%, ¿cuánto más rápido debe bombear el corazón?
26. **Población de truchas** Supongamos que entre la población de peces de un lago se atrapan, se marcan y se sueltan 200 especímenes. Con T se denota la cantidad de peces marcados que son recapturados cuando se pesca una muestra de n truchas tiempo después. La validez del método de marca y recaptura, para calcular la población total de truchas del lago, se basa en la suposición de que T es directamente proporcional a n . Si se recuperan 10 ejemplares marcados de una muestra de 300, calcula la población total de truchas del lago.
27. **Desintegración radiactiva del gas radón** Cuando el uranio se desintegra y se convierte en plomo, un paso en el proceso es la desintegración radiactiva del radio en gas radón. El radón entra por el suelo en los sótanos de las casas, donde se presenta un riesgo de salud si es inhalado. En el caso más sencillo de detección de radón, se toma una muestra de aire de volumen V . Una vez establecido el equilibrio, la desintegración radiactiva D del gas radón se cuenta con eficiencia E durante el tiempo t . La concentración C de radón presente en la muestra de aire varía directamente como el producto de D y E , e inversamente como el producto de V y t . Para una concentración C fija de radón y un tiempo t , encuentra el cambio en la cuenta D de desintegración radiactiva si V se duplica y E se reduce en 20%.
28. **Concentración de radón** Consulta el ejercicio 27. Halla el cambio en la concentración C de radón si D aumenta en 30%, t se incrementa en 60%, V disminuye en 10% y E permanece constante.
29. **Densidad en un punto** Una placa plana y delgada se sitúa en un plano xy tal que la densidad d (en lb/pie^2) en el punto $P(x, y)$ es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el origen. ¿Cuál es el efecto en la densidad en P si las coordenadas x y y se multiplican cada una por $\frac{1}{3}$?
30. **Temperatura en un punto** Una placa metálica plana se sitúa en un plano xy tal que la temperatura T (en $^{\circ}C$) en el punto (x, y) es inversamente proporcional a la distancia desde el origen. Si la temperatura en el punto $P(3, 4)$ es $20^{\circ}C$, encuentra la temperatura en $Q(24, 7)$.

Ejercicios 31 al 34: examina la expresión para el conjunto dado de puntos de datos de la forma (x, y) . Encuentra la constante de variación y una fórmula que describa cómo varía y con respecto a x .

31. y/x : $\{(0.6, 0.72), (1.2, 1.44), (4.2, 5.04), (7.1, 8.52), (9.3, 11.16)\}$

32. xy : $\{(0.2, -26.5), (0.4, -13.25), (0.8, -6.625), (1.6, -3.3125), (3.2, -1.65625)\}$

33. x^2y : $\{(0.16, -394.53125), (0.8, -15.78125), (1.6, -3.9453125), (3.2, -0.986328125)\}$

34. y/x^3 : $\{(0.11, 0.00355377), (0.56, 0.46889472), (1.2, 4.61376), (2.4, 36.91008)\}$

35. **Distancias de parada** Consulta el ejercicio 86 de la sección 3.4. La distancia D (en pies) requerida para que un auto frene y se detenga con seguridad varía directamente con su velocidad S (en mph).

- (a) Utiliza la tabla para hallar un valor aproximado para k en la fórmula de variación $D = kS^{2.3}$.

S	20	30	40	50	60	70
D	33	86	167	278	414	593

- (b) Comprueba su cálculo graficando los datos y D en los mismos ejes coordenados.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

Ejercicios 1 al 6: encuentra todos los valores x tales que $f(x) > 0$ y todas las x tales que $f(x) < 0$, y luego traza la gráfica de f .

1 $f(x) = (x+2)^2$

2 $f(x) = x^6 - 32$

3 $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x-1)^2(x-3)$

4 $f(x) = 2x^2 + x^3 - x^4$

5 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

6 $f(x) = \frac{1}{13}(x^3 - 20x^2 + 64x)$

7 Si $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$, usa el teorema del valor intermedio para funciones polinomiales con objeto de probar que hay un número real a tal que $f(a) = 100$.

8 Demuestra que la ecuación $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ tiene una solución entre 0 y 1.

Ejercicios 9 y 10: encuentra el cociente y el residuo si $f(x)$ se divide entre $p(x)$.

9 $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + x + 5$; $p(x) = x^3 - 2x + 7$

10 $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2x - 1$; $p(x) = x^2$

11 Si $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 7x - 10$, con el teorema del residuo halla $f(-2)$.

12 Usa el teorema del factor y demuestra que $x-3$ es un factor de $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 9$.

Ejercicios 13 y 14: utiliza la división sintética para hallar el cociente y el residuo si $f(x)$ se divide entre $p(x)$.

13 $f(x) = 6x^3 - 4x^2 + 8$; $p(x) = x + 2$

14 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1$; $p(x) = x - \sqrt{2}$

Ejercicios 15 y 16: un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales tiene el(los) cero(s) y grado(s) indicado(s) y satisface la condición dada. Expresa $f(x)$ como producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales irreducibles sobre \mathbb{R} .

15 $-3 + 5i, -1$; grado 3; $f(1) = 4$

16 $1-i, 3, 0$; grado 4; $f(2) = -1$

17 Encuentra un polinomio $f(x)$ de grado 7 con coeficiente principal 1 tal que -3 sea un cero de multiplicidad 2 y 0 sea un cero de multiplicidad 5, y traza la gráfica de f .

18 Demuestra que 2 es un cero de multiplicidad 3 del polinomio $f(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 34x^2 - 52x + 24$, y expresa $f(x)$ como producto de factores lineales.

Ejercicios 19 y 20: halla los ceros de $f(x)$ y expresa la multiplicidad de cada cero.

19 $f(x) = (x^2 - 2x + 1)^2(x^2 + 2x - 3)$

20 $f(x) = x^6 + 2x^4 + x^2$

Ejercicios 21 y 22: (a) con la regla de los signos de Descartes determina el número de posibles soluciones complejas positivas, negativas y no reales de la ecuación y (b) encuentra los enteros máximo y mínimo que sean cotas superior e inferior, respectivamente, para las soluciones reales de la ecuación.

21 $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x - 7 = 0$

22 $x^5 - 4x^4 + 6x^3 + x + 4 = 0$

23 Demuestra que $7x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 10$ no tiene cero real.

Ejercicios 24 al 26: encuentra todas las soluciones de la ecuación.

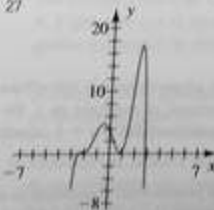
24 $x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 49x + 30 = 0$

25 $16x^5 - 20x^2 - 8x + 3 = 0$

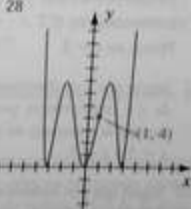
26 $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$

Ejercicios 27 y 28: encuentra una ecuación para el polinomio f de sexto grado que se muestra en la figura.

27



28



29. Identifica todas las asíntotas verticales, las asíntotas horizontales, las intersecciones y los huecos para

$$f(x) = \frac{4(x+2)(x-1)}{3(x+2)(x-5)}$$

Ejercicios del 30 al 39: traza la gráfica de f .

$$30. f(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$$

$$31. f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$$

$$32. f(x) = \frac{3x^2}{16-x^2}$$

$$33. f(x) = \frac{x}{(x+5)(x^2-5x+4)}$$

$$34. f(x) = \frac{x^3-2x^2-8x}{-x^2+2x}$$

$$35. f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2+x-1}$$

$$36. f(x) = \frac{3x^2+x-10}{x^2+2x}$$

$$37. f(x) = \frac{-2x^2-8x-6}{x^2-6x+8}$$

$$38. f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x+3}$$

$$39. f(x) = \frac{x^4-16}{x^3}$$

40. Encuentra la ecuación de una función racional f que satisfaga las condiciones dadas.

Asíntota vertical: $x = -3$

Asíntota horizontal: $y = \frac{3}{2}$

Intersección en x : 5

Hueco en $x = 2$

41. Supón que y es directamente proporcional a la raíz cúbica de x e inversamente proporcional al cuadrado de z . Encuentra la constante de proporcionalidad si $y = 6$ cuando $x = 8$ y $z = 3$.

42. Supón que y es inversamente proporcional al cuadrado de x . Trazar una gráfica de esta relación para $x > 0$, considerando que $y = 18$ cuando $x = 4$. Incluye un punto para $x = 12$.

43. Flexión de una viga. Una viga horizontal de l pies de largo nada más está sostenida en un extremo (véase la figura). Si se somete a una carga uniforme y y denota su flexión en una posición x pies del extremo sostenido, entonces cabe demostrar que

$$y = cx^2(x^2 - 4lx + 6l^2),$$

donde c es una constante positiva que depende del peso de la carga y las propiedades físicas de la viga.

- (a) Si la viga mide 10 pies de largo y la flexión en el extremo no sostenido es de 2 pies encuentra c .
- (b) Demuestra que la flexión es 1 pie entre $x = 6.1$ y $x = 6.2$.

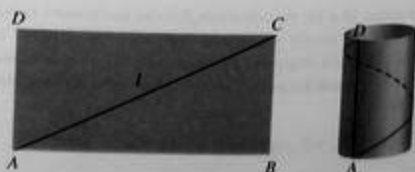
Ejercicio 43



44. Cilindro elástico. Un rectángulo de material elástico se va a convertir en un cilindro uniendo el borde AD al BC (véase la figura). Se coloca un alambre de longitud fija l a lo largo de la diagonal del rectángulo para sostener la estructura. Denotemos con x la altura del cilindro.

- (a) Expresa el volumen V del cilindro en términos de x .
- (b) ¿Para qué valores positivos de x es $V > 0$?

Ejercicio 44



45. Determinar temperaturas. Un meteorólogo encuentra que la temperatura T (en $^{\circ}\text{F}$), para cierto periodo de 24 h en invierno, está dado por la fórmula $T = \frac{1}{20}t(t - 12)(t - 24)$ para $0 \leq t \leq 24$, donde t es el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a las 6 a.m. ¿A qué hora(s) la temperatura era de 32°F ?

46. Propagación de venados. Un rebaño de 100 cabezas se introduce en una pequeña isla. Si el número $N(t)$ de ejemplares después de t años está dado por $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$ (para $t > 0$), determina cuándo pasará el rebaño de 180 individuos.

47. Curva de respuesta de umbral. En bioquímica, la curva general de respuesta de umbral es la gráfica de una ecuación

$$R = \frac{kS^n}{S^n + a^n},$$

donde R es la respuesta química cuando el nivel de la sustancia afectada es S ; por otro lado, a , k y n son constantes positivas. Un ejemplo es la tasa R de eliminación de alcohol del torrente sanguíneo por el hígado, cuando la concentración de alcohol en la sangre es S .

- (a) Encuentra una ecuación de la asíntota horizontal para la gráfica.
(b) En el caso de la eliminación del alcohol, $n = 1$ y un valor característico de k es 0.22 gramos por litro por minuto. ¿Cuál es la interpretación de k en este contexto?

48. Limpieza de un derrame de petróleo. El costo $C(x)$ de limpiar x por ciento de un derrame de petróleo de una costa aumenta en forma considerable conforme x se aproxima a 100. Supongamos que

$$C(x) = \frac{20x}{101 - x} \quad (\text{miles de dólares}).$$

- (a) Compara $C(100)$ con $C(90)$.
(b) Traza la gráfica de C para $0 < x < 100$.

49. Llamadas telefónicas. En determinado estado, el número promedio de llamadas telefónicas por día entre dos ciudades cualesquiera es directamente proporcional al producto de sus poblaciones e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Las ciudades A y B están a 25 mi una de otra y tienen poblaciones de 10 000 y 5000, respectivamente. Los registros telefónicos indican un promedio de 2000 llamadas por día entre las dos ciudades. Calcula el número promedio de llamadas por día entre la ciudad A y otra ciudad de 15 000 habitantes que está a 100 mi de A.

50. Potencia de un rotor de viento. La potencia P generada por un rotor de viento es directamente proporcional al producto del cuadrado del área A recorrida por las aspas y el cubo de la velocidad v del viento. Supón que el diámetro del área circular recorrida por las aspas es 10 pies, y $P = 3000$ W cuando $v = 20$ mph. Encuentra la potencia generada cuando la velocidad del viento es 30 mph.

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 4

1. Compara el dominio, imagen, número de intersecciones en x y la forma general de polinomios de grado par y de polinomios de grado impar.

2. Cuando se usa la división sintética, ¿es posible utilizar un número complejo c en lugar de un número real en $x - c$?

3. Analiza la forma en que la división sintética ayuda a encontrar el cociente y residuo cuando $4x^3 - 8x^2 - 11x + 9$ se divide entre $2x + 3$. Estudia cómo es que dicha división se puede usar con cualquier factor lineal de la forma $ax + b$.

4. Dibuja (a mano) una función polinomial de tercer grado con intersecciones x de 1, 2 y 3, y una intersección en y de 6, y que pase por el punto $(-1, 25)$. ¿Puedes obtener la gráfica que acabas de dibujar?

5. ¿Cuántos puntos diferentes necesitas para especificar un polinomio de grado n ?

6. Demuestra el teorema sobre parejas de ceros conjugados de un polinomio. (Sugerencia: para un polinomio arbitrario f , examina los conjugados de ambos lados de la ecuación $f(z) = 0$.)

- 7 Proporciona un ejemplo de una función racional con un factor común en el numerador y el denominador, pero que *no* tenga un hueco en tu gráfica. Comenta, en general, cómo es que esto puede ocurrir.
- 8 (a) ¿La gráfica de $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ (donde $ax + b \neq cx + d$) puede cruzar su asíntota horizontal? Si es así, ¿dónde?
- (b) ¿Es posible que la gráfica de $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$ (supón que no hay factores iguales) cruce su asíntota horizontal? Si es así, ¿dónde?
- 9 Encuentra la función inversa de $f(x) = \frac{9x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ e identifica la(s) asíntota(s) de la gráfica de f^{-1} . ¿Cómo se relaciona(n) con las asíntotas de la gráfica de f ?
- 10 Multiplica tres enteros consecutivos y luego suma el segundo entero al producto. Usa la división sintética como

ayuda para demostrar que la suma es el cubo de un entero, y encuentra este entero.

- 11 **Fórmula para sobrevivir en juegos de azar** La siguiente es una fórmula empírica para calcular el fondo B (en dólares) que se necesita para sobrevivir a una sesión de juegos de azar con la confianza C (un porcentaje expresado como un decimal).

$$B = \frac{GW}{29.3 + 53.1E - 22.7C},$$

donde G es el número de juegos de la sesión, W es la apuesta por juego y E es el límite de cada jugador en el juego (expresado como decimal).

- (a) Calcular el fondo que necesita un apostador que participa en 500 juegos por hora, durante 3 horas, a \$5 por juego, con un margen de -5% , si el jugador quiere tener una probabilidad de 95% de sobrevivir a esa sesión de 3 horas.
- (b) Analizar la validez de la fórmula; una tabla y una gráfica pueden ser útiles.

Funciones inversas, exponenciales y logarítmicas

- 5.1 Funciones inversas
- 5.2 Funciones exponenciales
- 5.3 Función exponencial natural
- 5.4 Funciones logarítmicas
- 5.5 Propiedades de los logaritmos
- 5.6 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Las funciones exponenciales y logarítmicas son trascendentes, ya que no se pueden definir sólo en términos de suma, resta, multiplicación, división y potencias racionales de una variable x , como es el caso de las funciones algebraicas consideradas en capítulos anteriores. Tienen gran importancia en matemáticas y se aplican en casi todos los campos de trabajo del hombre; resultan especialmente útiles en química, biología, física e ingeniería, donde contribuyen a describir cómo crecen o decrecen las magnitudes en la naturaleza. Según veremos en este capítulo, hay una estrecha relación entre funciones exponenciales y logarítmicas específicas: son inversas entre sí.

5.1

Funciones inversas

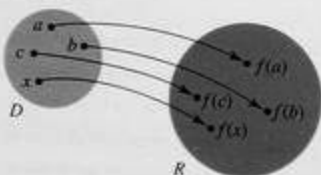
Una función f puede tener el mismo valor para diferentes números en su dominio; por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$, pero $2 \neq -2$. Para definir la *inversa de una función* es esencial que distintos números del dominio *siempre* den diferentes valores de f . A tales funciones se les denomina *biunívocas* (o uno a uno).*

Definición
de función biunívoca

Una función f con dominio D e imagen R es una **función biunívoca** si se satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- (1) Siempre que $a \neq b$ en D , entonces, $f(a) \neq f(b)$ en R .
- (2) Siempre que $f(a) = f(b)$ en R , entonces $a = b$ en D .

Figura 1



El diagrama de flechas de la figura 1 ilustra una función biunívoca. Observarás que cada valor de función de la imagen R corresponde a *exactamente* un elemento del dominio D . La función de la figura 2 de la sección 3.4 no es biunívoca, puesto que $f(w) = f(z)$, pero $w \neq z$.

EJEMPLO 1 Determinación de la biunivocidad de una función

- (a) Si $f(x) = 3x + 2$, demuestra que f es biunívoca.
- (b) Si $g(x) = x^2 - 3$, demuestra que g no es biunívoca.

SOLUCIÓN

(a) Usaremos la condición 2 de la definición anterior. Supongamos que $f(a) = f(b)$ para algunos números a y b del dominio de f . Esto dará

$$3a + 2 = 3b + 2 \quad \text{definición de } f(x)$$

$$3a = 3b \quad \text{al restar 2}$$

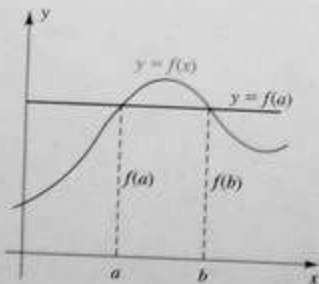
$$a = b \quad \text{al dividir entre 3}$$

Como hemos concluido que a debe ser igual a b , f es biunívoca.

(b) Demostrar que una función *es* biunívoca requiere una prueba *general*, como en el inciso (a). Para probar que g *no* es biunívoca basta encontrar dos números reales distintos en el dominio que produzcan el mismo valor de función; por ejemplo $-1 \neq 1$, pero $g(-1) = g(1)$. De hecho, como g es una función par, $g(-a) = g(a)$ para todo número real a .

Si conocemos la gráfica de una función f , es fácil determinar si f es biunívoca; por ejemplo, la función cuya gráfica se traza en la figura 2 no es biunívoca porque $a \neq b$, pero $f(a) = f(b)$. Advertirás que la recta horizontal $y = f(a)$ (o $y = f(b)$) corta la gráfica en más de un punto. En general, podemos usar la siguiente prueba gráfica para determinar si una función es biunívoca.

Figura 2



* Una función uno a uno también es conocida como función *inyectiva*.

Prueba de la recta horizontal

Una función f es biunívoca si y sólo si toda recta horizontal corta la gráfica de f cuando mucho en un punto.

Aplicamos la prueba de la recta horizontal a las funciones del ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Uso de la prueba de la recta horizontal

Usa la prueba de la recta horizontal para determinar si la función es biunívoca.

(a) $f(x) = 3x + 2$

(b) $g(x) = x^2 - 3$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $f(x) = 3x + 2$ es una recta con intersección en y igual a 2 y pendiente 3, como se muestra en la figura 3. Vemos que cualquier recta horizontal corta la gráfica de f en cuando mucho un punto. Así, f es biunívoca.

Figura 3

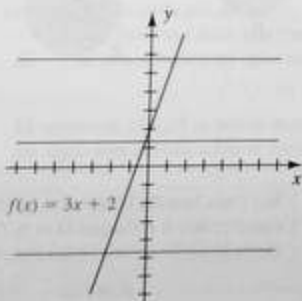
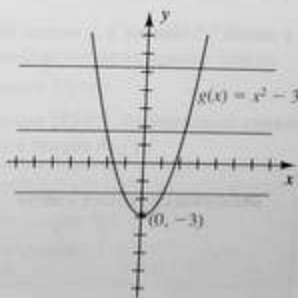


Figura 4



(b) La gráfica de $g(x) = x^2 - 3$ es una parábola que abre hacia arriba con vértice $(0, -3)$, como se observa en la figura 4. En este caso, cualquier recta horizontal con ecuación $y = k$, donde $k > -3$, corta la gráfica de g en dos puntos. Por tanto, g no es biunívoca.

Por el ejemplo 2 podemos suponer que toda función creciente o decreciente pasa la prueba de la recta horizontal. Así, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema: las funciones crecientes o decrecientes son biunívocas

- (1) Una función creciente en su dominio es biunívoca.
- (2) Una función decreciente en su dominio es biunívoca.

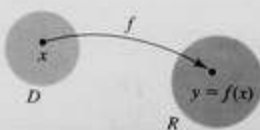
Sea f una función biunívoca con dominio D e imagen R . De tal manera, para cada número y en R , hay *exactamente* un número x en D tal que $y = f(x)$, según presenta la flecha de la figura 5(a). En consecuencia, podemos definir una función g de R a D por medio de la siguiente regla:

$$x = g(y)$$

Puesto que en la figura 5(b), g *invierte la correspondencia dada por f* , llamamos g a la *función inversa de f* , como en esta definición:

Figura 5

(a) $y = f(x)$



(b) $x = g(y)$



Definición de función inversa

Sea f una función biunívoca con dominio D e imagen R . Una función g con dominio R e imagen D es la **función inversa** de f , siempre que sea cierta la siguiente condición para toda x en D y toda y en R :

$$y = f(x) \quad \text{si y sólo si} \quad x = g(y)$$

Recuerda que para definir la inversa de una función f , es indispensable que f sea biunívoca. El siguiente teorema, que se afirma sin comprobarse, resulta útil para verificar que una función g es la inversa de f .

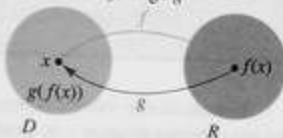
Teorema sobre funciones inversas

Sea f una función biunívoca con dominio D e imagen R . Si g es una función con dominio R e imagen D , entonces g es la función inversa de f si y sólo si son ciertas estas dos condiciones:

- (1) $g(f(x)) = x$ para toda x en D
- (2) $f(g(y)) = y$ para toda y en R

Dichas condiciones se ilustran en la figura 6(a) y (b), respectivamente, donde la flecha azul indica que f es una función de D a R y la flecha gris, que g es una función de R a D .

Figura 6

(a) Primero f , luego g (b) Primero g , luego f 

En la figura 6(a) notarás que aplicamos primero f al número x en D y obtuvimos el valor de función $f(x)$ en R , luego aplicamos g a $f(x)$, y llegamos al número $g(f(x))$ en D . La condición (1) del teorema expresa que $g(f(x)) = x$ para toda x ; esto es, g *invierte* la correspondencia dada por f .

En la figura 6(b) usamos el orden opuesto para las funciones. Primero aplicamos g al número y en R y obtuvimos el valor de función $g(y)$ en D , luego aplicamos f a $g(y)$, y llegamos al número $f(g(y))$ en R . La condición (2) del teorema afirma que $f(g(y)) = y$ para toda y ; esto es, f *invierte* la correspondencia dada por g .

Si una función f tiene una función inversa g , a menudo f^{-1} denota a g . El -1 de esta notación no debe confundirse con un exponente; esto es,

$$f^{-1}(y) \text{ no significa } 1/f(y).$$

El recíproco $1/[f(y)]$ se puede denotar con $[f(y)]^{-1}$. Es importante recordar los siguientes hechos sobre el dominio e imagen de f y f^{-1} .

Dominio e imagen de f y f^{-1} dominio de f^{-1} = imagen de f imagen de f^{-1} = dominio de f

Cuando estudiamos funciones, muchas veces x denota un número arbitrario en el dominio; por tanto, para la función inversa f^{-1} podemos considerar $f^{-1}(x)$, donde x está en el dominio R de f^{-1} . En este caso, las dos condiciones del teorema sobre funciones inversas se escriben de esta manera

- (1) $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f
- (2) $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}

En la figura 6 sugerimos una manera de hallar la inversa de una función biunívoca en ciertos casos: si es posible, *resolvemos la ecuación* $y = f(x)$ *para toda* x *en términos de* y , con lo cual obtenemos una ecuación de la forma $x = g(y)$. Si son ciertas las dos condiciones $g(f(x)) = x$ y $f(g(y)) = y$ para toda x en los dominios de f y g , respectivamente, entonces g es la función inversa requerida f^{-1} . Los siguientes lineamientos resumen este procedimiento; en la guía 2, antes de hallar f^{-1} , escribimos $x = f^{-1}(y)$ en vez de $x = g(y)$.

Guías para hallar f^{-1} en casos sencillos

1. Comprobar que f sea función biunívoca en su dominio.
2. Despejar x de la ecuación $y = f(x)$ en términos de y para obtener una ecuación del tipo $x = f^{-1}(y)$.
3. Confirmar estas dos condiciones:
 - (a) $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f
 - (b) $f(f^{-1}(y)) = y$ para toda y en el dominio de f^{-1}

El éxito de este método depende de la naturaleza de la ecuación $y = f(x)$, ya que debemos despejar x en términos de y . Por esta razón, incluimos la frase *en casos sencillos* en el título de las guías. Seguiremos estas recomendaciones en los próximos tres ejemplos.



EJEMPLO 3 Determinación de la inversa de una función

Sea $f(x) = 3x - 5$. Encuentra la función inversa de f .

SOLUCIÓN

Guía 1 La gráfica de la función lineal f es una recta de pendiente 3; por tanto, f es creciente en \mathbb{R} . En consecuencia, f es biunívoca y la función inversa f^{-1} existe. Además, como el dominio e imagen de f es \mathbb{R} , lo mismo es cierto para f^{-1} .

Guía 2 Despejar x de la ecuación $y = f(x)$:

$$y = 3x - 5 \quad \text{sea } y = f(x)$$

$$x = \frac{y + 5}{3} \quad \text{despejar } x \text{ en términos de } y$$

Ahora hacemos $x = f^{-1}(y)$; esto es,

$$f^{-1}(y) = \frac{y + 5}{3}$$

En vista de que el símbolo de la variable no tiene importancia, también podemos escribir

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{3}$$

donde x está en el dominio de f^{-1} .

Guía 3 Dado que el dominio y la imagen de f y f^{-1} es \mathbb{R} , debemos comprobar las condiciones (a) y (b) para todo número real x . Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(3x - 5) && \text{definición de } f \\ &= \frac{(3x - 5) + 5}{3} && \text{definición de } f^{-1} \\ &= x && \text{simplificación} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{x+5}{3}\right) && \text{definición de } f^{-1} \\ &= 3\left(\frac{x+5}{3}\right) - 5 && \text{definición de } f \\ &= x && \text{simplificación} \end{aligned}$$

Estas comprobaciones demuestran que la función inversa de f está dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}.$$

EJEMPLO 4 Determinación de la inversa de una función

Sea $f(x) = x^2 - 3$ para $x \geq 0$. Encuentra la función inversa de f .

SOLUCIÓN

Guía 1 La gráfica de f aparece en la figura 7. El dominio de f es $[0, \infty)$ y la imagen es $[-3, \infty)$. Puesto que f es creciente, es biunívoca y, por tanto, tiene una función inversa f^{-1} con dominio $[-3, \infty)$ e imagen $[0, \infty)$.

Guía 2 Consideramos la ecuación

$$y = x^2 - 3$$

y al despejar x obtenemos

$$x = \pm\sqrt{y+3}.$$

Ya que x es no negativa, rechazamos $x = -\sqrt{y+3}$ y hacemos

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y+3} \quad \text{o bien, lo que es equivalente} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}.$$

(Observarás que si la función f tuviera dominio $x \leq 0$, escogeríamos la función $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+3}$.)

Guía 3 Confirmamos las condiciones (a) y (b) para x en los dominios de f y f^{-1} , respectivamente.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(x^2 - 3) \\ &= \sqrt{(x^2 - 3) + 3} = \sqrt{x^2} = x \text{ para } x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad f(f^{-1}(x)) &= f(\sqrt{x+3}) \\ &= (\sqrt{x+3})^2 - 3 = (x+3) - 3 = x \text{ para } x \geq -3 \end{aligned}$$

Por tanto, la función inversa está dada por

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{para } x \geq -3.$$

Figura 7

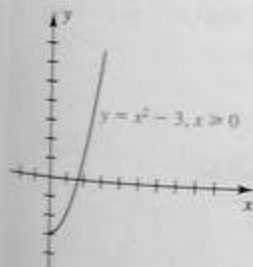
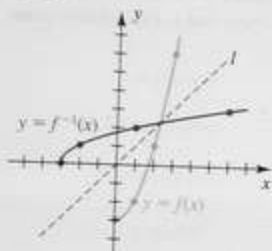


Figura 8



Observa que las gráficas de f y f^{-1} se cortan en la recta $y = x$.

Figura 9

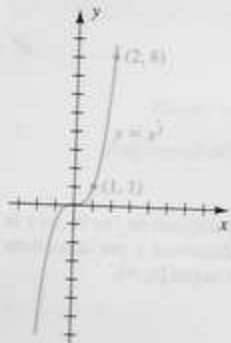
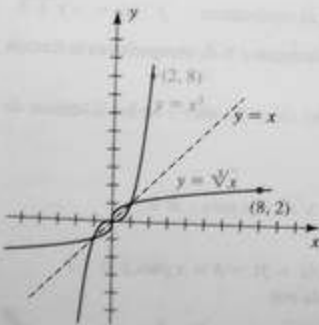


Figura 10



Hay una relación interesante entre la gráfica de una función f y la de su inversa f^{-1} . Primero vemos que $b = f(a)$ equivale a $a = f^{-1}(b)$. Estas ecuaciones implican que el punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) se encuentra en la gráfica de f^{-1} .

A manera de ilustración, en el ejemplo 4 encontramos que las funciones f y f^{-1} dadas por

$$f(x) = x^2 - 3 \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$$

son funciones inversas siempre que x se limite en forma adecuada. Algunos puntos de la gráfica de f son $(0, -3)$, $(1, -2)$, $(2, 1)$ y $(3, 6)$. Los puntos correspondientes de la gráfica de f^{-1} son $(-3, 0)$, $(-2, 1)$, $(1, 2)$ y $(6, 3)$. Las gráficas de f y f^{-1} se trazan en el mismo plano coordenado en la figura 8. Si la página se dobla a lo largo de la recta $y = x$ que corta los cuadrantes primero y tercero (como indica la línea punteada de la figura), las gráficas de f y f^{-1} coinciden. Las dos gráficas son reflexiones una de otra en toda la recta $y = x$, o son simétricas con respecto a esta recta. Esto es característico de la gráfica de toda función f que tenga una función inversa f^{-1} (ve el ejercicio 50).



EJEMPLO 5 Relación entre las gráficas de f y f^{-1}

Sea $f(x) = x^3$. Encuentra la función inversa f^{-1} de f y traza las gráficas de f y f^{-1} en el mismo plano coordenado.

SOLUCIÓN La gráfica de f aparece en la figura 9. Observarás que f es una función impar y, por tanto, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

Guía 1 Puesto que f es creciente en todo su dominio \mathbb{R} , es biunívoca y en consecuencia tiene una función inversa f^{-1} .

Guía 2 Consideramos la ecuación

$$y = x^3$$

y despejamos x tomando la raíz cúbica de cada lado:

$$x = y^{1/3} = \sqrt[3]{y}.$$

Ahora

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \quad \text{o bien, lo cual equivale a} \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Guía 3 Comprobamos las condiciones (a) y (b):

$$(a) \quad f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x \quad \text{para toda } x \text{ en } \mathbb{R}$$

$$(b) \quad f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x \quad \text{para toda } x \text{ en } \mathbb{R}$$

La gráfica de f^{-1} (esto es, la gráfica de la ecuación $y = \sqrt[3]{x}$) se obtiene reflejando la gráfica de la figura 9 en toda la línea recta $y = x$ (figura 10). Tres puntos de la gráfica de f^{-1} son $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(8, 2)$.

En el ejemplo siguiente mostramos cómo graficar la inversa de una función con ayuda de una calculadora graficadora.

EJEMPLO 6 Trazado de la gráfica de la inversa de una función

- (a) Traza la gráfica de la función inversa de

$$f(x) = \frac{1}{35}(x^3 + 9x).$$

- (b) Calcula las soluciones de la ecuación
- $f(x) = f^{-1}(x)$
- .

SOLUCIÓN

- (a) Asignamos
- $(x^3 + 9x)/35$
- a
- Y_1
- , usamos una pantalla de
- $[-12, 12]$
- por
- $[-8, 8]$
- , asignamos
- x
- a
- Y_2
- y graficamos las funciones.

TI-83 PlusHaz las asignaciones Y_1 .

Grafica las funciones.

**TI-86**

Grafica la inversa.

Dado que f crece en su dominio, es biunívoca y tiene una inversa. Si f no fuese biunívoca, la calculadora dibujaría la relación inversa, pero no sería una función.



- (b)
- $f(x) = f^{-1}(x)$
- en la recta
- $y = x$
- . Usando la función "intersect" con
- Y_1
- y
- Y_2
- se obtiene la solución
- $x = 5.1$
- . Por la simetría de las gráficas, tenemos las soluciones
- $x = 0$
- y
- $x = \pm 5.1$
- .



5.1 Ejercicios

Ejercicios 1 y 2: de ser posible, encuentra

(a) $f^{-1}(5)$ (b) $g^{-1}(6)$

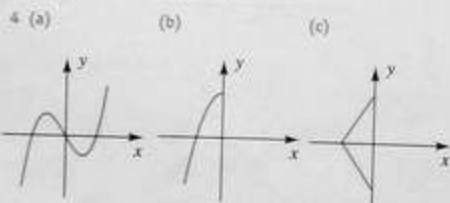
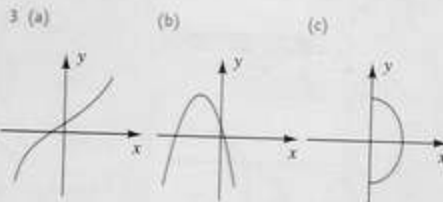
x	2	4	6
$f(x)$	3	5	9

x	1	3	5
$g(x)$	6	2	6

t	0	3	5
$f(t)$	2	5	6

t	1	2	4
$g(t)$	3	6	6

Ejercicios 3 y 4: determina si la gráfica corresponde a una función biunívoca.

Ejercicios 5 al 16: determina si la función f es biunívoca.

- 5 $f(x) = 3x - 7$ 6 $f(x) = \frac{1}{x-2}$
 7 $f(x) = x^2 - 9$ 8 $f(x) = x^2 + 4$
 9 $f(x) = \sqrt{x}$ 10 $f(x) = \sqrt[3]{x}$
 11 $f(x) = |x|$ 12 $f(x) = 3$
 13 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ 14 $f(x) = 2x^3 - 4$
 15 $f(x) = \frac{1}{x}$ 16 $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Ejercicios 17 al 20: utiliza el teorema sobre funciones inversas para probar que f y g son funciones inversas y traza las gráficas de f y g en el mismo plano coordenado.

- 17 $f(x) = 3x - 2$; $g(x) = \frac{x+2}{3}$
 18 $f(x) = x^2 + 5, x \leq 0$; $g(x) = -\sqrt{x-5}, x \geq 5$
 19 $f(x) = -x^2 + 3, x \geq 0$; $g(x) = \sqrt{3-x}, x \leq 3$
 20 $f(x) = x^3 - 4$; $g(x) = \sqrt[3]{x+4}$

Ejercicios 21 al 24: determina el dominio y la imagen de f^{-1} para la función dada sin calcular en realidad f^{-1} . Sugerencia: encuentra primero el dominio y la imagen de f .

- 21 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 22 $f(x) = \frac{5}{x+3}$
 23 $f(x) = \frac{4x+5}{3x-8}$ 24 $f(x) = \frac{2x-7}{9x+1}$

Ejercicios 25 al 42: encuentra la función inversa de f .

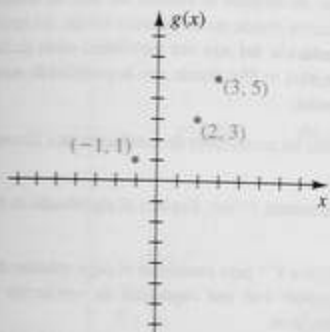
- 25 $f(x) = 3x + 5$ 26 $f(x) = 7 - 2x$
 27 $f(x) = \frac{1}{3x-2}$ 28 $f(x) = \frac{1}{x+3}$
 29 $f(x) = \frac{3x+2}{2x-5}$ 30 $f(x) = \frac{4x}{x-2}$
 31 $f(x) = 2 - 3x^2, x \leq 0$ 32 $f(x) = 5x^2 + 2, x \geq 0$
 33 $f(x) = 2x^3 - 5$ 34 $f(x) = -x^3 + 2$
 35 $f(x) = \sqrt{3-x}$
 36 $f(x) = \sqrt{4-x^2}, 0 \leq x \leq 2$
 37 $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ 38 $f(x) = (x^2 + 1)^3$
 39 $f(x) = x$ 40 $f(x) = -x$

41 $f(x) = x^2 - 6x, x \geq 3$

42 $f(x) = x^2 - 4x + 3, x \leq 2$

Ejercicios 43 y 44: sea $h(x) = 4 - x$. Usa h , la tabla y la gráfica para evaluar la expresión

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	-1	0	1	2	3



43 (a) $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$

(b) $(g^{-1} \circ h)(3)$

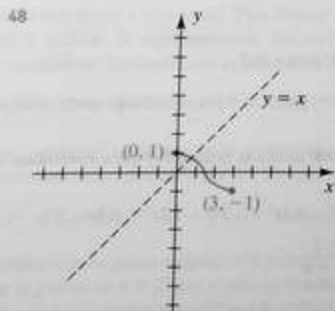
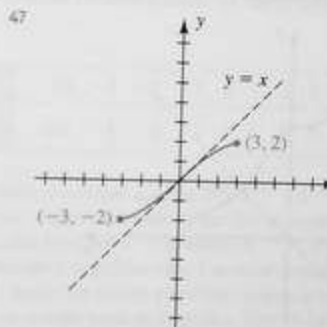
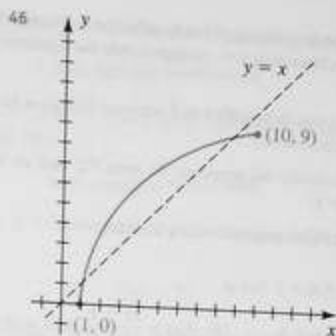
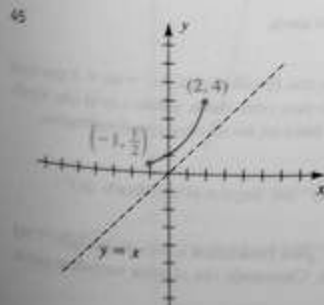
(c) $(h^{-1} \circ f \circ g^{-1})(3)$

44 (a) $(g \circ f^{-1})(-1)$

(b) $(f^{-1} \circ g^{-1})(3)$

(c) $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(6)$

Ejercicios 45 al 48: se muestra la gráfica de una función biunívoca f ; (a) utiliza la propiedad de reflexión para trazar la gráfica de f^{-1} ; (b) encuentra el dominio D y la imagen R de la función f ; y (c) halla el dominio D_1 y la imagen R_1 de la función inversa f^{-1} .



49 (a) Demuestra que la función definida por $f(x) = ax + b$ (una función lineal) para $a \neq 0$ cuenta con una función inversa y halla $f^{-1}(x)$.

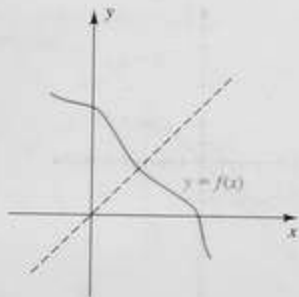
(b) ¿Una función constante tiene una inversa? Explica tu respuesta.

50 Demuestra que la gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de f en toda la línea recta $y = x$ comprobando las siguientes condiciones:

- (1) Si $P(a, b)$ está en la gráfica de f , entonces $Q(b, a)$ se halla en la gráfica de f^{-1} .
- (2) El punto medio del segmento de recta PQ está en la recta $y = x$.
- (3) La recta PQ es perpendicular a la recta $y = x$.

51. Verifica que $f(x) = f^{-1}(x)$ si

- (a) $f(x) = -x + b$ (b) $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ para $c \neq 0$
 (c) $f(x)$ tiene la siguiente gráfica:



52 Sea n cualquier entero positivo. Encuentra la función inversa de f si

- (a) $f(x) = x^n$ para $x \geq 0$
 (b) $f(x) = x^{mn}$ para $x \geq 0$ y m es cualquier entero positivo

Ejercicios 53 y 54: utiliza la gráfica de f para determinar si f es biunívoca.

53 $f(x) = 0.4x^2 - 0.4x^4 + 1.2x^3 - 1.2x^2 + 0.8x - 0.8$

54 $f(x) = \frac{x-8}{x^{2/3}+4}$

Ejercicios 55 y 56: grafica f en el intervalo dado; (a) calcula el máximo intervalo $[a, b]$ con $a < 0 < b$ en que f es biunívoca y (b) si g es la función con dominio $[a, b]$ tal que $g(x) = f(x)$ para $a \leq x \leq b$, calcula el dominio e imagen de g^{-1} .

55 $f(x) = 2.1x^3 - 2.98x^2 - 2.11x + 3$; $[-1, 2]$

56 $f(x) = 0.05x^4 - 0.24x^3 - 0.15x^2 + 1.18x + 0.24$; $[-2, 2]$

Ejercicios 57 y 58: grafica f en la pantalla dada. Con la gráfica de f pronostica la forma de la gráfica de f^{-1} . Comprueba tu pronóstico graficando f^{-1} y la recta $y = x$ en la misma pantalla.

57 $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$; $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

58 $f(x) = 2(x-2)^2 + 3$, $x \geq 2$; $[0, 12]$ por $[0, 8]$

59 Necesidad de ventilación La ventilación es una forma eficiente de mejorar la calidad del aire en interiores. En restaurantes donde no se permite fumar, las necesidades de circulación del aire (en pies/min) están dadas por la función $V(x) = 35x$, donde x es la cantidad de personas en el comedor.

- (a) Halla las necesidades de ventilación para 23 comensales.
 (b) Encuentra $V^{-1}(x)$. Explica el significado de V^{-1} .
 (c) Utiliza V^{-1} para establecer el cupo máximo de un restaurante con una capacidad de ventilación de 2350 pies²/min.

60 Estaciones de radio En la tabla que sigue se enumeran las cantidades totales de estaciones de radio en Estados Unidos en determinados años.

Año	Número
1950	2773
1960	4133
1970	6760
1980	8566
1990	10 819

- (a) Grafica los datos.
 (b) Determina una función lineal $f(x) = ax + b$ que sirva de modelo para estos datos, donde x es el año. Grafica f y los datos en los mismos ejes coordenados.
 (c) Encuentra $f^{-1}(x)$. Explica el significado de f^{-1} .
 (d) Utiliza f^{-1} para pronosticar el año en que hubo 7 744 estaciones. Compáralo con el valor verdadero que es 1975.

5.2

Funciones exponenciales

En capítulos anteriores estudiamos funciones con términos de la forma

base variable^{exponente constante}

por ejemplo, x^2 , $0.2x^{1.3}$ y $8x^{2/3}$. Ahora dirigiremos nuestra atención a funciones con términos del tipo

base constante^{exponente variable}

como 2^x , $(1.04)^{4x}$ y 3^{-x} . Comencemos por considerar la función f definida por

$$f(x) = 2^x,$$

donde x está restringida a números racionales (recuerda que si $x = m/n$ para los enteros m y n con $n > 0$, entonces $2^x = 2^{m/n} = (\sqrt[n]{2})^m$). En la tabla de abajo se enumeran las coordenadas de varios puntos de la gráfica de $y = 2^x$.

x	-10	-3	-2	-1	0	1	2	3	10
$y = 2^x$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	1024

Otros valores de y para el racional x , como $2^{1/3}$, $2^{-9/7}$ y $2^{5.143}$, se pueden obtener con calculadora. Algebraicamente es factible demostrar que si x_1 y x_2 son números racionales tales que $x_1 < x_2$, entonces $2^{x_1} < 2^{x_2}$. De este modo, f es una función creciente y su gráfica sube. Localizar puntos nos lleva al trazado de la figura 1, donde los puntos pequeños indican que sólo los puntos con coordenadas x racionales están en la gráfica. Hay un hueco en la gráfica siempre que la coordenada x de un punto sea irracional.

A fin de ampliar el dominio de f a todos los números reales, es necesario definir 2^x para todo exponente x irracional. Para ilustrar esto, si se desea definir 2^π , podríamos utilizar la representación decimal no terminante $3.1415926\dots$ de π y considerar los siguientes exponentes racionales de 2:

$$2^3, 2^{3.1}, 2^{3.14}, 2^{3.141}, 2^{3.1415}, 2^{3.14159}, \dots$$

Se puede demostrar, mediante el cálculo, que cada potencia sucesiva se aproxima a un número real único denotado por 2^π . De este modo,

$$2^x \rightarrow 2^\pi \quad \text{a medida que } x \rightarrow \pi, \text{ con } x \text{ racional.}$$

Es factible usar la misma técnica para cualquier otra potencia irracional de 2. Con objeto de trazar la gráfica de $y = 2^x$ con x real, se sustituyen los huecos de la gráfica de la figura 1 con puntos y se obtiene la gráfica de la figura 2. La función f definida por $f(x) = 2^x$ para todo número real x se llama **función exponencial con base 2**.

Consideremos ahora cualquier base a , donde a es un número real positivo diferente de 1. Al igual que en el análisis previo, a cada número real x corresponde exactamente un número positivo a^x para el que las leyes de los exponentes se cumplen; en consecuencia, como se ve en la tabla, resulta viable definir una función f cuyo dominio es \mathbb{R} y su imagen es el conjunto de números reales positivos.

Figura 1

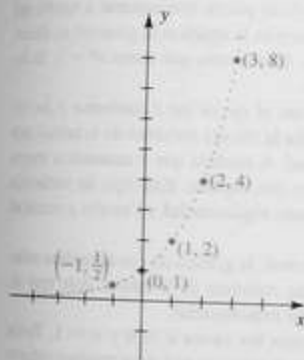
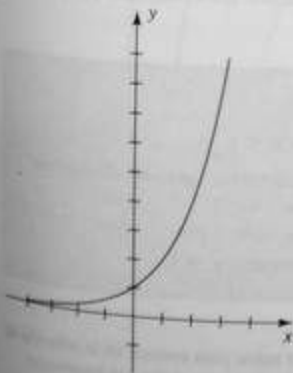




Figura 2



Terminología	Definición	Gráfica de f para $a > 1$	Gráfica de f para $0 < a < 1$
Función exponencial f con base a	$f(x) = a^x$ para toda x en \mathbb{R} , donde $a > 0$ y $a \neq 1$		

Observa que si $a > 1$, entonces $a = 1 + d$ ($d > 0$) y se puede considerar que la base a en $y = a^x$ es la representación de una multiplicación por más de 100% cuando x aumenta en 1, de modo que la función está creciendo. Por ejemplo, si $a = 1.15$, entonces se puede considerar que $y = (1.15)^x$ es una función creciente en 15% al año. Más tarde veremos este concepto con mayor detalle.

Las gráficas de la tabla indican que si $a > 1$, entonces f es creciente en \mathbb{R} , y si $0 < a < 1$, f decrece en \mathbb{R} . (Esto puede demostrarse a través del cálculo.) Las gráficas simplemente muestran la apariencia general; es decir, la forma exacta depende del valor de a . Observarás que como $a^0 = 1$, la intersección con el eje y es 1 para toda a .

Si $a > 1$, la gráfica de f se aproxima al eje de las x conforme x decrece a través de valores negativos (consulta la tercera columna de la tabla); por tanto, el eje x es una *asíntota horizontal*. A medida que x aumenta a través de valores positivos, la gráfica se eleva con rapidez. Este tipo de variación es característica de la **ley de crecimiento exponencial** y f recibe a veces el nombre de **función de crecimiento**.

Si $0 < a < 1$, entonces cuando x crece, la gráfica de f se aproxima asintóticamente al eje x (consulta la última columna de la tabla). Este tipo de variación se conoce como **decaimiento exponencial**.

Cuando consideramos a^x excluimos los casos $a \leq 0$ y $a = 1$. Toma nota de que si $a < 0$, entonces a^x no es un número real para muchos valores de x , como $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{11}{6}$. Si $a = 0$, entonces $a^0 = 0^0$ es indefinido. Por último, cuando $a = 1$, $a^x = 1$ para toda x y la gráfica de $y = a^x$ es una línea horizontal.

La gráfica de una función exponencial f es creciente en todo su dominio o decreciente en el mismo; por tanto, f es biunívoca por el teorema de la pág. 322. Si combinamos este resultado con la definición de una función biunívoca (pág. 320), obtenemos los enunciados (1) y (2) del teorema:

Teorema: las funciones exponenciales son biunívocas

La función exponencial f dada por

$$f(x) = a^x \quad \text{para } 0 < a < 1 \text{ o } a > 1$$

es biunívoca; en consecuencia, se satisfacen las siguientes condiciones equivalentes para los números reales x_1 y x_2 .

- (1) Si $x_1 \neq x_2$, entonces $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.
- (2) Si $a^{x_1} = a^{x_2}$, entonces $x_1 = x_2$.

Cuando se usa este teorema como razón para avanzar en la solución de un ejemplo, afirmamos que **las funciones exponenciales son biunívocas**.

ILUSTRACIÓN Las funciones exponenciales son biunívocas

■ Si $7^{3x} = 7^{2x+5}$, entonces $3x = 2x + 5$, o $x = 5$.

En el ejemplo siguiente se resuelve una ecuación exponencial; es decir, una ecuación donde la variable aparece en un exponente.



EJEMPLO 1 Solución de una ecuación exponencial

Resuelve la ecuación $3^{5x-8} = 9^{x+2}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{ll}
 3^{5x-8} = 9^{x+2} & \text{dada} \\
 3^{5x-8} = (3^2)^{x+2} & \text{expresar ambos lados con la misma base} \\
 3^{5x-8} = 3^{2x+4} & \text{ley de los exponentes} \\
 5x - 8 = 2x + 4 & \text{las funciones exponenciales son biunívocas} \\
 3x = 12 & \text{restar } 2x \text{ y sumar } 8 \\
 x = 4 & \text{dividir entre } 3
 \end{array}$$

Observa que la solución del ejemplo 1 depende del hecho de que la base 9 pudo anotarse como 3 elevado a alguna potencia. Consideraremos sólo ecuaciones exponenciales de este tipo por ahora, pero después resolveremos ecuaciones exponenciales más generales.

En los dos ejemplos siguientes se trazan las gráficas de funciones exponenciales.

EJEMPLO 2 Trazado de gráficas de funciones exponenciales

Si $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ y $g(x) = 3^x$, traza las gráficas de f y g en el mismo plano coordenado.

SOLUCIÓN Como $\frac{2}{3} > 1$ y $3 > 1$, cada gráfica *sube* a medida que x crece. La siguiente tabla muestra coordenadas para varios puntos de las gráficas.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$	$\frac{4}{9} \approx 0.4$	$\frac{2}{3} \approx 0.7$	1	$\frac{3}{2} \approx 1.5$	$\frac{9}{4} \approx 2.3$	$\frac{27}{8} \approx 3.4$	$\frac{81}{16} \approx 5.1$
$y = 3^x$	$\frac{1}{9} \approx 0.1$	$\frac{1}{3} \approx 0.3$	1	3	9	27	81

La localización de puntos y la familiaridad con la gráfica de $y = a^x$ nos conduce a las gráficas que aparecen en la figura 3.

El ejemplo 2 hace ver que si $1 < a < b$, entonces $a^x < b^x$ para valores positivos de x y $b^x < a^x$ para valores negativos de x . En particular, como $\frac{2}{3} < 2 < 3$, la gráfica de $y = 2^x$ de la figura 2 se encuentra entre las gráficas de f y g de la figura 3.

Figura 3

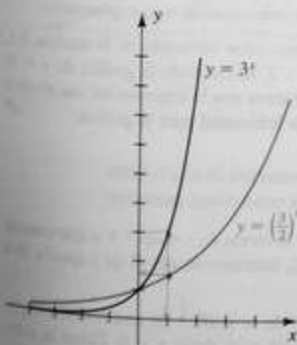
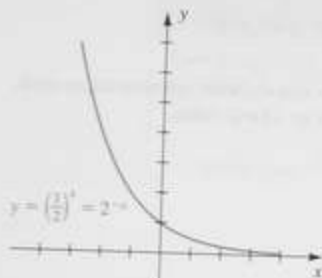


Figura 4



EJEMPLO 3 Trazado de la gráfica de una función exponencial

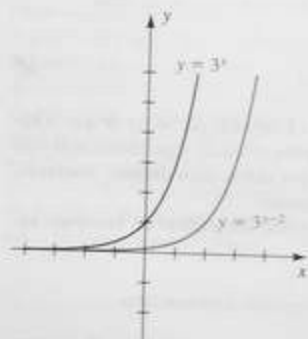
Traza la gráfica de la ecuación $y = (\frac{1}{2})^x$.

SOLUCIÓN Puesto que $0 < \frac{1}{2} < 1$, la gráfica *cae* a medida que x crece. En la tabla de abajo se enumeran las coordenadas de algunos puntos de la gráfica.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = (\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

La gráfica está trazada en la figura 4. Puesto que $(\frac{1}{2})^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$, la gráfica es igual a la gráfica de la ecuación $y = 2^{-x}$. Notarás que es una reflexión respecto del eje y de la gráfica de $y = 2^x$ de la figura 2.

Figura 5



EJEMPLO 4 Desplazamiento de gráficas de funciones exponenciales

Traza la gráfica de la ecuación:

(a) $y = 3^{x-2}$ (b) $y = 3^x - 2$

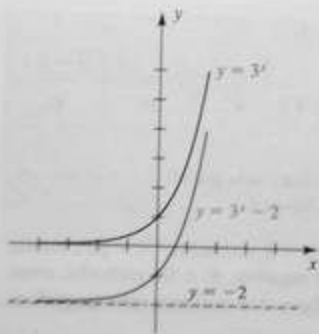
SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $y = 3^x$ se trazó en la figura 3 y se volvió a trazar en la 5. De nuestro análisis sobre desplazamientos horizontales de la sección 3.5, podemos obtener la gráfica de $y = 3^{x-2}$ corriendo la gráfica de $y = 3^x$ dos unidades a la derecha (figura 5).

La gráfica de $y = 3^{x-2}$ también se puede obtener si se localizan varios puntos y se usan como guía para trazar una curva de tipo exponencial.

(b) De nuestro análisis sobre desplazamientos verticales de la sección 3.5, podemos obtener la gráfica de $y = 3^x - 2$, recorriendo la gráfica de $y = 3^x$ dos unidades hacia abajo (figura 6). Observa que la intersección con el eje y es -1 y la línea $y = -2$ es una asíntota horizontal para la gráfica.

Figura 6



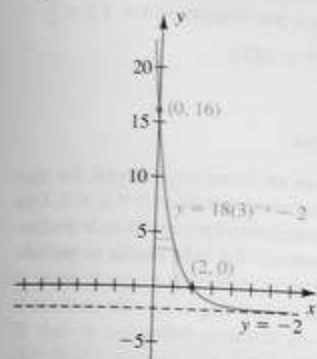
EJEMPLO 5 Determinación de una ecuación de una función exponencial que cumple condiciones prescritas

Encuentra una función exponencial de la forma $f(x) = ba^{-x} + c$ que cumpla lo siguiente: asíntota horizontal $y = -2$, intersección con el eje y igual a 16 e intersección en x igual a 2.

SOLUCIÓN La asíntota horizontal de la gráfica de una función exponencial de la forma $f(x) = ba^{-x}$ es el eje x ; es decir, $y = 0$. Como la asíntota horizontal buscada es $y = -2$, debemos tener $c = -2$, de modo que $f(x) = ba^{-x} - 2$.

Debido a que la intersección con el eje y es 16, $f(0)$ debe ser igual a 16. Pero $f(0) = ba^{-0} - 2 = b - 2$, por lo que $b - 2 = 16$ y $b = 18$. Así, $f(x) = 18a^{-x} - 2$.

Figura 7



Por último, encontramos el valor de a :

$$f(x) = 18a^{-x} - 2 \quad \text{forma dada de } f$$

$$0 = 18(a)^{-2} - 2 \quad f(2) = 0, \text{ ya que } 2 \text{ es la intersección en } x$$

$$2 = 18 \cdot \frac{1}{a^2} \quad \text{sumar 2; definición de exponente negativo}$$

$$a^2 = 9 \quad \text{multiplicar por } a^2/2$$

$$a = \pm 3 \quad \text{tomar raíz cuadrada}$$

Como a debe ser positivo, tenemos

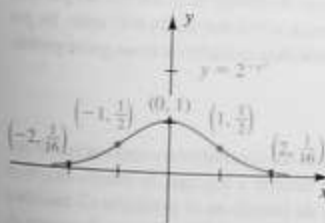
$$f(x) = 18(3)^{-x} - 2.$$

En la figura 7 se muestra una gráfica de f que cumple todas las condiciones del problema. Notarás que $f(x)$ puede escribirse en forma equivalente como

$$f(x) = 18\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2.$$

La gráfica en forma de campana de la función del ejemplo siguiente es similar a una *curva normal de probabilidad* empleada en estudios estadísticos.

Figura 8



EJEMPLO 6 Trazado de una gráfica en forma de campana

Si $f(x) = 2^{-x^2}$, traza la gráfica de f .

SOLUCIÓN Si reescribimos $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{1}{2^{x^2}},$$

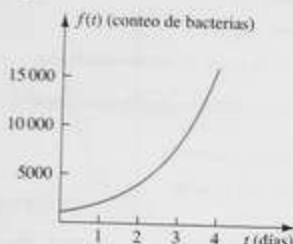
se ve que a medida que x crece en valores positivos, $f(x)$ decrece con rapidez; de aquí que la gráfica se aproxime en sentido asintótico al eje x . Como x^2 es mínimo cuando $x = 0$, el valor máximo de f es $f(0) = 1$. Dado que f es una función par, la gráfica es simétrica con respecto al eje y . Algunos puntos de la gráfica son $(0, 1)$, $(1, \frac{1}{2})$ y $(2, \frac{1}{16})$. La gráfica de la figura 8 se obtiene localizando puntos y aplicando simetría.

APLICACIÓN Crecimiento de bacterias

Las funciones exponenciales resultan útiles para describir el crecimiento de ciertas poblaciones. Como ilustración, supongamos que a nivel experimental se observa que el número de bacterias de un cultivo se duplica cada día. Si hay 1000 ejemplares al comienzo, se obtiene la tabla siguiente, donde t es el tiempo en días y $f(t)$ es el conteo de bacterias en el tiempo t .

t (tiempo en días)	0	1	2	3	4
$f(t)$ (conteo de bacterias)	1000	2000	4000	8000	16000

Figura 9



Está claro que $f(t) = (1000)2^t$. Con esta fórmula se puede predecir la cantidad de bacterias presentes en cualquier tiempo t ; por ejemplo, en $t = 1.5 = \frac{3}{2}$,

$$f(t) = (1000)2^{3/2} \approx 2828.$$

La gráfica de f aparece en la figura 9.

APLICACIÓN Desintegración radiactiva

Determinadas cantidades físicas *decrecen* en forma exponencial. En tales casos, si a es la base de la función exponencial, entonces $0 < a < 1$. Uno de los ejemplos más comunes de decrecimiento exponencial es la desintegración de una sustancia radiactiva o isótopo. La **vida media** (o **período radiactivo**) de un isótopo es el tiempo que se requiere para que la mitad de la cantidad original de una muestra dada se desintegre. La vida media es la principal característica que distingue una sustancia radiactiva de otra. El isótopo del polonio ^{210}Po tiene una vida media de alrededor de 140 días; es decir, dada cualquier cantidad de esa sustancia, la mitad se desintegrará en 140 días. Si había 20 miligramos de ^{210}Po al inicio, la tabla siguiente indica la cantidad restante después de varios intervalos.

t (tiempo en días)	0	140	280	420	560
$f(t)$ (mg restantes)	20	10	5	2.5	1.25

La curva de la figura 10 ilustra la naturaleza exponencial de la desintegración.

Otras sustancias radiactivas poseen una vida media mucho más larga. En particular, un subproducto de los reactores nucleares es el isótopo del plutonio radiactivo ^{239}Pu , cuya vida media alcanza alrededor de 24 000 años. Es por esta razón que el almacenamiento de desechos radiactivos es un grave problema en la sociedad moderna.

APLICACIÓN Interés compuesto

El **interés compuesto** es un buen ejemplo del crecimiento exponencial. Si una suma de dinero C , o **capital inicial**, se invierte a una tasa de interés *simple*, o i , el interés al término de un periodo de interés es el producto Ci cuando i se expresa como decimal; por ejemplo, si $C = \$1000$ y la tasa de interés es de 9% al año, $i = 0.09$ y el interés al finalizar un año es de $\$1000(0.09)$, o sea, \$90.

Si el interés se reinvierte con el capital al término del periodo, la suma acumulada (A) es

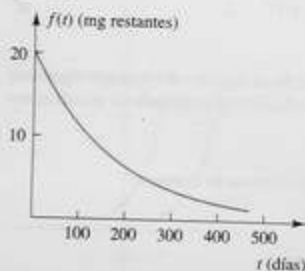
$$C + Ci = C(1 + i), \text{ equivalente, } C(1 + i).$$

Advierte que para hallar la suma acumulada (o nuevo capital) multiplicamos el capital inicial por $(1 + i)$. En el ejemplo anterior, A es $\$1000(1.09)$ o sea \$1090.

Al transcurrir otro periodo de interés, la cantidad acumulada se encuentra multiplicando $C(1 + i)$ por $(1 + i)$. Así, la cantidad acumulada después de dos periodos de interés será $C(1 + i)^2$. Si se continúa la reinversión, pasados tres periodos ésta será $C(1 + i)^3$; luego, al cabo de cuatro, $C(1 + i)^4$ y, en general, después de k periodos de interés la suma acumulada es

$$A = C(1 + i)^k.$$

Figura 10



El interés acumulado por medio de esta fórmula se llama **interés compuesto**. Observa que A se expresa en términos de una función exponencial con base $1 + i$. El periodo de interés se puede medir en años, meses, semanas, días o cualquier otra unidad de tiempo apropiada. Cuando aplica la fórmula para encontrar A , conviene recordar que i es la tasa de interés por periodo de interés expresada como decimal; por ejemplo, si la tasa se indica a 6% por año compuesto mensualmente, la tasa por mes es $\frac{6}{12}\%$ que equivale a 0.5%. En consecuencia, $i = 0.005$ y k son los meses. Si se invierten \$100 a esta tasa, la fórmula para A es

$$A = 100(1 + 0.005)^k = 100(1.005)^k.$$

En general, tenemos esta fórmula:

Fórmula de interés compuesto

$$A = C \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{nt},$$

donde C = capital inicial

i = tasa de interés anual expresada como decimal

n = periodos de interés por año

t = años que se invierte C

A = cantidad acumulada después de t años.

En el ejemplo siguiente se expone un caso especial de la fórmula de interés compuesto.

EJEMPLO 7 Uso de la fórmula de interés compuesto

Supón que se invierten \$1000 a una tasa de interés de 9% compuesto mensualmente. Encuentra la cantidad acumulada después de 5, 10 y 15 años. Ilustra gráficamente el crecimiento de la inversión.

SOLUCIÓN Al aplicar la fórmula de interés compuesto con $i = 9\% = 0.09$, $n = 12$ y $C = \$1000$, vemos que dicha cantidad luego de t años es

$$A = 1000 \left(1 + \frac{0.09}{12} \right)^{12t} = 1000(1.0075)^{12t}.$$

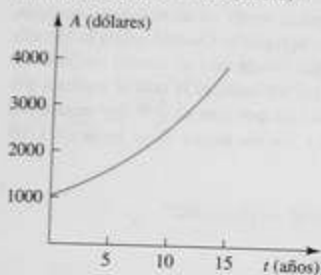
Al sustituir $t = 5, 10$ y 15 y usar calculadora, obtenemos esta tabla:

Número de años	Cantidad acumulada
5	$A = \$1000(1.0075)^{60} = \1565.68
10	$A = \$1000(1.0075)^{120} = \2451.36
15	$A = \$1000(1.0075)^{180} = \3838.04

(continúa)

Observa que cuando se trabaja con valores monetarios, usamos = en lugar de \approx y redondeamos a dos cifras decimales.

Figura 11

Interés compuesto: $A = 1000(1.0075)^{12t}$


La naturaleza exponencial del aumento está indicada porque durante los primeros 5 años, el crecimiento de la inversión fue \$565.68; en el segundo quinquenio, \$885.68 y en el último, \$1386.68.

En la curva de la figura 11 se ilustra el crecimiento de \$1000 invertidos en un lapso de 15 años.

EJEMPLO 8 Búsqueda de un modelo exponencial

En 1938 fue promulgada una ley federal que estableció el salario mínimo en la suma de \$0.25 por hora; para 1997 dicho salario había aumentado a \$5.15 por hora. Busca una función exponencial simple de la forma $y = ab^t$ que sirva de modelo para representar el salario mínimo federal de 1938 a 1997.

SOLUCIÓN

$$y = ab^t$$

índice

$$0.25 = ab^0$$

sea $t = 0$ para 1938

$$0.25 = a$$

 $b^0 = 1$

$$y = 0.25b^t$$

reemplazar a por 0.25

$$5.15 = 0.25b^{59}$$

 $t = 1997 - 1938 = 59$

$$b^{59} = \frac{5.15}{0.25} = 20.6$$

dividir entre 0.25

$$b = \sqrt[59]{20.6}$$

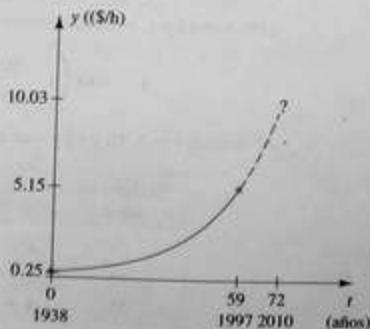
tomar la raíz 59

$$b \approx 1.0526$$

aproximar

Hemos obtenido el modelo $y = 0.25(1.0526)^t$, el cual indica que el salario mínimo federal aumentó cerca de 5.26% al año de 1938 a 1997. En la figura 12 aparece una gráfica del modelo. ¿Crees que este modelo vaya a seguir siendo válido hasta el año 2010?

Figura 12



Concluimos esta sección con un ejemplo en el que se emplea la calculadora graficadora.



EJEMPLO 9 Cantidades estimadas de medicamento en el torrente sanguíneo

Si un adulto ingiere una pastilla de 100 miligramos de determinado medicamento, la rapidez R con que el fármaco entra en el torrente sanguíneo t minutos después, se pronostica con

$$R = 5(0.95)^t \text{ mg/min.}$$

El cálculo permite demostrar que es posible aproximar la cantidad A del medicamento en la sangre en el tiempo t mediante

$$A = 97.4786[1 - (0.95)^t] \text{ mg.}$$

Figura 13

$[0, 100, 10]$ por $[0, 100, 10]$

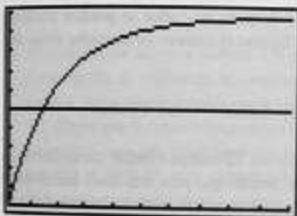
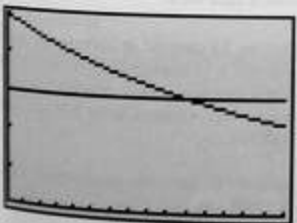


Figura 14

$[0, 15]$ por $[0, 5]$



(a) Estima cuánto tardarán 50 mg del medicamento en entrar en la circulación.

(b) Estima los miligramos del fármaco en la corriente sanguínea cuando está entrando a razón de 3 mg/min.

SOLUCIÓN

(a) Deseamos determinar t cuando A es igual a 50. Puesto que el valor de A no puede rebasar 97.4786, elegimos la pantalla $[0, 100, 10]$ por $[0, 100, 10]$.

A continuación asignamos $97.4786[1 - (0.95)^t]$ a Y_1 , 50 a Y_2 y trazamos Y_1 y Y_2 . Así obtenemos una curva semejante a la de la figura 13 (advertirás que $x = t$). Con la función "intersect", calculamos que $A = 50$ mg cuando $x \approx 14$ min.

(b) Queremos hallar t cuando R es igual a 3. Asignamos primero $5(0.95)^t$ a Y_1 , y 3 a Y_2 . Dado que el valor máximo de Y_1 es 5 (en $t = 0$), usamos una pantalla de $[0, 15]$ por $[0, 5]$ y obtenemos una imagen parecida a la figura 14. Usamos la función "intersect" de nuevo y encontramos que $y = 3$ cuando $x \approx 9.96$; así, después de casi 10 minutos, el medicamento estará entrando en el torrente sanguíneo a razón de 3 mg/min. (Observarás que la rapidez inicial en $t = 0$, es 5 mg/min.) Al hallar el valor de Y_1 en $x = 10$, vemos que hay casi 39 mg del producto en la sangre después de 10 minutos.

5.2 Ejercicios

Ejercicios 1 al 10: resuelve la ecuación.

1. $7^{x+2} = 7^{3x-4}$

2. $6^{7-x} = 6^{2x+1}$

3. $3^{2x+1} = 3^{x^2}$

4. $9^{6x} = 3^{3x+2}$

5. $2^{x-100} = (0.5)^{x-4}$

6. $(\frac{1}{3})^{8-x} = 2$

7. $4^{x-3} = 8^{1-x}$

8. $27^{x-1} = 9^{2x-3}$

9. $4^x \cdot (\frac{1}{2})^{x-2x} = 8 \cdot (2^3)^1$

10. $9^{2x} \cdot (\frac{1}{3})^{x^2} = 27 \cdot (3^3)^{-2}$

11. Traza la gráfica de f si $a = 2$.

(a) $f(x) = a^x$ (b) $f(x) = -a^x$

(c) $f(x) = 3a^x$ (d) $f(x) = a^{x+1}$

(e) $f(x) = a^x + 3$ (f) $f(x) = a^{x-3}$

(g) $f(x) = a^x - 3$ (h) $f(x) = a^{-x}$

(i) $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ (j) $f(x) = a^{3-x}$

12. Trabaja el ejercicio 11 si $a = \frac{1}{2}$.

Ejercicios 13 al 24: traza la gráfica de f .

13. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$ 14. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

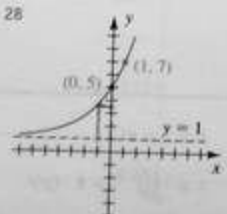
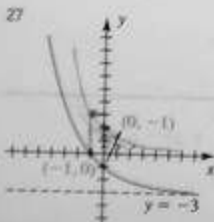
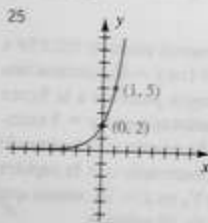
15. $f(x) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$ 16. $f(x) = 8(4)^{-x} - 2$

17. $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$ 18. $f(x) = -3^x + 9$

19. $f(x) = 2^{x+1}$ 20. $f(x) = 2^{-x+1}$

21. $f(x) = 3^{x-2}$ 22. $f(x) = 2^{-(x+1)}$

23. $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ 24. $f(x) = 3^x - 3^{-x}$

Ejercicios 25 al 28: encuentra una función exponencial de la forma $f(x) = ba^x$ o $f(x) = ba^x + c$ que corresponda a la gráfica dada.

Ejercicios 29 y 30: encuentra una función exponencial de la forma $f(x) = ba^x$ que tenga la intersección en y dada y pase por el punto P .

29. Intersección en $y = 8$; $P(3, 1)$

30. Intersección en $y = 6$; $P(2, \frac{1}{12})$

Ejercicios 31 y 32: encuentra una función exponencial de la forma $f(x) = ba^{-x} + c$ que tenga la asíntota horizontal $y = c$ y la intersección en y dada y pase por el punto P .

31. $y = 32$; intersección en $y = 212$; $P(2, 112)$

32. $y = 72$; intersección en $y = 425$; $P(1, 248.5)$

33. Población de alces. Se introducen cien alces, cada uno de un año de edad, en una reserva zoológica. El número $N(t)$ de animales vivos después de t años se predice mediante $N(t) = 100(0.9)^t$. Estima el número de animales vivos después de

(a) 1 año (b) 5 años (c) 10 años

34. Dosis de medicamento. El cuerpo elimina cierto fármaco a través de la orina. Supón que para una dosis inicial de 10 mg, la cantidad $A(t)$ en el cuerpo, t horas después de administrada, está dada por $A(t) = 10(0.8)^t$.

(a) Estima la cantidad de medicamento en el cuerpo 8 horas después de la dosis inicial.

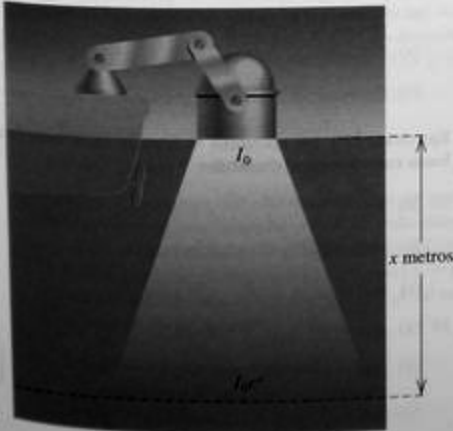
(b) ¿Qué porcentaje del producto que permanece en el cuerpo se elimina cada hora?

35. Crecimiento bacteriano. La cantidad de bacterias en cierto cultivo aumenta de 600 a 1800 entre las 7:00 A.M. y las 9:00 A.M. Suponiendo un crecimiento exponencial, la cantidad $f(t)$ de bacterias t horas después de las 7:00 A.M. está dada por $f(t) = 600(3)^{t/2}$.

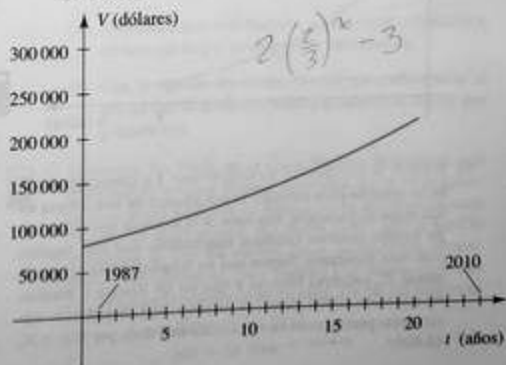
(a) Calcula la cantidad de bacterias en el cultivo a las 8:00, 10:00 y 11:00 A.M.

(b) Traza la gráfica de f para $0 \leq t \leq 4$.

36. Ley de Newton del enfriamiento. Según esta ley, la rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia en temperatura entre el objeto y el medio circundante. La cara de una plancha doméstica se enfría de 125° a 100° en 30 minutos en un cuarto que permanece a una temperatura constante de 75° . Por cálculo integral, la temperatura $f(t)$ de la cara de la plancha, después de t horas de enfriamiento, está dada por $f(t) = 50(2)^{-2t} + 75$.

- (a) Supón que $t = 0$ corresponde a la 1:00 P.M. y calcula, al décimo de un grado más cercano, la temperatura a las 2:00, 3:30 y 4:00 P.M.
- (b) Traza la gráfica de f para $0 \leq t \leq 4$.
- 37 Desintegración radiactiva. El isótopo radiactivo del bismuto ^{210}Bi tiene una vida media de 5 días. Si hay 100 mg de ^{210}Bi presente en $t = 0$, la cantidad $f(t)$ restante al cabo de t días está dada por $f(t) = 100(2)^{-t/5}$.
- (a) ¿Cuánto ^{210}Bi quedará después de 5, 10 y 12.5 días?
- (b) Traza la gráfica de f para $0 \leq t \leq 30$.
- 38 Penetración de luz en el océano. Un problema importante en oceanografía es establecer la cantidad de luz que puede penetrar a varias profundidades oceánicas. La ley de Beer-Lambert afirma que la función exponencial dada por $I(x) = I_0 e^{-kx}$ es un modelo para este fenómeno (ve la figura). Para cierto lugar, $I(x) = 10(0.4)^x$ es la cantidad de luz (en $\text{cal/cm}^2/\text{s}$) que llega a una profundidad de x metros.
- (a) Encuentra la cantidad de luz a una profundidad de 2 metros.
- (b) Traza la gráfica de I para $0 \leq x \leq 5$.
- Ejercicio 38
- 
- 39 Desintegración del radio. La vida media del radio es de 1600 años. Si la cantidad inicial es q_0 miligramos, entonces la cantidad $q(t)$ restante, después de t años está dada por $q(t) = q_0 2^{-t/1600}$. Encuentra k .
- 40 Disolución de sal en agua. Si se agregan 10 gramos de sal a una cantidad de agua, la cantidad $q(t)$ insoluble luego de t minutos está dada por $q(t) = 10(\frac{2}{3})^t$. Traza una gráfica que muestre el valor de $q(t)$ en cualquier tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 10$.
- 41 Interés compuesto. Si se invierten \$1000 a razón de 12% anual compuesto mensualmente, encuentra la cantidad acumulada después de:
- (a) 1 mes (b) 6 meses
- (c) 1 año (d) 20 años
- 42 Interés compuesto. Si un fondo de ahorros paga interés a razón de 10% anual compuesto semestralmente, ¿cuánto habrá que invertir para tener \$5000 al cabo de 1 año?
- 43 Valor de reventa de un auto usado. Si se compra determinada marca de automóvil en C dólares, su valor de reventa, $V(t)$, luego de t años, está dado por $V(t) = 0.78C(0.85)^t$. Si el costo original es de \$10 000, calcula, al dólar más cercano, el valor después de
- (a) 1 año (b) 4 años (c) 7 años
- 44 Avalúo de bienes raíces. Si el valor inmobiliario crece a razón de 5% anual, después de t años el valor V de una casa comprada en P dólares es $V = P(1.05)^t$. En la figura se muestra una gráfica para determinar el valor de una propiedad adquirida en \$80 000 en 1986. Calcula su valor, a los \$1000 más cercanos, en el año 2010.

Ejercicio 44



45 Isla de Manhattan. La isla de Manhattan fue vendida en \$24 en 1626. ¿A cuánto ascendería esta cantidad en 2006 si se hubiera invertido al 6% anual compuesto trimestralmente?

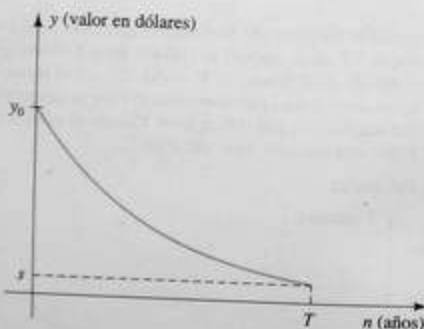
46 Interés de las tarjetas de crédito. Una tienda departamental cobra a sus tarjetahabientes el 18% anual compuesto mensualmente sobre saldos insolutos. Si un cliente compra a crédito un televisor de \$500 y no paga durante un año, ¿cuánto debe al término del año?

47 Depreciación. En contabilidad, el método de disminución de saldo es aquel en que la cantidad de depreciación tomada cada año es un porcentaje fijo del valor presente de un artículo. Si y es el valor del artículo en un año dado, la depreciación tomada es ay para alguna tasa de depreciación a con $0 < a < 1$, y el nuevo valor es $(1 - a)y$.

(a) Si el valor inicial del artículo es y_0 , demuestra que el valor después de n años de depreciación es $(1 - a)^n y_0$.

(b) Al término de T años, el artículo tiene un valor de desecho de s dólares. El contribuyente desea escoger una tasa de depreciación tal, que el valor del artículo después de T años sea igual al valor de desecho (ve la figura). Demuestra que $a = 1 - \sqrt[T]{s/y_0}$.

Ejercicio 47



48 Estimar la antigüedad de una lengua. La glotocronología es un método para calcular la antigüedad de una lengua en una etapa en particular, con base en la teoría de que en un largo tiempo ocurren cambios lingüísticos con una rapidez más bien constante. Supón que un lenguaje tenía originalmente N_0 palabras básicas y que en un tiempo t , medido en milenios (1000 años), el número $N(t)$ de palabras básicas que permanecen en uso común está dado por $N(t) = N_0(0.805)^t$.

(a) Calcula el porcentaje de palabras básicas perdidas cada 100 años.

(b) Si $N_0 = 200$, traza la gráfica de N para $0 \leq t \leq 5$.

Ejercicios 49 al 52: algunas instituciones de préstamo calculan el pago mensual M , sobre un préstamo de L dólares, a una tasa de interés i (expresada como un decimal) mediante la fórmula

$$M = \frac{Lrk}{12(k-1)},$$

donde $k = [1 + (i/12)]^{12}$ y t es el número de años que el préstamo está vigente.

49 Hipoteca sobre viviendas

(a) Encuentra el pago mensual de una hipoteca sobre vivienda de \$90 000 a 30 años, si la tasa de interés es 12%.

(b) Indica el total de intereses pagados sobre el préstamo del inciso (a).

50 Hipoteca sobre viviendas. Halla la hipoteca sobre vivienda más alta, a un plazo de 25 años que se pueda obtener a una tasa de 10%, si el pago mensual es de \$800.

51 Préstamo para compra de autos. Un distribuidor ofrece a sus clientes un préstamo sin enganche y pago a 3 años a una tasa del 15%. Encuentra el precio del carro más caro que pueda comprar un cliente, si su capacidad de pago es de \$220 al mes.

52 Préstamo a empresas. El propietario de un pequeño negocio decide solicitar un financiamiento para adquirir una computadora; así pues, pide un préstamo de \$3,000 a dos años y una tasa de interés de 12.5%.

(a) Determina el pago mensual

(b) Encuentra el interés total pagado sobre el préstamo.



Ejercicios 53 y 54: aproxima la función en el valor de x hasta cuatro lugares decimales.

53 (a) $f(x) = 13^{\sqrt{x+1}}$, $x = 3$

(b) $g(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{-x}$, $x = 1.43$

(c) $h(x) = (2^x + 2^{-x})^{25}$, $x = 1.06$

54 (a) $f(x) = 2^{3/(1-x)}$, $x = 2.5$

(b) $g(x) = \left(\frac{2}{3} + x\right)^{-35}$, $x = 2.1$

(c) $h(x) = \frac{3^{-x} + 5}{3^x - 16}$, $x = \sqrt{2}$

Ejercicios 55 y 56: traza la gráfica de la ecuación. (a) Estima y si $x = 40$. (b) Estima x si $y = 2$.

$$55 \quad y = (1.085)^x$$

$$56 \quad y = (1.0525)^x$$

Ejercicios 57 y 58: usa una gráfica para estimar las raíces de la ecuación.

$$57 \quad 1.4x^2 - 2.2^x = 1$$

$$58 \quad 1.21^{3x} + 1.4^{-1.1x} - 2x = 0.5$$

Ejercicios 59 y 60: grafica f en el intervalo dado. (a) Determina si f es biunívoca. (b) Estima los ceros de f .

$$59 \quad f(x) = \frac{3 \cdot 1^x - 2 \cdot 5^{-x}}{2 \cdot 7^x + 4 \cdot 5^{-x}}; \quad [-3, 3]$$

$$60 \quad f(x) = \pi^{6.4x} - 1.3^{(x+1)^2}; \quad [-4, 4]$$

(Sugerencia: cambia $x^{1.8}$ por una fórmula equivalente definida para $x < 0$.)

Ejercicios 61 y 62: grafica f en el intervalo dado. (a) Calcula en dónde crece o decrece f . (b) Calcula la imagen de f .

$$61 \quad f(x) = 0.7x^3 + 1.7^{(-1.8x)}; \quad [-4, 1]$$

$$62 \quad f(x) = \frac{3 \cdot 1^{-x} - 4 \cdot 1^x}{4 \cdot 4^{-x} + 5 \cdot 3^x}; \quad [-3, 3]$$

63 Población de truchas: En un gran estanque se introducen 1000 especímenes de un año de edad. El número $N(t)$ de truchas todavía vivas después de t años se calcula mediante $N(t) = 1000(0.9)^t$. Utiliza la gráfica de N para determinar cuándo estarán todavía vivos 500 ejemplares.

64 Poder de compra: Un economista predice que el poder de compra $B(t)$ de un dólar, t años a partir de ahora, está dado por $B(t) = (0.95)^t$. Con la gráfica de B haz una aproximación de cuándo el poder de compra será la mitad de lo que es ahora.

65 Función Gompertz: La función Gompertz,

$$y = ka^{bx^c} \text{ cuando } k > 0, 0 < a < 1 \text{ y } 0 < b < 1,$$

se emplea a veces para describir las ventas de un nuevo producto, cuya comercialización inicial es voluminosa, pero luego se estaciona en un nivel de saturación máxima. Grafica, en el mismo plano coordenado, la línea $y = k$ y la función Gompertz con $k = 4$, $a = \frac{1}{5}$, $y = \frac{1}{5}$. ¿Cuál es la importancia de la constante k ?

66 Función logística: La función logística,

$$y = \frac{1}{k + ab^x} \text{ con } k > 0, a > 0 \text{ y } 0 < b < 1,$$

se utiliza en ocasiones para describir las ventas de un nuevo producto que experimenta ventas lentas al inicio, seguidas por un crecimiento hacia un nivel de saturación máxima. Grafica, en el mismo plano coordenado, la línea $y = 1/k$ y la función logística con $k = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{4}$ y $b = \frac{1}{5}$. ¿Cuál es el significado del valor de $1/k$?

Ejercicios 67 y 68: si se depositan pagos mensuales p en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés anual i , la cantidad A de la cuenta, después de n años, está dada por

$$A = \frac{p \left(1 + \frac{i}{12} \right) \left[\left(1 + \frac{i}{12} \right)^{12n} - 1 \right]}{\frac{i}{12}}$$

Grafica A para cada valor de p e i y calcula n para $A = \$100\,000$.

$$67 \quad p = 100, \quad i = 0.05$$

$$68 \quad p = 250, \quad i = 0.09$$

69 Recaudación del gobierno: En la tabla que sigue se muestra la recaudación del gobierno federal (en miles de millones de dólares) para los años seleccionados.

Año	1910	1930	1950	1970
Recaudación	0.7	4.6	39.4	192.8

Año	1980	1990	1995
Recaudación	517.1	1031.3	1346.4

(a) Sea $x = 0$ correspondiente a 1910. Grafica los datos junto con las funciones f y g :

$$(1) \quad f(x) = 0.809(1.094)^x$$

$$(2) \quad g(x) = 0.375x^2 - 18.4x + 88.1$$

(b) Determina con cuál función, exponencial o cuadrática, obtiene un mejor modelo de la información.

(c) Con la opción del inciso (b) estima gráficamente el año en que el gobierno federal recolectó \$1 billón por primera vez.

70 Epidemias: En 1840, en la Gran Bretaña se presentó una epidemia de bovinos llamada epizootia. En la tabla aparece la cantidad estimada de nuevos casos encontrados cada 28 días. En aquel tiempo, el *London Daily* hizo la terrible predicción de que los nuevos casos continuarían aumentando indefinidamente; pero William Farr predijo en forma correcta cuándo llegarían a su máximo. De las dos funciones

$$f(t) = 653(1.028)^t$$

$$g(t) = 54\,700e^{-0.000271t}$$

y

una de ellas fue el modelo matemático de la predicción del diario y la otra fue el modelo de Farr, donde t son los días, con $t = 0$ correspondiente al 12 de agosto de 1840.

Fecha	Nuevos casos
Ago. 12	506
Sep. 9	1289
Oct. 7	3487
Nov. 4	9597
Dic. 2	18 817
Dic. 30	33 835
Ene. 27	47 191

- (a) Grafica cada función, junto con los datos, en la pantalla de $[0, 400, 100]$ por $[0, 60\,000, 10\,000]$.
- (b) Determina cuál función es mejor modelo para la predicción de Farr.
- (c) Establece la fecha en que los nuevos casos llegaron al punto máximo.
71. Precio de una estampilla El precio de una estampilla de primera clase era 3¢ en 1958 y de 37¢ en 2002 (2¢ en 1885). Encuentra una función exponencial simple de la forma $y = ab^x$ que muestre un modelo del precio de una estampilla de primera clase en el periodo 1958-2002 y pronostica su valor en 2010.

72. Índices de precios al consumidor El IPC es la más común de todas las medidas de la inflación. En 1970 el IPC fue de 37.8 y en 2000 alcanzó el valor de 168.8. Esto significa que un consumidor urbano que pagaba \$37.80 por una canasta comercial de bienes y servicios de consumo en 1970, habría tenido que pagar \$168.80 para obtener bienes y servicios similares en 2000. Encuentra una función exponencial simple de la forma $y = ab^x$ que constituya un modelo del IPC desde 1970 hasta 2000 y pronostica su valor en 2010.

73. Comparación de la inflación En 1974, Johnny Miller ganó 8 torneos de la Asociación de Golfistas Profesionales y acumuló \$353 022 de ganancia durante la temporada oficial. En 1999, Tiger Woods acumuló \$6 616 585 con un record semejante.

- (a) Supón que la tasa mensual de inflación de 1974 a 1999 fue 0.0025 (3% al año). Usa la fórmula de interés compuesto para calcular el valor equivalente de las ganancias de Miller en 1999. Compara tu respuesta con la de un cálculo de la inflación en la Internet (por ejemplo, bls.gov/cpi/home.htm).
- (b) Encuentra la tasa de interés anual necesaria para que las ganancias de Miller sean equivalentes en valor a las ganancias de Woods.
- (c) ¿Qué tipo de función utilizaste en el inciso (a)? ¿Y en el inciso (b)?

5.3

Función exponencial natural

La fórmula de interés compuesto estudiada en la sección anterior es

$$A = C \left(1 + \frac{i}{n} \right)^n$$

donde C es el capital inicial invertido, i es la tasa de interés anual (expresada como decimal), n son los periodos de interés por año y t los años en que se invierte el capital. El siguiente ejemplo ilustra lo que ocurre si la tasa y el tiempo total invertido son fijos, pero el periodo de interés varía.

EJEMPLO 1 Uso de la fórmula de interés compuesto

Supón que se invierten \$1000 a una tasa de interés compuesto de 9 por ciento. Encuentra la cantidad acumulada (A) al cabo de un año, si el interés es compuesto cada 3 meses, 1 mes, 1 semana, a diario, por hora y cada minuto.

SOLUCIÓN Con $C = \$1000$ (capital inicial), $t = 1$ e $i = 0.09$ en la fórmula de interés compuesto, tenemos

$$A = \$1000 \left(1 + \frac{0.09}{n} \right)^n$$

para n periodos de interés por año. Los valores de n que deseamos considerar se enumeran en la tabla siguiente, donde hemos tomado el año de 365 días y por lo tanto $(365)(24) = 8760$ horas y $(8760)(60) = 525\,600$ minutos. (En muchas transacciones financieras prácticas, un año de inversión tiene 360 días.)

Periodo de interés	Trimestre	Mes	Semana	Día	Hora	Minuto
n	4	12	52	365	8760	525 600

Con la fórmula de interés compuesto (y una calculadora), obtenemos las cantidades de esta tabla:

Periodo de interés	Cantidad acumulada después de un año
Trimestral	$\$1000 \left(1 + \frac{0.09}{4}\right)^4 = \1093.08
Mes	$\$1000 \left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12} = \1093.81
Semana	$\$1000 \left(1 + \frac{0.09}{52}\right)^{52} = \1094.09
Día	$\$1000 \left(1 + \frac{0.09}{365}\right)^{365} = \1094.16
Hora	$\$1000 \left(1 + \frac{0.09}{8760}\right)^{8760} = \1094.17
Minuto	$\$1000 \left(1 + \frac{0.09}{525\,600}\right)^{525\,600} = \1094.17

Observa que, en el ejemplo anterior, después de que se llega a un periodo de interés de una hora, el número de periodos de interés por año no tiene efecto en la cantidad final. Si el interés se hubiera compuesto cada *segundo*, el resultado sería aún de \$1094.17, siempre que se corte A al centavo más cercano. (Algunos lugares decimales *cambian después* de los primeros dos.) Por tanto, la cantidad se aproxima a un valor fijo a medida que n aumenta. Se dice que el interés es **compuesto continuamente** si el número n de periodos por año aumenta sin límite.

Con $C = 1$, $i = 1$ y $t = 1$ en la fórmula de interés compuesto, llegamos a

$$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

La expresión del lado derecho de la ecuación es importante en cálculo. En el ejemplo 1 consideramos una situación similar; a medida que n aumenta, A se aproxima a un valor límite. El mismo fenómeno ocurre con esta fórmula, como se ilustra en la tabla siguiente.

n	Aproximación a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000000
10	2.59374246
100	2.70481383
1000	2.71692393
10 000	2.71814593
100 000	2.71826824
1 000 000	2.71828047
10 000 000	2.71828169
100 000 000	2.71828181
1 000 000 000	2.71828183

En cálculo se demuestra que, a medida que n aumenta sin límite, el valor de la expresión $\left[1 + (1/n)\right]^n$ se aproxima a determinado número irracional, denotado con e . El número e aparece en la investigación de muchos fenómenos físicos. Una aproximación es $e \approx 2.71828$. Con la notación introducida para funciones racionales, sección 4.5, denotamos este dato en la forma:

Número e

Si n es un entero positivo, entonces

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \approx 2.71828 \quad \text{a medida que } n \rightarrow \infty.$$

En la definición que sigue usamos e como base de una importante función exponencial.

Definición de la función exponencial natural

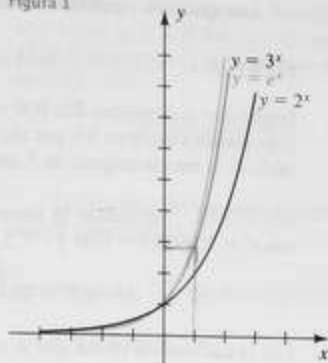
La **función exponencial natural** f está definida por

$$f(x) = e^x$$

para todo número real x .

La función exponencial natural es una de las funciones más útiles en matemáticas avanzadas y en la práctica. Puesto que $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$

Figura 1



La tecla e^x puede accesorarse
pulsando las teclas $2nd$ LN .

está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, según se muestra en la figura 1. Las calculadoras graficadoras científicas tienen una tecla e^x para calcular valores de la función exponencial natural.

APLICACIÓN Interés compuesto continuamente

La fórmula del interés compuesto es

$$A = C \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{nt}$$

Con $1/k = i/n$, entonces $k = n/i$, $n = ki$, y $nt = kit$ y la fórmula se puede reescribir:

$$A = C \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{kt} = C \left[\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right]^t$$

Para un interés compuesto continuamente se hace que n (cantidad de periodos de interés por año) aumente sin límite, denotado por $n \rightarrow \infty$ o bien, lo que equivale a $k \rightarrow \infty$. Aprovechamos que $\left[1 + (1/k) \right]^k \rightarrow e$ conforme $k \rightarrow \infty$, y observamos que

$$C \left[\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right]^t \rightarrow C[e]^t = Ce^t \text{ a medida que } k \rightarrow \infty.$$

Este resultado da la fórmula que sigue:

Fórmula de interés compuesto continuamente

$$A = Ce^{it}$$

donde C = capital inicial

i = tasa de interés anual expresada como decimal

t = los años que se invierte C

A = cantidad acumulada después de t años.

Los ejemplos siguientes ilustran el uso de la fórmula.

EJEMPLO 2 Uso de la fórmula de interés compuesto continuamente

Supón que se depositan \$20 000 en una cuenta del mercado de dinero que paga interés a razón de 8% por año compuesto continuamente. Determina el saldo de la cuenta después de 5 años.

SOLUCIÓN Al aplicar la fórmula de interés compuesto continuamente con $C = 20\,000$, $i = 0.08$ y $t = 5$, tenemos

$$A = Ce^{it} = 20\,000e^{0.08(5)} = 20\,000e^{0.4}$$

Con la calculadora vemos que $A = \$29\,836.49$.

EJEMPLO 3 Uso de la fórmula de interés compuesto continuamente

Una inversión de \$10 000 aumentó a \$28 576.51 en 15 años. Si el interés se compuso continuamente, encuentra la tasa de interés.

SOLUCIÓN Aplicamos la fórmula de interés compuesto continuamente con $c = \$10\,000$, $A = 28\,576.51$ y $t = 15$:

$$A = Ce^{it} \quad \text{fórmula}$$

$$28\,576.51 = 10\,000e^{i(15)} \quad \text{sustituir por } A, C, t$$

En este momento podríamos dividir entre 10 000, pero de hacerlo obtendríamos una ecuación que no podemos resolver (todavía). Así, graficamos $Y_1 = 28\,576.51$ y $Y_2 = 10\,000e^{(15x)}$ y encontramos su punto de intersección. Como i es una tasa de interés, empezamos con una pantalla de $[0, 0.10, 0.01]$ por $[0, 30\,000, 10\,000]$. Con "intersect" encontramos que $Y_1 = Y_2$ para $x = 0.07$ en la figura 2. Así, la tasa de interés es 7%.

La fórmula de interés compuesto continuamente es sólo un caso específico de la siguiente ley.

Fórmula de la ley de crecimiento (o decaimiento)

Sea q_0 el valor de una cantidad q en el tiempo $t = 0$ (esto es, q_0 es la cantidad inicial de q). Si q cambia instantáneamente a una razón proporcional a su valor actual, entonces

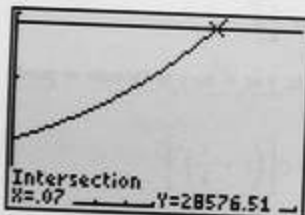
$$q = q(t) = q_0 e^{rt},$$

donde $r > 0$ es la tasa de crecimiento (o $r < 0$ es la tasa de decaimiento) de q .

EJEMPLO 4 Predicción de la población de una ciudad

En 1970, una ciudad tenía 153 800 habitantes. Supón que la población aumenta continuamente a razón de 5% por año; pronostica la población de la ciudad en el año 2010.

Figura 2



SOLUCIÓN Aplicamos la fórmula del crecimiento $q = q_0 e^{rt}$ con población inicial $q_0 = 153\,800$, tasa de crecimiento $r = 0.05$ y tiempo $t = 2010 - 1970 = 40$ años. Así, un pronóstico para encontrar la población de la ciudad en el año 2010 es

$$153\,800e^{(0.05)(40)} = 153\,800e^2 \approx 1\,136\,437.$$

La función f del siguiente ejemplo es importante en aplicaciones avanzadas de matemáticas.

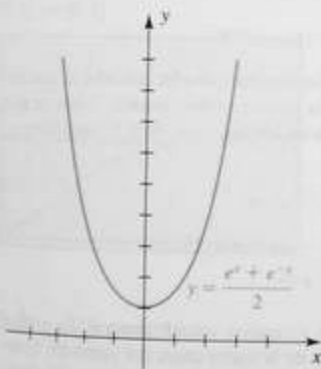


EJEMPLO 5 Trazado de una gráfica con dos funciones exponenciales

Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Figura 3



SOLUCIÓN Advierte que f es una función par porque

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x).$$

Por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje y . Mediante calculadora se obtienen estas aproximaciones de $f(x)$.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$ (aproximada)	1	1.13	1.54	2.35	3.76

Al localizar puntos y usar simetría con respecto al eje y , obtenemos la curva de la figura 3. La gráfica parece una parábola, pero no es el caso.

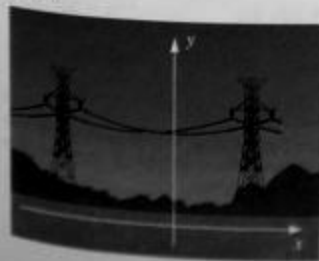
APLICACIÓN Cables flexibles

La función f del ejemplo 5 ocurre en matemáticas aplicadas e ingeniería, en donde recibe el nombre de **función coseno hiperbólico**. Sirve para describir la forma de una cadena o cable flexible uniforme cuyos extremos están sostenidos a la misma altura, como las líneas telefónicas o de energía eléctrica (figura 4). Si introducimos un sistema coordenado, según se indica en la figura, podremos demostrar que una ecuación que corresponda a la forma del cable es

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}),$$

donde a es un número real. La gráfica se llama **catenaria**, derivada de la palabra latina que significa *cadena*. La función del ejemplo 5 es el caso especial en que $a = 1$. En el ejercicio de análisis 3, al final del capítulo, se encuentra la aplicación de una catenaria.

Figura 4



APLICACIÓN Radioterapia

Las funciones exponenciales desempeñan una importante función en el campo de la *radioterapia*, que es el tratamiento de tumores por radiación. La cantidad de células en el tumor que resisten el tratamiento, llamada *fracción sobreviviente*, depende no sólo de la energía y naturaleza de la radiación, sino también de la profundidad, tamaño y características del tumor. La exposición a radiaciones puede considerarse como diversos procesos potencialmente dañinos, en los cuales se requiere al menos un *impacto* para matar a una célula de un tumor; por ejemplo, supón que cada célula tiene un *blanco* que se debe impactar. Si k denota el tamaño promedio del blanco de una célula del tumor y x es el número de procesos dañinos (*dosis*), la fracción sobreviviente $f(x)$ está dada por

$$f(x) = e^{-kx}.$$

Ésta se denomina *fracción sobreviviente de un blanco —un impacto*.

Consideremos ahora que cada célula tiene n blancos y que hay que impactar cada uno una vez para que la célula muera. En este caso, la *fracción sobreviviente de n blancos —un impacto* está dada por

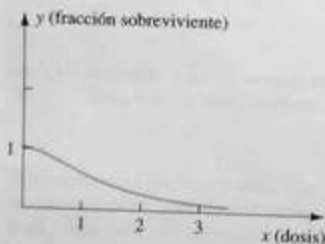
$$f(x) = 1 - (1 - e^{-kx})^n.$$

El análisis de la gráfica de f permite determinar qué efecto tendrá el aumento de la dosis x en la disminución de la fracción sobreviviente. Advierte que $f(0) = 1$; es decir, si no hay dosis, todas las células sobreviven. Como ejemplo, si $k = 1$ y $n = 2$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (1 - e^{-x})^2 \\ &= 1 - (1 - 2e^{-x} + e^{-2x}) \\ &= 2e^{-x} - e^{-2x}. \end{aligned}$$

Figura 5

Fracción sobreviviente de células tumorosas, después de radioterapia



Un análisis completo de la gráfica de f requiere cálculo integral. La gráfica se presenta en la figura 5. El *hombro* de la curva cerca del punto $(0, 1)$ representa la naturaleza del umbral de tratamiento; esto es, una pequeña dosis elimina una reducida cantidad de células tumorosas. Advertirás que para una x considerable, un aumento de la dosis tiene poco efecto en la fracción sobreviviente. A fin de establecer la dosis ideal para determinado paciente, los especialistas también deben tomar en cuenta la cantidad de células sanas que mueren durante cada exposición.

Los problemas del tipo expuesto en el ejemplo que sigue, se presentan en el estudio del cálculo.

**EJEMPLO 6** Búsqueda de ceros en una función con exponenciales

Si $f(x) = x^2(-2e^{-2x}) + 2xe^{-2x}$, halla los ceros de f .

SOLUCIÓN $f(x)$ se puede factorizar como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} \quad \text{dada} \\ &= 2xe^{-2x}(1 - x) \quad \text{factorizar } 2xe^{-2x} \end{aligned}$$

Para encontrar los ceros de f , resolvemos la ecuación $f(x) = 0$. Puesto que $e^{-2x} > 0$ para todo x , vemos que $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $1 - x = 0$; por tanto, los ceros de f son 0 y 1 .



EJEMPLO 7 Trazado de una curva de crecimiento Gompertz

En biología, la **función de crecimiento de Gompertz** G dada por

$$G(t) = ke^{-(Ae^{-Bt})}$$

donde k , A y B son constantes positivas, se usa para calcular el tamaño de ciertas cantidades en un tiempo t . La gráfica de G se llama **curva de crecimiento de Gompertz**. La función siempre es positiva y creciente, y a medida que t aumenta sin límite, $G(t)$ se nivela y aproxima al valor de k . Grafica G en el intervalo $[0, 5]$ para $k = 1.1$, $A = 3.2$ y $B = 1.1$, y calcula el tiempo t en que $G(t) = 1$.

SOLUCIÓN Comenzamos por asignar

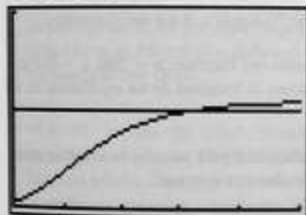
$$1.1e^{-(3.2e^{-1.1t})}$$

a Y_1 . Puesto que deseamos graficar G en el intervalo $[0, 5]$, escogemos $X_{\min} = 0$ y $X_{\max} = 5$. Dado que $G(t)$ siempre es positiva y no rebasa el valor de $k = 1.1$, elegimos $Y_{\min} = 0$ y $Y_{\max} = 2$; por tanto, las dimensiones de la pantalla de la calculadora graficadora son $[0, 5]$ por $[0, 2]$. Al graficar G obtenemos un trazo similar al de la figura 6. Los valores de los puntos finales de la gráfica son aproximadamente $(0, 0.045)$ y $(5, 1.086)$.

Para establecer el tiempo en que $y = G(t) = 1$, usamos la función "intersect" con $Y_2 = 1$ y llegamos a $x = t \approx 3.194$.

Figura 6

$[0, 5]$ por $[0, 2]$



5.3 Ejercicios

Ejercicios 1 al 4: usa la gráfica de $y = e^x$ como ayuda para trazar la gráfica de f .

- 1 (a) $f(x) = e^{-x}$ (b) $f(x) = -e^x$
- 2 (a) $f(x) = e^{2x}$ (b) $f(x) = 2e^x$
- 3 (a) $f(x) = e^{x+4}$ (b) $f(x) = e^x + 4$
- 4 (a) $f(x) = e^{-2x}$ (b) $f(x) = -2e^x$

Ejercicios 5 y 6: si se depositan C dólares en una cuenta de ahorros que paga interés a razón de $i\%$ por año compuesto continuamente, encuentra el saldo después de t años.

- 5 $C = 1000$, $i = 8\frac{1}{2}\%$, $t = 5$
- 6 $C = 100$, $i = 12\frac{1}{2}\%$, $t = 10$

Ejercicios 7 y 8: ¿cuánto dinero, invertido a una tasa de interés de $i\%$ por año compuesto continuamente, alcanzará un monto de A dólares después de t años?

- 7 $A = 100\,000$, $i = 11\%$, $t = 18$
- 8 $A = 15\,000$, $i = 9.5\%$, $t = 4$



Ejercicios 9 y 10: una inversión de C dólares aumentó a A dólares en t años. Si el interés era compuesto continuamente, encuentra la tasa de interés.

- 9 $A = 13464$, $C = 1000$, $t = 20$
- 10 $A = 890.20$, $C = 400$, $t = 16$

Ejercicios 11 y 12: resuelve la ecuación.

- 11 $e^{(x^2)^2} = e^{3x-12}$
- 12 $e^{2x} = e^{3x-1}$

Ejercicios 13 al 16: encuentra los ceros de f .

13. $f(x) = xe^x + e^x$

14. $f(x) = -x^2e^{-x} + 2xe^{-x}$

15. $f(x) = x^4(4e^{4x}) + 3x^2e^{4x}$

16. $f(x) = x^2(2e^{2x}) + 2xe^{2x} + e^{2x} + 2e^{2x}$

Ejercicios 17 y 18: simplifica la expresión.

17.
$$\frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

18.
$$\frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

19. **Crecimiento de la cosecha** Una función exponencial W tal que $W(t) = W_0 e^{kt}$ para $k > 0$ describe el primer mes de crecimiento de cosechas como el maíz, algodón y frijol de soya. El valor de la función $W(t)$ es el peso total en miligramos. W_0 es el peso en el día de su aparición y t es el tiempo en días. Si para una especie de frijol de soya, $k = 0.2$ y $W_0 = 68$ mg, haz una predicción del peso al término de 30 días.
20. **Crecimiento de la cosecha** Consulta el ejercicio 19. A menudo es difícil medir el peso W_0 de una planta cuando brota del suelo. Si, para una especie de algodón, $k = 0.21$ y el peso después de 10 días es de 575 mg, calcula W_0 .
21. **Crecimiento poblacional en Estados Unidos** En 1980 la población estadounidense era de unos 227 millones y ha estado creciendo en forma continua a razón de 0.7% por año. Haz un pronóstico de la población $N(t)$ para el año 2010 si se mantiene la tendencia.
22. **Crecimiento poblacional en la India** En 1985 la población estimada de la India era de 762 millones y ha estado aumentando en forma continua a razón de 2.2% por año. Supón que continúe esta tasa de rápido crecimiento y estima la población india $N(t)$ para el año 2010.
23. **Longevidad del lenguado** En la ciencia piscícola, un cardumen es un grupo de peces que resulta de una reproducción anual. Por lo general, se supone que el número de peces $N(t)$ aún vivos, después de t años, está dado por una función exponencial. Para el lenguado del Pacífico, $N(t) = N_0 e^{-0.2t}$, donde N_0 es el tamaño inicial del cardumen. Haz una aproximación del porcentaje del número original de ejemplares aún vivos después de 10 años.
24. **Indicador radiactivo** El indicador radiactivo ^{51}Cr es útil para ubicar la posición de la placenta en un embarazo; en ocasiones es necesario solicitar estos indicadores a los laboratorios médicos. Si se remiten A_0 unidades (mi-

crocuries), por la desintegración radiactiva, el número de unidades $A(t)$ presente, después de t días, está dado por $A(t) = A_0 e^{-0.0249t}$.

- (a) Si se envían 35 unidades y tardan 2 días en llegar a su destino ¿alrededor de cuántas unidades estarán disponibles para la prueba?
- (b) Si se requieren 35 unidades para el análisis, ¿aproximadamente cuántas unidades deben enviarse?
25. **Crecimiento de la población de la ballena azul** En 1978 se calculó que la población de ballenas azules en el hemisferio sur era de 5000. Como la pesca de cetáceos se ha prohibido y existe abundancia de alimento para estos animales, se espera que la población $N(t)$ crezca en sentido exponencial, según la fórmula $N(t) = 5000e^{0.009t}$, donde t es en años y $t = 0$ corresponde a 1978. Haz un pronóstico de la población para el año 2010.
26. **Crecimiento del lenguado** La longitud (en cm) de muchos peces comerciales comunes, de t años de edad, se calcula con la función de crecimiento de Von Bertalanffy de la forma $f(t) = a(1 - be^{-kt})$ donde a , b y k son constantes.
- (a) Para el lenguado del Pacífico, $a = 200$, $b = 0.956$ y $k = 0.18$. Estima la longitud de un espécimen de 10 años.
- (b) Utiliza la gráfica de f para calcular la longitud máxima que puede alcanzar este pez.
27. **Presión atmosférica** En ciertas condiciones, la presión atmosférica p (en pulgadas) a una altitud de h pies está dada por $p = 29e^{-0.00014h}$. ¿Cuál es la presión a una altitud de 40 000 pies?
28. **Desintegración del isótopo del polonio** Si comenzamos con c miligramos del isótopo de polonio ^{210}Po , la cantidad restante después de t días se calcula por medio de $A = ce^{-0.00495t}$. Si la cantidad inicial es 50 miligramos, haz una aproximación, al centésimo más cercano, de la cantidad restante después de
- (a) 30 días (b) 180 días (c) 365 días
29. **Crecimiento de los niños** Por lo general, se considera que el modelo Jeniss es la fórmula más precisa para predecir la estatura de los preescolares. Si y es la estatura (en cm) y x es la edad (en años), entonces
- $$y = 79.041 + 6.39x - e^{3.261 - 0.993x}$$
- para $\frac{1}{2} \leq x \leq 6$. Por cálculo integral, la tasa de crecimiento R (en cm/año) está dada por $R = 6.39 + 0.993e^{3.261 - 0.993x}$. Encuentra la estatura y tasa de crecimiento de un niño normal de 1 año.

- 30 **Velocidad de las partículas** Una partícula esférica muy pequeña (unos 5 micrones de diámetro) es lanzada al aire (donde no se registran movimientos) con una velocidad inicial de v_0 m/s, pero su velocidad disminuye debido a las fuerzas de la resistencia al avance. Su velocidad, t segundos después, está dada por $v(t) = v_0 e^{-at}$ para alguna $a > 0$ y la distancia $s(t)$ que la partícula recorre por

$$s(t) = \frac{v_0}{a}(1 - e^{-at}).$$

La distancia de parada es la distancia recorrida por la partícula antes de llegar al reposo.

- (a) Expresa la distancia de parada en términos de v_0 y a .
(b) Utiliza la fórmula del inciso (a) para calcular la distancia de parada si $v_0 = 10$ m/s y $a = 8 \times 10^4$.

- 31 **Salario mínimo** En 1971, el salario mínimo en Estados Unidos era de \$1.60 por hora. Suponiendo que la tasa de inflación es de 5% por año, indica el salario mínimo equivalente en el año 2010.

- 32 **Valor del terreno** En 1867, Estados Unidos compró Alaska a los rusos en \$7 200 000. Hay 586 400 mi^2 de tierra en Alaska. Supón que el valor de las tierras aumenta en forma continua a razón de 3% por año y que las tierras se pueden comprar a un precio equivalente; determina el precio de un acre en el año 2010 (1 mi^2 equivale a 640 acres).

Ejercicios 33 y 34: el rendimiento real (o tasa real de interés anual) para una inversión es la tasa de interés simple que produciría, al cabo de un año, la misma cantidad dada por la tasa compuesta que se aplica. Calcula al 0.01% más cercano, el rendimiento real correspondiente a una tasa de interés de $i\%$ por año compuesto (a) trimestral y (b) continuamente.

33 $i = 7$

34 $i = 12$

Ejercicios 35 y 36: traza la gráfica de la ecuación.

35 $y = e^{0.005x}$

36 $y = e^{-0.0005x}$

Ejercicios 37 y 38: traza la gráfica de la ecuación. (a) Estima y si $x = 40$ y (b) estima x si $y = 2$.

37 $y = e^{0.0075x}$

38 $y = e^{0.0025x}$

Ejercicios 39 al 41: (a) grafica f en una calculadora y (b) traza la gráfica de g tomando los recíprocos de las coordenadas y de (a) sin usar el dispositivo graficador.

39 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $g(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

40 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $g(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

41 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

42 **Función de densidad de probabilidad** En estadística, la función de densidad de probabilidad para la distribución normal está definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad \text{con } z = \frac{x - \mu}{\sigma},$$

donde μ y σ son números reales (μ es la media y σ^2 es la varianza de la distribución). Traza la gráfica de f para el caso $\sigma = 1$ y $\mu = 0$.

Ejercicios 43 y 44: grafica f y g en el mismo plano coordenado y calcula las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$.

43 $f(x) = e^{0.5x} - e^{-0.5x}$; $g(x) = x^2 - 2$

44 $f(x) = 0.3e^x$; $g(x) = x^3 - x$

Ejercicios 45 y 46: las funciones f y g son útiles para aproximar e^x en el intervalo $[0, 1]$. Grafica f , g y $y = e^x$ en el mismo plano coordenado y compara la precisión de $f(x)$ y $g(x)$ como aproximación a e^x .

45 $f(x) = x + 1$; $g(x) = 1.72x + 1$

46 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$; $g(x) = 0.84x^2 + 0.878x + 1$

Ejercicios 47–48: grafica f y calcula sus ceros.

47 $f(x) = x^2 e^x - x e^{(x^2)} + 0.1$

48 $f(x) = x^2 e^x - x^2 e^{2x} + 1$

Ejercicios 49 y 50: grafica f en el intervalo $(0, 200)$. Halla una ecuación aproximada para la asíntota horizontal.

49 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

50 $f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

Ejercicio 51 y 52: aproxima la raíz real de la ecuación.

51. $e^{-x} = x$

52. $e^{3x} = 5 - 2x$

Ejercicios 53 y 54: grafica f y determina dónde f es creciente y dónde es decreciente.

53. $f(x) = xe^x$

54. $f(x) = x^2e^{-3x}$

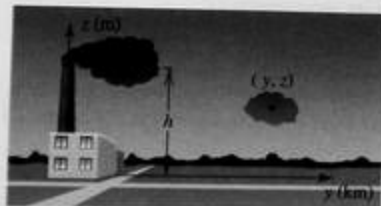
55. Contaminación de una chimenea. La concentración C (en unidades/m³) de contaminación cerca de un punto a nivel del suelo, que está a favor del viento desde una fuente de chimenea de altura h , se encuentra a veces por medio de

$$C = \frac{Q}{\pi v a b} e^{-y^2/(2a^2)} \left[e^{-(z-h)^2/(2b^2)} + e^{-(z+h)^2/(2b^2)} \right]$$

donde Q es la intensidad de la fuente (en unidades/s), v es la velocidad promedio del viento (en m/s), z la altura (en m) sobre el punto a favor del viento, y la distancia desde el punto a favor del mismo, en la dirección que es perpendicular a éste (dirección de viento transversal) y a y b son constantes que dependen de la distancia a favor del viento (ve la figura).

- (a) ¿De qué forma modifica el aumento de la altura de la chimenea la concentración de contaminación al nivel del suelo en la posición a favor del viento ($y = 0$ y $z = 0$)?
- (b) ¿De qué modo se altera la concentración de contaminación al nivel del suelo ($z = 0$), para una chimenea de altura h fija si una persona se mueve con un viento cruzado al aumentar y ?

Ejercicio 55



56. Concentración de la contaminación. Consulta el ejercicio 55. Si la altura de la chimenea es de 100 metros y $b = 12$,

usa una gráfica para calcular la altura z sobre el punto a favor del viento ($y = 0$) donde ocurre la máxima concentración de contaminación. (Sugerencia: haz $h = 100$, $b = 12$ y grafica la ecuación $C = e^{-(12-y)^2/(2 \cdot 12^2)} + e^{-(12+z)^2/(2 \cdot 12^2)}$.)

57. Densidad atmosférica. En la tabla que sigue aparece la densidad atmosférica a una altitud x .

Altitud (m)	0	2000	4000
Densidad (kg/m ³)	1.225	1.007	0.819

Altitud (m)	6000	8000	10000
Densidad (kg/m ³)	0.660	0.526	0.414

- (a) Encuentra una función $f(x) = C_0 e^{kx}$ que permita aproximar la densidad a una altitud x , donde C_0 y k son constantes. Traza los datos y f en los mismos ejes coordenados.
- (b) Utiliza f para pronosticar la densidad a 3000 y 9000 metros. Compara las predicciones con los valores reales de 0.909 y 0.467, respectivamente.

58. Gastos gubernamentales. En la siguiente tabla aparecen los gastos del gobierno federal (en miles de millones de dólares) para los años indicados.

Año	1910	1930	1950	1970
Gastos	0.7	3.3	42.6	195.6

Año	1980	1990	1995
Gastos	590.9	1252.7	1538.9

- (a) Haz que $x = 0$ corresponda al año 1910. Encuentra una función $A(x) = A_0 e^{kx}$ que permita calcular los datos, donde A_0 y k son constantes. Traza los datos y A en los mismos ejes coordenados.
- (b) Con A , encuentra gráficamente el año en que el gobierno federal gastó 1 billón de dólares por primera vez.

5.4

Funciones logarítmicas

En la sección 5.2 determinamos que la función exponencial dada por $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$ o $a > 1$ es biunívoca; en consecuencia, f tiene una función inversa f^{-1} (sección 5.1). Esta inversa de la función exponencial con base a se llama **función logarítmica con base a** y se denota con \log_a . Sus valores se escriben $\log_a(x)$ o $\log_a x$, que se lee "el logaritmo de x con base a ". Así, por la definición de una función inversa f^{-1} ,

$$y = f^{-1}(x) \quad \text{si y sólo si} \quad x = f(y),$$

la definición de \log_a se expresa de esta forma:

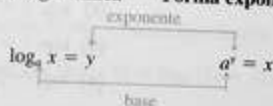
Definición de \log_a

Sea a un número real positivo diferente de 1. El **logaritmo de x con base a** se define como

$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y$$

para todo $x > 0$ y todo número real y .

Advertirás que las dos ecuaciones de la definición son equivalentes. La primera se llama **forma logarítmica** y la segunda, **forma exponencial**. Debes esforzarte por dominar la conversión de una a otra. El diagrama que viene puede ayudarte a alcanzar esta meta.

Forma logarítmica Forma exponencial

Observa que cuando las formas se cambian, las bases de las formas logarítmica y exponencial son las mismas. El número y (o sea, $\log_a x$) corresponde al exponente en la forma exponencial; en otras palabras, $\log_a x$ es el exponente al que la base a debe elevarse para obtener x . A esto es a lo que se refiere la gente cuando dice "los logaritmos son exponentes".

La siguiente ilustración ofrece ejemplos de formas equivalentes.

ILUSTRACIÓN Formas equivalentes

Forma logarítmica	Forma exponencial
■ $\log_5 u = 2$	$5^2 = u$
■ $\log_b 8 = 3$	$b^3 = 8$
■ $r = \log_p q$	$p^r = q$
■ $w = \log_4 (2t + 3)$	$4^w = 2t + 3$
■ $\log_3 x = 5 + 2z$	$3^{5+2z} = x$

El ejemplo siguiente contiene una aplicación donde se requiere cambiar de forma exponencial a forma logarítmica.

EJEMPLO 1 Cambio de forma exponencial a logarítmica

La cantidad N de bacterias de determinado cultivo después de t horas está dada por $N = (1000)2^t$. Expresa t como una función logarítmica de N con base 2.

SOLUCIÓN $N = (1000)2^t$ dada

$$\frac{N}{1000} = 2^t \quad \text{divide la expresión exponencial}$$

$$t = \log_2 \frac{N}{1000} \quad \text{cambie a la forma logarítmica}$$

En el ejemplo siguiente damos algunos casos especiales de logaritmos.

EJEMPLO 2 Búsqueda de logaritmos

Encuentra el número, si es posible.

- (a) $\log_{10} 100$ (b) $\log_2 \frac{1}{2}$ (c) $\log_9 3$ (d) $\log_2 1$ (e) $\log_3 (-2)$

SOLUCIÓN En cada caso nos dan $\log_a x$ y debemos hallar el exponente y tal que $a^y = x$, así:

- (a) $\log_{10} 100 = 2$ porque $10^2 = 100$.
 (b) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ porque $2^{-1} = \frac{1}{2}$.
 (c) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ porque $9^{1/2} = 3$.
 (d) $\log_2 1 = 0$ porque $2^0 = 1$.
 (e) $\log_3 (-2)$ no es posible porque $3^y \neq -2$ para cualquier número real y .

Las propiedades generales que siguen se deducen de la interpretación de $\log_a x$ como exponente.

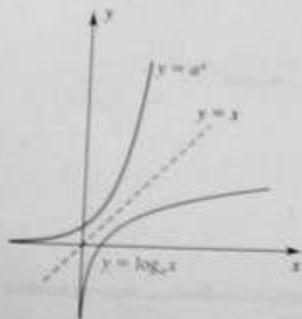
Propiedad de $\log_a x$	Razón	Ilustración
(1) $\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$	$\log_2 1 = 0$
(2) $\log_a a = 1$	$a^1 = a$	$\log_{10} 10 = 1$
(3) $\log_a a^x = x$	$a^x = a^x$	$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
(4) $a^{\log_a x} = x$	ve abajo	$5^{\log_5 7} = 7$

La razón para la propiedad (4) se deduce directamente de la definición de $\log_a x$, puesto que

$$\text{si } y = \log_a x, \text{ luego } x = a^y, \text{ o } x = a^{y^{\log_a x}}.$$

La función logarítmica con base a es la inversa de la función exponencial con base a , de modo que la gráfica de $y = \log_a x$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = a^x$ a través de la recta $y = x$ (sección 5.1). Este procedimiento se ilustra en la figura 1 para el caso $a > 1$. Observa que la intersección en x de la gráfica es 1, el dominio es el conjunto de números reales

Figura 1



positivos, la imagen es \mathbb{R} , y el eje y es una asíntota vertical. Raras veces se usan los logaritmos con base $0 < a < 1$; por tanto, obviaremos sus gráficas.

En la figura 1 se ve que si $a > 1$, entonces $\log_a x$ es creciente en $(0, \infty)$ y, por tanto, es biunívoca, según el teorema de la pág. 322. Este resultado se combina con los incisos (1) y (2) de la definición de una función biunívoca (pág. 320) y se obtiene el siguiente teorema, que también se demuestra si $0 < a < 1$.

Teorema: las funciones logarítmicas son biunívocas

La función logarítmica con base a es biunívoca; por tanto, se satisfacen estas condiciones equivalentes para números reales x_1 y x_2 .

(1) Si $x_1 \neq x_2$, entonces $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$.

(2) Si $\log_a x_1 = \log_a x_2$, entonces $x_1 = x_2$.

Cuando se usa este teorema como razón para un paso en la solución de un ejemplo afirmaremos que *las funciones logarítmicas son biunívocas*.

En el ejemplo siguiente resolvemos una *ecuación logarítmica simple*, es decir, que contiene el logaritmo de una expresión que comprende una variable. Se pueden presentar soluciones extrañas cuando se resuelven ecuaciones logarítmicas; por tanto, debemos comprobar dichas respuestas para asegurarnos de que estamos tomando logaritmos *únicamente de números reales positivos*; de otra manera, la función logarítmica no está definida.

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación logarítmica

Resuelve la ecuación $\log_6 (4x - 5) = \log_6 (2x + 1)$.

SOLUCIÓN

$$\log_6 (4x - 5) = \log_6 (2x + 1) \quad \text{dada}$$

$$4x - 5 = 2x + 1 \quad \text{las funciones logarítmicas son biunívocas}$$

$$2x = 6 \quad \text{restar 2x, sumar 5}$$

$$x = 3 \quad \text{dividir entre 2}$$

✓ Comprobación $x = 3$: LI: $\log_6 (4 \cdot 3 - 5) = \log_6 7$

LD: $\log_6 (2 \cdot 3 + 1) = \log_6 7$

Como $\log_6 7 = \log_6 7$ es una expresión cierta, $x = 3$ es una solución. ✓

Al comprobar la solución $x = 3$ en el ejemplo 3 no es necesario que la solución sea positiva. Pero se requiere que las dos expresiones, $4x - 5$ y $2x + 1$, sean positivas después de sustituir 3 como valor de x . Si ampliamos el concepto de *argumento* de variables a expresiones, entonces al comprobar soluciones simplemente podemos recordar que *los argumentos deben ser positivos*.

En el ejemplo que viene usamos la definición de logaritmo para resolver una ecuación logarítmica.

EJEMPLO 4 Solución de una ecuación logarítmicaResuelve la ecuación $\log_4(5 + x) = 3$

SOLUCIÓN

$$\log_4(5 + x) = 3 \quad \text{dada}$$

$$5 + x = 4^3 \quad \text{cambiar a forma exponencial}$$

$$x = 59 \quad \text{resolver para } x$$

$$\checkmark \text{ Comprobación } x = 59 \quad \text{LI: } \log_4(5 + 59) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$$

$$\text{LD: } 3$$

Puesto que $3 = 3$ es una expresión cierta, $x = 59$ es una solución.

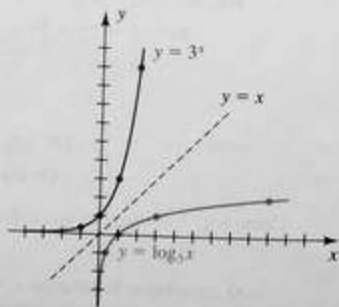
A continuación trazaremos la gráfica de una función logarítmica específica.

**EJEMPLO 5** Trazado de la gráfica de una función logarítmicaTraza la gráfica de f si $f(x) = \log_3 x$.

SOLUCIÓN Presentaremos tres métodos para realizar lo anterior.

Método 1 En vista de que las funciones dadas por $\log_3 x$ y 3^x son inversas entre sí, procederemos como lo hicimos para $y = \log_a x$ en la figura 1; es decir, trazamos la gráfica de $y = 3^x$ y luego la reflejamos en la línea $y = x$, lo cual nos da el trazo de la figura 2. Advertirás que los puntos $(-1, 3^{-1})$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ y $(2, 9)$ de la gráfica de $y = 3^x$ se reflejan en los puntos $(3^{-1}, -1)$, $(1, 0)$, $(3, 1)$ y $(9, 2)$ en la gráfica de $y = \log_3 x$.

Figura 2



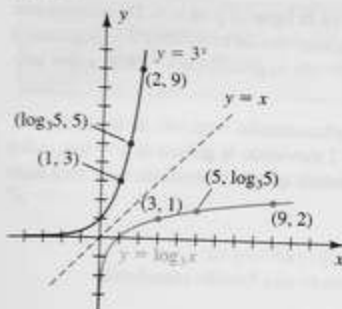
Método 2 Encontramos puntos en la gráfica de $y = \log_3 x$ con $x = 3^k$, donde k es un número real, y luego aplicamos la propiedad (3) de los logaritmos de la pág. 356, como sigue:

$$y = \log_3 x = \log_3 3^k = k$$

Con esta fórmula obtenemos los puntos de la gráfica que aparecen en la tabla que sigue.

$x = 3^k$	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^0	3^1	3^2	3^3
$y = \log_3 x = k$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Figura 3



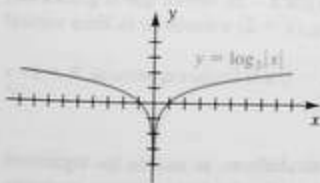
Esto proporciona los mismos puntos obtenidos con el primer método.

Método 3 Podemos trazar la gráfica $y = \log_3 x$ si trazamos la gráfica de la forma exponencial equivalente $x = 3^y$.

Antes de continuar, trazamos otro punto en $y = \log_3 x$ en la figura 2. Si $x = 5$, entonces $y = \log_3 5$ (figura 3). (Veremos que $\log_3 5$ es un número entre 1 y 2; en la sección 5.6 podremos encontrar una mejor aproximación de $\log_3 5$.) Ahora en la gráfica de $x = 3^y$ tenemos el punto $(x, y) = (\log_3 5, 5)$, de modo que $5 = 3^{\log_3 5}$, lo cual ilustra la propiedad 4 de los logaritmos de la pág. 356 y corrobora la afirmación de que *los logaritmos son exponentes*.

Al igual que en los siguientes ejemplos, con frecuencia deseamos trazar la gráfica de $f(x) = \log_a u$, donde u es alguna expresión con x .

Figura 4



EJEMPLO 6 Trazado de la gráfica de una función logarítmica

Traza la gráfica de f si $f(x) = \log_3 |x|$ para $x \neq 0$.

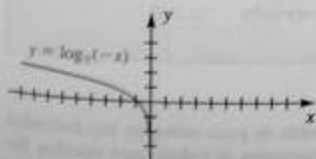
SOLUCIÓN La gráfica es simétrica con respecto al eje y , ya que

$$f(-x) = \log_3 |-x| = \log_3 |x| = f(x).$$

Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y la gráfica coincide con la gráfica de $y = \log_3 x$ trazada en la figura 2. Mediante simetría, reflejamos esa parte de la gráfica a través del eje y y obtenemos el trazo de la figura 4.

Alternativamente podemos considerar esta función como $g(x) = \log_3 x$ donde $|x|$ se sustituye por x (consulta el análisis de la página 208). Dado que todos los puntos de la gráfica de g tienen coordenadas x positivas, podemos obtener la gráfica f combinando g con la reflexión de g a través del eje y .

Figura 5



EJEMPLO 7 Reflexión de la gráfica de una función logarítmica

Traza la gráfica de f si $f(x) = \log_3 (-x)$.

SOLUCIÓN El dominio de f es el conjunto de números reales negativos, puesto que $\log_3 (-x)$ existe sólo si $-x > 0$ o, lo que es igual, $x < 0$. Obtenemos la gráfica de f a partir de la gráfica de $y = \log_3 x$ sustituyendo cada punto (x, y) de la figura 2 por $(-x, y)$. Esto equivale a reflejar la gráfica de $y = \log_3 x$ en el eje y . La gráfica aparece en la figura 5.

Otro método es cambiar $y = \log_3 (-x)$ a la forma exponencial $3^y = -x$ y luego trazar la gráfica de $x = -3^y$.

Figura 6

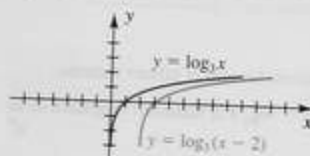


Figura 7

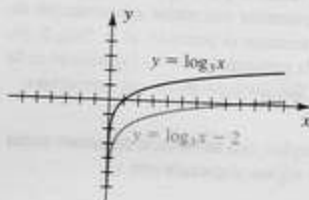
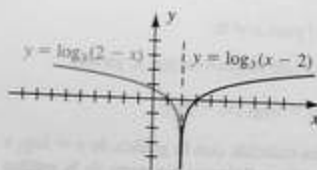


Figura 8

**EJEMPLO 8** Desplazamiento de gráficas de ecuaciones logarítmicas

Traza la gráfica de la ecuación:

(a) $y = \log_3(x - 2)$ (b) $y = \log_3 x - 2$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $y = \log_3 x$ aparece en la figura 2 y en la 6. De acuerdo con el análisis sobre desplazamientos horizontales de la sección 3.5, llegamos a la gráfica de $y = \log_3(x - 2)$ recorriendo la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades a la derecha (figura 6).

(b) A partir del análisis sobre los desplazamientos verticales de la sección 3.5, obtenemos la gráfica de $y = \log_3 x - 2$ moviendo la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades hacia abajo (figura 7). Advertirás que la intersección en x está dada por $\log_3 x = 2$, o sea $x = 3^2 = 9$.

EJEMPLO 9 Reflexión de la gráfica de una función logarítmicaTraza la gráfica de f si $f(x) = \log_3(2 - x)$.**SOLUCIÓN** Si escribimos

$$f(x) = \log_3(2 - x) = \log_3[-(x - 2)].$$

al aplicar la técnica usada para obtener la gráfica de la ecuación $y = \log_3(-x)$ en el ejemplo 7 (con x sustituida por $x - 2$), vemos que la gráfica de f es la reflexión de la gráfica de $y = \log_3(x - 2)$ a través de la línea vertical $x = 2$. Esto da el trazo de la figura 8.

Otro método es cambiar $y = \log_3(2 - x)$ a la forma exponencial $3^y = 2 - x$ y luego trazar la gráfica de $x = 2 - 3^y$.

Antes de que se inventaran las calculadoras, se usaban los logaritmos con base 10 para cálculos numéricos complicados con productos, cocientes y potencias de números reales. Se utilizaba la base 10 porque estaba bien adaptada para números expresados en notación científica. Los logaritmos con base 10 se llaman **logaritmos comunes**. El símbolo **log** x se usa como abreviatura de $\log_{10} x$, al igual que $\sqrt{}$ es la abreviatura de $\sqrt[3]{}$.

**Definición de
logaritmo común**

$$\log x = \log_{10} x \quad \text{para todo} \quad x > 0$$

Dado que se dispone de calculadoras de poco costo, no hay necesidad de los logaritmos comunes como herramientas de trabajo para cálculos. No obstante, la base 10 tiene diversidad de aplicaciones y, por ello, muchas calculadoras cuentan con una tecla **LOG** para calcular logaritmos comunes.

La función exponencial natural está dada por $f(x) = e^x$. La función logarítmica con base e se denomina **función logarítmica natural**. El símbolo $\ln x$ (que se lee "ele ene de x ") es una abreviatura de $\log_e x$ y aquí lo conoceremos como **logaritmo natural de x** ; por tanto, la función logarítmica natural y la exponencial natural son funciones inversas entre sí.

**Definición de
logaritmo natural**

$$\ln x = \log_e x \quad \text{para todo } x > 0$$

Muchas calculadoras tienen una tecla marcada **LN**, que sirve para calcular logaritmos naturales. La siguiente ilustración da varios ejemplos de formas equivalentes con logaritmos comunes y naturales.

ILUSTRACIÓN Formas equivalentes

Forma logarítmica	Forma exponencial
■ $\log x = 2$	$10^2 = x$
■ $\log z = y + 3$	$10^{y+3} = z$
■ $\ln x = 2$	$e^2 = x$
■ $\ln z = y + 3$	$e^{y+3} = z$

En una calculadora, para hallar x cuando se conoce $\log x$ o $\ln x$ se usa la tecla **10^x** o la **e^x** respectivamente, como en el siguiente ejemplo. Si tu calculadora tiene una tecla **INV** (para la función inversa), pulsa x y en seguida presiona **INV LOG** o **INV LN**.

EJEMPLO 10 Solución de una ecuación logarítmica sencilla

Halla x si

(a) $\log x = 1.7959$ (b) $\ln x = 4.7$

SOLUCIÓN

(a) Cambiar $\log x = 1.7959$ en su forma exponencial equivalente da

$$x = 10^{1.7959}$$

Al evaluar la última expresión con precisión de tres lugares decimales, tendremos

$$x \approx 62.503$$

(b) Cambiar $\ln x = 4.7$ en su forma exponencial equivalente da

$$x = e^{4.7} \approx 109.95$$

La tabla siguiente muestra formas de logaritmos comunes y naturales para algunas de las propiedades estudiadas en la página 356.

Logaritmos de base a	Logaritmos comunes	Logaritmos naturales
(1) $\log_a 1 = 0$	$\log 1 = 0$	$\ln 1 = 0$
(2) $\log_a a = 1$	$\log 10 = 1$	$\ln e = 1$
(3) $\log_a a^x = x$	$\log 10^x = x$	$\ln e^x = x$
(4) $a^{\log_a x} = x$	$10^{\log x} = x$	$e^{\ln x} = x$

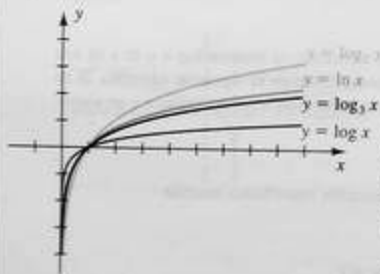
La última propiedad de los logaritmos naturales permite escribir un número a como $e^{\ln a}$, de modo que la función exponencial $f(x) = a^x$ puede escribirse como $f(x) = (e^{\ln a})^x$ o como $f(x) = e^{x \ln a}$. Muchas calculadoras estiman un modelo de regresión exponencial de la forma $y = ab^x$. Si se desea un modelo exponencial con base e , podemos escribir el modelo

$$y = ab^x \quad \text{como} \quad y = ae^{x \ln b}$$

ILUSTRACIÓN Conversión a expresiones con base e

- 3^x es equivalente a $e^{x \ln 3}$
- x^3 es equivalente a $e^{3 \ln x}$
- $4 \cdot 2^x$ es equivalente a $4 \cdot e^{x \ln 2}$

Figura 9



En la figura 9 se observan las gráficas de cuatro logaritmos con base $a > 1$. Advertirás que para $x > 1$, a medida que aumenta la base del logaritmo, las gráficas crecen más lentamente (son más horizontales). Esto tiene sentido cuando consideramos las gráficas de las inversas de estas funciones: $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 3^x$, y $y = 10^x$. Aquí, para $x > 0$, a medida que aumenta la base de la exponencial, las gráficas crecen más rápido (son más verticales).

En los siguientes cuatro ejemplos se exponen aplicaciones de logaritmos comunes y naturales.

EJEMPLO 11 Escala Richter

En la escala Richter, la magnitud R de la intensidad I de un sismo está dada por

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

donde I_0 es cierta intensidad mínima.

- (a) Si la intensidad de un sismo es $1000I_0$, encuentra R .
- (b) Expresa I en términos de R e I_0 .

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad R &= \log \frac{I}{I_0} && \text{dada} \\
 &= \log \frac{1000I_0}{I_0} && \text{sea } I = 1000I_0 \\
 &= \log 1000 && \text{cancelar } I_0 \\
 &= \log 10^3 && 1000 = 10^3 \\
 &= 3 && \log 10^x = x \text{ para todo } x
 \end{aligned}$$

Por este resultado vemos que un incremento de 10 en intensidad resulta en un aumento de 1 en magnitud (si 1000 se cambiara a 10 000, entonces 3 cambiaría a 4).

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad R &= \log \frac{I}{I_0} && \text{dada} \\
 \frac{I}{I_0} &= 10^R && \text{cambiar a forma exponencial} \\
 I &= I_0 \cdot 10^R && \text{multiplicar por } I_0
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 12 Ley de Newton del enfriamiento

Esta ley señala que la rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. La ley de Newton puede utilizarse para demostrar que, bajo ciertas condiciones, la temperatura T (en $^{\circ}\text{C}$) de un objeto en un tiempo t (en horas) está dada por $T = 75e^{-2t}$. Expresa t como función de T .

$$\begin{aligned}
 \text{SOLUCIÓN} \quad T &= 75e^{-2t} && \text{dada} \\
 e^{-2t} &= \frac{T}{75} && \text{aislar expresión exponencial} \\
 -2t &= \ln \frac{T}{75} && \text{cambiar a forma logarítmica} \\
 t &= -\frac{1}{2} \ln \frac{T}{75} && \text{dividir entre } -2
 \end{aligned}$$



EJEMPLO 13 Aproximación de un tiempo de duplicación

Supongamos que una población crece continuamente a razón de 4% al año. Calcula el tiempo que tardará en duplicarse; esto es, su **tiempo de duplicación**.

SOLUCIÓN Advierte que no se indica la población inicial. Esto no representa problema porque sólo deseamos establecer el tiempo necesario para obtener el tamaño de una población en *relación* con su tamaño inicial. Con la fórmula del crecimiento $q = q_0 e^{rt}$ con $r = 0.04$ resulta

$$\begin{aligned}
 2q_0 &= q_0 e^{0.04t} && \text{sea } q = 2q_0 \\
 2 &= e^{0.04t} && \text{dividir entre } q_0 \text{ (} q_0 \neq 0 \text{)}
 \end{aligned}$$

(continúa)

$$0.04r = \ln 2$$

convertir a forma logarítmica

$$r = 25 \ln 2 \approx 17.3 \text{ años.} \quad \text{multiplicar por } \frac{1}{0.04} = 25$$

La ausencia de efecto de q_0 en la respuesta indica que el tiempo de duplicación para una población de 1000 es el mismo que para 1 000 000 o cualquier otra población inicial razonable.

Del último ejemplo podemos obtener una fórmula general para hallar el tiempo de duplicación; es decir,

$$rt = \ln 2 \quad \text{o bien, lo que es igual,} \quad r = \frac{\ln 2}{t}$$

Dado que $\ln 2 \approx 0.69$, el tiempo de duplicación t para un crecimiento de este tipo es aproximadamente $0.69/r$. Puesto que los números 70 y 72 son cercanos a 69, pero tienen más divisores, algunos investigadores se refieren a esta relación de duplicación como la **regla del 70** o **regla del 72**. A manera de ilustración de la regla del 72, si la tasa de crecimiento de una población es 8%, entonces tardará alrededor de $72/8 = 9$ años en duplicarse. En forma más precisa, este valor es

$$\frac{\ln 2}{8} \cdot 100 \approx 8.7 \text{ años.}$$

EJEMPLO 14 Vida media de una sustancia radiactiva

Un físico encuentra que una sustancia radiactiva desconocida registra 2000 conteos por minuto en un contador Geiger; diez días después, la sustancia registra 1500 conteos por minuto. Mediante cálculo se puede demostrar que al cabo de t días la cantidad de material radiactivo y , por tanto, el número de conteos por minuto $N(t)$, es directamente proporcional a e^{ct} para alguna constante c . Determina la vida media de la sustancia.

SOLUCIÓN En vista de que $N(t)$ es directamente proporcional a e^{ct} ,

$$N(t) = ke^{ct},$$

donde k es una constante. Con $t = 0$ y con $N(0) = 2000$, obtenemos

$$2000 = ke^{c \cdot 0} = k \cdot 1 = k.$$

En consecuencia, la fórmula para $N(t)$ se escribe

$$N(t) = 2000e^{ct}.$$

Dado que $N(10) = 1500$, c se determina así:

$$1500 = 2000e^{10c} \quad \text{sea } t = 10 \text{ en } N(t)$$

$$\frac{3}{4} = e^{10c} \quad \text{aislar la expresión exponencial}$$

$$10c = \ln \frac{3}{4} \quad \text{convertir a forma logarítmica}$$

$$c = \frac{1}{10} \ln \frac{3}{4} \quad \text{dividir entre 10}$$

Por último, puesto que la vida media corresponde al tiempo t al que $N(t)$ es igual a 1000, tenemos:

$$\begin{aligned}
 1000 &= 2000e^{ct} && \text{sea } N(t) = 1000 \\
 \frac{1}{2} &= e^{ct} && \text{aislar la expresión exponencial} \\
 ct &= \ln \frac{1}{2} && \text{cambiar a forma logarítmica} \\
 t &= \frac{1}{c} \ln \frac{1}{2} && \text{dividir entre } c \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{10} \ln \frac{3}{4}} \ln \frac{1}{2} && c = \frac{1}{10} \ln \frac{3}{4} \\
 &\approx 24 \text{ días} && \text{aproximar}
 \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo es una buena ilustración de la capacidad de una calculadora graficadora, dado que es imposible hallar la solución exacta usando sólo métodos algebraicos.

EJEMPLO 15 Aproximación de una solución a una desigualdad

Grafica $f(x) = \log(x+1)$ y $g(x) = \ln(3-x)$, y calcula la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$.

SOLUCIÓN Comenzamos con las asignaciones

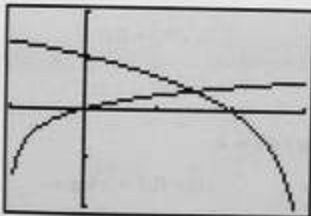
$$Y_1 = \log(x+1) \quad \text{y} \quad Y_2 = \ln(3-x).$$

En vista de que el dominio de f es $(-1, \infty)$, y el dominio de g es $(-\infty, 3)$, escogemos la pantalla $[-1, 3]$ por $[-2, 2]$ y obtenemos la gráfica de la figura 10. Con "intersect" encontramos que el punto de intersección es aproximadamente $(1.51, 0.40)$; por tanto, la solución aproximada de $f(x) \geq g(x)$ es el intervalo

$$1.51 < x < 3.$$

Figura 10

$[-1, 3]$ por $[-2, 2]$



5.4 Ejercicios

Ejercicios 1 y 2: cambia a la forma logarítmica.

- 1 (a) $4^x = 64$ (b) $4^{-x} = \frac{1}{64}$ (c) $t^x = x$
 (d) $3^x = 4 - x$ (e) $5^y = \frac{a+b}{a}$ (f) $(0.7)^y = 5.3$
 2 (a) $3^x = 243$ (b) $3^{-x} = \frac{1}{81}$ (c) $e^x = d$
 (d) $7^x = 100p$ (e) $3^{-x} = \frac{P}{F}$ (f) $(0.9)^y = \frac{1}{2}$

Ejercicios 3 y 4: cambia a la forma exponencial.

- 3 (a) $\log_2 32 = 5$ (b) $\log_5 \frac{1}{343} = -5$
 (c) $\log_3 r = p$ (d) $\log_3 (x+2) = 5$
 (e) $\log_2 m = 3x + 4$ (f) $\log_4 512 = \frac{3}{2}$
 4 (a) $\log_5 81 = 4$ (b) $\log_4 \frac{1}{320} = -4$
 (c) $\log_2 w = q$ (d) $\log_2 (2x-1) = 3$
 (e) $\log_4 p = 5 - x$ (f) $\log_2 343 = \frac{3}{4}$

Ejercicios 5 al 10: despeja t usando logaritmos de base a .

$$5 \quad 2a^t = 5$$

$$6 \quad 3a^t = 10$$

$$7 \quad K = H - Ca^t$$

$$8 \quad F = D + Ba^t$$

$$9 \quad A = Ba^{Ct} + D$$

$$10 \quad L = Ma^{CN} - P$$

Ejercicios 11 y 12: convierte a la forma logarítmica.

$$11 \quad (a) \quad 10^5 = 100\,000$$

$$(b) \quad 10^{-3} = 0.001$$

$$(c) \quad 10^x = y + 1$$

$$(d) \quad e^t = p$$

$$(e) \quad e^{2t} = 3 - x$$

$$12 \quad (a) \quad 10^x = 10\,000$$

$$(b) \quad 10^{-2} = 0.01$$

$$(c) \quad 10^x = 38z$$

$$(d) \quad e^t = D$$

$$(e) \quad e^{0.1t} = x + 2$$

Ejercicios 13 y 14: pasa a la forma exponencial.

$$13 \quad (a) \quad \log x = 50$$

$$(b) \quad \log x = 20r$$

$$(c) \quad \ln x = 0.1$$

$$(d) \quad \ln w = 4 + 3x$$

$$(e) \quad \ln(z - 2) = \frac{1}{\delta}$$

$$14 \quad (a) \quad \log x = -8$$

$$(b) \quad \log x = y - 2$$

$$(c) \quad \ln x = \frac{1}{2}$$

$$(d) \quad \ln z = 7 + x$$

$$(e) \quad \ln(t - 5) = 1.2$$

Ejercicios 15 y 16: encuentra el número, si es posible.

$$15 \quad (a) \quad \log_5 1$$

$$(b) \quad \log_3 3$$

$$(c) \quad \log_4 (-2)$$

$$(d) \quad \log_7 7^2$$

$$(e) \quad 3^{\log_3 4}$$

$$(f) \quad \log_5 125$$

$$(g) \quad \log_{16} \frac{1}{16}$$

$$16 \quad (a) \quad \log_8 1$$

$$(b) \quad \log_9 9$$

$$(c) \quad \log_5 0$$

$$(d) \quad \log_6 6^7$$

$$(e) \quad 5^{\log_5 4}$$

$$(f) \quad \log_5 243$$

$$(g) \quad \log_5 128$$

Ejercicios 17 y 18: halla el número.

$$17 \quad (a) \quad 10^{\log 3}$$

$$(b) \quad \log 10^5$$

$$(c) \quad \log 100$$

$$(d) \quad \log 0.0001$$

$$(e) \quad e^{\log 2}$$

$$(f) \quad \ln e^{-3}$$

$$(g) \quad e^{2+\ln 3}$$

$$18 \quad (a) \quad 10^{\log 7}$$

$$(b) \quad \log 10^{-6}$$

$$(c) \quad \log 100,000$$

$$(d) \quad \log 0.001$$

$$(e) \quad e^{\log 4}$$

$$(f) \quad \ln e^{20}$$

$$(g) \quad e^{1+\ln 2}$$

Ejercicios 19 al 34: resuelve la ecuación.

$$19 \quad \log_4 x = \log_4 (8 - x)$$

$$20 \quad \log_3 (x + 4) = \log_3 (1 - x)$$

$$21 \quad \log_5 (x - 2) = \log_5 (3x + 7)$$

$$22 \quad \log_7 (x - 5) = \log_7 (6x)$$

$$23 \quad \log x^2 = \log (-3x - 2)$$

$$24 \quad \ln x^2 = \ln (12 - x)$$

$$25 \quad \log_3 (x - 4) = 2$$

$$26 \quad \log_2 (x - 5) = 4$$

$$27 \quad \log_2 x = \frac{3}{2}$$

$$28 \quad \log_4 x = -\frac{2}{3}$$

$$29 \quad \ln x^2 = -2$$

$$30 \quad \log x^2 = -4$$

$$31 \quad e^{2 \ln x} = 9$$

$$32 \quad e^{-\ln x} = 0.2$$

$$33 \quad e^{1 \ln x} = 27$$

$$34 \quad e^{1 \ln x} = 0.25$$

35 Traza la gráfica de f si $a = 4$:

$$(a) \quad f(x) = \log_4 x$$

$$(b) \quad f(x) = -\log_4 x$$

$$(c) \quad f(x) = 2 \log_4 x$$

$$(d) \quad f(x) = \log_4 (x + 2)$$

$$(e) \quad f(x) = (\log_4 x) + 2$$

$$(f) \quad f(x) = \log_4 (x - 2)$$

$$(g) \quad f(x) = (\log_4 x) - 2$$

$$(h) \quad f(x) = \log_4 |x|$$

$$(i) \quad f(x) = \log_4 (-x)$$

$$(j) \quad f(x) = \log_4 (3 - x)$$

$$(k) \quad f(x) = |\log_4 x|$$

$$(l) \quad f(x) = \log_{16} x$$

36 Trabaja el ejercicio 33 con $a = 5$.

Ejercicios 37 al 42: traza la gráfica de f .

$$37 \quad f(x) = \log (x + 10)$$

$$38 \quad f(x) = \log (x + 100)$$

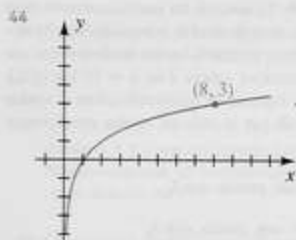
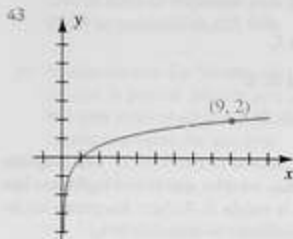
$$39 \quad f(x) = \ln |x|$$

$$40 \quad f(x) = \ln |x - 1|$$

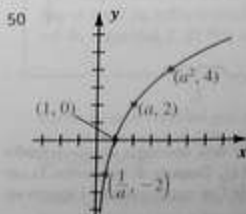
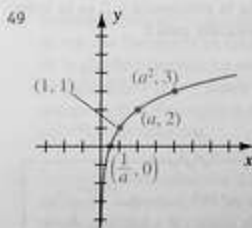
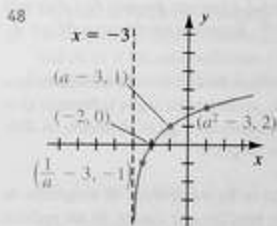
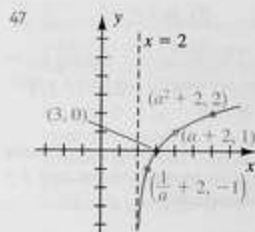
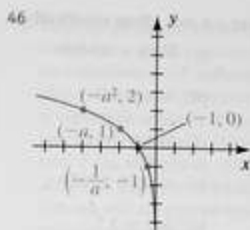
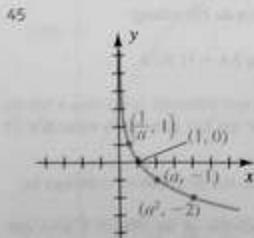
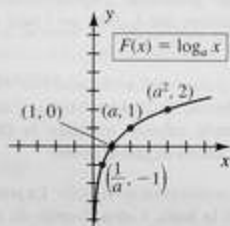
$$41 \quad f(x) = \ln e + x$$

$$42 \quad f(x) = \ln (e + x)$$

Ejercicios 43 al 44: encuentra una función logarítmica de la forma $f(x) = \log_a x$ para la gráfica dada.



Ejercicios 45 al 50: en la figura se muestra la gráfica de una función f . Expresa $f(x)$ en términos de F .



Ejercicios 51 y 52: aproxima x a tres cifras significativas.

- 51 (a) $\log x = 3.6274$ (b) $\log x = 0.9469$
 (c) $\log x = -1.6253$ (d) $\ln x = 2.3$
 (e) $\ln x = 0.05$ (f) $\ln x = -1.6$
- 52 (a) $\log x = 1.8965$ (b) $\log x = 4.9680$
 (c) $\log x = -2.2118$ (d) $\ln x = 3.7$
 (e) $\ln x = 0.95$ (f) $\ln x = -5$

53 Determinación de una tasa de crecimiento. Cambia $f(x) = 1000(1.05)^x$ a una función exponencial con base e y aproxima la tasa de crecimiento de f .

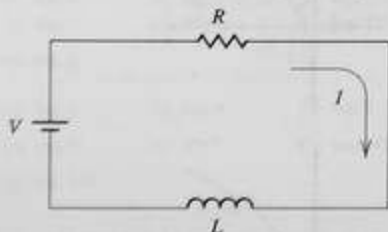
54 Determinación de una tasa de decaimiento. Cambia $f(x) = 100(\frac{1}{2})^x$ a una función exponencial con base e y aproxima la tasa de decaimiento de f .

55 Desintegración del radio. Si comenzamos con q_0 miligramos de radio, la cantidad q restante después de t años está dada por $q = q_0(2)^{-t/1000}$. Expresa t en términos de q y q_0 .

56 Desintegración del isótopo del bismuto. El isótopo radiactivo del bismuto, ^{210}Bi , se desintegra según la fórmula $Q = k(2)^{-t/5}$, donde k es una constante y t es el tiempo en días. Expresa t en términos de Q y k .

57 Circuito eléctrico. En la figura aparece el diagrama de un circuito eléctrico sencillo que consta de un resistor y un inductor. La corriente I en el tiempo t está dada por $I = 20e^{-Rt/L}$, donde R es la resistencia y L es la inductancia. Resuelve esta ecuación para t .

Ejercicio 57



58 Condensador eléctrico. Se deja descargar un condensador eléctrico con carga inicial Q_0 . Después de t segundos, la carga Q es $Q = Q_0 e^{-kt}$, donde k es una constante. Despeja esta ecuación para t .

59 Escala de Richter. Utiliza la fórmula $R = \log(I/I_0)$ de la escala de Richter para hallar la magnitud de un sismo que tiene una intensidad

- (a) 100 veces la de I_0
 (b) 10 000 veces la de I_0
 (c) 100 000 veces la de I_0

60 Escala de Richter. Consulta el ejercicio 59. Las magnitudes de los sismos más notables que se han registrado han sido entre 8 y 9 en la escala de Richter. Encuentra las intensidades correspondientes en términos de I_0 .

61 Intensidad del sonido. El nivel de un sonido, como lo capta el oído humano, se basa en su nivel de intensidad. Una fórmula para hallar el nivel de intensidad α (en decibels) que corresponde a una intensidad sonora I es $\alpha = 10 \log(I/I_0)$, donde I_0 es un valor especial de I acordado como el sonido más débil perceptible por el oído en ciertas condiciones. Encuentra α si

- (a) I es 10 veces más grande que I_0
 (b) I es 1000 veces más grande que I_0
 (c) I es 10 000 veces más grande que I_0 (este es el nivel de intensidad de una voz promedio).

62 Intensidad del sonido. Consulta el ejercicio 61. Un nivel de intensidad de 140 decibels produce dolor en el oído humano promedio. ¿Aproximadamente cuántas veces más grande que I_0 debe ser I para que α llegue a este nivel?

63 Crecimiento poblacional en Estados Unidos. La población $N(t)$ (en millones) de Estados Unidos, t años después de 1980, se puede calcular mediante la fórmula $N(t) = 227e^{0.007t}$. ¿Cuándo llegará al doble?

64 Crecimiento poblacional en la India. La población $N(t)$ (en millones) de la India, t años después de 1985, se puede calcular mediante la fórmula $N(t) = 762e^{0.022t}$. ¿Cuándo llegará a 1500 millones?

65 Peso de niños. La relación de Ehrenberg

$$\ln W = \ln 2.4 + (1.84)h$$

es una fórmula empírica que relaciona la estatura h (en m) con el peso promedio W (en kg) para niños entre 5 y 13 años de edad.

- (a) Expresa W como función de h , que no contenga \ln .
 (b) Calcula el peso promedio de un niño de 8 años que mide 1.5 metros.

65. Interés compuesto continuamente. Si el interés es compuesto continuamente a una tasa de 10% por año, calcula cuántos años se requieren para que un depósito inicial de \$6000 se convierta en \$25 000.

67. Presión del aire. La fórmula $p(h) = 14.7e^{-0.000185h}$ permite calcular la presión del aire $p(h)$ (en lb/pulg²), a una altitud h pies sobre el nivel del mar. Indica a qué altitud h aproximada la presión del aire será:

- De 10 lb/pulg²
- La mitad de su valor al nivel del mar.

68. Presión de vapor. La presión P de vapor de un líquido (en lb/pulg²), que es una medida de su volatilidad, se relaciona con su temperatura T (en °F) por la ecuación de Antoine:

$$\log P = a + \frac{b}{c + T},$$

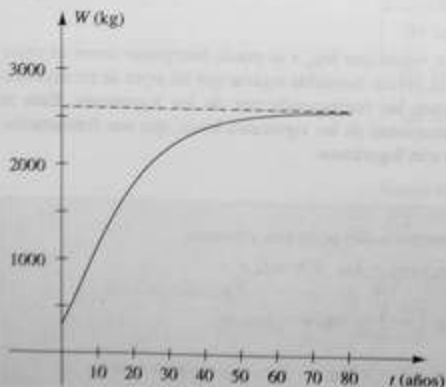
donde a , b y c son constantes. La presión de vapor aumenta rápidamente con un incremento de temperatura. Expresa P como función de T .

69. Crecimiento de elefantes. El peso W (en kg) de una elefanta africana, a la edad de t (en años), puede aproximarse mediante

$$W = 2600(1 - 0.51e^{-0.075t}).$$

- Haz una aproximación del peso al nacer.
- Estima la edad de una elefanta africana de 1800 kg mediante (1) la gráfica siguiente y (2) la fórmula W de este ejercicio.

Ejercicio 69



70. Consumo de carbón. Un país tiene en la actualidad reservas carboníferas de 50 millones de toneladas. El año pasado se consumieron 6.5 millones de toneladas. Los datos de años pasados y las proyecciones de población sugieren que la rapidez de consumo R (en millones de ton/año) aumentará de acuerdo con la fórmula $R = 6.5e^{0.02t}$ y la cantidad total T (en millones de tons) de carbón, que se usará en t años, está dada por la fórmula $T = 325(e^{0.02t} - 1)$. Si el país usa sólo sus propios recursos, ¿cuándo se agotarán las reservas carboníferas?

71. Densidad de la población urbana. Un modelo de densidad urbana es una fórmula que relaciona la densidad D poblacional (en miles/mi²) con la distancia x (en mi) desde el centro de una ciudad. Se ha encontrado que la fórmula $D = ae^{-bx}$, para la densidad central a y el coeficiente de decaimiento b , es apropiada para muchas grandes ciudades de Estados Unidos. Para Atlanta, en 1970, $a = 5.5$ y $b = 0.10$. ¿A qué distancia aproximada del centro la densidad de la población era de 2000 por mi²?

72. Brillantez de las estrellas. Las estrellas se clasifican en categorías de brillantez llamadas magnitudes. A las menos brillantes, con flujo luminoso L_0 , se les asignó una magnitud de 6; a las más brillantes y de flujo luminoso L , una magnitud m por medio de la fórmula

$$m = 6 - 2.5 \log \frac{L}{L_0}.$$

- Encuentra m si $L = 10^{3.4}L_0$.
- Resuelve la ecuación para L en términos de m y L_0 .

73. Desintegración del yodo radiactivo. El yodo radiactivo ¹³¹I se usa con frecuencia en estudios de exploración o rastreo de la glándula tiroides. La sustancia se desintegra según la fórmula $A(t) = A_0e^{-t}$, donde A_0 es la dosis inicial y t es el tiempo en días. Encuentra a , suponiendo que la vida media del ¹³¹I es de ocho días.

74. Contaminación radiactiva. La lluvia ácida ha depositado estroncio radiactivo ⁹⁰Sr en un gran campo. Si pasa suficiente cantidad a la cadena alimentaria hasta los seres humanos, puede ocasionar cáncer óseo. Se ha determinado que el nivel de radiactividad del campo es 2.5 veces el nivel de seguridad S . El ⁹⁰Sr se desintegra según la fórmula

$$A(t) = A_0e^{-0.0231t},$$

donde A_0 es la cantidad que por ahora está en el campo y t es el tiempo en años. ¿Durante cuántos años estará contaminada el área?

75. Velocidad al caminar. En un estudio hecho en 15 ciudades, que van de una población P de 300 hasta 3 000 000,

se encontró que la velocidad S promedio de una persona al caminar (en pies/s) se puede aproximar con la ecuación $S = 0.05 + 0.86 \log P$.


(a) ¿Cómo afecta la población a la velocidad promedio al caminar?

(b) ¿Para qué población será de 5 pies/s la velocidad promedio al caminar?

76 Circuitos integrados (CI) para computadoras. Entre los fabricantes de CI para computadoras, es importante considerar la fracción F de CI que fallará después de t años de servicio. Esta fracción se puede aproximar a veces con la fórmula $F = 1 - e^{-ct}$, donde c es una constante positiva.

(a) ¿Cómo afecta c el valor de la confiabilidad de un CI?

(b) Si $c = 0.125$, ¿después de cuántos años fallará el 35% de los CI?

 Ejercicios 77 y 78: aproxima la función en el valor de x a cuatro lugares decimales.

77 (a) $f(x) = \ln(x+1) + e^x$, $x = 2$

(b) $g(x) = \frac{(\log x)^2 - \log x}{4}$, $x = 3.97$


78 (a) $f(x) = \log(2x^2 + 1) - 10^{-x}$, $x = 1.95$

(b) $g(x) = \frac{x - 3.4}{\ln x + 4}$, $x = 0.55$

 Ejercicios 79 y 80: aproxima la raíz real de la ecuación.


79 $x \ln x = 1$

80 $\ln x + x = 0$

 Ejercicios 81 y 82: grafica f y g en el mismo plano coordinado; calcula la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$.

81 $f(x) = 2.2 \log(x+2)$; $g(x) = \ln x$

82 $f(x) = x \ln |x|$; $g(x) = 0.15e^x$


 63 Nivel de colesterol en mujeres. Algunos estudios, que relacionan el nivel de colesterol seroso con afecciones de las arterias coronarias, sugieren que un factor de riesgo es la relación x de la cantidad total C de colesterol en la sangre con la cantidad H de colesterol de lipoproteína de alta densidad en la sangre. Para una mujer, el riesgo R de sufrir un ataque al corazón se puede calcular mediante la ecuación

$$R = 2.07 \ln x - 2.04 \quad \text{siempre que } 0 \leq R \leq 1.$$

Por ejemplo, si $R = 0.65$, entonces hay 65% de probabilidad de que una mujer sufra un ataque al corazón durante una vida promedio.

(a) Calcula R para una mujer con $C = 242$ y $H = 78$.

(b) Gráficamente calcula x cuando el riesgo es del 75%.

 64 Nivel de colesterol en hombres. Consulta el ejercicio 83. Para un varón, el riesgo puede calcularse con la fórmula $R = 1.36 \ln x - 1.19$.

(a) Calcula R para un hombre con $C = 287$ y $H = 65$.

(b) Gráficamente calcula x cuando el riesgo es del 75%.

5.5

Propiedades de los logaritmos

En la sección anterior vimos que $\log_a x$ se puede interpretar como un exponente; en consecuencia, parece razonable esperar que las leyes de los exponentes sirvan para obtener las correspondientes de los logaritmos. Esto se prueba en las demostraciones de las siguientes leyes, que son fundamentales para todo trabajo con logaritmos.

Leyes de los logaritmos

Si u y w denotan números reales positivos, entonces

(1) $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$

(2) $\log_a\left(\frac{u}{w}\right) = \log_a u - \log_a w$

(3) $\log_a(u^c) = c \log_a u$ para todo número real c

DEMOSTRACIÓN Para las tres demostraciones, hagamos

$$r = \log_a u \quad \text{y} \quad s = \log_a w.$$

Las formas exponenciales equivalentes son

$$u = a^r \quad \text{y} \quad w = a^s.$$

Ahora, procedemos de este modo

- (1) $uw = a^r a^s$ definición de u y w
 $uw = a^{r+s}$ ley 1 de los exponentes
 $\log_a(uw) = r + s$ cambiar a forma logarítmica
 $\log_a(uw) = \log_a u + \log_a w$ definición de r y s
- (2) $\frac{u}{w} = \frac{a^r}{a^s}$ definición de u y w
 $\frac{u}{w} = a^{r-s}$ ley 5(a) de los exponentes
 $\log_a\left(\frac{u}{w}\right) = r - s$ cambiar a forma logarítmica
 $\log_a\left(\frac{u}{w}\right) = \log_a u - \log_a w$ definición de r y s
- (3) $u^c = (a^r)^c$ definición de u
 $u^c = a^{cr}$ ley 2 de los exponentes
 $\log_a(u^c) = cr$ cambiar a forma logarítmica
 $\log_a(u^c) = c \log_a u$ definición de r

Las leyes de los logaritmos para los casos especiales $a = 10$ (comunes) y $a = e$ (naturales) se escriben como en la tabla.

Logaritmos comunes	Logaritmos naturales
(1) $\log(uw) = \log u + \log w$	(1) $\ln(uw) = \ln u + \ln w$
(2) $\log\left(\frac{u}{w}\right) = \log u - \log w$	(2) $\ln\left(\frac{u}{w}\right) = \ln u - \ln w$
(3) $\log(u^c) = c \log u$	(3) $\ln(u^c) = c \ln u$

Según se indica en el aviso de precaución que sigue, no hay leyes generales para expresar $\log_a(u + w)$ o $\log_a(u - w)$ en términos de logaritmos más sencillos.

 **¡Precaución!** 

$$\log_a(u + w) \neq \log_a u + \log_a w$$

$$\log_a(u - w) \neq \log_a u - \log_a w$$

Los siguientes ejemplos ilustran los usos de las leyes de los logaritmos.

EJEMPLO 1 Uso de las leyes de los logaritmos

Expresa $\log_a \frac{x^3 \sqrt{y}}{z^2}$ en términos de logaritmos de x , y y z .

SOLUCIÓN Escribimos \sqrt{y} como $y^{1/2}$ y usamos las leyes de los logaritmos:

$$\begin{aligned}\log_a \frac{x^3 \sqrt{y}}{z^2} &= \log_a (x^3 y^{1/2}) - \log_a z^2 && \text{ley 2} \\ &= \log_a x^3 + \log_a y^{1/2} - \log_a z^2 && \text{ley 1} \\ &= 3 \log_a x + \frac{1}{2} \log_a y - 2 \log_a z && \text{ley 3}\end{aligned}$$

Advierte que si un término con exponente positivo (como x^3) se encuentra en el numerador de la expresión original, tendrá un coeficiente positivo en la forma expandida; si está en el denominador (como z^2), poseerá un coeficiente negativo en la forma expandida.

EJEMPLO 2 Uso de las leyes de los logaritmos

Expresa como un logaritmo:

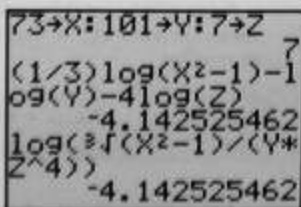
$$\frac{1}{3} \log_a (x^2 - 1) - \log_a y - 4 \log_a z$$

SOLUCIÓN Aplicamos las leyes de los logaritmos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \log_a (x^2 - 1) - \log_a y - 4 \log_a z &= \log_a (x^2 - 1)^{1/3} - \log_a y - \log_a z^4 && \text{ley 3} \\ &= \log_a \sqrt[3]{x^2 - 1} - (\log_a y + \log_a z^4) && \text{álgebra} \\ &= \log_a \sqrt[3]{x^2 - 1} - \log_a (yz^4) && \text{ley 1} \\ &= \log_a \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{yz^4} && \text{ley 2}\end{aligned}$$

En la figura 1 realizamos una simple comprobación con calculadora del ejemplo 2 asignando valores arbitrarios a X , Y y Z , y luego evaluando la expresión dada y nuestra respuesta. Esto no prueba que tengamos razón, aunque otorga credibilidad a nuestro resultado (para no mencionar la tranquilidad de espíritu).

Figura 1



EJEMPLO 3 Solución de una ecuación logarítmicaResuelve la ecuación $\log_5 (2x + 3) = \log_5 11 + \log_5 3$.**SOLUCIÓN**

$$\log_5 (2x + 3) = \log_5 11 + \log_5 3 \quad \text{dada}$$

$$\log_5 (2x + 3) = \log_5 (11 \cdot 3) \quad \text{ley 1 de los logaritmos}$$

$$2x + 3 = 33 \quad \text{las funciones logarítmicas son biunívocas}$$

$$x = 15 \quad \text{despejar } x$$

$$\checkmark \text{ Comprobación } x = 15 \quad \text{LI: } \log_5 (2 \cdot 15 + 3) = \log_5 33$$

$$\text{LD: } \log_5 11 + \log_5 3 = \log_5 (11 \cdot 3) = \log_5 33$$

En vista de que $\log_5 33 = \log_5 33$ es una expresión cierta, $x = 15$ es una solución.

Las leyes de los logaritmos se demostraron para logaritmos de números reales positivos u y w . Si las aplicamos a ecuaciones en que u y w sean expresiones con una variable, pueden resultar soluciones extrañas; por tanto, las respuestas deben sustituirse por la variable en u y w para determinar si estas expresiones están definidas.

**EJEMPLO 4** Solución de una ecuación logarítmicaResuelve la ecuación $\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$.**SOLUCIÓN**

$$\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3 \quad \text{dada}$$

$$\log_2 [x(x + 2)] = 3 \quad \text{ley 1 de los logaritmos}$$

$$x(x + 2) = 2^3 \quad \text{cambiar a forma exponencial}$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad \text{multiplicar e igualar a 0}$$

$$(x - 2)(x + 4) = 0 \quad \text{factorizar}$$

$$x - 2 = 0, \quad x + 4 = 0 \quad \text{teorema del factor cero}$$

$$x = 2, \quad x = -4 \quad \text{despejar } x$$

$$\checkmark \text{ Comprobación } x = 2 \quad \text{LI: } \log_2 2 + \log_2 (2 + 2) = 1 + \log_2 4 \\ = 1 + \log_2 2^2 = 1 + 2 = 3$$

$$\text{LD: } 3$$

Dado que $3 = 3$ es una expresión cierta, $x = 2$ es una solución.

$$\checkmark \text{ Comprobación } x = -4 \quad \text{LI: } \log_2 (-4) + \log_2 (-4 + 2)$$

En vista de que los logaritmos de números negativos no están definidos, $x = -4$ no es una solución.

EJEMPLO 5 Solución de una ecuación logarítmicaResuelve la ecuación $\ln (x + 6) - \ln 10 = \ln (x - 1) - \ln 2$.

SOLUCIÓN

$$\ln(x+6) - \ln(x-1) = \ln 10 - \ln 2 \quad \text{reacomodar términos}$$

$$\ln\left(\frac{x+6}{x-1}\right) = \ln \frac{10}{2} \quad \text{ley 2 de los logaritmos}$$

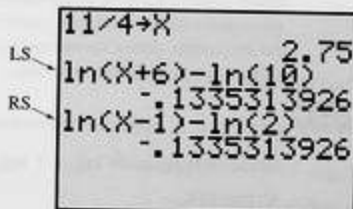
$$\frac{x+6}{x-1} = 5 \quad \text{ln es biunívoca}$$

$$x+6 = 5x-5 \quad \text{multiplicar por } x-1$$

$$x = \frac{11}{4} \quad \text{despejar } x$$

✓ **Demostración** En función de que $\ln(x+6)$ y $\ln(x-1)$ están definidos en $x = \frac{11}{4}$ (son logaritmos de números reales positivos) y como nuestros pasos algebraicos son correctos, deducimos que $\frac{11}{4}$ es una solución de la ecuación dada. (La figura 2 muestra una comprobación de calculadora del ejemplo 5.)

Figura 2

**EJEMPLO 6** Desplazamiento de la gráfica de una ecuación logarítmica

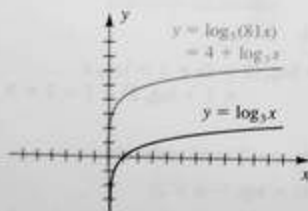
Traza la gráfica de $y = \log_3(81x)$.

SOLUCIÓN La ecuación se puede reescribir así:

$$\begin{aligned} y &= \log_3(81x) && \text{dada} \\ &= \log_3 81 + \log_3 x && \text{ley 1 de los logaritmos} \\ &= \log_3 3^4 + \log_3 x && 81 = 3^4 \\ &= 4 + \log_3 x && \log_3 3^4 = 4 \end{aligned}$$

De esta manera, podemos obtener la gráfica de $y = \log_3(81x)$ corriendo la gráfica de $y = \log_3 x$ en la figura 2 de la sección 5.4 cuatro unidades hacia arriba. Esto da el trazo de la figura 3.

Figura 3

**EJEMPLO 7** Trazado de gráficas de ecuaciones logarítmicas

Traza la gráfica de la ecuación:

(a) $y = \log_3(x^2)$ (b) $y = 2 \log_3 x$

SOLUCIÓN

(a) Dado que $x^2 = |x|^2$, podemos reescribir la ecuación dada como

$$y = \log_3 |x|^2.$$

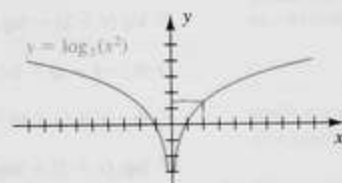
Usamos la ley 3 de logaritmos y tenemos

$$y = 2 \log_3 |x|.$$

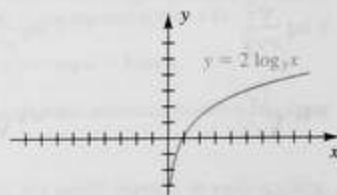
Llegamos a la gráfica de $y = 2 \log_3 |x|$ multiplicando por 2 las coordenadas y de puntos de la gráfica de $y = \log_3 |x|$ de la figura 4, sección 5.4. Esto da la gráfica de la figura 4(a).

Figura 4

(a)



(b)



(b) Si $y = 2 \log_3 x$, entonces x debe ser positiva; por tanto, la gráfica es idéntica a la parte de la gráfica de $y = 2 \log_3 |x|$ de la figura 4(a) que se encuentra a la derecha del eje y . Esto da la figura 4(b).

EJEMPLO 8 Relación entre el precio de venta y la demanda

En economía, a menudo la demanda D de un producto está relacionada con su precio de venta p por una ecuación de la forma

$$\log_a D = \log_a c - k \log_a p,$$

donde a , c y k son constantes positivas.

- (a) Resuelve la ecuación para D .
 (b) ¿Cómo es que el aumento o disminución del precio de venta afecta la demanda?

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \log_a D &= \log_a c - k \log_a p && \text{dada} \\ \log_a D &= \log_a c - \log_a p^k && \text{ley 3 de los logaritmos} \\ \log_a D &= \log_a \frac{c}{p^k} && \text{ley 2 de los logaritmos} \\ D &= \frac{c}{p^k} && \log_a \text{ es biunívoca} \end{aligned}$$

(b) Si el precio p aumenta, el denominador p^k en $D = c/p^k$ también lo hace y , por tanto, la demanda D disminuye. Si el precio baja, p^k disminuirá y la demanda D aumenta.

5.5 Ejercicios

Ejercicios 1 al 8: expresa en términos de los logaritmos de x , y , z o w .

1 (a) $\log_2(xz)$ (b) $\log_4(y/x)$ (c) $\log_4 \sqrt[3]{z}$

2 (a) $\log_3(xyz)$ (b) $\log_3(xz/y)$ (c) $\log_3 \sqrt[3]{y}$

3 $\log_5 \frac{x^3 w}{y^2 z^4}$ 4 $\log_5 \frac{y^3 w^2}{x^4 z^3}$

5 $\log \frac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}$ 6 $\log \frac{\sqrt{y}}{x^4 \sqrt[3]{z}}$

7 $\ln \sqrt{\frac{x}{y^2 z}}$ 8 $\ln x \sqrt{\frac{y^3}{z^2}}$

Ejercicios 9 al 16: escribe la expresión como un logaritmo.

9 (a) $\log_3 x + \log_3(5y)$

(b) $\log_3(2z) - \log_3 x$

(c) $5 \log_3 y$

10 (a) $\log_4(3z) + \log_4 x$

(b) $\log_4 x - \log_4(7y)$

(c) $\frac{1}{3} \log_4 w$

11 $2 \log_5 x + \frac{1}{2} \log_5(x-2) - 5 \log_5(2x+3)$

12 $5 \log_5 x - \frac{1}{2} \log_5(3x-4) - 3 \log_5(5x+1)$

13 $\log(x^3 y^3) - 2 \log x \sqrt[3]{y} - 3 \log\left(\frac{x}{y}\right)$

14 $2 \log \frac{x^2}{y} - 3 \log y + \frac{1}{2} \log x^4 y^2$

15 $\ln y^3 + \frac{1}{2} \ln(x^3 y^3) - 5 \ln y$

16 $2 \ln x - 4 \ln(1/y) - 3 \ln(xy)$

Ejercicios 17 al 34: resuelve la ecuación.

17 $\log_6(2x-3) = \log_6 12 - \log_6 3$

18 $\log_4(3x+2) = \log_4 5 + \log_4 3$

19 $2 \log_3 x = 3 \log_3 5$

20 $3 \log_2 x = 2 \log_2 3$

21 $\log x - \log(x+1) = 3 \log 4$

22 $\log(x+2) - \log x = 2 \log 4$

23 $\ln(-4-x) + \ln 3 = \ln(2-x)$

24 $\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2} \ln 9$

25 $\log_2(x+7) + \log_2 x = 3$

26 $\log_6(x+5) + \log_6 x = 2$

27 $\log_3(x+3) + \log_3(x+5) = 1$

28 $\log_3(x-2) + \log_3(x-4) = 2$

29 $\log(x+3) = 1 - \log(x-2)$

30 $\log(57x) = 2 + \log(x-2)$

31 $\ln x = 1 - \ln(x+2)$

32 $\ln x = 1 + \ln(x+1)$

33 $\log_3(x-2) = \log_3 27 - \log_3(x-4) - 5^{\log_3 1}$

34 $\log_2(x+3) = \log_2(x-3) + \log_2 9 + 4^{\log_2 1}$

Ejercicios 35 al 46: traza la gráfica de f .

35 $f(x) = \log_3(3x)$

36 $f(x) = \log_4(16x)$

37 $f(x) = 3 \log_3 x$

38 $f(x) = \frac{1}{3} \log_3 x$

39 $f(x) = \log_3(x^2)$

40 $f(x) = \log_2(x^2)$

41 $f(x) = \log_2(x^3)$

42 $f(x) = \log_3(x^3)$

43 $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$

44 $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{x}$

45 $f(x) = \log_3\left(\frac{1}{x}\right)$

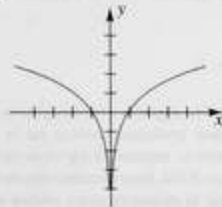
46 $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$

Ejercicios 47 al 50: en la figura se muestra la gráfica de una función f . Expresa $f(x)$ como un logaritmo con base 2.

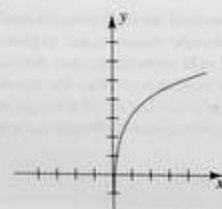
47



48



49



50



- 51 Volumen y decibels. Cuando se incrementa el control de volumen de un sistema estereofónico, el voltaje que pasa

por la bocina cambia de V_1 a V_2 , y el aumento de amplificación en decibels está dado por

$$\text{db} = 20 \log \frac{V_2}{V_1}$$

Encuentra el aumento de amplificación en decibels si el voltaje cambia de 2 volts a 4.5 volts.

- 52 Volumen y decibels. Consulta el ejercicio 51. ¿Qué razón de voltaje k se necesita para una amplificación de +20 decibels? ¿y para una de +40 decibels?

- 53 Ley de Pareto. La ley de Pareto para países capitalistas afirma que la relación entre el ingreso anual x y el número y de individuos cuyos ingresos rebasa x es

$$\log y = \log b - k \log x,$$

donde b y k son constantes positivas. Resuelva esta ecuación para y .

- 54 Precio y demanda. Si p denota el precio de venta (en dólares) de un artículo y x es la demanda correspondiente (en número de piezas vendidas por día), la relación entre p y x estará dada a veces por $p = p_0 e^{-ax}$, donde p_0 y a son constantes positivas. Expresa x como función de p .

- 55 Velocidad del viento. Si v denota la velocidad del viento (en m/sec) a una altura de z metros sobre el suelo, entonces, en ciertas condiciones, $v = c \ln(z/z_0)$, donde c es una constante positiva y z_0 es la altura a la que la velocidad es cero. Traza la gráfica de esta ecuación en un plano zv para $c = 0.5$ y $z_0 = 0.1$ m.

- 56 Eliminación de la contaminación. Si la contaminación del lago Erie se detuviera de pronto, se ha calculado que el nivel y de contaminantes disminuiría según la fórmula $y = y_0 e^{-0.3821t}$, donde t es el tiempo en años y y_0 es el nivel de contaminantes en que dejó de haber más contaminación. ¿Cuántos años tardaría en limpiarse 50% de los contaminantes?

- 57 Reacción a un estímulo. Denota con R la reacción de un sujeto a un estímulo de intensidad x . Hay muchas posibilidades para R y para x . Si el estímulo x es la salinidad (en g de sal/L), R puede ser la estimación del sujeto de cuán salada está la solución, con base en una escala de 0 a 10. Una relación entre R y x está dada por la fórmula de Weber-Fechner $R(x) = a \log(x/x_0)$, donde a es una constante positiva y x_0 se denomina umbral del estímulo.

(a) Encuentra $R(x_0)$.

(b) Establece una relación entre $R(x)$ y $R(2x)$.

58 **Energía de un electrón** La energía $E(x)$ de un electrón, tras pasar por un material de espesor x , está dada por $E(x) = E_0 e^{-kx}$, donde E_0 es la energía inicial y x_0 es la duración de la radiación.

(a) Expresa, en términos de E_0 , la energía de un electrón luego de atravesar un material de espesor x_0 .

(b) Indica, en términos de x_0 , el espesor en que el electrón pierde 99% de su energía inicial.

59 **Capa de ozono** Un método para calcular el espesor de la capa de ozono consiste en usar la fórmula

$$\ln I_0 - \ln I = kx,$$

donde I_0 es la intensidad de una longitud de onda particular de luz del Sol antes de que llegue a la atmósfera, I es la intensidad de la misma longitud de onda después de pasar por una capa de ozono de x cm de espesor y k es la constante de absorción de ozono para esa longitud de onda. Supón que para una longitud de onda de 3176×10^{-8} cm con $k \approx 0.39$, I_0/I se mide y da 1.12. Calcula el espesor de la capa de ozono al 0.01 cm más cercano.

60 **Capa de ozono** Consulta el ejercicio 59. Calcula el porcentaje de decremento de la intensidad de luz con una longitud de onda de 3176×10^{-8} cm si la capa de ozono mide 0.24 cm de grueso.

Ejercicios 61 y 62: grafica f y g en el mismo plano coordenado y calcula la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$.

61 $f(x) = x^3 - 3.5x^2 + 3x$; $g(x) = \log 3x$

62 $f(x) = 3^{-0.5x}$; $g(x) = \log x$

Ejercicios 63 y 64: usa una gráfica para calcular las raíces de la ecuación en el intervalo dado.

63 $e^{x^2} - 2 \log(1 + x^2) + 0.5x = 0$; $[0, 8]$

64 $0.3 \ln x + x^3 - 3.1x^2 + 1.3x + 0.8 = 0$; $(0, 3)$

Ejercicios 65 y 66: grafica f en el intervalo $[0.2, 16]$. (a) Calcula los intervalos en que f sea creciente o decreciente. (b) Calcula los valores máximo y mínimo de f en $[0.2, 16]$.

65 $f(x) = 2 \log 2x - 1.5x + 0.1x^2$

66 $f(x) = 1.1^{3x} + x - 1.35 - \log x + 5$

Ejercicios 67 y 68: resuelve gráficamente la ecuación.

67 $x \log x - \log x = 5$

68 $0.3e^x - \ln x = 4 \ln(x + 1)$

Ejercicios 69 y 70: el canto de algunas aves disminuye de intensidad (volumen sonoro) conforme avanza en la atmósfera; cuanto más alejado se encuentra un observador de un ave, el sonido será más débil. Esta disminución de intensidad sirve para calcular la distancia entre ambos mediante la fórmula

$$I = I_0 - 20 \log d - kd \quad \text{siempre que } 0 \leq I \leq I_0$$

donde I_0 representa la intensidad (en decibeles) del canto a un metro de distancia (I_0 se suele conocer y, por lo general, depende del tipo de ave), I es la intensidad a una distancia d metros del ave y k es una constante positiva que depende de condiciones atmosféricas como humedad y temperatura. Dadas I_0 , I y k , estima gráficamente la distancia d entre el ave y el observador.

69 $I_0 = 70$, $I = 20$, $k = 0.076$

70 $I_0 = 60$, $I = 15$, $k = 0.11$

5.6

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En esta sección consideraremos varios tipos de ecuaciones exponenciales y logarítmicas con sus aplicaciones. Al resolver una ecuación donde aparecen expresiones exponenciales con bases constantes y variables en el o los exponentes, a menudo *igualamos los logaritmos de ambos lados* de la ecuación. Con esto, las variables en el exponente se convierten en multiplicadores y la ecuación resultante es más fácil de resolver. Nos referimos a este paso como "tomar el logaritmo de ambos lados".

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $3^x = 21$.

SOLUCIÓN

$$3^x = 21 \quad \text{dada}$$

$$\log(3^x) = \log 21 \quad \text{tomar } \log \text{ de ambos lados}$$

$$x \log 3 = \log 21 \quad \text{ley 3 de los logaritmos}$$

$$x = \frac{\log 21}{\log 3} \quad \text{dividir entre } \log 3$$

También pudimos usar logaritmos naturales para obtener

$$x = \frac{\ln 21}{\ln 3}$$

Obtendremos la solución aproximada $x \approx 2.77$, con una calculadora. Una verificación parcial consiste en observar que como $3^2 = 9$ y $3^3 = 27$, el número x tal que $3^x = 21$ debe estar entre 2 y 3, algo más cerca de 3 que de 2.

También pudimos resolver la ecuación del ejemplo 1 cambiando la forma exponencial $3^x = 21$ en logarítmica, como en la sección 5.4, y obtener

$$x = \log_3 21.$$

Ésta es, de hecho, la solución de la ecuación; sin embargo, dado que las calculadoras por lo general sólo tienen teclas para \log y \ln , no podemos calcular $\log_3 21$ directamente. En el teorema siguiente se proporciona una sencilla fórmula de cambio de base para hallar $\log_b u$ si $u > 0$ y b es cualquier base logarítmica.

Teorema: fórmula de cambio de base

Si $u > 0$ y si a y b son números reales positivos diferentes de 1, entonces

$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}.$$

DEMOSTRACIÓN Comenzamos con las ecuaciones equivalentes

$$w = \log_b u \quad \text{y} \quad b^w = u$$

y procedemos de esta forma:

$$b^w = u \quad \text{dada}$$

$$\log_a b^w = \log_a u \quad \text{tomar } \log_a \text{ de ambos lados}$$

$$w \log_a b = \log_a u \quad \text{ley 3 de los logaritmos}$$

$$w = \frac{\log_a u}{\log_a b} \quad \text{dividir entre } \log_a b$$

Puesto que $w = \log_b u$, se obtiene la fórmula.

El siguiente caso especial de la fórmula del cambio de base se obtiene con $u = a$ y por el hecho de que $\log_a a = 1$:

$$\log_a a = \frac{1}{\log_a b}$$

La fórmula del cambio de base se confunde a veces con la ley 2 de los logaritmos. El siguiente aviso precautorio puede recordarse por la frase "un cociente de logaritmos *no es* el logaritmo del cociente".

■ ¡Precaución! ■

$$\frac{\log_a u}{\log_a b} \neq \log_a \frac{u}{b}; \quad \frac{\log_a u}{\log_a b} \neq \log_a (u - b)$$

Los casos especiales de la fórmula del cambio de base más usados son para $a = 10$ (logaritmos comunes) y $a = e$ (logaritmos naturales), según se expresa a continuación.

**Fórmulas especiales
para cambio de base**

$$(1) \log_a u = \frac{\log_{10} u}{\log_{10} b} = \frac{\log u}{\log b} \quad (2) \log_a u = \frac{\log_e u}{\log_e b} = \frac{\ln u}{\ln b}$$

A continuación, re trabajamos el ejemplo 1 usando una fórmula para cambio de base.

EJEMPLO 2 Uso de la fórmula para cambio de base

Resuelve la ecuación $3^x = 21$.

SOLUCIÓN Procedemos de esta manera:

$$\begin{aligned} 3^x &= 21 && \text{dada} \\ x &= \log_3 21 && \text{cambiar a forma logarítmica} \\ &= \frac{\log 21}{\log 3} && \text{fórmula especial de cambio de base 1} \end{aligned}$$

Otro método consiste en utilizar la fórmula 2 especial de cambio de base, con lo que llegaríamos a

$$x = \frac{\ln 21}{\ln 3}$$

Los logaritmos con base 2 se utilizan en ciencias de la computación. El ejemplo que sigue muestra cómo hallarlos usando fórmulas de cambio de base.

EJEMPLO 3 Cálculo de un logaritmo con base 2

Calcula $\log_2 5$ usando

- (a) logaritmos comunes (b) logaritmos naturales

SOLUCIÓN Con las fórmulas especiales de cambio de base 1 y 2 obtenemos:

$$(a) \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} \approx 2.322$$

$$(b) \log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.322$$



EJEMPLO 4 Solución de una ecuación exponencial

Resuelve la ecuación $5^{2x+1} = 6^{x-2}$.

SOLUCIÓN Podemos usar logaritmos comunes o naturales. Los primeros nos dan:

$$5^{2x+1} = 6^{x-2} \quad \text{dada}$$

$$\log(5^{2x+1}) = \log(6^{x-2}) \quad \text{tomar log de ambos lados}$$

$$(2x + 1) \log 5 = (x - 2) \log 6 \quad \text{ley 3 de los logaritmos}$$

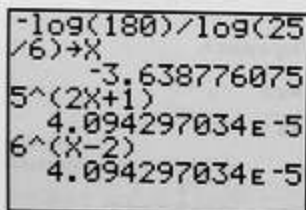
$$2x \log 5 + \log 5 = x \log 6 - 2 \log 6 \quad \text{multiplicar}$$

$$2x \log 5 - x \log 6 = -\log 5 - 2 \log 6 \quad \text{poner todos los términos con } x \text{ en un lado}$$

$$x(\log 5^2 - \log 6) = -(\log 5 + \log 6^2) \quad \text{factorizar y usar la ley 3 de los logaritmos}$$

$$x = -\frac{\log(5 \cdot 36)}{\log \frac{25}{6}} \quad \text{despejar } x \text{ y usar las leyes de los logaritmos}$$

Figura 1



Una aproximación es $x \approx -3.64$. En la figura 1 se presenta una comprobación con calculadora para este ejemplo. De la comprobación se deduce que las gráficas de $y = 5^{2x+1}$ y $y = 6^{x-2}$ se cruzan en $(-3.64, 0.00004)$ aproximadamente.

EJEMPLO 5 Solución de una ecuación exponencial

Resuelve la ecuación $\frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$.

$$\text{SOLUCIÓN} \quad \frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3 \quad \text{dada}$$

$$5^x - 5^{-x} = 6 \quad \text{multiplicar por 2}$$

$$5^x - \frac{1}{5^x} = 6 \quad \text{definición de exponente negativo}$$

$$5^x(5^x) - \frac{1}{5^x}(5^x) = 6(5^x) \quad \text{multiplicar por el mcd. } 5^x$$

$$(5^x)^2 - 6(5^x) - 1 = 0 \quad \text{simplificar y restar } 6(5^x)$$

(continúa)

Notarás que $(5^x)^2$ puede escribirse como 5^{2x} .

Reconocemos que esta forma de la ecuación es cuadrática en 5^x y procedemos de esta forma:

$$(5^x)^2 - 6(5^x) - 1 = 0 \quad \text{ley de exponentes}$$

$$5^x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2} \quad \text{fórmula cuadrática}$$

$$5^x = 3 \pm \sqrt{10} \quad \text{simplificar}$$

$$5^x = 3 + \sqrt{10} \quad 5^x > 0, \text{ pero } 3 - \sqrt{10} < 0$$

$$\log 5^x = \log(3 + \sqrt{10}) \quad \text{tomar log de ambos lados}$$

$$x \log 5 = \log(3 + \sqrt{10}) \quad \text{ley 3 de los logaritmos}$$

$$x = \frac{\log(3 + \sqrt{10})}{\log 5} \quad \text{dividir entre } \log 5$$

Una aproximación es $x \approx 1.13$.



EJEMPLO 6 Solución de una ecuación que contiene logaritmos

Despeja x en la ecuación $\log \sqrt[3]{x} = \sqrt{\log x}$ para x .

SOLUCIÓN

$$\log x^{1/3} = \sqrt{\log x} \quad \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

$$\frac{1}{3} \log x = \sqrt{\log x} \quad \log x^r = r \log x$$

$$\frac{1}{9}(\log x)^2 = \log x \quad \text{elevar al cuadrado ambos lados}$$

$$(\log x)^2 = 9 \log x \quad \text{multiplicar por 9}$$

$$(\log x)^2 - 9 \log x = 0 \quad \text{igualar un lado a cero}$$

$$(\log x)(\log x - 9) = 0 \quad \text{factorizar } \log x$$

$$\log x = 0, \quad \log x - 9 = 0 \quad \text{igualar cada factor a cero}$$

$$\log x = 9 \quad \text{sumar 9}$$

$$x = 10^0 = 1 \quad \text{o} \quad x = 10^9 \quad \log_{10} x = a \iff x = 10^a$$

✓ Comprobación $x = 1$ LI: $\log \sqrt[3]{1} = \log 1 = 0$

LD: $\sqrt{\log 1} = \sqrt{0} = 0$

✓ Comprobación $x = 10^9$ LI: $\log \sqrt[3]{10^9} = \log 10^3 = 3$

LD: $\sqrt{\log 10^9} = \sqrt{9} = 3$

La ecuación tiene dos soluciones, 1 y mil millones.

La función $y = 2/(e^x + e^{-x})$ recibe el nombre de **función secante hiperbólica**. En el siguiente ejemplo resolveremos esta ecuación para x en términos de y . Con restricciones idóneas, lo anterior produce una función inversa.

EJEMPLO 7 Determinación de una función hiperbólica inversa

Expresa x en términos de y en la ecuación $y = 2/(e^x + e^{-x})$.

SOLUCIÓN $y = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ dada

$$ye^x + ye^{-x} = 2 \quad \text{multiplicar por } e^x + e^{-x}$$

$$ye^x + \frac{y}{e^x} = 2 \quad \text{definición de exponente negativo}$$

$$ye^x(e^x) + \frac{y}{e^x}(e^x) = 2(e^x) \quad \text{multiplicar por el mcd, } e^x$$

$$y(e^x)^2 - 2e^x + y = 0 \quad \text{simplificar y restar } 2e^x$$

Esta forma de la ecuación podemos identificarla como una cuadrática en e^x con coeficientes $a = y$, $b = -2$ y $c = y$. Advertirás que estamos despejando e^x , no x .

$$e^x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(y)(y)}}{2(y)} \quad \text{fórmula cuadrática}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y^2}}{2y} \quad \text{simplificar}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4} \sqrt{1 - y^2}}{2y} \quad \text{factorizar } \sqrt{4}$$

$$e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{y} \quad \text{cancelar un factor de 2}$$

$$x = \ln \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{y} \quad \text{tomar ln de ambos lados}$$

Figura 2

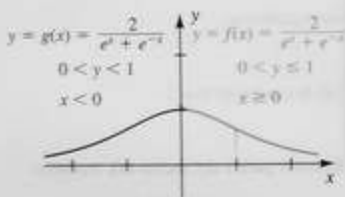
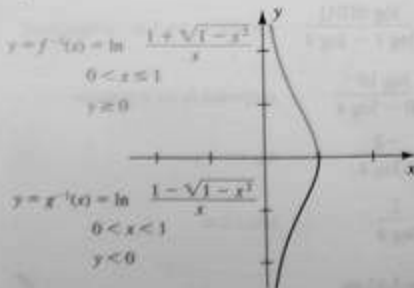


Figura 3



Para la curva azul $y = f(x)$ de la figura 2, la función inversa es

$$y = f^{-1}(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x},$$

que se muestra en azul en la figura 3. Observa las relaciones entre el dominio y la imagen. Para la curva gris $y = g(x)$ en la figura 2, la función inversa es

$$y = g^{-1}(x) = \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x},$$

que se muestra en gris en la figura 3. Como la secante hiperbólica no es biunívoca, su inversa no puede tener una ecuación simple.

La secante hiperbólica inversa es parte de la ecuación de una curva llamada **tractriz**. La curva se asocia con la solución propuesta por Gottfried Wilhelm von Leibnitz (1646-1716) para la pregunta: "¿Cuál es la trayectoria de un objeto al ser arrastrado sobre un plano horizontal por una cuerda de longitud constante, cuando el extremo de la cuerda no unido al objeto se mueve en línea recta sobre el plano?"

EJEMPLO 8 Cálculo de la penetración de la luz en el mar

La ley de Beer-Lambert expresa que la cantidad de luz I que penetra a una profundidad de x metros en el mar está dada por $I = I_0 c^x$, donde $0 < c < 1$ e I_0 es la cantidad de luz en la superficie.

(a) Despeja x mediante logaritmos comunes.

(b) Si $c = \frac{1}{4}$, calcula la profundidad a la que $I = 0.01I_0$ (esto determina la zona donde puede tener lugar la fotosíntesis).

SOLUCIÓN

(a) $I = I_0 c^x$ dada

$$\frac{I}{I_0} = c^x \quad \text{aislar la expresión exponencial}$$

$$x = \log_c \frac{I}{I_0} \quad \text{cambiar a forma logarítmica}$$

$$= \frac{\log(I/I_0)}{\log c} \quad \text{fórmula especial de cambio de base 1}$$

(b) Con $I = 0.01I_0$ y $c = \frac{1}{4}$ en la fórmula para x del inciso (a), tenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{\log(0.01I_0/I_0)}{\log \frac{1}{4}} && \text{sustituir para } I \text{ y } c \\ &= \frac{\log(0.01)}{\log 1 - \log 4} && \text{cancelar } I_0; \text{ ley 2 de los logaritmos} \\ &= \frac{\log 10^{-2}}{0 - \log 4} && \text{propiedad de los logaritmos} \\ &= \frac{-2}{-\log 4} && \log 10^x = x \\ &= \frac{2}{\log 4} && \text{simplificar} \end{aligned}$$

Una aproximación es $x \approx 3.32$ m.

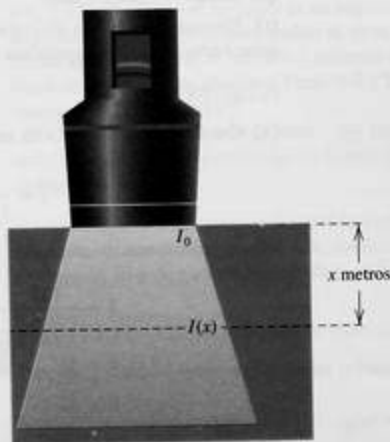
EJEMPLO 9 Comparación de intensidades luminosas

Si un haz de luz con intensidad I_0 se proyecta verticalmente hacia abajo en el agua, su intensidad $I(x)$ a una profundidad de x metros es $I(x) = I_0 e^{-1.4x}$ (ve la figura 4). ¿A qué profundidad tendrá la mitad de su valor en la superficie?

SOLUCIÓN En la superficie, $x = 0$ y la intensidad es

$$\begin{aligned} I(0) &= I_0 e^0 \\ &= I_0 \end{aligned}$$

Figura 4



Deseamos hallar el valor de x tal que $I(x) = \frac{1}{2}I_0$. Esto lleva a:

$$I(x) = \frac{1}{2}I_0 \quad \text{intensidad deseada}$$

$$I_0 e^{-1.4x} = \frac{1}{2}I_0 \quad \text{fórmula para } I(x)$$

$$e^{-1.4x} = \frac{1}{2} \quad \text{dividir entre } I_0 (I_0 \neq 0)$$

$$-1.4x = \ln \frac{1}{2} \quad \text{cambiar a la forma logarítmica}$$

$$x = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-1.4} \quad \text{dividir entre } -1.4$$

Una aproximación es $x \approx 0.495$ m.

EJEMPLO 10 Una curva logística

Una **curva logística** es la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = \frac{k}{1 + be^{-cx}},$$

donde k , b y c son constantes positivas. Dichas curvas son útiles para describir una población y que crece rápidamente al principio, pero cuya tasa de crecimiento disminuye después que x alcanza cierto valor. En un famoso estudio del crecimiento de protozoarios hecho por Gause, se encontró que una población de *Paramecium caudata* se podía describir mediante una ecuación logística con $c = 1.1244$, $k = 105$ y x es el tiempo en días.

- (a) Encuentra b si la población inicial era de 3 protozoarios.
 (b) En el estudio, la tasa máxima de crecimiento tuvo lugar en $y = 52$. ¿En qué momento x ocurrió esto?
 (c) Demuestra que, tras un largo periodo, la población descrita por cualquier curva logística se aproxima a la constante k .

SOLUCIÓN

- (a) Con $c = 1.1244$ y $k = 105$ en la ecuación logística, tenemos

$$y = \frac{105}{1 + be^{-1.1244x}}.$$

Ahora, procedemos de este modo

$$3 = \frac{105}{1 + be^0} = \frac{105}{1 + b} \quad y = 3 \text{ cuando } x = 0$$

$$1 + b = 35 \quad \text{multiplicar por } \frac{1+b}{3}$$

$$b = 34 \quad \text{despejar } b$$

- (b) Puesto que $b = 34$ llegamos a:

$$52 = \frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}} \quad \text{sea } y = 52 \text{ en el inciso (a)}$$

$$1 + 34e^{-1.1244x} = \frac{105}{52} \quad \text{multiplicar por } \frac{1 + 34e^{-1.1244x}}{52}$$

$$e^{-1.1244x} = \left(\frac{105}{52} - 1\right) \cdot \frac{1}{34} = \frac{53}{1768} \quad \text{aislar } e^{-1.1244x}$$

$$-1.1244x = \ln \frac{53}{1768} \quad \text{cambiar a la forma logarítmica}$$

$$x = \frac{\ln \frac{53}{1768}}{-1.1244} \approx 3.12 \text{ días} \quad \text{dividir entre } -1.1244$$

- (c) Cuando $x \rightarrow \infty$, $e^{-cx} \rightarrow 0$. Por lo tanto,

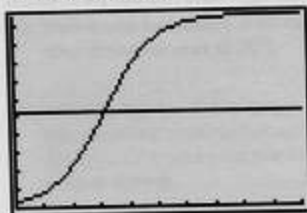
$$y = \frac{k}{1 + be^{-cx}} \rightarrow \frac{k}{1 + b \cdot 0} = k.$$

En el ejemplo siguiente graficamos la ecuación obtenida en el inciso (a) del ejemplo anterior.

EJEMPLO 11 Trazado de la gráfica de una curva logística
 Grafica la curva logística dada por

$$y = \frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}}$$

Figura 5
 $[0, 10]$ por $[0, 105, 10]$



y calcula el valor de x para $y = 52$.

SOLUCIÓN Comenzamos por asignar

$$\frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}}$$

a Y_1 y 52 a Y_2 . Como el tiempo x es no negativo, escogemos $X_{\min} = 0$. Seleccionamos $X_{\max} = 10$ para incluir el valor de x encontrado en el inciso (b) del ejemplo 10. Por el inciso (c), sabemos que el valor de y no puede rebasar 105; por lo tanto, elegimos $Y_{\min} = 0$ y $Y_{\max} = 105$ y obtenemos una imagen similar a la figura 5.

Con la función "intersect", vemos que para $y = 52$, el valor de x es alrededor de 3.12, lo que concuerda con la aproximación encontrada en (b) del ejemplo 10.

En el ejemplo siguiente se muestra la forma en que la fórmula de cambio de base hace posible la gráfica de funciones logarítmicas con bases diferentes de 10 y de e en una calculadora graficadora.

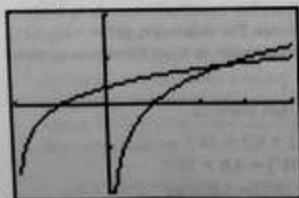
EJEMPLO 12 Cálculo de puntos de intersección de gráficas logarítmicas
 Calcula el punto de intersección de las gráficas de

$$f(x) = \log_3 x \quad \text{y} \quad g(x) = \log_6 (x + 2).$$

SOLUCIÓN En su mayor parte, estos dispositivos están equipados para trabajar sólo con funciones logarítmicas comunes y naturales; por tanto, primero usamos una fórmula de cambio de base para describir f y g como

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln 3} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{\ln (x + 2)}{\ln 6}.$$

Figura 6
 $[-2, 4]$ por $[-2, 2]$



En seguida, asignamos $(\ln x)/\ln 3$ y $(\ln(x + 2))/\ln 6$ a Y_1 y Y_2 , respectivamente. Después de graficar Y_1 y Y_2 con una pantalla estándar, vemos que hay un punto de intersección en el primer cuadrante con $2 < x < 3$. Con la función "intersect", encontramos que el punto de intersección es aproximadamente $(2.52, 0.84)$.

La figura 6 se obtuvo con una pantalla de $[-2, 4]$ por $[-2, 2]$. No hay otros puntos de intersección, ya que f crece con más rapidez que g para $x > 3$.

5.6 Ejercicios

Ejercicios 1 al 4: encuentra la solución exacta y una aproximación a dos lugares decimales usando (a) el método del ejemplo 1 y (b) el método del ejemplo 2.

1 $5^x = 8$

2 $4^x = 3$

3 $3^{x-1} = 5$

4 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 100$

Ejercicios 5 al 8: evalúa usando la fórmula de cambio de base.

5 $\log_2 6$

6 $\log_2 20$

7 $\log_3 0.2$

8 $\log_3 \frac{1}{2}$

Ejercicios 9 y 10: evalúa utilizando la fórmula de cambio de base; no uses calculadora.

9 $\frac{\log_2 16}{\log_2 4}$

10 $\frac{\log_2 243}{\log_2 3}$

Ejercicios 11 al 24: encuentra la solución exacta utilizando logaritmos comunes, y una aproximación de dos lugares decimales de cada solución, cuando sea apropiado.

11 $3^{x+4} = 2^{1-3x}$

12 $4^{2x+7} = 5^{x-2}$

13 $2^{2x-1} = 5^{x-2}$

14 $3^{2-3x} = 4^{2x+1}$

15 $2^{-x} = 8$

16 $2^{-x^2} = 5$

17 $\log x = 1 - \log(x-3)$

18 $\log(5x+1) = 2 + \log(2x-3)$

19 $\log(x^2+4) - \log(x+2) = 2 + \log(x-2)$

20 $\log(x-4) - \log(3x-10) = \log(1/x)$

21 $5^x + 125(5^{-x}) = 30$

22 $3(3^x) + 9(3^{-x}) = 28$

23 $4^x - 3(4^{-x}) = 8$

24 $2^x - 6(2^{-x}) = 6$

Ejercicios 25 al 32: resuelve la ecuación sin calculadora.

25 $\log(x^2) = (\log x)^2$

26 $\log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$

27 $\log(\log x) = 2$

28 $\log \sqrt{x^2-9} = 2$

29 $x^{\sqrt{\log x}} = 10^8$

31 $e^{2x} + 2e^x - 15 = 0$

30 $\log(x^3) = (\log x)^3$

32 $e^x + 4e^{-x} = 5$

Ejercicios 33 y 34: Resuelve la ecuación.

33 $\log_2 x - \log_2(x+42) = 0$

34 $\log_4 x + \log_8 x = 1$

Ejercicios 35 al 38: usa logaritmos comunes para resolver x en términos de y .

35 $y = \frac{10^x + 10^{-x}}{2}$

36 $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{2}$

37 $y = \frac{10^x + 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$

38 $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}}$

Ejercicios 39 al 42: usa logaritmos naturales para resolver x en términos de y .

39 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

40 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

41 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

42 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Ejercicios 43 y 44: traza la gráfica de f y emplea la fórmula de cambio de base para calcular la intersección en y .

43 $f(x) = \log_2(x+3)$

44 $f(x) = \log_3(x+5)$

Ejercicios 45 y 46: traza la gráfica de f y usa la fórmula de cambio de base para calcular la intersección en x .

45 $f(x) = 4^x - 3$

46 $f(x) = 3^x - 6$

Ejercicios 47 al 50: los químicos utilizan un número denotado por pH para describir cuantitativamente la acidez o alcalinidad de soluciones. Por definición, $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$, donde $[\text{H}^+]$ es la concentración de iones hidrógeno en moles por litro.

47 Calcula el pH de cada sustancia:

(a) vinagre: $[\text{H}^+] \approx 6.3 \times 10^{-3}$

(b) zanahorias: $[\text{H}^+] \approx 1.0 \times 10^{-5}$

(c) agua de mar: $[\text{H}^+] \approx 5.0 \times 10^{-8}$

48. Calcula la concentración de los iones hidrógeno $[H^+]$ de cada cosa

- (a) manzana: $pH \approx 3.0$
 (b) cerveza: $pH \approx 4.2$
 (c) leche: $pH \approx 6.6$

49. Una solución se considera alcalina si $[H^+] < 10^{-7}$ o ácida si $[H^+] > 10^{-7}$. Encuentra las desigualdades correspondientes en términos de pH .

50. Muchas soluciones tienen un pH entre 1 y 14. Halla los límites correspondientes de $[H^+]$.

51. Interés compuesto Usa la fórmula de interés compuesto para determinar cuánto tardará una suma de dinero en duplicarse, si se invierte a una tasa de 6% por año compuesto mensualmente.

52. Interés compuesto Despeja t , de la fórmula de interés compuesto

$$A = C \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{nt}$$

usando logaritmos naturales.

53. Zona fótica Consulta el ejemplo 8. Desde el punto de vista de la biología marina, la zona marina más importante es la zona fótica, ya que ahí ocurre la fotosíntesis. Dicha zona termina a una profundidad donde penetra alrededor del 1% de la luz superficial. En aguas muy claras del Caribe, el 50% de la luz de la superficie llega a profundidades de hasta 13 metros. Calcula la profundidad de la zona fótica.

54. Zona fótica En contraste con la situación descrita en el ejercicio anterior, en algunas partes del puerto de Nueva York el 50% de la luz superficial no llega a una profundidad de 10 centímetros. Calcula la profundidad de la zona fótica.

55. Absorción de un medicamento Si se ingiere una pastilla de 100 mg contra el asma y no hay nada del medicamento en el cuerpo cuando se toma por primera vez, la cantidad total A en el torrente sanguíneo, después de t minutos, está pronosticada por

$$A = 100[1 - (0.9)^t] \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 10.$$

- (a) Traza la gráfica de la ecuación.

- (b) Determina los minutos necesarios para que 50 miligramos del fármaco entren en el torrente sanguíneo.

56. Dosis de un medicamento El cuerpo elimina un producto a través de la orina. Supón que para una dosis de 10 mg, la cantidad $A(t)$ restante en el cuerpo, t horas después, está dada por $A(t) = 10(0.8)^t$ y que para que sea efectiva, al menos 2 mg deben estar en el cuerpo.

- (a) Indica cuándo quedarán 2 mg en el cuerpo.

- (b) ¿Cuál es la vida media del medicamento?

57. Mutación genética La fuente básica de la diversidad genética es la mutación o cambio en la estructura química de los genes. Si un gen cambia con una rapidez constante m y si se desprecian otras fuerzas de evolución, la frecuencia F del gen original, después de t generaciones, está dada por $F = F_0(1 - m)^t$, donde F_0 es la frecuencia a $t = 0$.

- (a) Despeja t utilizando logaritmos comunes.

- (b) Si $m = 5 \times 10^{-5}$, ¿después de cuántas generaciones será $F = \frac{1}{2}F_0$?

58. Productividad laboral Ciertos procesos de aprendizaje se pueden ilustrar mediante la gráfica de una ecuación de la forma $f(x) = a + b(1 - e^{-cx})$, donde a , b y c son constantes positivas. Supón que un fabricante calcula que un nuevo trabajador puede producir cinco piezas el primer día de trabajo. A medida que el obrero adquiere más experiencia, la producción diaria aumenta hasta alcanzar una máxima. Supón que el n -ésimo día de trabajo, el número $f(n)$ de piezas producidas se calcula mediante la fórmula

$$f(n) = 3 + 20(1 - e^{-0.1n}).$$

- (a) Calcula el número de artículos producidos los días quinto, noveno, vigésimo cuarto y trigésimo.

- (b) Traza la gráfica de f de $n = 0$ a $n = 30$ (las gráficas de este tipo se llaman *curvas de aprendizaje* y se usan con frecuencia en educación y psicología).

- (c) ¿Qué ocurre cuando n aumenta en forma ilimitada?

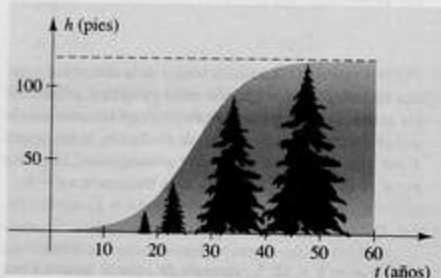
59 **Altura de los árboles** El aumento de la altura arbórea se describe a menudo mediante una ecuación logística. Supón que la altura h (en pies) de un árbol de edad t (en años) es

$$h = \frac{120}{1 + 200e^{-0.2t}}$$

según vemos en la gráfica de la figura.

- (a) ¿Cuál será su altura a los 10 años?
 (b) ¿A qué edad medirá 50 pies?

Ejercicio 59:



60 **Productividad laboral** A veces, los fabricantes utilizan fórmulas empíricas para predecir el tiempo requerido en la producción del n -ésimo artículo en una línea de montaje para un entero n . Si $T(n)$ denota el tiempo requerido en el ensamblado del n -ésimo artículo y T_1 representa el lapso requerido para el primer artículo, o prototipo, entonces típicamente $T(n) = T_1 n^{-k}$ para alguna constante k positiva.

- (a) En muchos aviones, el tiempo para ensamblar la segunda unidad, o sea $T(2)$, es igual a $(0.80)T_1$. Encuentra el valor de k .
 (b) Expresa, en términos de T_1 , el lapso requerido para ensamblar el cuarto avión.
 (c) Proporciona, en términos de $T(n)$, el tiempo $T(2n)$ que requiere el ensamblado del $(2n)$ -ésimo avión.

61 **Cortante vertical del viento** Consulta los ejercicios 67 y 68 de la sección 3.3. Si la rapidez del viento a una altura h_0 y si v_1 a una altura h_1 , la cortante vertical del viento se describe mediante la ecuación

$$\frac{v_0}{v_1} = \left(\frac{h_0}{h_1} \right)^P$$

donde P es una constante. Durante todo un año, en Montreal, el viento transversal vertical máximo se presentó cuando los vientos a 200 pies del suelo eran de 25 mi/h en tanto que a 35 pies sobre el suelo eran de 6 mi/h. Encuentra P para estas condiciones.

62 **Cortante vertical del viento** Consulta el ejercicio 61. El promedio de la cortante vertical del viento está dado por la ecuación

$$\bar{s} = \frac{v_1 - v_0}{h_1 - h_0}$$

Supón que la velocidad del viento se incrementa con la altitud y que todos los valores de la rapidez del viento tomados a altitudes de 35 y 200 pies son de más de 1 mi/h. ¿Un valor creciente de P producirá valores de \bar{s} mayores o menores?

Ejercicios 63 y 64: un economista sospecha que los siguientes puntos de datos se encuentran en la gráfica de $y = c2^{kx}$, donde c y k son constantes. Si los puntos de datos tienen una precisión de tres lugares decimales, ¿es correcta esta suposición?

63 (0, 4), (1, 3.249), (2, 2.639), (3, 2.144)

64 (0, -0.3), (0.5, -0.345), (1, -0.397), (1.5, -0.551), (2, -0.727)

Ejercicios 65 y 66: se sospecha que los siguientes puntos de datos se localizan en la gráfica de $y = c \log(kx + 10)$, donde c y k son constantes. Si dichos puntos tienen una precisión de tres lugares decimales, ¿es correcta la suposición?

65 (0, 1.5), (1, 1.619), (2, 1.720), (3, 1.997)

66 (0, 0.7), (1, 0.782), (2, 0.847), (3, 0.900), (4, 0.945)

Ejercicios 67 y 68: aproxima la función en el valor de x a cuatro lugares decimales.

67 $h(x) = \log_4 x - 2 \log_4 1.2x$; $x = 5.3$

68 $h(x) = 3 \log_5 (2x - 1) + 7 \log_5 (x + 0.2)$; $x = 52.6$

Ejercicios 69 y 70: usa una gráfica para estimar las raíces de la ecuación en el intervalo dado.

69 $x - \ln(0.3x) - 3 \log_5 x = 0$; (0, 9)

70 $2 \log_2 2x - \log_5 x^2 = 0$; (0, 3)

Ejercicios 71 y 72: grafica f y g en el mismo plano coordenado y calcula la solución de la ecuación $f(x) = g(x)$.

71 $f(x) = x$; $g(x) = 3 \log_2 x$

72 $f(x) = x$; $g(x) = -x^2 - \log_2 x$

Ejercicios 73 y 74: grafica f y g en el mismo plano coordenado y calcula la solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$.

73 $f(x) = 3^{-x} - 4^{2x}$; $g(x) = \ln(1.2) - x$

74 $f(x) = 3 \log_2 x - \log_2 x$; $g(x) = e^x - 0.25x^4$

75 **Memoria humana** A un grupo de estudiantes de nivel elemental se les enseñó a dividir durante una semana y luego se les examinó; la calificación promedio fue de 85. De ahí en adelante, cada semana se les practicó un examen semejante, sin repasar la materia. Representa con $n(t)$ el promedio de calificación, después de $t \geq 0$ semanas. Grafica cada $n(t)$ y determina cuál función da el mejor modelo de la situación.

(1) $n(t) = 85e^{0.5}$

(2) $n(t) = 70 + 10 \ln(t + 1)$

(3) $n(t) = 86 - e^t$

(4) $n(t) = 85 - 15 \ln(t + 1)$

76 **Enfriamiento** Un frasco de agua a 212°F se pone en una mesa, en un cuarto cuya temperatura es de 72°F . Si $T(t)$ representa la temperatura del agua, después de t horas, grafica $T(t)$ y encuentra la función que modele mejor la situación.

(1) $T(t) = 212 - 50t$

(2) $T(t) = 140e^{-t} + 72$

(3) $T(t) = 212e^{-t}$

(4) $T(t) = 72 + 10 \ln(140t + 1)$

77 **Capa de ozono** Las mediciones practicadas con un espectrómetro para levantamiento de mapas de la capa total de ozono, a bordo del satélite climatológico Nimbus 7 de la NASA, mostraron que los niveles de ozono en la estratosfera están disminuyendo con una rapidez más alta de lo anticipado. En abril de 1993, en la mayor parte del hemisferio norte estuvieron 11% más abajo que los de abril de 1992. Según algunos expertos, la causa del rápido deterioro puede ser la erupción, en junio de 1991, del Monte Pinatubo, en Filipinas, más que el adelgazamiento de la capa de ozono.

(a) Considera que el nivel de ozono en abril de 1992 es el normal y que continúa la rapidez o tasa de disminución de 1993; utiliza una tabla para pronosticar numéricamente el año en que la capa de ozono será de 50% de su nivel normal.

(b) Determina el año del inciso (a) por métodos algebraicos.

78 **Cáncer en la piel** La radiación ultravioleta B proveniente del Sol es la causa principal de cáncer no melanótico de la piel. El ozono de la atmósfera filtra una gran parte de esta radiación. En Toronto, la cantidad de radiación ultravioleta B aumentó 7% desde el verano de 1988 al verano de 1989. Si este aumento es permanente, la posibilidad de contraer cáncer de la piel en el transcurso de la vida se incrementa en el mismo porcentaje.

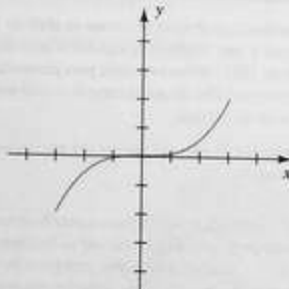
(a) Si continúa la rapidez de aumento, estima gráficamente cuántos años tardará en duplicarse la probabilidad de contraer cáncer de la piel en Toronto.

(b) Establece los años del inciso (a) con métodos algebraicos.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

- 1 ¿Es $f(x) = 2x^3 - 5$ una función biunívoca?
- 2 En la figura se muestra la gráfica de la función f con dominio $[-3, 3]$. Traza la gráfica de $y = f^{-1}(x)$.

Ejercicio 2



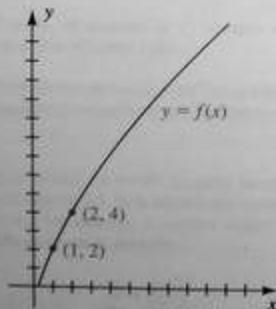
Ejercicios 3 y 4: (a) encuentra $f^{-1}(x)$, (b) Traza las gráficas de f y f^{-1} en el mismo plano coordenado.

3 $f(x) = 10 - 15x$ 4 $f(x) = 9 - 2x^2, x \leq 0$

- 5 Consulta la figura para hallar:

- (a) $f(1)$ (b) $(f \circ f)(1)$ (c) $f^{-1}(4)$
 (d) toda x tal que $f(x) = 4$
 (e) toda x tal que $f(x) > 4$

Ejercicio 5



- 6 Suponemos que f y g son funciones biunívocas tales que $f(2) = 7$, $f(4) = 2$ y $g(2) = 5$. Encuentra el valor, si es posible.

- (a) $(g \circ f^{-1})(7)$ (b) $(f \circ g^{-1})(5)$
 (c) $(f^{-1} \circ g^{-1})(5)$ (d) $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$

Ejercicios 7 al 22: traza la gráfica de f .

- 7 $f(x) = 3^{x+2}$ 8 $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$
 9 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ 10 $f(x) = 3^{-2x}$
 11 $f(x) = 3^{-x^2}$ 12 $f(x) = 1 - 3^{-x}$
 13 $f(x) = e^{x/2}$ 14 $f(x) = \frac{1}{2}e^x$
 15 $f(x) = e^{x-2}$ 16 $f(x) = e^{2-x}$
 17 $f(x) = \log_6 x$ 18 $f(x) = \log_6(36x)$
 19 $f(x) = \log_4(x^2)$ 20 $f(x) = \log_4 \sqrt{x}$
 21 $f(x) = \log_2(x+4)$ 22 $f(x) = \log_2(4-x)$

Ejercicios 23 y 24: evalúa sin usar calculadora.

- 23 (a) $\log_2 \frac{1}{16}$ (b) $\log_8 1$ (c) $\ln e$
 (d) $6^{\log_6 4}$ (e) $\log 1\,000\,000$ (f) $10^{1 \log 2}$
 (g) $\log_4 2$
 24 (a) $\log_5 \sqrt[3]{5}$ (b) $\log_5 1$ (c) $\log 10$
 (d) $e^{\ln 5}$ (e) $\log \log 10^{10}$ (f) $e^{2 \ln 3}$
 (g) $\log_2 3$

Ejercicios 25 al 44: resuelve la ecuación sin utilizar calculadora.

- 25 $2^{3x-1} = \frac{1}{2}$ 26 $8^{2x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = 4^{-x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$
 27 $\log \sqrt{x} = \log(x-6)$ 28 $\log_5(x-5) = \frac{2}{3}$
 29 $\log_4(x+1) = 2 + \log_4(3x-2)$
 30 $2 \ln(x+3) - \ln(x+1) = 3 \ln 2$
 31 $\ln(x+2) = \ln e^{3/2} - \ln x$ 32 $\log \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}$
 33 $2^{x+1} = 6$ 34 $3^{10x} = 7$

35 $2^{3x+3} = 3^{2x+1}$

36 $\log_3(3x) = \log_3 x + \log_3(4-x)$

37 $\log_4 x = \sqrt[3]{\log_4 x}$

38 $e^{x+4} = 3e^x$

39 $10^{\log x} = 5$

40 $e^{2x(x+1)} = 3$

41 $x^2(-2xe^{-x^2}) + 2xe^{-x^2} = 0$

42 $e^x + 2 = 8e^{-x}$

43 (a) $\log x^2 = \log(6-x)$ (b) $2 \log x = \log(6-x)$

44 (a) $\ln(e^x)^2 = 16$ (b) $\ln e^{x^2} = 16$

45 Expresa $\log x^4 \sqrt[3]{y^2/z}$ en términos de logaritmos de x , y y z .

46 Expresa $\log(x^2/y^3) + 4 \log y - 6 \log \sqrt{xy}$ como un logaritmo.

47 Encuentra una función exponencial que tenga intersección en y y pase por el punto $(1, 8)$.

48 Traza la gráfica $f(x) = \log_3(x+2)$.

Ejercicios 49 y 50: usa logaritmos comunes para resolver la ecuación para x en términos de y .

49 $y = \frac{1}{10^x + 10^{-x}}$

50 $y = \frac{1}{10^x - 10^{-x}}$

Ejercicios 51 y 52: calcula x a tres cifras significativas.

51 (a) $x = \ln 6.6$ (b) $\log x = 1.8938$

(c) $\ln x = -0.75$

52 (a) $x = \log 8.4$ (b) $\log x = -2.4260$

(c) $\ln x = 1.8$

Ejercicios 53 y 54 (a) Encuentra el dominio e imagen de la función. **(b)** Halla el inverso de la función, su dominio e imagen.

53 $y = \log_2(x+1)$

54 $y = 2^{x-1} - 2$

55 Crecimiento de bacterias. El número de bacterias de cierto cultivo, en un tiempo t (en horas) está dado por $Q(t) = 2(3^t)$, donde $Q(t)$ se mide en miles.

(a) ¿Cuántas bacterias hay en $t = 0$?

(b) Encuentra la cantidad después de 10 minutos, 30 minutos y 1 hora.

56 Interés compuesto Si se invierten \$1000 a una tasa de 12% compuesto trimestralmente, ¿cuál es la cantidad acumulada después de un año?

57 Desintegración del yodo radiactivo. El yodo radiactivo ^{131}I , que se usa con frecuencia en estudios de exploración de la glándula tiroides, se desintegra según la fórmula $N = N_0(0.5)^t$, donde N_0 es la dosis inicial y t es el tiempo en días.

(a) Traza la gráfica de la ecuación si $N_0 = 64$.

(b) Encuentra la vida media de ^{131}I .

58 Población de truchas. En un estanque se siembran 1000 especímenes; tres meses después se estima que quedan 600. Encuentra una fórmula de la forma $N = N_0 e^{kt}$ para calcular el número de ejemplares restantes, después de t meses.

59 Interés compuesto continuamente. Se invierten 10 000 dólares en una cuenta de ahorros en la que el interés es compuesto continuamente a una tasa de 11% por año.

(a) ¿Cuándo tendrá \$35 000 la cuenta?

(b) ¿Cuánto tarda el dinero en duplicarse?

60 El testamento de Benjamín Franklin. En 1790, Franklin donó \$4000 a la ciudad de Filadelfia con instrucciones de que se entregara la suma acumulada en 200 años. Alcanzó un valor de \$2 000 000 para esa fecha. Calcula la tasa de interés anual de esa acumulación.

61 Corriente eléctrica. La corriente $I(t)$ en cierto circuito eléctrico, en un tiempo t , está dada por $I(t) = I_0 e^{-Rt/L}$, donde R es la resistencia, L es la inductancia e I_0 es la corriente inicial en $t = 0$. Encuentra el valor de t , en términos de L y R , para el que $I(t)$ es el 1% de I_0 .

62 Intensidad del sonido. La fórmula para encontrar el nivel de intensidad del sonido es $\alpha = 10 \log(I/I_0)$.

(a) Despeja I en términos de α y de I_0 .

(b) Demuestra que el aumento de 1 dB (decibel) en el nivel de intensidad de sonido α corresponde a un incremento de 26% en la intensidad I .

- 63 Crecimiento de peces La longitud L de un pez se relaciona con su edad por medio de la fórmula de crecimiento de Von Bertalanffy

$$L = a(1 - be^{-bt}),$$

donde a , b y k son constantes positivas que dependen del tipo de pez. Resuelve esta ecuación para t para obtener una fórmula que permita calcular la edad de un ejemplar a partir de su longitud.

- 64 Zona sísmica en el oeste En la región occidental de Estados Unidos, el área A (en mi^2) afectada por un sismo se relaciona con la magnitud R del fenómeno mediante la fórmula

$$R = 2.3 \log(A + 3000) - 5.1.$$

Despeja A en términos de R .

- 65 Zona sísmica en el este Consulta el ejercicio 64. Para el este de la Unión Americana, la fórmula de área-magnitud tiene la forma

$$R = 2.3 \log(A + 34\,000) - 7.5.$$

Si A_1 es el área afectada por un sismo de magnitud R en el oeste y A_2 es la zona afectada por uno similar en el este, encuentra la fórmula para A_1/A_2 en términos de R .

- 66 Zona sísmica en los estados del centro Consulta el ejercicio 64. Para los estados del centro y de las montañas Rocallosas, la fórmula de área-magnitud adopta la forma

$$R = 2.3 \log(A + 14\,000) - 6.6.$$

Si un sismo tiene magnitud 4 en la escala de Richter, calcula el área A de la región que lo sentirá.

- 67 Presión atmosférica En ciertas condiciones, la presión atmosférica p a una altitud h está dada por la fórmula $p = 29e^{-0.000144h}$. Expresa h como función de p .

- 68 Velocidad de los cohetes Un cohete de masa m_1 se llena con combustible de masa inicial m_2 . Si se desprecian las fuerzas de fricción, la masa total m del cohete en el tiempo t , después de la ignición, se relaciona con su velocidad de ascenso y mediante $v = -a \ln m + b$, donde a y b son constantes. En el tiempo de ignición $t = 0$, $v = 0$ y $m = m_1 + m_2$. Cuando se apaga el cohete, $m = m_1$. Con esta información, halla una fórmula, en términos de un logaritmo, para la velocidad del cohete al momento en que se apaga.

- 69 Frecuencia sísmica Sea n el número promedio de sismos por año con magnitudes entre R y $R + 1$ en la escala de Richter. Una fórmula que calcula la relación entre n y R es

$$\log n = 7.7 - (0.9)R.$$

(a) Despeja n en términos de R .

(b) Encuentra n si $R = 4, 5$, y 6 .

- 70 Energía sísmica La energía E (en ergs) liberada durante un sismo de magnitud R se puede calcular mediante la fórmula

$$\log E = 11.4 + (1.5)R.$$

(a) Despeja E en términos de R .

(b) Encuentra la energía liberada durante el famoso terremoto de Alaska de 1964, que tuvo una intensidad de 8.4 en la escala de Richter.

- 71 Desintegración radiactiva Determinada sustancia radiactiva se desintegra según la fórmula $q(t) = q_0 e^{-0.0001t}$, donde q_0 es la cantidad inicial de sustancia y t es el tiempo en días. Calcula la vida media de la sustancia.

- 72 Crecimiento infantil El modelo Count es la fórmula que sirve para pronosticar la estatura de los preescolares. Si h es la estatura (en cm) y t es la edad (en años), entonces

$$h = 70.228 + 5.104t + 9.222 \ln t$$

para $\frac{1}{4} \leq t \leq 6$. En cálculo, la rapidez de crecimiento R (en cm/año) está dada por $R = 5.104 + (9.222/t)$. Pronostica la estatura y rapidez de crecimiento de un niño normal de 2 años de edad.

- 73 Circuito eléctrico La corriente I de cierto circuito eléctrico, en el tiempo t , está dada por

$$I = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/V}),$$

donde V es la fuerza electromotriz, R es la resistencia y L la inductancia. Despeja t de la ecuación.

- 74 Determinación de la edad por carbono 14 Con la técnica para el establecimiento de la edad mediante el carbono 14 (^{14}C) se calcula la edad de los especímenes arqueológicos y geológicos. La fórmula $T = -8310 \ln x$ se usa a veces para estimar la edad T (en años) de un hueso fósil, donde x es el porcentaje (expresado como decimal) de ^{14}C todavía presente en el espécimen.

- (a) Calcula la edad de un hueso fósil que contiene 4% de ^{14}C encontrado en una cantidad igual de carbono en un hueso de hoy día.
- (b) Calcula el porcentaje de ^{14}C presente en un fósil de 10 000 años de edad.

75. Población de Kenia Con base en las tasas demográficas actuales, se espera que la población de Kenia aumente según la fórmula $N = 21.4e^{0.033t}$, con N en millones y $t = 0$ corres-

pondiente a 1989. ¿Cuántos años tardará la población en duplicarse?

76. Historia de una lengua Consulta el ejercicio 48 de la sección 5.2. Si originalmente una lengua tenía N_0 palabras básicas, de las cuales $N(t)$ todavía están en uso, entonces $N(t) = N_0(0.805)^t$, donde el tiempo t se mide en miles de años. ¿Después de cuántos años estará en uso la mitad de las palabras básicas?

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 5

- 1 (a) Traza la gráfica de $f(x) = -(x-1)^3 + 1$ junto con la gráfica de $x = f^{-1}(x)$.



(b) Analiza qué le sucede a la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ (en general) conforme la gráfica de $y = f(x)$ crece o decrece.

(c) ¿Qué puedes concluir sobre los puntos de intersección de las gráficas de una función y su inversa?



- 2 Grafica $y = (-3)^x$ en $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$. Traza la gráfica para $x = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$. Analiza cuál es la relación entre esta gráfica y las gráficas de $y = 3^x$ y $y = -3^x$. Analiza también cómo se relacionan estos resultados con la restricción $a > 0$ para funciones exponenciales de la forma $f(x) = a^x$.



- 3 Catenaria Consulta el análisis sobre catenarias en la página 349 y la figura 4 en la sección 5.3.

- (a) Describe la gráfica de la ecuación mostrada para valores crecientes de a .
- (b) Encuentra una ecuación del cable de la figura, tal que el punto más bajo del cable esté a 30 pies del suelo y la diferencia entre el punto más alto (donde se conecta a la torre) y el más bajo sea menor que 2 pies, siempre que las torres estén a 40 pies una de otra.

- 4 Consulta el ejercicio 70 de la sección 5.4. Analiza la forma de resolver este ejercicio sin usar la fórmula para encontrar la cantidad total T . Prosigue con su solución y compara tu respuesta con la obtenida utilizando la fórmula para T .

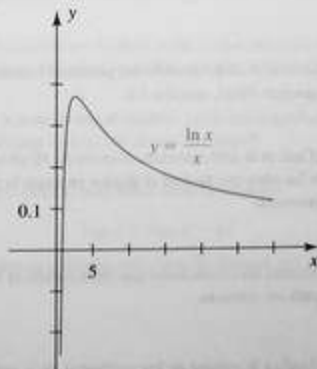
- 5 En la figura se aprecia una gráfica de $f(x) = (\ln x)/x$ para $x > 0$. El valor máximo de $f(x)$ se presenta en $x = e$.

(a) Los enteros 2 y 4 cuentan con la rara propiedad de que $2^4 = 4^2$. Demuestra que si $x^y = y^x$ para los números reales positivos x y y , entonces $(\ln x)/x = (\ln y)/y$.

(b) Con la gráfica de f (una tabla es útil) encuentra otro par de números reales x y y (a dos lugares decimales) tales que $x^y = y^x$.

(c) Explica por qué muchos pares de números reales satisfacen la ecuación $x^y = y^x$.

Ejercicio 5



6 (a) Compara los resultados del ejercicio 55 de la sección 5.2 y el ejercicio 37 de la sección 5.3. Explica la diferencia entre las dos funciones.

(b) Ahora, imagina que inviertes dinero al 8.5% anual compuesto mensualmente. ¿Cómo se compara la gráfica de este crecimiento con las dos gráficas de la parte (a)?

(c) Con la función descrita en la parte (b) calcula mentalmente las respuestas a las partes (a) y (b) del ejercicio 37 de la sección 5.3; explica por qué crees que son correctas antes de calcularlas en realidad.

7 Puesto que $y = \log_3(x^2)$ equivale a $y = 2 \log_3 x$ por la ley 3 de los logaritmos, ¿por qué no son iguales las gráficas de la figura 4(a) y (b) de la sección 5.5?

8 Saldo no pagado de una hipoteca Cuando los bancos prestan dinero esperan recibir intereses equivalentes a la cantidad dada por la fórmula de interés compuesto. El deudor acumula dinero "contra" la cantidad original, haciendo un pago mensual M que se acumula según la fórmula

$$\frac{12M[(1 + i/12)^{12t} - 1]}{i}$$

donde i es la tasa de interés anual y t son los años de la hipoteca.

(a) Elabora una fórmula para el saldo insoluto U de un préstamo.

(b) Grafica el saldo insoluto del préstamo hipotecario del ejercicio 49(a), sección 5.2.

(c) ¿Cuál es el saldo insoluto después de 10 años? Calcula los años que tardará el deudor en pagar la mitad del préstamo.

(d) Analiza las condiciones que debe satisfacer tu gráfica para ser correcta.

(e) Analiza la validez de los resultados de la gráfica.

9 Analiza cuántas veces se cortan las gráficas de $y = 0.01(1.001)^x$ y $y = x^3 - 99x^2 - 100x$. Calcula los puntos de intersección. En general, compara el crecimiento de funciones polinomiales y funciones exponenciales.

10 Analiza cuántas veces se cortan las gráficas de

$$y = x \quad y = (\ln x)^x$$

Calcula los puntos de intersección. ¿Qué puedes concluir sobre el crecimiento de $y = x$ y $y = (\ln x)^x$, donde x es un entero positivo, conforme x aumenta sin límite?

11 Aumento salarial Supongamos que empiezas a trabajar con un salario de \$40 000 al año y que se te ha programado para que en cinco años recibas \$60 000 anuales. Determina la tasa de aumento exponencial anual que describa esta situación. Imagina que la misma tasa exponencial de aumento continuará 40 años. Si utilizas la regla del 70 (pág. 364), calcula mentalmente tu sueldo anual dentro de 40 años y compara tu cálculo con uno real.

12 Liberación de energía Considera tres hechos:

(1) El 18 de mayo de 1980, la erupción del Santa Helena en Washington liberó alrededor de 1.7×10^{13} joules de energía.

(2) Cuando una bomba nuclear de un megatón explota, libera aproximadamente 4×10^{15} joules de energía.

(3) El terremoto de 1989 de San Francisco registró 7.1 en la escala de Richter.

(a) Haz algunas comparaciones (es decir, cuánto de un hecho equivale a otro) en términos de energía liberada. (Sugerencia: consulta el ejercicio 70 en los ejercicios de repaso de este capítulo 5.) Nota: Las bombas atómicas lanzadas en la Segunda Guerra Mundial eran de 1 kilotón (1000 bombas de 1 kilotón = 1 bomba de 1 megatón).

(b) ¿Qué lectura de la escala de Richter equivaldría a la erupción del Santa Helena? ¿Ha habido alguna vez una lectura igual de alta?

- 13 **Promedio Dow Jones** El promedio industrial Dow Jones es un índice de las 30 corporaciones más grandes de Estados Unidos y la medida más común de desempeño industrial en dicha nación. La tabla que viene contiene fechas de registro de 1000 puntos del Dow.

Promedio Dow Jones	Fecha en que se alcanzó por primera vez	Cantidad de días desde el registro anterior
1003.16	11/14/72	—
2002.25	1/8/87	5168
3004.46	4/17/91	1560
4003.33	2/23/95	1408
5023.55	11/21/95	271
6010.00	10/14/96	328
7022.44	2/13/97	122
8038.88	7/16/97	153
9033.23	4/6/98	264
10 006.78	3/29/99	357
11 014.69	5/3/99	35

Halla un modelo exponencial para estos datos y utilízalo para predecir cuándo alcanzará 20 000 puntos el Dow. Encuentra la tasa de promedio anual de utilidad, de acuerdo con el Dow. Somete a discusión algunas consideraciones prácticas relativas a estos cálculos.

- 14 **Promedio Nasdaq** El índice compuesto Nasdaq del mercado de valores tuvo un periodo de extraordinario crecimiento (como se aprecia en los últimos renglones de la tabla).

Promedio Nasdaq	Fecha en que se alcanzó por primera vez	Cantidad de días desde el registro anterior
100 (inicio)	2/8/71	—
200.25	11/13/80	3566
501.62	4/12/91	3802
1005.89	7/17/95	1557
2000.56	7/16/98	1095
3028.51	11/3/99	475
4041.46	12/29/99	56
5046.86	3/2/00	64

Algunas personas consideran que ese índice, impulsado por la tecnología, es el que crece con mayor rapidez entre todos los indicadores del mercado de valores de Estados Unidos.

Encuentra un modelo de regresión exponencial para estos datos. Analiza la adecuación del modelo a los datos y las razones posibles de la calidad de la adecuación.

- 15 **Población total del mundo** La oficina de Censos de Estados Unidos dio los siguientes estimados y predicciones de la población del mundo:

Año	Población
1950	2 556 000 053
1960	3 039 451 023
1970	3 706 618 163
1980	4 453 831 714
1990	5 278 639 789
2000	6 082 966 429
2010	6 848 932 929
2020	7 584 821 144
2030	8 246 619 341
2040	8 850 045 889
2050	9 346 399 468

- Sea $t = 0$ la población correspondiente a 1950, grafica los datos en una pantalla $[-10, 110, 10]$ por $[0, 10^9, 10^9]$.
- Analiza cuál modelo entre uno exponencial y uno logístico es más apropiado y por qué.
- Encuentra un modelo como el que seleccionaste en el inciso (b) y haz la gráfica con esta información.
- De acuerdo con el modelo, ¿cuál será la población aproximada después de un periodo largo?

- 16 Analiza cuántas soluciones tiene la ecuación

$$\log_3 x + \log_3 x = 11$$

Resuelve la ecuación utilizando la fórmula del cambio de base.

Funciones trigonométricas de números reales

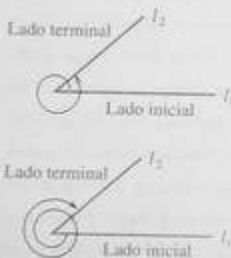
- 6.1 Ángulos
- 6.2 Funciones trigonométricas de ángulos
- 6.3 Funciones trigonométricas de números reales
- 6.4 Valores de las funciones trigonométricas
- 6.5 Gráficas trigonométricas
- 6.6 Otras gráficas trigonométricas
- 6.7 Problemas de aplicación

La trigonometría fue inventada hace más de 2000 años por los griegos, quienes necesitaban métodos precisos para medir ángulos y lados de triángulos. De hecho, la palabra *trigonometría* se deriva de las palabras griegas *trigonon* (triángulo) y *metria* (medición). El capítulo se inicia con un análisis de los ángulos y de la forma en que se miden. Luego se introducen las funciones trigonométricas mediante el uso de relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo. Después de ampliar los dominios de las funciones trigonométricas a ángulos arbitrarios y números reales, se consideran sus gráficas y las técnicas de graficación que utilizan amplitudes, periodos y desfaseamientos. El capítulo se concluye con una sección sobre problemas de aplicación.

6.1

Ángulos

Figura 1

Figura 2
Ángulos coterminales

En geometría, un **ángulo** se define como el conjunto de puntos determinado por dos rayos, l_1 y l_2 , que tienen el mismo punto extremo O . Si A y B son puntos en l_1 y l_2 (figura 1), nos referimos al **ángulo** AOB , denotado por $\angle AOB$. Un ángulo también puede considerarse como dos segmentos de recta finitos con un punto extremo común.

En trigonometría, con frecuencia se interpretan los ángulos como rotaciones de rayos. Comenzamos con un rayo fijo l_1 , cuyo punto extremo O se hace girar alrededor de O en un plano hasta una posición especificada por el rayo l_2 . A l_1 se le llama **lado inicial**, l_2 es un **lado terminal** y O es el **vértice** de $\angle AOB$. La magnitud o dirección de la rotación no está restringida en modo alguno. Es posible que l_1 haga varias revoluciones en cualquier dirección alrededor de O antes de llegar a la posición de l_2 , conforme ilustran las flechas curvas de la figura 2; por tanto, muchos ángulos diferentes tienen los mismos lados iniciales y terminales. Dos ángulos cualesquiera de este tipo se llaman **ángulos coterminales**. Un **ángulo llano** es aquel cuyos lados descansan sobre la misma recta, pero se extienden en direcciones opuestas desde su vértice.

Si introducimos un sistema de coordenadas rectangulares, entonces la **posición estándar** de un ángulo se obtiene al colocar el vértice en el origen y hacer que el lado inicial l_1 coincida con el eje x positivo. Si l_2 se hace girar en dirección *contraria* a las manecillas de un reloj hasta la posición terminal l_2 , el ángulo se considera **positivo**. Si l_2 gira en dirección *de las manecillas*, el ángulo es **negativo**. Los ángulos se denotan muchas veces con letras griegas minúsculas como α (alfa), β (beta), γ (gamma), θ (theta), ϕ (fi), y así sucesivamente. La figura 3 contiene trazos de dos ángulos positivos, α y β , y un ángulo negativo, γ . Si el lado terminal de un ángulo en posición estándar está en cierto cuadrante, se dice que el **ángulo** se halla en ese cuadrante. En la figura 3, α está en el tercer cuadrante, β en el primero y γ en el segundo. Un ángulo se llama **ángulo cuadrantal** si su lado terminal está en un eje coordenado.

Figura 3 Posición estándar de un ángulo



Una unidad de medida para los ángulos es el **grado**. El ángulo en posición estándar obtenido por una revolución completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj mide 360 grados, que se escribe 360° ; por tanto, un ángulo de un grado (1°) se obtiene por $\frac{1}{360}$ de toda una revolución en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En la figura 4, se muestran varios ángulos medidos en grados en posición estándar sobre sistemas de coordenadas rectangulares. Advertirás que los primeros tres son ángulos cuadrantales.

Figura 4



En nuestro trabajo, una notación tal como $\theta = 60^\circ$ especifica un ángulo θ cuya medida es 60° . También nos referimos a un ángulo de 60° , en lugar de usar la frase más precisa (pero más engorrosa) de un ángulo que mide 60° .

EJEMPLO 1 Hallar ángulos coterminales

Si $\theta = 60^\circ$ está en posición estándar, halla dos ángulos positivos y dos negativos que sean coterminales con θ .

SOLUCIÓN El ángulo θ se ilustra en posición estándar en el primer esquema de la figura 5. Para hallar ángulos coterminales positivos se pueden sumar 360° o 720° (o cualquier múltiplo positivo de 360°) a θ , con lo que se obtiene

$$60^\circ + 360^\circ = 420^\circ \quad \text{y} \quad 60^\circ + 720^\circ = 780^\circ.$$

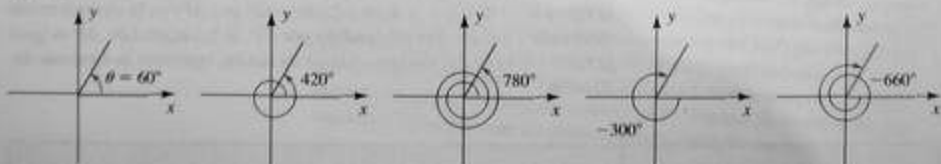
Estos ángulos coterminales también se muestran en la figura 5.

Para hallar ángulos coterminales negativos, se puede sumar -360° o -720° (o cualquier otro múltiplo negativo de 360°), con lo cual resulta

$$60^\circ + (-360^\circ) = -300^\circ \quad \text{y} \quad 60^\circ + (-720^\circ) = -660^\circ,$$

según se muestra en la figura 5.

Figura 5



Un **ángulo recto** es la mitad de un ángulo llano y mide 90° . La siguiente tabla contiene las definiciones de otros tipos especiales de ángulos.

Terminología	Definición	Ejemplos
Ángulo agudo θ	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	12° ; 37°
Ángulo obtuso θ	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	95° ; 157°
Ángulos complementarios α , β	$\alpha + \beta = 90^\circ$	20° , 70° ; 7° , 83°
Ángulos suplementarios α , β	$\alpha + \beta = 180^\circ$	115° , 65° ; 18° , 162°

Si se requieren medidas menores de un grado se pueden usar décimas, centésimas o milésimas de grado. En forma opcional, podemos dividir el grado en 60 partes iguales o **minutos** (denotados por $'$), y cada minuto en 60 partes iguales llamadas **segundos** (representados por $''$). Por lo tanto, $1^\circ = 60'$, y $1' = 60''$. La notación $\theta = 73^\circ 56' 18''$ se refiere a un ángulo θ que mide 73 grados, 56 minutos y 18 segundos.

EJEMPLO 2 Hallar ángulos complementarios

Halla el ángulo que sea complementario a θ .

(a) $\theta = 25^\circ 43' 37''$ (b) $\theta = 73.26^\circ$

SOLUCIÓN Se desea encontrar $90^\circ - \theta$. Es conveniente escribir 90° como una medida equivalente: $89^\circ 59' 60''$.

$$\begin{array}{rcl} \text{(a)} & 90^\circ & = 89^\circ 59' 60'' \\ & \underline{\theta = 25^\circ 43' 37''} & \\ & 90^\circ - \theta & = 64^\circ 16' 23'' \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \text{(b)} & 90^\circ & = 90.00^\circ \\ & \underline{\theta = 73.26^\circ} & \\ & 90^\circ - \theta & = 16.74^\circ \end{array}$$

Figura 6
Ángulo central θ



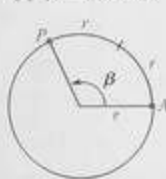
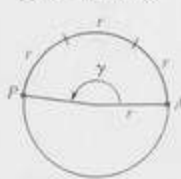
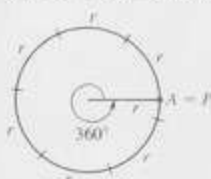
La medida en grados para los ángulos se usa en actividades aplicadas, como agrimensura, navegación y diseño de equipo mecánico. En aplicaciones científicas que requieren cálculo se acostumbra utilizar *radianes*. Para definir el ángulo con medida de un radián, consideramos un círculo de cualquier radio r . El **ángulo central** de un círculo es un ángulo cuyo vértice está en el centro del círculo. Si θ es el ángulo central que se muestra en la figura 6, se dice que el **arco \overline{AP}** (denotado por \overline{AP}) de la circunferencia **subtiende** a θ o que θ **es subtendido por \overline{AP}** . Si la longitud de \overline{AP} es igual al radio r del círculo, entonces θ mide un radián, conforme la siguiente definición.

Definición de radián

Un **radián** es la medida del ángulo central de un círculo subtendido por un arco igual en longitud al radio del círculo.

Si consideramos un círculo de radio r , entonces un ángulo α cuya medida es un radián subtende un arco AP de longitud r , como se ilustra en la figura 7(a). El ángulo β en la figura 7(b) tiene una medida de 2 radianes puesto que está subtendido por un arco de longitud $2r$. Análogamente, γ en 7(c) tiene una medida de 3 radianes porque está subtendido por un arco de longitud $3r$.

Figura 7

(a) $\alpha = 1$ radián(b) $\beta = 2$ radianes(c) $\gamma = 3$ radianes(d) $360^\circ = 2\pi = 6.28$ radianes

Para hallar la medida en radianes correspondiente a 360° , se debe encontrar el número de veces que se puede trazar un arco circular de longitud r a lo largo de la circunferencia (figura 7(d)). Este número no es un entero y ni siquiera un número racional. Como la circunferencia del círculo es $2\pi r$, el número de veces que r unidades se pueden trazar es 2π . Por tanto, un ángulo de 2π radianes corresponde a 360° y se escribe $360^\circ = 2\pi$ radianes. Este resultado da las siguientes relaciones.

**Relaciones entre grados
y radianes**

$$(1) \quad 180^\circ = \pi \text{ radianes}$$

$$(2) \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} = 0.0175 \text{ radianes}$$

$$(3) \quad 1 \text{ radián} = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \approx 57.2958^\circ$$

Quando se usa la medida angular en radianes, no deben indicarse unidades; en consecuencia, si un ángulo mide 5 radianes, se escribe $\theta = 5$ en lugar de $\theta = 5$ radianes. No debe haber confusión en cuanto a que se usen radianes o grados, puesto que si θ mide 5° en grados, se escribe $\theta = 5^\circ$, y no $\theta = 5$.

En la tabla adjunta se ilustra la forma de pasar de una medida angular a otra.

Cambios de medidas angulares

Para cambiar	Multiplicar por	Ejemplos
grados a radianes	$\frac{\pi}{180^\circ}$	$150^\circ = 150^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) = \frac{5\pi}{6}$ $225^\circ = 225^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) = \frac{5\pi}{4}$
radianes a grados	$\frac{180^\circ}{\pi}$	$\frac{7\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) = 315^\circ$ $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) = 60^\circ$

Esta técnica se puede usar para obtener la tabla siguiente, donde se incluyen las medidas correspondientes a radianes y grados de ángulos especiales.

Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°

En la figura 8 se muestran en posición estándar varios de estos ángulos especiales, medidos en radianes.

Figura 8



Las calculadoras graficadoras cuentan con funciones especiales que facilitan la conversión de radianes en grados.

Conversión de
radianes en grados

TI-83 Plus

Selecciona el modo de grados.

MODE ∇ ∇ \triangleright ENTER

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degrees
Func Par Pol Seq
Connect Dot
Sequential Simul
Real a b i n e t
2nd Horiz G-T
```

Convierte radianes en grados.

() 2nd π - 4)
2nd ANGLE 3 ENTER

Convierte una medida decimal que esté en grados, en grados, minutos y segundos.

54.25 2nd ANGLE 4 ENTER

```
( $\pi/4$ )r 45
54.25>DMS
54°15'0"
```

TI-86

2nd MODE ∇ ∇ \triangleright ENTER

```
Normal Sci Eng
Float 012345678901
Radian Degrees
Func Pol Parah DifEq
Rec Bin Oct Hex
Recti Cyl Spherl
dxDer1 dxDer2
```

EXIT () 2nd π - 4)
2nd MATH ANGLE(F3) π (F2) ENTER

54.25 2nd MATH ANGLE(F3)
 \triangleright DMS(F4) ENTER

```
( $\pi/4$ )r 45
54.25>DMS
54°15'0"
NUM FREQ MODE RTN MISC
0 0 0 0 0
```



EJEMPLO 3 Convertir radianes en grados, minutos y segundos

Si $\theta = 3$, calcula θ en grados, minutos y segundos.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 3 \text{ radianes} &= 3 \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) && \text{multiplicar por } \frac{180^\circ}{\pi} \\
 &\approx 171.8873^\circ && \text{aproximar} \\
 &= 171^\circ + (0.8873)(60') && 1^\circ = 60' \\
 &= 171^\circ + 53.238' && \text{multiplicar} \\
 &= 171^\circ + 53' + (0.238)(60'') && 1' = 60'' \\
 &= 171^\circ 53' + 14.28'' && \text{multiplicar} \\
 &\approx 171^\circ 53' 14'' && \text{aproximar}
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Expresar minutos y segundos como grados decimales.Expresa $19^{\circ}47'23''$ como decimal hasta el diezmilésimo de grado más cercano.**SOLUCIÓN** Como $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ y $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ} = \left(\frac{1}{6000}\right)^{\circ}$.

$$\begin{aligned}
 19^{\circ}47'23'' &= 19^{\circ} + \left(\frac{47}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{23}{3600}\right)^{\circ} \\
 &= 19^{\circ} + 0.7833^{\circ} + 0.0064^{\circ} \\
 &= 19.7897^{\circ}.
 \end{aligned}$$

Los ejemplos 3 y 4 pueden manejarse fácilmente con una calculadora graficadora (en modo de grados).

TI-83 Plus**TI-86**

Convierte la medida en radianes del ejemplo 3 en grados, minutos y segundos.

3 [2nd] [ANGLE] 3 [2nd] [ANGLE]
4 [ENTER]

3 [2nd] [MATH] [ANGLE(F3)] [r(F2)]
►DMS(F4) [ENTER]

Expresa el ángulo del ejemplo 4 como un grado decimal.

19 [2nd] [ANGLE] 1
47 [2nd] [ANGLE] 2
23 [ALPHA] [(+ key)] [ENTER]

19 [2nd] [MATH] [ANGLE(F3)] [(F3)]
47 [(F3)] 23 [(F3)] [ENTER]

Notarás que el ángulo se introduce en el formato grados' minutos' segundos'.

3° ►DMS
171°53'14.419"
19°47'23"
19.78972222

3° ►DMS
171°53'14.419"
19°47'23"
19.789722222

NUM	PAGE	MODE	W/P	MODE
0	1	1	1	1

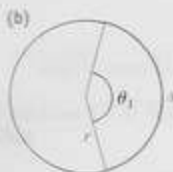
El resultado siguiente especifica la relación entre la longitud de un arco de circunferencia y el ángulo central que subtiende.

**Fórmula para la longitud
de un arco de circunferencia**Si un arco de longitud s de una circunferencia de radio r subtiende un ángulo central de θ , radianes, entonces

$$s = r\theta.$$

Un recurso mnemotécnico para recordar $s = r\theta$ es SRO (Solo Robustos (2500)).

Figura 9



DEMOSTRACIÓN En la figura 9(a) se muestra un arco común de longitud s y el ángulo central θ correspondiente. En la figura 9(b) se presenta un arco de longitud s_1 y un ángulo central θ_1 . Si se usan radianes, entonces, por geometría plana, la razón de las longitudes de los arcos es la misma que la razón de las medidas angulares; esto es,

$$\frac{s}{s_1} = \frac{\theta}{\theta_1}.$$

Si consideramos el caso especial en que θ_1 mide 1 radián, entonces, de la definición de radián, $s_1 = r$ y la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1}, \quad \text{o} \quad s = r\theta.$$

Observarás que si $\theta = 2\pi$, entonces la fórmula para la longitud de un arco circular se transforma en $s = r(2\pi)$ que, simplemente, es la fórmula de la circunferencia de un círculo, $C = 2\pi r$.

La fórmula que sigue se demuestra de manera similar.

Fórmula para el área de un sector circular

Si θ es la medida en radianes de un ángulo central de una circunferencia de radio r , y si A es el área de un sector circular determinado por θ , entonces

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

DEMOSTRACIÓN Si A y A_1 son las áreas de los sectores de las figuras 9(a) y 9(b), respectivamente, entonces, por geometría plana,

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\theta}{\theta_1}, \quad \text{o} \quad A = \frac{A_1}{\theta_1}\theta.$$

Si se considera el caso especial $\theta_1 = 2\pi$, entonces $A_1 = \pi r^2$ y

$$A = \frac{\pi r^2}{2\pi}\theta = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

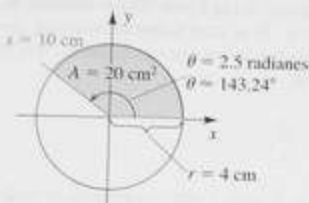
Cuando se usen las fórmulas precedentes, es importante que recordemos emplear los radianes de θ en lugar de los grados, según se expone en el ejemplo a continuación.



EJEMPLO 5 Usar las fórmulas de arco de circunferencia y sector circular

En la figura 10 de la página siguiente, un ángulo central θ está subtendido por un arco de 10 cm de largo en una circunferencia de 4 cm de radio.

Figura 10



- (a) Calcula la medida de θ en grados.
 (b) Halla el área del sector circular determinado por θ .

SOLUCIÓN Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad s &= r\theta && \text{fórmula para la longitud de un arco circular} \\ \theta &= \frac{s}{r} && \text{despejar } \theta \\ &= \frac{10}{4} = 2.5 && \text{hacer } s = 10, r = 4 \end{aligned}$$

Esta es la medida de θ en *radianes*. Al cambiar a grados se tiene

$$\theta = 2.5 \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) = \frac{450^\circ}{\pi} \approx 143.24^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad A &= \frac{1}{2} r^2 \theta && \text{fórmula del área de un sector circular} \\ &= \frac{1}{2} (4)^2 (2.5) && \text{hacer } r = 4, \theta = 2.5 \text{ radianes} \\ &= 20 \text{ cm}^2 && \text{multiplicar} \end{aligned}$$

Figura 11



La **rapidez (o velocidad) angular** de una rueda que gira a razón constante es el ángulo generado, en una unidad de tiempo, por un segmento de recta que va del centro de la rueda a un punto P de la circunferencia (figura 11). La **rapidez (o velocidad) lineal** de un punto P de la circunferencia es la distancia que P recorre por unidad de tiempo.

EJEMPLO 6 Hallar la rapidez angular y lineal

Supón que una máquina contiene una rueda de 3 pies de diámetro, que gira con una rapidez de 1600 revoluciones por minuto (rpm).

- (a) Determina la rapidez angular de la rueda.
 (b) Halla la rapidez lineal de un punto P sobre la circunferencia de la rueda.

SOLUCIÓN

(a) Denota con O el centro de la rueda y sea P un punto en la circunferencia. Dado que el número de revoluciones por minuto es 1600 y cada revolución genera un ángulo de 2π radianes, el ángulo generado por el segmento de recta OP en un minuto medirá $(1600)(2\pi)$ radianes; es decir,

$$\text{rapidez angular} = (1600)(2\pi) = 3200\pi \text{ radianes por minuto.}$$

Notarás que el diámetro de la rueda no tiene importancia para hallar la rapidez angular.

(b) La rapidez lineal de P es la distancia que recorre por minuto. Se puede encontrar esta distancia con la fórmula $s = r\theta$, con $r = \frac{3}{2}$ pies y $\theta = 3200\pi$, por tanto,

$$s = \frac{3}{2}(3200\pi) = 4800\pi \text{ pies.}$$

y, en consecuencia, la rapidez lineal de P es 4800π pies/minuto (min). Si se redondea al entero más cercano, esto es aproximadamente 15 080 pies/minuto, o sea 171.36 millas/hora. A diferencia de la rapidez angular, la rapidez lineal *si* depende del diámetro de la rueda.

6.1 Ejercicios

Ejercicios 1 al 4: si el ángulo dado está en posición estándar, encuentra dos ángulos coterminales positivos y dos ángulos coterminales negativos.

1 (a) 120° (b) 135° (c) -30°

2 (a) 240° (b) 315° (c) -150°

3 (a) 620° (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $-\frac{\pi}{4}$

4 (a) -570° (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $-\frac{5\pi}{4}$

Ejercicios 5 y 6: determina el ángulo complementario de θ .

5 (a) $\theta = 5^\circ 17' 34''$ (b) $\theta = 32.5^\circ$

6 (a) $\theta = 63^\circ 4' 15''$ (b) $\theta = 82.73^\circ$

Ejercicios 7 y 8: halla el ángulo suplementario de θ .

7 (a) $\theta = 48^\circ 51' 37''$ (b) $\theta = 136.42^\circ$

8 (a) $\theta = 152^\circ 12' 4''$ (b) $\theta = 15.9^\circ$

Ejercicios 9 al 12: proporciona la medida exacta del ángulo en radianes.

9 (a) 150° (b) -60° (c) 225°

10 (a) 120° (b) -135° (c) 210°

11 (a) 450° (b) 72° (c) 100°

12 (a) 630° (b) 54° (c) 95°

Ejercicios 13 al 16: halla la medida exacta del ángulo en grados.

13 (a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{11\pi}{6}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$

14 (a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{4\pi}{3}$ (c) $\frac{11\pi}{4}$

15 (a) $-\frac{7\pi}{2}$ (b) 7π (c) $\frac{\pi}{9}$

16 (a) $-\frac{5\pi}{2}$ (b) 9π (c) $\frac{\pi}{16}$

Ejercicios 17 al 20: expresa θ en grados, minutos y segundos, hasta el segundo más cercano.

17 $\theta = 2$ 18 $\theta = 1.5$

19 $\theta = 5$ 20 $\theta = 4$

Ejercicios 21 al 24: expresa el ángulo como decimal al diezmilésimo de grado más cercano.

21 $37^\circ 41'$ 22 $83^\circ 17'$

23 $115^\circ 26' 27''$ 24 $258^\circ 39' 52''$

Ejercicios 25 al 28: expresa el ángulo en grados, minutos y segundos al segundo más cercano.

25 63.169° 26 12.864°

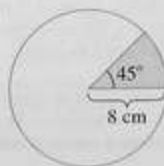
27 310.6215° 28 81.7238°

Ejercicios 29 y 30: si un arco de circunferencia de longitud s subtende el ángulo central θ en un círculo, halla el radio de la circunferencia.

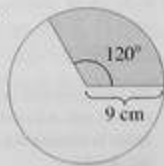
29 $s = 10$ cm, $\theta = 4$ 30 $s = 3$ km, $\theta = 20^\circ$

Ejercicios 31 y 32: (a) encuentra la longitud del arco del sector en color de la figura, y (b) halla el área del sector.

31



32



Ejercicios 33 y 34: (a) indica los radianes y grados del ángulo central θ subtendido por el arco dado de longitud s en una circunferencia de radio r , y (b) halla el área del sector determinado por θ .

33 $s = 7$ cm, $r = 4$ cm 34 $s = 3$ pies, $r = 20$ pulg.

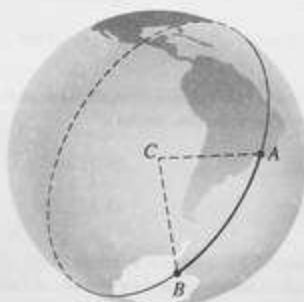
Ejercicios 35 y 36: (a) determina la longitud del arco que subtende el ángulo θ central dado en una circunferencia de diámetro d , y (b) halla el área del sector determinado por θ .

35 $\theta = 50^\circ$, $d = 16$ m 36 $\theta = 2.2$, $d = 120$ cm

- 37 Medición de distancias en la Tierra La distancia entre dos puntos A y B en la Tierra se mide a lo largo de una circunferencia cuyo centro es C , situado en el centro del globo, donde el radio es igual a la distancia de C a la superficie (consulta la figura). Si el diámetro del planeta es aproximadamente de 8 000 millas, calcula la distancia entre A y B si el ángulo ACB tiene la medida indicada:

- (a) 60° (b) 45° (c) 30° (d) 10° (e) 1°

Ejercicio 37



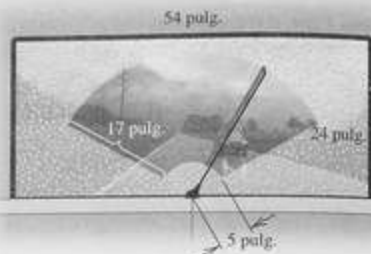
- 38 Millas náuticas Consulta el ejercicio 37. Si el ángulo ACB mide 1° , entonces la distancia entre A y B es una milla náutica. Calcula el número de millas terrestres en una milla náutica.

- 39 Medición de ángulos usando distancia Consulta el ejercicio 37. Si dos puntos A y B están a 500 millas uno de otro, expresa el ángulo ACB en radianes y en grados.

- 40 Un hexágono está inscrito en un círculo. Si la diferencia entre el área del círculo y el área del hexágono es 24 m^2 , aplica la fórmula del área de un sector y calcula el radio r del círculo.

- 41 Área de una ventana Una ventana rectangular mide 54 por 24 pulgadas. La hoja de un limpiador de 17 pulgadas está unida por un brazo de 5 pulgadas al centro de la base de la ventana, como se muestra en la figura. Si el brazo gira 120° , calcula el porcentaje del área de la ventana que será recorrida por la hoja limpiadora.

Ejercicio 41



- 42 Núcleo de un tornado Un modelo sencillo del núcleo (u ojo) de un tornado es un cilindro circular recto que gira alrededor de su eje. Si un tornado tiene un núcleo de 200 pies de diámetro y la velocidad máxima del viento es de 180 millas por hora (mph), o sea 264 pies por segundo en el perímetro del núcleo, calcula el número de revoluciones por minuto del núcleo.

- 43 Rotación de la Tierra Nuestro planeta gira alrededor de su eje una vez cada 23 horas, 56 minutos y 4 segundos. Calcula el número de radianes que la Tierra gira en un segundo.

- 44 Rotación de la Tierra Haz referencia al ejercicio 43. El radio ecuatorial es de alrededor de 3 963.3 millas. Halla la velocidad lineal de un punto sobre el Ecuador como resultado de la rotación de la Tierra.

Ejercicios 45 y 46: una rueda del radio dado gira a la velocidad indicada.

- (a) Halla la velocidad angular (en radianes por minuto.)
(b) Indica la velocidad lineal de un punto sobre la circunferencia (en pies/min).

45 radio 5 pulgadas, 40 rpm 46 radio 9 pulgadas, 2400 rpm

- 47 Rotación de discos compactos (CDs) El motor de una reproductora de CDs particular está controlado para rotar a una velocidad de 200 rpm cuando lee una pista a 5.7 cm del centro del CD. La velocidad del motor debe variar de modo que la lectura de los datos ocurra a razón constante.

- (a) Encuentra la velocidad angular (en radianes por minuto) del motor cuando lee una pista a 5.7 cm del centro del CD.

- (b) Determina la velocidad lineal (en cm/s) de un punto en el CD que está a 5.7 cm del centro del CD.
- (c) Calcula la velocidad angular (en rpm) del motor cuando lee una pista a 3 cm del centro del CD.
- (d) Encuentra una función S que proporcione la rapidez del motor en rpm para cualquier radio r en centímetros, donde $2.3 \leq r \leq 5.9$. ¿Qué tipo de variación existe entre la rapidez del motor y el radio de la pista que está leyendo? Comprueba tu respuesta graficando S y encontrando la rapidez para $r = 3$ y $r = 5.7$.
48. **Revoluciones de llantas** Una llanta común de un automóvil compacto mide 22 pulgadas de diámetro. Si el auto viaja a 60 millas por hora, halla el número de revoluciones que efectúa el neumático en un minuto.
49. **Malacate de carga** Se utiliza un gran malacate de 3 pies de diámetro para levantar cargas (ve la figura).
- (a) Encuentra la distancia en la que la carga es levantada, si el malacate gira un ángulo de $7\pi/4$ radianes.
- (b) Halla el ángulo (en radianes) que el malacate debe girar para levantar la carga 4 pies.

Ejercicio 49



50. **Movimiento del péndulo** El péndulo del reloj mide 4 pies de largo y se mueve en ambos sentidos a lo largo de un arco de 6 pulgadas. Calcula el ángulo (en grados) por el que pasa el péndulo durante un movimiento.
51. **Precios de pizzas** Un vendedor vende dos tamaños de pizza por rebanada: la *chica* mide $\frac{1}{8}$ de una pizza circular de 18 pulgadas de diámetro y se vende en 2 dólares. La *grande*, que mide $\frac{1}{4}$ de una pizza circular de 26 pulgadas de diámetro, se vende en 3 dólares. ¿Cuál rebanada tiene más pizza por dólar?
52. **Mecánica de bicicletas** En la figura se muestra el conjunto de estrellas de una bicicleta. Si la estrella de radio r_1 gira en un ángulo de θ_1 radianes, halla el ángulo de rotación correspondiente para la estrella de radio r_2 .

Ejercicio 52



53. **Mecánica de bicicletas** Un ciclista experto puede alcanzar una rapidez de 40 millas por hora. Si en el ejercicio 52 el conjunto de estrellas mide $r_1 = 5$ pulgadas, $r_2 = 2$ pulgadas y la rueda tiene un diámetro de 28 pulgadas, ¿aproximadamente cuántas revoluciones por minuto de la estrella delantera darán una velocidad de 40 millas por hora? (Sugerencia: convierte primero las 40 mph en pulg/s.)
54. **Desplazamiento del polo magnético** El polo norte geográfico y el polo norte magnético tienen ubicaciones diferentes. En la actualidad, el polo norte magnético se desplaza hacia el oeste alrededor de 0.0017 radianes por año, en donde el ángulo de desplazamiento tiene su vértice en el centro de la Tierra. Si este movimiento continúa, ¿cuántos años tardará el polo norte magnético en desplazarse un total de 5 grados?

6.2

Funciones trigonométricas de ángulos

Presentaremos el origen histórico de las funciones trigonométricas: como razones de los lados de un triángulo rectángulo. Un triángulo es **rectángulo** si uno de sus ángulos es recto. Si θ es cualquier ángulo agudo, podemos considerar un triángulo rectángulo que tenga a θ como uno de sus ángulos, como en

Figura 1

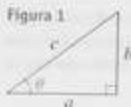


Figura 2



*Nos referiremos a estas seis funciones trigonométricas como las funciones trigonométricas. A continuación se muestran otras funciones trigonométricas menos usadas que no veremos en este texto:

$$\begin{aligned}\text{vers } \theta &= 1 - \cos \theta \\ \text{covers } \theta &= 1 - \sin \theta \\ \text{exsec } \theta &= \sec \theta - 1 \\ \text{hav } \theta &= \frac{1}{2} \text{vers } \theta\end{aligned}$$

Figura 3



Definición de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} & \cos \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} & \tan \theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} \\ \csc \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} & \sec \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} & \cot \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}}\end{aligned}$$

la figura 1, donde el símbolo \square especifica el ángulo de 90° . Al usar las longitudes a , b y c de los lados del triángulo pueden obtenerse seis razones:

$$\frac{b}{c}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{a}{b}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}.$$

Puede demostrarse que estas razones sólo dependen de θ y no del tamaño del triángulo, como se indica en la figura 2. Como los dos triángulos tienen ángulos iguales, son semejantes y, por tanto, las razones de lados correspondientes son proporcionales. Por ejemplo,

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}.$$

Así, para cada θ , las seis razones están determinadas de manera única y, por tanto, son funciones de θ . Se conocen como **funciones trigonométricas*** y se designan como **seno**, **coseno**, **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante** y se abrevian como **sen**, **cos**, **tan**, **cot**, **sec** y **csc**, respectivamente. El símbolo $\sin(\theta)$, o $\sin \theta$, se usa para la razón b/c , que la función seno asocia con θ . Los valores de las otras cinco funciones se denotan de manera semejante. En resumen, si θ es el ángulo agudo del triángulo rectángulo de la figura 1, entonces por definición,

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{b}{c} & \cos \theta &= \frac{a}{c} & \tan \theta &= \frac{b}{a} \\ \csc \theta &= \frac{c}{b} & \sec \theta &= \frac{c}{a} & \cot \theta &= \frac{a}{b}.\end{aligned}$$

El dominio de cada una de las seis funciones trigonométricas es el conjunto de todos los ángulos agudos. Más tarde, en esta sección, extenderemos el dominio a conjuntos mayores de ángulos y, en la siguiente sección, a números reales.

Si θ es el ángulo en la figura 1, nos referimos a los lados del triángulo de longitudes a , b y c como el **lado adyacente**, el **lado opuesto** y la **hipotenusa**, respectivamente. Para denotar las longitudes de los lados usaremos los términos **ady**, **op** e **hip**. Así, podremos representar los triángulos como en la figura 3. Con esta notación, las funciones trigonométricas pueden expresarse como sigue.

Un recurso mnemotécnico para recordar la fila superior de la definición es

SOH CAH TOA,

donde SOH es la abreviatura de

$\text{Sen } \theta = \text{Op}/\text{Hip}$, y así sucesivamente.

Las fórmulas de la definición precedente pueden aplicarse a cualquier triángulo rectángulo sin escribir las letras a , b y c en los lados. Como las longitudes de los lados de un triángulo son números reales positivos, los valores de las seis funciones trigonométricas son positivos para todo ángulo agudo θ . Además, la hipotenusa siempre es mayor que el lado opuesto o que el adyacente, y así $\sin \theta < 1$, $\cos \theta < 1$, $\csc \theta > 1$ y $\sec \theta > 1$ para todo ángulo agudo θ .

Notarás que como

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \quad \text{y} \quad \operatorname{csc} \theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$\operatorname{sen} \theta$ y $\operatorname{csc} \theta$ son recíprocas entre sí, con lo que se obtienen las dos identidades en la columna izquierda del siguiente recuadro. Análogamente, $\cos \theta$ y $\sec \theta$ son recíprocas entre sí, como también lo son $\tan \theta$ y $\cot \theta$.

Identidades recíprocas

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\operatorname{csc} \theta} & \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} & \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \\ \operatorname{csc} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} & \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} & \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \end{array}$$

Al final de esta sección se estudiarán otras identidades importantes en que intervienen las identidades trigonométricas.



EJEMPLO 1 Determinar los valores de funciones trigonométricas

Si θ es un ángulo agudo y $\cos \theta = \frac{3}{4}$, halla los valores de las funciones trigonométricas de θ .

SOLUCIÓN Comenzamos por trazar un triángulo rectángulo que tenga un ángulo agudo θ con $\text{ady} = 3$ e $\text{hip} = 4$ (figura 4) y procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} 3^2 + (\text{op})^2 &= 4^2 && \text{teorema de Pitágoras} \\ (\text{op})^2 &= 16 - 9 = 7 && \text{aislar } (\text{op})^2 \\ \text{op} &= \sqrt{7} && \text{sacar la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

Al aplicar la definición de funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{7}}{4} & \cos \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{3}{4} & \tan \theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \\ \operatorname{csc} \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{4}{\sqrt{7}} & \sec \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{4}{3} & \cot \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{3}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

En el ejemplo 1 se podrían racionalizar los denominadores para $\operatorname{csc} \theta$ y $\cot \theta$ y escribir

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{4\sqrt{7}}{7} \quad \text{y} \quad \cot \theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

Sin embargo, en la mayor parte de los ejemplos y ejercicios se dejarán las expresiones sin racionalizar. Una excepción a esta práctica son los valores de funciones trigonométricas especiales correspondientes a 60° , 30° y 45° , que se obtienen en el siguiente ejemplo.

Figura 4



EJEMPLO 2 Hallar los valores de las funciones trigonométricas de 60° , 30° y 45° .

Determinar los valores de las funciones trigonométricas que corresponden a θ .

(a) $\theta = 60^\circ$ (b) $\theta = 30^\circ$ (c) $\theta = 45^\circ$

Figura 5



SOLUCIÓN Considera un triángulo equilátero con lados de longitud 2. La mediana de un vértice al lado opuesto biseca el ángulo en ese vértice (figura 5, líneas punteadas). Por el teorema de Pitágoras, el lado opuesto al ángulo de 60° del triángulo rectángulo sombreado tiene una longitud de $\sqrt{3}$. Si se usan las fórmulas para las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, se obtienen los valores correspondientes a 60° y a 30° como sigue:

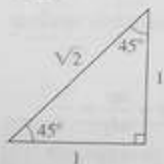
$$(a) \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \sec 60^\circ = \frac{2}{1} = 2 \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(b) \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30^\circ = \frac{2}{1} = 2 \quad \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Figura 6



(c) A fin de hallar los valores para $\theta = 45^\circ$, se puede considerar un triángulo rectángulo isósceles, cuyos dos lados iguales tienen longitud 1 (figura 6). Por el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$. En consecuencia, los valores correspondientes a 45° son:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ \quad \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = \sec 45^\circ \quad \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

Para referencia, en la siguiente tabla se detallan los valores encontrados en el ejemplo 2 y las medidas en radianes de los ángulos. Dos razones para acentuar la importancia de estos valores son que son exactos y que se presentan con frecuencia en trabajos de trigonometría. Debido a su importancia, es una buena idea memorizar la tabla o aprender a hallarlos con rapidez utilizando triángulos, como en el ejemplo 2.

Valores especiales de las funciones trigonométricas

θ (radianes)	θ (grados)	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

En el ejemplo siguiente se ilustra un uso práctico de las funciones trigonométricas de ángulos agudos. En la sección 6.7 se considerarán otras aplicaciones con triángulos rectángulos.

EJEMPLO 3 Hallar la altura de un asta bandera

Un agrimensor observa que en un punto A ubicado al nivel del suelo a una distancia de 25.0 pies de la base B de un asta bandera, el ángulo entre el suelo y la parte superior del asta es de 30° . Calcula la altura h del asta al décimo de pie más cercano.

SOLUCIÓN En la figura 7, vemos que tenemos que relacionar el lado opuesto h y el lado adyacente, de largo 25, con el ángulo de 30° . Esto nos sugiere que usemos una función trigonométrica que involucre ambos lados: ya sea \tan o \cot . Resultará fácil resolver el problema si seleccionamos la función en la cual la variable está en el numerador. Por tanto, tenemos:

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{25} \quad \text{o su equivalente,} \quad h = 25 \tan 30^\circ.$$

Se usa el valor de $\tan 30^\circ$ del ejemplo 2 y hallamos h :

$$h = 25 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \approx 14.4 \text{ pies.}$$

Figura 7

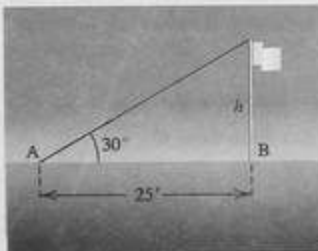
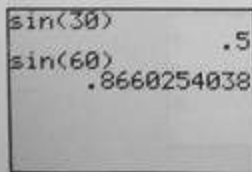


Figura 8

En modo de grados

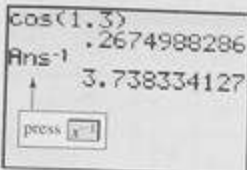


Es posible aproximar, a cualquier grado de precisión, los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo. Las calculadoras cuentan con teclas identificadas como \sin , \cos , y \tan que pueden usarse para calcular valores de estas funciones. Los valores de \csc , \sec y \cot pueden encontrarse después usando la tecla recíproca. Antes de usar una calculadora para encontrar valores de la función que correspondan a la medida en radianes de un ángulo agudo, asegúrate de que la calculadora esté en el modo de radianes. Para valores correspondientes a grados, selecciona el modo en grados.

Como ilustración (figura 8), para encontrar $\sin 30^\circ$ en una calculadora normal, la ajustamos en el modo de grados y usamos la tecla \sin para obtener $\sin 30^\circ = 0.5$, que es el valor exacto. La aplicación del mismo procedimiento para 60° produce una aproximación decimal a $\sqrt{3}/2$, como

$$\sin 60^\circ \approx 0.8660.$$

Figura 9
En modo de radianes



Casi todas las calculadoras permiten una precisión de ocho a diez cifras decimales para tales valores de funciones; sin embargo, en todo el texto redondearemos los valores hasta cuatro cifras decimales.

Para encontrar un valor como $\cos 1.3$ (Figura 9), donde 1.3 es la medida en radianes de un ángulo agudo, trabajamos con la calculadora en el modo de radianes y usamos la tecla $\boxed{\cos}$ con lo que obtenemos

$$\cos 1.3 \approx 0.2675.$$

Para $\sec 1.3$, puede encontrarse $\cos 1.3$ y luego oprimir la tecla recíproca, que suele ser $\boxed{1/x}$ o $\boxed{x^{-1}}$ (como se muestra en la figura 9) para obtener

$$\sec 1.3 = \frac{1}{\cos 1.3} = 3.7383.$$

Las fórmulas que se anotan en el siguiente recuadro son, sin duda, las identidades más importantes en trigonometría porque se pueden usar para simplificar y unificar muchos aspectos diferentes sobre el tema. Dado que forman parte de los fundamentos para trabajar en trigonometría, reciben el nombre de *identidades fundamentales*.

En tres de las identidades fundamentales intervienen cuadrados, como es el caso de $(\sin \theta)^2$ y $(\cos \theta)^2$. En general, si n es un entero diferente de -1 , entonces una potencia como $(\cos \theta)^n$ se escribe $\cos^n \theta$. Los símbolos $\sin^{-1} \theta$ y $\cos^{-1} \theta$ se reservan para las funciones trigonométricas inversas, que se estudiarán en la sección 6.4 y que trabajaremos con todo detalle en el capítulo siguiente. Con este acuerdo respecto a las notaciones, tendremos, por ejemplo,

$$\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2 = (\cos \theta)(\cos \theta)$$

$$\tan^3 \theta = (\tan \theta)^3 = (\tan \theta)(\tan \theta)(\tan \theta)$$

$$\sec^4 \theta = (\sec \theta)^4 = (\sec \theta)(\sec \theta)(\sec \theta)(\sec \theta).$$

**Cálculo de potencias
de funciones
trigonométricas
(en modo de grados)**

Se debe tener cuidado al calcular potencias de funciones trigonométricas en calculadoras. Por ejemplo, considera la expresión $\sin^2 30^\circ$. Como $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, tenemos

$$\sin^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Según la forma en que esta expresión se escribe en el primer renglón de cada una de las pantallas siguientes, sería de esperar que la calculadora evalúe 30^2 y luego tome el seno de 900° , y así sucede. No obstante, podríamos esperar lo mismo en el segundo renglón, donde la TI-83 Plus proporciona el valor de $\sin^2 30^\circ$. De modo que en las funciones trigonométricas, para calcular $\sin^2 30^\circ$, usaremos el formato que se ilustra en el tercer renglón.

TI-83 Plus

$\sin((30)^2)$	0
$\sin(30)^2$.25
$(\sin(30))^2$.25

TI-86

$\sin 30^2$	0
$\sin (30)^2$	0
$(\sin 30)^2$.25

Primero enunciaremos todas las identidades fundamentales y luego analizaremos sus demostraciones. Dichas identidades son verdaderas para cualquier ángulo agudo θ , y éste puede adoptar varias formas. Por ejemplo, si usamos la primera identidad pitagórica con $\theta = 4\alpha$, sabemos que

$$\sin^2 4\alpha + \cos^2 4\alpha = 1.$$

Más adelante veremos que estas identidades también son verdaderas para otros ángulos y para los números reales.

Las identidades fundamentales

(1) Identidades recíprocas:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

(2) Identidades tangente y cotangente:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

(3) Identidades pitagóricas:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

DEMOSTRACIÓN

- (1) Las identidades recíprocas ya se demostraron antes en esta sección.
- (2) Para demostrar la identidad tangente, nos basamos en el triángulo rectángulo de la figura 10 y usamos las definiciones de funciones trigonométricas como sigue:

$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Para comprobar la identidad cotangente usamos una identidad recíproca y la identidad tangente:

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta / \cos \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

- (3) Las identidades pitagóricas se llaman así debido al primer paso de la siguiente demostración. Al referirnos a la figura 10, obtenemos

$$b^2 + a^2 = c^2 \quad \text{teorema de Pitágoras}$$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2 \quad \text{dividir entre } c^2$$

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 \quad \text{definiciones de seno } \theta \text{ y cos } \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{notación equivalente}$$

(continúa)

Figura 10



Podemos usar esta identidad para comprobar la segunda identidad pitagórica como sigue:

$$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{dividir entre } \cos^2 \theta$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{ecuación equivalente}$$

$$\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 + \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos \theta}\right)^2 \quad \text{ley de los exponentes}$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \quad \text{identidades tangente y recíproca}$$

Para demostrar la tercera identidad pitagórica, $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$, podemos dividir ambos lados de la identidad $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ entre $\sin^2 \theta$.

Se pueden usar las identidades fundamentales para expresar cada función trigonométrica en términos de cualquier otra función trigonométrica. Se muestran dos casos en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Uso de identidades fundamentales

Sea θ un ángulo agudo.

(a) Expresa $\sin \theta$ en términos de $\cos \theta$.

(b) Expresa $\tan \theta$ en términos de $\sin \theta$.

SOLUCIÓN

(a) Podemos proceder como sigue:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{identidad pitagórica}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \quad \text{aislar } \sin^2 \theta$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad \text{tomar la raíz cuadrada}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad \text{sen } \theta > 0 \text{ para ángulos agudos}$$

Más tarde en esta sección (ejemplo 12) consideraremos una simplificación con un ángulo θ que *no* es agudo.

(b) Si empezamos con la identidad fundamental

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

entonces lo que resta por hacer es expresar $\cos \theta$ en términos de $\sin \theta$. Esto lo podemos lograr despejando de la identidad $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ para $\cos \theta$, con lo que obtenemos

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \quad \text{para } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Así,

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \quad \text{para } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

De la misma forma en que se hace con los procedimientos algebraicos, podemos proporcionar apoyo numérico a los resultados de los procedimientos trigonométricos mediante el análisis de una tabla de valores. En las pantallas siguientes se muestra que el resultado del ejemplo 4(a), de que $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ para θ agudo, está sustentado por la igualdad de Y_1 y Y_2 en la tabla de valores seleccionados. El apoyo gráfico se abordará más tarde.

Plot1	Plot2	Plot3
$Y_1 = \sin(X)$		
$Y_2 = \sqrt{1 - (\cos(X))^2}$		
$Z_1 =$		
$Z_2 =$		
$Z_3 =$		
$Z_4 =$		
$Z_5 =$		
$Z_6 =$		

TABLE SETUP	
TblStart=0	
ΔTbl=15	
Indnt: Auto Ask	
Depnd: Auto Ask	

X	Y_1	Y_2
0	0	0
15	.25982	.25982
30	.5	.5
45	.70711	.70711
60	.86603	.86603
75	.96593	.96593
90	1	1
$Y_1 = \sin(X)$		

Las identidades fundamentales suelen utilizarse en la simplificación de expresiones que comprenden funciones trigonométricas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.



EJEMPLO 5 Demostrar que una ecuación es una identidad

Demuestra que la ecuación que sigue es una identidad, transformando el lado izquierdo (LI), en el lado derecho (LD):

$$(\sec \theta + \tan \theta)(1 - \sin \theta) = \cos \theta$$

SOLUCIÓN Se comienza con el lado izquierdo y se procede como sigue:

$$\begin{aligned} (\sec \theta + \tan \theta)(1 - \sin \theta) &= \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) (1 - \sin \theta) && \begin{array}{l} \text{identidades} \\ \text{recíproca y} \\ \text{tangente} \end{array} \\ &= \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) (1 - \sin \theta) && \text{sumar fracciones} \\ &= \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} && \text{multiplicar} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} && \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ &= \cos \theta && \text{cancelar } \cos \theta \end{aligned}$$

Analicemos el resultado del ejemplo 5 desde un punto de vista numérico. Asignamos el lado izquierdo a Y_1 y el lado derecho a Y_2 , y elaboremos una tabla de valores para $\theta = 0^\circ$ hasta $\theta = 90^\circ$. Notarás que los valores Y_1 y Y_2 en la tercera pantalla son iguales, salvo por $\theta = 90^\circ$. El mensaje de ERROR se presenta porque $\sec 90^\circ$ y $\tan 90^\circ$ no están definidas.

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=(1/cos(X))+tan(X)
Y2=(1-sin(X))
Y3=cos(X)
Y4=
Y5=
Y6=

```

```

TABLE SETUP
TblStart=0
ΔTbl=15
Indent: Aut Ask
Depend: Aut Ask

```

X	Y1	Y2
0	1	1
15	.96593	.96593
30	.86603	.86603
45	.70711	.70711
60	.5	.5
75	.25982	.25982
90	ERROR	0

Hay otras formas de simplificar la expresión del lado izquierdo en el ejemplo 5. Pudimos multiplicar primero los dos factores y luego simplificar y combinar términos. En muchas ocasiones es útil el método usado —esto es, cambiar todas las expresiones a otras en donde haya sólo senos y cosenos—; sin embargo, esa técnica no siempre conduce a la simplificación más corta posible.

De aquí en adelante usaremos la frase *comprobar una identidad* en lugar de *mostrar una ecuación como identidad*. Al comprobar una identidad, solemos emplear identidades fundamentales y manipulaciones algebraicas con objeto de simplificar expresiones, como en el ejemplo precedente. Sabemos que, como con las identidades fundamentales, una identidad que contenga fracciones es válida para todos los valores de las variables tales que ningún denominador sea cero.

EJEMPLO 6 Comprobación de una identidad

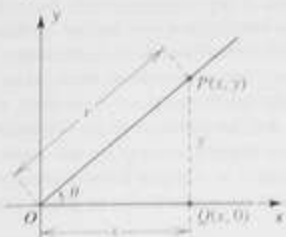
Comprueba la siguiente identidad transformando el lado izquierdo en el derecho:

$$\frac{\tan \theta + \cos \theta}{\sin \theta} = \sec \theta + \cot \theta$$

SOLUCIÓN Se puede transformar el lado izquierdo en el derecho de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \frac{\tan \theta + \cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\tan \theta}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} && \text{dividir numerador entre seno } \theta \\
 &= \frac{\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)}{\sin \theta} + \cot \theta && \text{identidades tangente y cotangente} \\
 &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta && \text{regla para cocientes} \\
 &= \frac{1}{\cos \theta} + \cot \theta && \text{cancelar seno } \theta \\
 &= \sec \theta + \cot \theta && \text{identidad recíproca}
 \end{aligned}$$

Figura 11



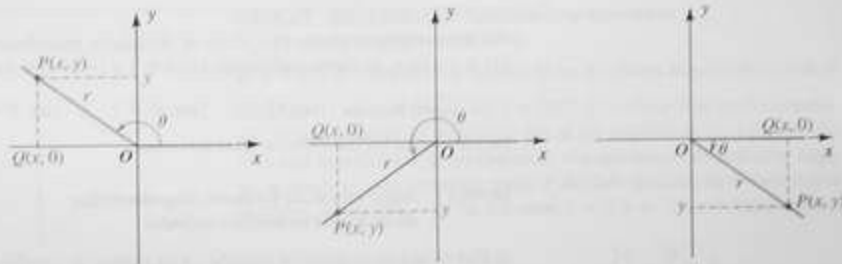
En la sección 7.1 comprobaremos muchas otras identidades usando métodos semejantes a los que se aplicaron en los ejemplos 5 y 6.

Como muchos problemas de aplicación implican ángulos que no son agudos, es necesario extender las definiciones de las funciones trigonométricas. Esto se hace usando la posición normal de un ángulo θ en un sistema coordenado rectangular. Si θ es agudo, tenemos la situación que se muestra en la figura 11, donde hemos elegido un punto $P(x, y)$ en el lado terminal de θ y donde $d(O, P) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Con referencia al triángulo OQP , tenemos

$$\sin \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{y}{x}.$$

A hora queremos considerar ángulos como los que se ilustran en la figura 12 (o cualquier otro: positivo, negativo o cero). Advertirás que en la figura 12 el valor de x o y puede ser negativo. En cada caso, la longitud del lado QP (op en la figura 12) es $|y|$, la longitud del lado OQ (ady en la figura 12) es $|x|$ y la longitud de la hipotenusa OP es r . Definiremos las seis funciones trigonométricas de modo que sus valores coincidan con los ya proporcionados siempre que el ángulo sea agudo. Se entiende que si aparece un denominador igual a cero, entonces el valor funcional correspondiente no está definido.

Figura 12



Definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Sea θ un ángulo en posición estándar en un sistema de coordenadas rectangulares, y sea $P(x, y)$ cualquier punto fuera del origen O en el lado terminal de θ .

Si $d(O, P) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (\text{si } x \neq 0)$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} \quad (\text{si } y \neq 0) \quad \sec \theta = \frac{r}{x} \quad (\text{si } x \neq 0) \quad \cot \theta = \frac{x}{y} \quad (\text{si } y \neq 0).$$

Podemos demostrar, usando triángulos semejantes, que las fórmulas en esta definición no dependen del punto $P(x, y)$ que se elija en el lado terminal de θ . Las identidades fundamentales, que establecimos para ángulos agudos, también se cumplen para las funciones trigonométricas de cualquier ángulo.

Los dominios de las funciones seno y coseno constan de todos los ángulos θ . Sin embargo, $\tan \theta$ y $\sec \theta$ están indefinidas si $x = 0$ (es decir, si el lado terminal de θ está en el eje y). Así, los dominios de las funciones tangente y secante constan de todos los ángulos, *excepto* los que miden $(\pi/2) + \pi n$ radianes para cualquier entero n . Algunos casos especiales son $\pm\pi/2$, $\pm3\pi/2$ y $\pm5\pi/2$. Las medidas correspondientes en grados son $\pm90^\circ$, $\pm270^\circ$ y $\pm450^\circ$.

Los dominios de las funciones cotangente y cosecante constan de todos los ángulos, *excepto* los que tienen $y = 0$ (es decir, todos los ángulos salvo los que tienen sus lados terminales en el eje x). Se trata de los ángulos que miden πn radianes (o $180^\circ \cdot n$) para cualquier entero n .

El análisis de los dominios se resume en la tabla siguiente, donde n denota un entero.

Función	Dominio
seno, coseno	todo ángulo θ
tangente, secante	todo ángulo θ excepto $\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n = 90^\circ + 180^\circ \cdot n$
cotangente, cosecante	todo ángulo θ excepto $\theta = \pi n = 180^\circ \cdot n$

Para cualquier punto $P(x, y)$ en la definición precedente, $|x| \leq r$ y $|y| \leq r$ o bien, en forma equivalente $|x/r| \leq 1$ y $|y/r| \leq 1$. Así,

$$|\sin \theta| \leq 1, \quad |\cos \theta| \leq 1, \quad |\csc \theta| \geq 1 \quad \text{y} \quad |\sec \theta| \geq 1$$

para todo θ en los dominios de estas funciones.

EJEMPLO 7 Hallar valores de funciones trigonométricas de un ángulo en posición estándar

Si θ es un ángulo en posición estándar en un sistema de coordenadas rectangulares, y si $P(-15, 8)$ está en el lado terminal de θ , halla los valores de las seis funciones trigonométricas de θ .

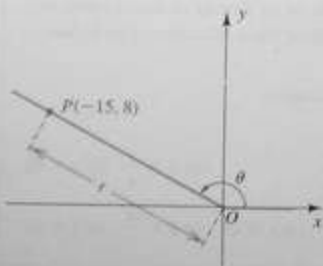
SOLUCIÓN El punto $P(-15, 8)$ se presenta en la figura 13. Si se aplica la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo con $x = -15$, $y = 8$ y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-15)^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17,$$

se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{8}{17} & \cos \theta &= \frac{x}{r} = -\frac{15}{17} & \tan \theta &= \frac{y}{x} = -\frac{8}{15} \\ \csc \theta &= \frac{r}{y} = \frac{17}{8} & \sec \theta &= \frac{r}{x} = -\frac{17}{15} & \cot \theta &= \frac{x}{y} = -\frac{15}{8} \end{aligned}$$

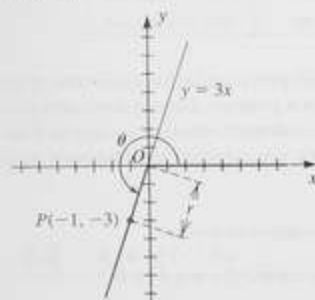
Figura 13



EJEMPLO 8 Hallar valores de funciones trigonométricas de un ángulo en posición estándar

Un ángulo θ está en posición estándar y su lado terminal se encuentra en el tercer cuadrante sobre la línea $y = 3x$. Halla los valores de las funciones trigonométricas de θ .

Figura 14



SOLUCIÓN En la figura 14 se presenta la gráfica de $y = 3x$, con los lados inicial y terminal de θ . Dado que el lado terminal de θ está en el cuadrante III, se comienza por escoger un valor negativo conveniente para x , por ejemplo $x = -1$. Se sustituye este valor de x en $y = 3x$ y se tiene $y = 3(-1) = -3$; por tanto $P(-1, -3)$ está en el lado terminal. Al aplicar la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo con

$$x = -1, \quad y = -3 \quad y \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \sin \theta &= -\frac{3}{\sqrt{10}} & \cos \theta &= -\frac{1}{\sqrt{10}} & \tan \theta &= \frac{-3}{-1} = 3 \\ \csc \theta &= -\frac{\sqrt{10}}{3} & \sec \theta &= -\frac{\sqrt{10}}{1} & \cot \theta &= \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo se puede aplicar si θ es un ángulo cuadrantal. Esto se ilustra con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 Hallar valores de funciones trigonométricas de un ángulo cuadrantal

Si $\theta = 3\pi/2$, encuentre los valores de las funciones trigonométricas de θ .

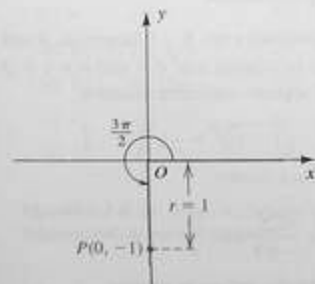
SOLUCIÓN Advertirás que $3\pi/2 = 270^\circ$. Al colocar θ en posición estándar, el lado terminal de θ coincide con el eje negativo de las y (figura 15). Para usar la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, se puede escoger cualquier punto P del lado terminal de θ . Para mayor sencillez, se usa $P(0, -1)$. En este caso, $x = 0$, $y = -1$, $r = 1$; por tanto

$$\begin{aligned} \sin \frac{3\pi}{2} &= \frac{-1}{1} = -1 & \cos \frac{3\pi}{2} &= \frac{0}{1} = 0 \\ \csc \frac{3\pi}{2} &= \frac{1}{-1} = -1 & \cot \frac{3\pi}{2} &= \frac{0}{-1} = 0 \end{aligned}$$

Las funciones tangente y secante no están definidas, puesto que las expresiones que no tienen sentido $\tan \theta = (-1)/0$ y $\sec \theta = 1/0$ ocurren cuando se sustituyen en las fórmulas apropiadas.

Determinemos los signos asociados con los valores de las funciones trigonométricas. Si θ está en el segundo cuadrante y $P(x, y)$ es un punto en el lado terminal, entonces x es negativo y y es positivo. Por tanto, $\sin \theta = y/r$ y $\csc \theta = r/y$ son positivas y las otras cuatro funciones trigonométricas, en las que siempre aparece x , son negativas. Al comprobar los demás cuadrantes de forma semejante obtenemos la tabla siguiente.

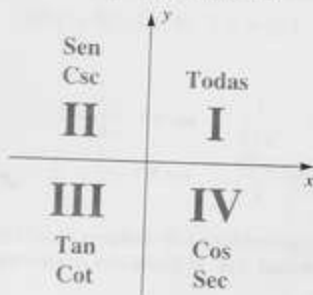
Figura 15



Signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante que contiene θ	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

Figura 16
Funciones trigonométricas positivas



Un recurso mnemotécnico para recordar los cuadrantes donde las funciones trigonométricas son positivas es "¿Ya Sabes Todo Correctamente?", que corresponde a Todas Sen Tan Cos.

El diagrama de la figura 16 es útil para recordar los cuadrantes en los cuales las funciones trigonométricas son *positivas*. Cuando no se menciona una función (como cos en el segundo cuadrante), entonces es negativa. Concluimos esta sección con tres ejemplos que requieren la información de la tabla precedente.

EJEMPLO 10 Hallar el cuadrante que contiene un ángulo

Halla el cuadrante que contiene a θ si $\cos \theta > 0$ y $\sin \theta < 0$.

SOLUCIÓN Con referencia a la tabla de los signos o a la figura 16, observamos que $\cos \theta > 0$ (el coseno es positivo) si θ está en el primero o cuarto cuadrante, y que $\sin \theta < 0$ (el seno es negativo) si θ está en el tercero o cuarto cuadrante. Entonces, para que se cumplan ambas condiciones, θ debe estar en el cuarto cuadrante.

EJEMPLO 11 Hallar valores de funciones trigonométricas a partir de condiciones prescritas

Si $\sin \theta = \frac{3}{5}$ y $\tan \theta < 0$, usa identidades fundamentales para hallar los valores de las otras cinco funciones trigonométricas.

SOLUCIÓN Como $\sin \theta = \frac{3}{5} > 0$ (positivo) y $\tan \theta < 0$ (negativa), θ está en el segundo cuadrante. Al aplicar la relación $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ y el hecho de que $\cos \theta$ es negativo en el segundo cuadrante, tenemos

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Luego usamos la identidad tangente para obtener

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}.$$

Por último, la aplicación de las identidades recíprocas produce

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{-4/5} = -\frac{5}{4}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{-3/4} = -\frac{4}{3}.$$

EJEMPLO 12 Uso de identidades fundamentales

Reescribe $\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cot^2 \theta}$ en forma no radical sin usar valores absolutos para $\pi < \theta < 2\pi$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cot^2 \theta} &= \sqrt{1 + \cot^2 \theta} \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ &= \sqrt{\csc^2 \theta} \quad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta \\ &= |\csc \theta| \quad \sqrt{x^2} = |x|\end{aligned}$$

De $\pi < \theta < 2\pi$, sabemos que θ está en el cuadrante III o IV. Por tanto, la $\csc \theta$ es negativa, y por la definición de valor absoluto tenemos

$$|\csc \theta| = -\csc \theta.$$

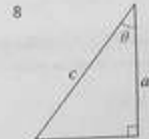
6.2 Ejercicios

Ejercicios 1 y 2: aplica el sentido común para relacionar entre sí las variables y los valores. (Los triángulos están dibujados a escala y los ángulos se expresan en radianes.)

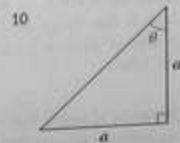
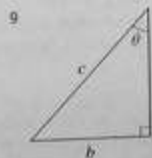
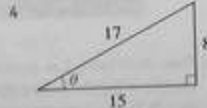
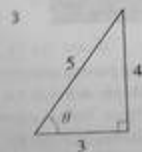


- (a) α (A) 7
(b) β (B) 0.28
(c) x (C) 24
(d) y (D) 1.29
(e) z (E) 25

- (a) α (A) 23.35
(b) β (B) 16
(c) x (C) 17
(d) y (D) 0.82
(e) z (E) 0.76



Ejercicios 3 al 10: indica los valores de las seis funciones trigonométricas para el ángulo θ .



Ejercicios 11 al 16: encuentra los valores exactos de x y y .

11



12



13



14



15



16



Ejercicios 17 al 22: halla los valores exactos de las funciones trigonométricas para el ángulo agudo θ .

17 $\sin \theta = \frac{3}{5}$

18 $\cos \theta = \frac{8}{17}$

19 $\tan \theta = \frac{5}{13}$

20 $\cot \theta = \frac{7}{24}$

21 $\sec \theta = \frac{6}{5}$

22 $\csc \theta = 4$

23 **Altura de un árbol** Un leñador ubicado a 200 pies de la base de una secoya, observa que el ángulo entre el suelo y la parte superior del árbol es de 60° . Calcula la altura del árbol.

24 **Distancia al monte Fuji** El monte Fuji, en Japón, mide aproximadamente 12 400 pies de altura. Un estudiante de trigonometría, que está a varias millas de distancia de esa montaña, observa que el ángulo entre el nivel del suelo y

la cima es de 30° . Calcula la distancia desde el estudiante hasta un punto, al nivel del suelo, directamente debajo del pico de la montaña.

25 **Bloques de Stonehenge** Stonehenge, en las llanuras de Salisbury, Inglaterra, fue construida utilizando bloques de piedra maciza que pesan hasta 99 000 libras cada uno. Levantar una sola de estas piedras requería de unas 550 personas, quienes subían la piedra por una rampa inclinada a un ángulo de 9° . Calcula la distancia a la que movían una piedra para levantarla a una altura de 30 pies.

26 **Altura de un anuncio** El anuncio publicitario más alto del mundo era una gran letra I situada en la parte superior del edificio First Interstate World Center, de 73 pisos, en Los Ángeles. A una distancia de 200 pies del punto que estaba directamente bajo el anuncio, el ángulo entre el suelo y la parte superior del anuncio era de 78.87° . Calcula la altura de la parte más alta del anuncio.

27 **Resolución del telescopio** Dos estrellas que están cerca una de otra pueden aparecer como si fueran una sola. La capacidad de un telescopio para separar sus imágenes se denomina resolución. Cuanto más pequeña sea la resolución, mejor será la capacidad del telescopio para separar imágenes en el cielo. En un telescopio de refracción, la resolución θ (véase figura) se puede mejorar mediante el uso de una lente de mayor diámetro D . La relación entre θ en grados y D en metros es $\sin \theta = 1.22\lambda/D$, donde λ es la longitud de onda de luz en metros. El mayor telescopio de refracción del mundo está en la Universidad de Chicago. A una longitud de onda de $\lambda = 550 \times 10^{-9}$ metros, su resolución es de $0.000\,037\,69^\circ$. Calcula el diámetro de la lente.

Ejercicio 27

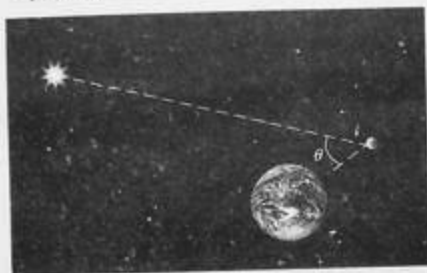


28 **Fases de la Luna** Las fases de la Luna se pueden describir usando el ángulo de fase θ , determinado por el Sol, la Luna y la Tierra, como se muestra en la figura. Debido a que la Luna gira en órbita alrededor de la Tierra, θ cambia durante el curso de un mes. El área de la región A de la Luna, que aparece iluminada a un observador en la Tierra,

está dada por $A = \frac{1}{2} \pi R^2 (1 + \cos \theta)$, donde $R = 1\,080$ millas es el radio de la Luna. Calcula A para las siguientes posiciones de la Luna:

- (a) $\theta = 0^\circ$ (Luna llena) (b) $\theta = 180^\circ$ (Luna nueva)
 (c) $\theta = 90^\circ$ (primer cuarto) (d) $\theta = 103^\circ$

Ejercicio 28



Ejercicios 29 al 34: aproxima hasta cuatro cifras decimales cuando sea apropiado.

- 29 (a) $\sin 42^\circ$ (b) $\cos 77^\circ$
 (c) $\csc 123^\circ$ (d) $\sec (-190^\circ)$
 30 (a) $\tan 282^\circ$ (b) $\cot (-81^\circ)$
 (c) $\sec 202^\circ$ (d) $\sin 97^\circ$
 31 (a) $\cot (\pi/13)$ (b) $\csc 1.32$
 (c) $\cos (-8.54)$ (d) $\tan (3\pi/7)$
 32 (a) $\sin (-0.11)$ (b) $\sec \frac{31}{22}$
 (c) $\tan (-\frac{1}{11})$ (d) $\cos 2.4\pi$
 33 (a) $\sin 30^\circ$ (b) $\sin 30$
 (c) $\cos \pi^\circ$ (d) $\cos \pi$
 34 (a) $\sin 45^\circ$ (b) $\sin 45$
 (c) $\cos (3\pi/2)^\circ$ (d) $\cos (3\pi/2)$

Ejercicios 35 al 38: usa las identidades pitagóricas para escribir la expresión como un entero.

- 35 (a) $\tan^2 4\beta - \sec^2 4\beta$ (b) $4 \tan^2 \beta - 4 \sec^2 \beta$
 36 (a) $\csc^2 3\alpha - \cot^2 3\alpha$ (b) $3 \csc^2 \alpha - 3 \cot^2 \alpha$
 37 (a) $5 \sec^2 \theta + 5 \cos^2 \theta$
 (b) $5 \sec^2 (\theta/4) + 5 \cos^2 (\theta/4)$
 38 (a) $7 \sec^2 \gamma - 7 \tan^2 \gamma$
 (b) $7 \sec^2 (\gamma/3) - 7 \tan^2 (\gamma/3)$

Ejercicios 39 al 42: simplifica la expresión

- 39 $\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$ 40 $\frac{\cot^2 \alpha - 4}{\cot^2 \alpha - \cot \alpha - 6}$
 41 $\frac{2 - \tan \theta}{2 \csc \theta - \sec \theta}$ 42 $\frac{\csc \theta + 1}{(1/\sin^2 \theta) + \csc \theta}$

Ejercicios 43 al 48: usa identidades fundamentales para escribir la primera expresión en términos de la segunda, para cualquier ángulo agudo θ .

- 43 $\cot \theta, \sin \theta$ 44 $\tan \theta, \cos \theta$
 45 $\sec \theta, \sin \theta$ 46 $\csc \theta, \cos \theta$
 47 $\sin \theta, \sec \theta$ 48 $\cos \theta, \cot \theta$

Ejercicios 49 al 70: verifica la identidad transformando el lado izquierdo en el derecho.

- 49 $\cos \theta \sec \theta = 1$
 50 $\tan \theta \cot \theta = 1$
 51 $\sin \theta \sec \theta = \tan \theta$
 52 $\sin \theta \cot \theta = \cos \theta$
 53 $\frac{\csc \theta}{\sec \theta} = \cot \theta$
 54 $\cot \theta \sec \theta = \csc \theta$
 55 $(1 + \cos 2\theta)(1 - \cos 2\theta) = \sin^2 2\theta$
 56 $\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = 2 \cos^2 2\theta - 1$
 57 $\cos^2 \theta (\sec^2 \theta - 1) = \sin^2 \theta$

$$58. (\tan \theta + \cot \theta) \tan \theta = \sec^2 \theta$$

$$59. \frac{\sin(\theta/2)}{\csc(\theta/2)} + \frac{\cos(\theta/2)}{\sec(\theta/2)} = 1$$

$$60. 1 - 2 \sin^2(\theta/2) = 2 \cos^2(\theta/2) - 1$$

$$61. (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) = \frac{1}{\sec^2 \theta}$$

$$62. (1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = 1$$

$$63. \sec \theta - \cos \theta = \tan \theta \sin \theta$$

$$64. \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta} = 1 + \tan \theta$$

$$65. (\cot \theta + \csc \theta)(\tan \theta - \sin \theta) = \sec \theta - \cos \theta$$

$$66. \cot \theta + \tan \theta = \csc \theta \sec \theta$$

$$67. \sec^2 3\theta \csc^2 3\theta = \sec^2 3\theta + \csc^2 3\theta$$

$$68. \frac{1 + \cos^2 3\theta}{\sin^2 3\theta} = 2 \csc^2 3\theta - 1$$

$$69. \log \csc \theta = -\log \sin \theta$$

$$70. \log \tan \theta = \log \sin \theta - \log \cos \theta$$

Ejercicios 71 al 74: halla los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ si θ está en posición estándar y P está en el lado terminal.

71. $P(4, -3)$

72. $P(-8, -15)$

73. $P(-2, -5)$

74. $P(-1, 2)$

Ejercicios 75 al 80: halla los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ si θ está en posición estándar y el lado terminal de θ está en el cuadrante que se especifica y cumple la condición dada.

75. II; está en la recta $y = -4x$

76. IV; está en la recta $3y + 5x = 0$

77. I; está en una recta con pendiente $\frac{4}{3}$

78. III; biseca el cuadrante

79. III; es paralelo a la recta $2y - 7x + 2 = 0$

80. II; es paralelo a la recta que pasa por $A(1, 4)$ y $B(3, -2)$

Ejercicios 81 y 82: halla los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de cada ángulo, de ser posible.

81. (a) 90° (b) 0° (c) $7\pi/2$ (d) 3π

82. (a) 180° (b) -90° (c) 2π (d) $5\pi/2$

Ejercicios 83 y 84: determina el cuadrante que contenga θ para las condiciones dadas.

83. (a) $\cos \theta > 0$ y $\sin \theta < 0$

(b) $\sin \theta < 0$ y $\cot \theta > 0$

(c) $\csc \theta > 0$ y $\sec \theta < 0$

(d) $\sec \theta < 0$ y $\tan \theta > 0$

84. (a) $\tan \theta < 0$ y $\cos \theta > 0$

(b) $\sec \theta > 0$ y $\tan \theta < 0$

(c) $\csc \theta > 0$ y $\cot \theta < 0$

(d) $\cos \theta < 0$ y $\csc \theta < 0$

Ejercicios 85 al 92: emplea identidades fundamentales para hallar los valores de las funciones trigonométricas para las condiciones dadas.

85. $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ y $\sin \theta > 0$

86. $\cot \theta = \frac{3}{4}$ y $\cos \theta < 0$

87. $\sin \theta = -\frac{5}{13}$ y $\sec \theta > 0$

88. $\cos \theta = \frac{1}{2}$ y $\sin \theta < 0$

89. $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ y $\sin \theta < 0$

90 $\csc \theta = 5$ y $\cot \theta < 0$

91 $\sec \theta = -4$ y $\csc \theta > 0$

92 $\sin \theta = \frac{2}{3}$ y $\cos \theta < 0$

Ejercicios 93 al 98: escribe la expresión en forma no radical sin usar valores absolutos para los valores indicados de θ .

93 $\sqrt{\sec^2 \theta - 1}$; $\pi/2 < \theta < \pi$

94 $\sqrt{1 + \cot^2 \theta}$; $0 < \theta < \pi$

95 $\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$; $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

96 $\sqrt{\csc^2 \theta - 1}$; $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

97 $\sqrt{\sec^2(\theta/2)}$; $2\pi < \theta < 4\pi$

98 $\sqrt{\cos^2(\theta/2)}$; $0 < \theta < \pi$

6.3

Funciones trigonométricas de números reales

Definición de las funciones trigonométricas de números reales

El dominio de cada función trigonométrica que hemos analizado es un conjunto de ángulos. En cálculo y en muchas aplicaciones, los dominios de las funciones constan de números reales. Para considerar el dominio de una función trigonométrica como un subconjunto de \mathbb{R} , podemos aplicar la siguiente definición.

El valor de una función trigonométrica de un número real t es su valor en un ángulo de t radianes, en el supuesto de que ese valor exista.

Con esta definición, una notación como $\sin 2$ puede interpretarse como el seno del número real 2 o como el seno de un ángulo de 2 radianes. Si se usan grados, como en la sección 6.2, escribimos $\sin 2^\circ$. Así pues,

$$\sin 2 \neq \sin 2^\circ.$$

Para hallar los valores de funciones trigonométricas de números reales con una calculadora, usamos el modo en radianes.

Podemos interpretar las funciones trigonométricas de números reales geoméricamente usando una circunferencia unitaria U : es decir, una circunferencia de radio 1, con centro en el origen O de un plano coordenado rectangular. La circunferencia U es la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Sea t un número real tal que $0 < t < 2\pi$, y denotemos con θ el ángulo (en posición estándar) de t radianes. Una posibilidad se ilustra en la figura 1, en donde $P(x, y)$ es el punto de intersección del lado terminal de θ y la circunferencia unitaria U , en donde s es la longitud del arco circular de $A(1, 0)$ a $P(x, y)$. Dada la fórmula $s = r\theta$ para la longitud de un arco de circunferencia, con $\theta = t$ y $r = 1$, vemos que

$$s = r\theta = 1(t) = t.$$

Por tanto, t se puede tomar como la medida en radianes del ángulo θ o como la longitud del arco circular AP en U .

Ahora, tomemos cualquier número real t que no sea negativo. Si consideramos el ángulo θ de t radianes como producido al girar el segmento OA

Figura 1

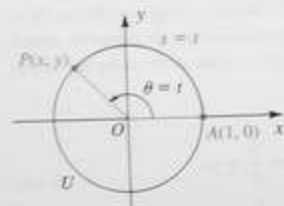
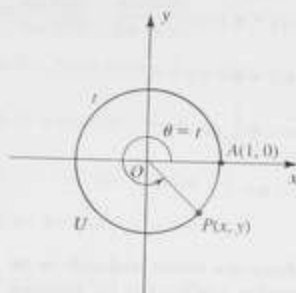


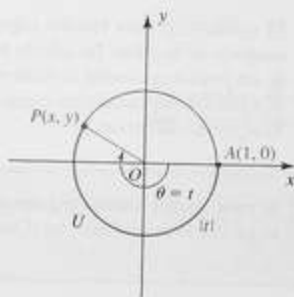
Figura 2

 $\theta = t, t > 0$ 

alrededor de O en sentido contrario al de las manecillas del reloj. t es la distancia a lo largo de U que A recorre antes de llegar a su posición final $P(x, y)$. En la figura 2 hemos ilustrado un caso para $t < 2\pi$, sin embargo, si $t > 2\pi$, entonces A puede viajar alrededor de U varias veces en sentido contrario al de las manecillas del reloj antes de llegar a $P(x, y)$.

Si $t < 0$, entonces OA gira en sentido de las manecillas del reloj y la distancia que A recorre antes de llegar a $P(x, y)$ es $|t|$, como se muestra en la figura 3.

Figura 3

 $\theta = t, t < 0$ 

El análisis precedente indica la forma en que se puede asociar un punto único $P(x, y)$ en U con cada número real t . Llamaremos $P(x, y)$ al **punto sobre la circunferencia unitaria U que corresponde a t** . Se pueden usar las coordenadas (x, y) de P para definir las seis funciones trigonométricas de t . Así, por la definición de las funciones trigonométricas de números reales junto con la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo (dada en la sección 6.2), vemos que

$$\text{sen } t = \text{sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y.$$

La aplicación del mismo procedimiento para las cinco funciones trigonométricas restantes produce las fórmulas siguientes.

Definición de las funciones trigonométricas en términos de una circunferencia unitaria

Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto de la circunferencia unitaria U que corresponde a t , entonces

$$\begin{aligned} \text{sen } t &= y & \cos t &= x & \tan t &= \frac{y}{x} \quad (\text{si } x \neq 0) \\ \csc t &= \frac{1}{y} \quad (\text{si } y \neq 0) & \sec t &= \frac{1}{x} \quad (\text{si } x \neq 0) & \cot t &= \frac{x}{y} \quad (\text{si } y \neq 0). \end{aligned}$$

Las fórmulas de esta definición expresan valores funcionales en términos de las coordenadas de un punto P sobre una circunferencia unitaria. Por esta razón, las funciones trigonométricas se llaman a veces **funciones circulares**.

EJEMPLO 1 Hallar valores de las funciones trigonométricas

En la figura 4 se presenta un punto $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria U correspondiente a un número real t , para $\pi < t < 3\pi/2$. Halla los valores de las funciones trigonométricas en t .

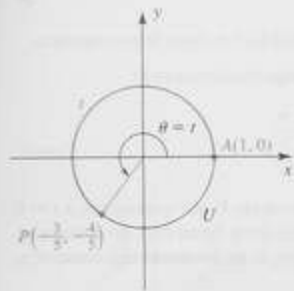
SOLUCIÓN Con referencia a la figura 4, las coordenadas de $P(x, y)$ son

$$x = -\frac{3}{5}, \quad y = -\frac{4}{5}.$$

Con la definición de las funciones trigonométricas en términos de una circunferencia unitaria obtendremos

$$\begin{aligned} \sin t &= y = -\frac{4}{5} & \cos t &= x = -\frac{3}{5} & \tan t &= \frac{y}{x} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \\ \csc t &= \frac{1}{y} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4} & \sec t &= \frac{1}{x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3} & \cot t &= \frac{x}{y} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Figura 4



EJEMPLO 2 Hallar un punto en U relativo a un punto dado

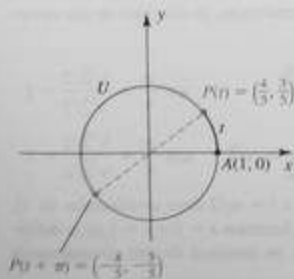
Denotemos por $P(t)$ el punto sobre la circunferencia unitaria U que corresponda a t para $0 \leq t < 2\pi$. Si $P(t) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, encuentra

- (a) $P(t + \pi)$ (b) $P(t - \pi)$ (c) $P(-t)$

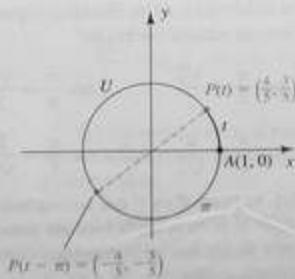
SOLUCIÓN

(a) El punto $P(t)$ sobre U está trazado en la figura 5(a), en donde también hemos indicado el arco AP de longitud t . Para hallar $P(t + \pi)$ se recorre una distancia π en *sentido contrario al de las manecillas del reloj* a lo largo de U desde $P(t)$, según indica el arco azul de la figura. Como π mide la mitad de la circunferencia de U , esto dará el punto $P(t + \pi) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ diametralmente opuesto a $P(t)$.

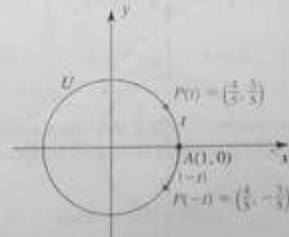
Figura 5
(a)



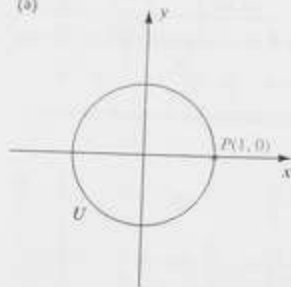
(b)



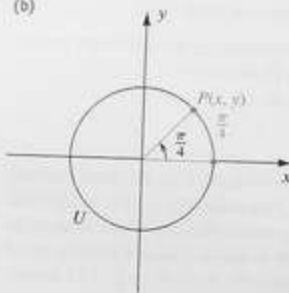
(c)



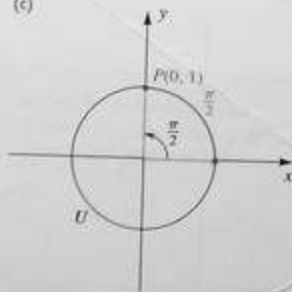
(continúa)

Figura 6
(a)

(b)



(c)



(b) Para hallar $P(t - \pi)$ recorremos una distancia π en sentido de las manecillas del reloj a lo largo de U a partir de $P(t)$, como se ve en la figura 5(b). Esto conduce a $P(t - \pi) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$. Observa que $P(t + \pi) = P(t - \pi)$.

(c) Para encontrar $P(-t)$, recorremos una distancia $| -t |$ a lo largo de U en sentido de las manecillas del reloj desde $A(1, 0)$, conforme se ve en la figura 5(c). Esto equivale a reflejar $P(t)$ a través del eje x ; por tanto, sólo se cambia el signo de la coordenada y de $P(t) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ para obtener $P(-t) = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$.

EJEMPLO 3 Hallar valores especiales de las funciones trigonométricas

Encuentra los valores de las funciones trigonométricas en t :

$$(a) t = 0 \quad (b) t = \frac{\pi}{4} \quad (c) t = \frac{\pi}{2}$$

SOLUCIÓN

(a) El punto P sobre la circunferencia unitaria U que corresponde a $t = 0$ tiene coordenadas $(1, 0)$, según se muestra en la figura 6(a). En consecuencia, al hacer $x = 1$ y $y = 0$ en la definición de las funciones trigonométricas se obtiene

$$\begin{aligned} \sin 0 &= y = 0 & \cos 0 &= x = 1 \\ \tan 0 &= \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 & \sec 0 &= \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Notarás que $\csc 0$ y $\cot 0$ no están definidas, puesto que $y = 0$ es un denominador.

(b) Si $t = \pi/4$, entonces el ángulo de $\pi/4$ radianes de la figura 6(b) biseca el primer cuadrante y el punto $P(x, y)$ se encuentra en la línea $y = x$. Como $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ y como $y = x$, obtenemos

$$x^2 + x^2 = 1, \quad \text{o} \quad 2x^2 = 1.$$

Al despejar la x y observar que $x > 0$ resulta

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Así pues, P es el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Al hacer $x = \sqrt{2}/2$ y $y = \sqrt{2}/2$ en la definición de las funciones trigonométricas, en términos de una circunferencia unitaria tendremos

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \tan \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1 \\ \csc \frac{\pi}{4} &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} & \sec \frac{\pi}{4} &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} & \cot \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1. \end{aligned}$$

(c) El punto P en U que corresponde a $t = \pi/2$ tiene coordenadas $(0, 1)$, como se ve en la figura 6(c); por tanto, hacemos $x = 0$ y $y = 1$ en la definición de las funciones trigonométricas, en términos de una circunferencia unitaria resulta:

$$\sec \frac{\pi}{2} = 1 \quad \csc \frac{\pi}{2} = 0 \quad \cot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1 \quad \tan \frac{\pi}{2} = 0.$$

Las funciones tangente y secante no están definidas puesto que $x = 0$ es un denominador en cada caso.

En el apéndice IV se presenta un resumen de funciones trigonométricas de ángulos especiales.

Usaremos el planteamiento de circunferencia unitaria de las funciones trigonométricas como ayuda para obtener sus gráficas. Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto en la circunferencia unitaria U que corresponde a t , entonces por la definición de las funciones trigonométricas en términos de una circunferencia unitaria,

$$x = \cos t \quad y = \sin t.$$

Así, como se muestra en la figura 7, podemos denotar $P(x, y)$ por

$$P(\cos t, \sin t).$$

Si $t > 0$, el número real t puede interpretarse como la medida en radianes del ángulo θ o como la longitud del arco AP .

Si hacemos que t aumente de 0 a 2π radianes, el punto $P(\cos t, \sin t)$ viaja alrededor del círculo unitario U una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Al observar la variación de las coordenadas x y y del punto P , se obtiene la siguiente tabla. La notación $0 \rightarrow \pi/2$ del primer renglón de la tabla significa que t crece de 0 a $\pi/2$, y la notación $(1, 0) \rightarrow (0, 1)$ denota la variación correspondiente de $P(\cos t, \sin t)$, a medida que viaja a lo largo de U de $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Si t crece de 0 a $\pi/2$, entonces $\sin t$ pasa de 0 a 1, lo que denotamos por $0 \rightarrow 1$. Además, $\sin t$ toma todo valor entre 0 y 1. Si t crece de $\pi/2$ a π , entonces $\sin t$ decrece de 1 a 0, lo que se denota con $1 \rightarrow 0$. Otros renglones de la tabla se pueden interpretar de modo semejante.

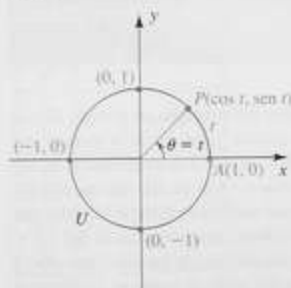
t	$P(\cos t, \sin t)$	$\cos t$	$\sin t$
$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$(1, 0) \rightarrow (0, 1)$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$
$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$(0, 1) \rightarrow (-1, 0)$	$0 \rightarrow -1$	$1 \rightarrow 0$
$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$(-1, 0) \rightarrow (0, -1)$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$
$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$	$(0, -1) \rightarrow (1, 0)$	$0 \rightarrow 1$	$-1 \rightarrow 0$

Si t crece de 2π a 4π , el punto $P(\cos t, \sin t)$ de la figura 7 recorre otra vez la circunferencia unitaria U y se repiten las figuras idénticas para $\sin t$ y $\cos t$; esto es,

$$\sin(t + 2\pi) = \sin t \quad y \quad \cos(t + 2\pi) = \cos t,$$

para todo t del intervalo $[0, 2\pi]$. Lo mismo es cierto si t crece de 4π a 6π , de 6π a 8π , y así sucesivamente. En general, tenemos el siguiente teorema.

Figura 7



Teorema sobre la repetición de los valores funcionales de sen y cos:

Si n es cualquier entero, entonces

$$\sin(t + 2\pi n) = \sin t \quad \text{y} \quad \cos(t + 2\pi n) = \cos t.$$

La variación repetitiva de las funciones seno y coseno es *periódica* en el sentido de la siguiente definición.

Definición de función periódica

Una función f es **periódica** si existe un número real positivo k tal que

$$f(t + k) = f(t)$$

para toda t del dominio de f . El menor número real positivo k , si existe, es el **periodo** de f .

Por sentido común ya tienes una idea del concepto de periodo de una función. Por ejemplo, si un lunes te preguntan "¿qué día de la semana será en 15 días?", tu respuesta debe ser "martes" debido a tu comprensión de que los días de la semana se repiten cada 7 días y 15 es un día más que dos periodos completos de 7 días. Con base en el análisis anterior al teorema precedente, vemos que el periodo de las funciones seno y coseno es 2π .

Ahora podemos obtener fácilmente las gráficas de las funciones seno y coseno. Como queremos dibujar estas gráficas en un plano xy , sustituimos la variable t por x y consideramos las ecuaciones

$$y = \sin x \quad \text{y} \quad y = \cos x.$$

Podemos pensar que x es la medida en radianes de cualquier ángulo; sin embargo, en cálculo, x suele considerarse como un número real. Estos puntos de vista son equivalentes, ya que el seno (o el coseno) de un ángulo de x radianes es el mismo que el seno (o el coseno) del número real x . La variable y denota el valor funcional que corresponde a x .

En la tabla al margen se muestran coordenadas de varios puntos en la gráfica de $y = \sin x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$. Puntos adicionales pueden determinarse usando resultados sobre ángulos especiales, como

$$\sin(\pi/6) = 1/2 \quad \text{y} \quad \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \approx 0.8660.$$

Para trazar la gráfica de $0 \leq x \leq 2\pi$, tracemos los puntos dados por la tabla y recordemos que $\sin x$ crece en $[0, \pi/2]$, decrece en $[\pi/2, \pi]$, $[\pi, 3\pi/2]$ y crece en $[3\pi/2, 2\pi]$. Esto da el trazo de la figura 8. Como la función seno es periódica, el trazo de la figura 8 se repite a la derecha e izquierda, en intervalos de longitud 2π . Esto proporciona el trazo de la figura 9.

x	$y = \sin x$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
π	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
2π	0

Figura 8

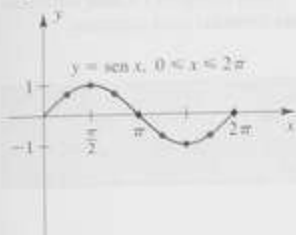
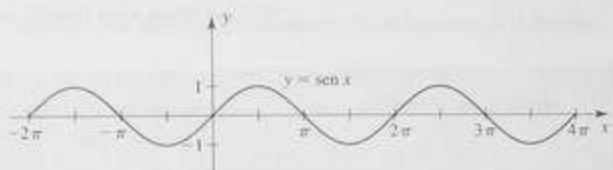


Figura 9



Se puede usar el mismo procedimiento para trazar la gráfica de $y = \cos x$. La tabla al margen enumera varios puntos de la gráfica para $0 \leq x \leq 2\pi$. Trazar estos puntos nos llevará a la parte de la gráfica de la figura 10. Si se repiten estos trazos a derecha e izquierda, en intervalos de longitud 2π , se obtiene el trazo de la figura 11.

x	$y = \cos x$
0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
π	-1
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
2π	1

Figura 10

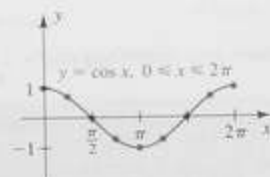


Figura 11



La parte de la gráfica de la función seno o coseno correspondiente a $0 \leq x \leq 2\pi$ es un **ciclo**. A veces nos referimos a un ciclo como una **onda senoidal** u **onda cosenoidal**.

La imagen de las funciones seno y coseno está formada por todos los números reales del intervalo cerrado $[-1, 1]$. Como $\csc x = 1/\sin x$ y $\sec x = 1/\cos x$, se deduce que la imagen de las funciones cosecante y secante estará constituida por todos los números reales con valor absoluto mayor que o igual a 1.

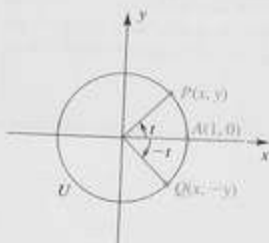
Según veremos, la imagen de las funciones tangente y cotangente está formada por todos los números reales.

Antes de analizar gráficas de las otras funciones trigonométricas, establezcamos fórmulas con funciones de $-t$ para cualquier t . Como interviene un signo menos, estas fórmulas se llaman *fórmulas para negativos*.

Fórmulas para negativos

$$\begin{aligned}\sin(-t) &= -\sin t & \cos(-t) &= \cos t & \tan(-t) &= -\tan t \\ \csc(-t) &= -\csc t & \sec(-t) &= \sec t & \cot(-t) &= -\cot t\end{aligned}$$

Figura 12.



DEMOSTRACIONES Considera la circunferencia unitaria U de la figura 12. A medida que t crece desde 0 hasta 2π , el punto $P(x, y)$ recorre la circunferencia unitaria una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj y el punto $Q(x, -y)$, correspondiente a $-t$, recorre U una vez en sentido de las manecillas. Al aplicar la definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo (con $r = 1$), tendremos

$$\sin(-t) = -y = -\sin t$$

$$\cos(-t) = x = \cos t$$

$$\tan(-t) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t.$$

Las demostraciones de las restantes fórmulas son semejantes.

En la ilustración inmediata se usan fórmulas para negativos para hallar el valor exacto de cada función trigonométrica.

ILUSTRACIÓN Usar fórmulas para negativos

$$\blacksquare \sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\blacksquare \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\blacksquare \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\blacksquare \csc(-30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

$$\blacksquare \sec(-60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

$$\blacksquare \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

A continuación, utilizamos fórmulas para negativos para comprobar una identidad trigonométrica.


EJEMPLO 4 Empleo de fórmulas para negativos para verificar una identidad

Comprueba esta identidad transformando el lado izquierdo en el derecho:

$$\operatorname{sen}(-x) \tan(-x) + \cos(-x) = \sec x$$

SOLUCIÓN Se puede proceder como sigue:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-x) \tan(-x) + \cos(-x) &= (-\operatorname{sen} x)(-\tan x) + \cos x && \text{fórmulas para negativos} \\ &= \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \cos x && \text{identidad de la tangente} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x && \text{multiplicar} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} && \text{sumar términos} \\ &= \frac{1}{\cos x} && \text{identidad pitagórica} \\ &= \sec x && \text{identidad recíproca} \end{aligned}$$

Con las fórmulas para negativos cabe demostrar el siguiente teorema.

Teorema sobre las funciones trigonométricas pares e impares

- (1) El coseno y secante son funciones pares.
- (2) El seno, la tangente, cotangente y cosecante son funciones impares.

DEMOSTRACIONES Demostraremos el teorema para las funciones coseno y seno. Si $f(x) = \cos x$, entonces

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x),$$

lo que significa que la función coseno es par.

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces

$$f(-x) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x = -f(x).$$

Por tanto, la función seno es impar.

Puesto que la función seno es impar, su gráfica es simétrica con respecto al origen (figura 9). Dado que la función coseno es par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y (figura 11).

Por el teorema precedente, la función tangente es impar, y entonces la gráfica de $y = \tan x$ es simétrica con respecto al origen. En la tabla al margen se muestran algunos puntos de la gráfica si $-\pi/2 < x < \pi/2$. En la figura 13 se han graficado los puntos correspondientes. Los valores de $\tan x$ cerca de $x = \pi/2$ requieren atención especial. Si consideramos $\tan x = \operatorname{sen} x / \cos x$, entonces, a medida que x tiende a $\pi/2$, el numerador $\operatorname{sen} x$ se aproxima a 1 y el

x	$y = \tan x$
$-\frac{\pi}{3}$	$-\sqrt{3} \approx -1.7$
$-\frac{\pi}{4}$	-1
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0.6$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.6$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3} \approx 1.7$

Figura 13



denominador $\cos x$ se acerca a 0; como consecuencia, $\tan x$ toma valores positivos crecientes. A continuación se enumeran algunas aproximaciones de $\tan x$ para x cercanas a $\pi/2 \approx 1.5708$:

$$\tan 1.57000 \approx 1255.8$$

$$\tan 1.57030 \approx 2014.8$$

$$\tan 1.57060 \approx 5093.5$$

$$\tan 1.57070 \approx 10\,381.3$$

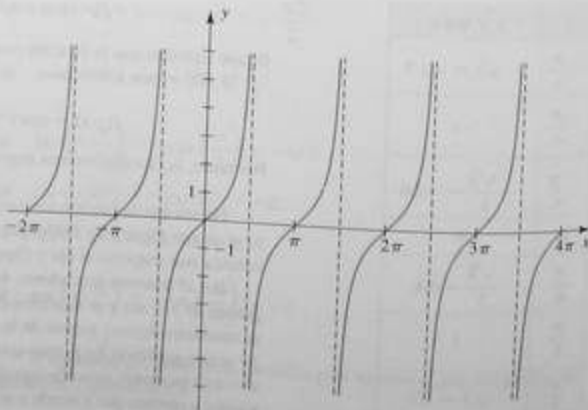
$$\tan 1.57079 \approx 158\,057.9$$

Advertirás lo rápido que $\tan x$ aumenta a medida que x se aproxima a $\pi/2$. Se dice que $\tan x$ *crece sin límite* a medida que x se acerca a $\pi/2$ a través de valores menores de $\pi/2$. Del mismo modo, si x se aproxima a $-\pi/2$ por valores mayores que $-\pi/2$, entonces $\tan x$ *decrece sin límite*. Se puede denotar esta variación con la notación introducida para funciones racionales en la sección 4.5:

$$\text{a medida que } x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-, \tan x \rightarrow \infty$$

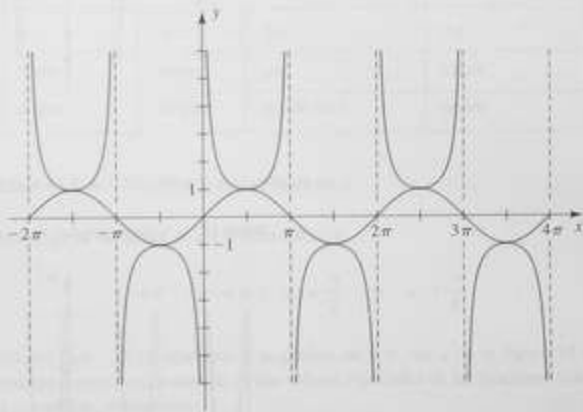
$$\text{a medida que } x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+, \tan x \rightarrow -\infty$$

Esta variación de $\tan x$ en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$ se ilustra en la figura 14. Esta porción de la gráfica se denomina **rama** de la tangente. Las líneas $x = \pi/2$ y $x = -\pi/2$ son asíntotas verticales para la gráfica. La misma figura se repite en los intervalos abiertos $(-3\pi/2, -\pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$ y $(3\pi/2, 5\pi/2)$ y en intervalos semejantes de longitud π , como se ilustra en la figura. Por tanto, la función tangente es periódica con el periodo π .

Figura 14 $y = \tan x$ 

Las gráficas de $y = \sin x$, $y = \cos x$ y $y = \tan x$ sirven para trazar las gráficas de las tres restantes funciones trigonométricas. Por ejemplo, como $\csc x = 1/\sin x$, se puede hallar la coordenada y de un punto de la gráfica de la función cosecante si se toma el recíproco de la coordenada y correspondiente de la misma gráfica del seno para todo valor de x , excepto $x = \pi n$, para cualquier entero n . (Si $x = \pi n$, $\sin x = 0$, y por tanto, $1/\sin x$ no está definido.) Como ayuda para trazar la gráfica de la función cosecante, conviene trazar la gráfica de la función seno (que se muestra en gris en la figura 15) y luego tomar recíprocos para obtener puntos en la gráfica cosecante.

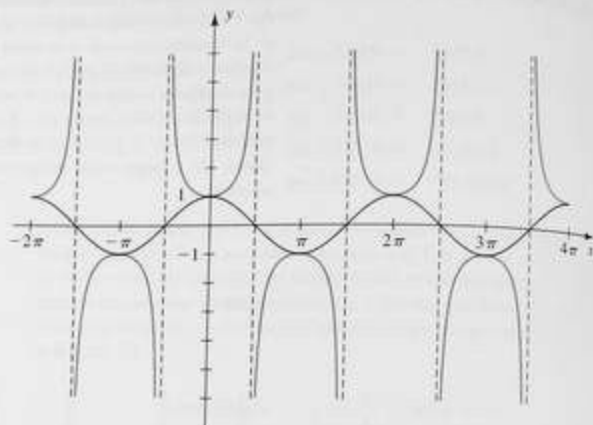
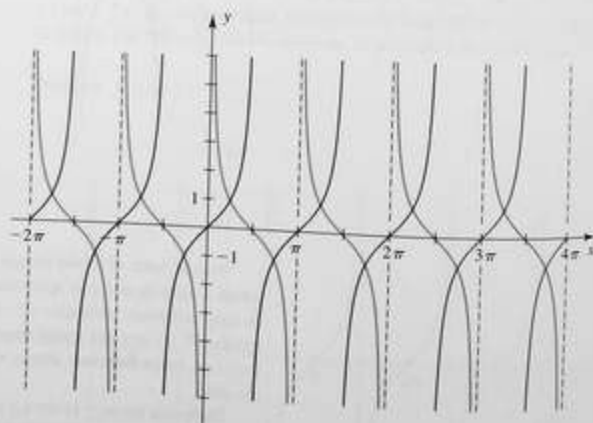
Figura 15 $y = \csc x$, $y = \sin x$



Podrás notar el modo en que la función cosecante crece o decrece sin límite a medida que x se aproxima a πn , para cualquier entero n . La gráfica tiene asíntotas verticales $x = \pi n$, como se indica en la figura. En el intervalo $(0, \pi)$ hay una **rama superior** de la cosecante y en el intervalo $(\pi, 2\pi)$, una **rama inferior**; juntas, estas ramas constituyen un **ciclo** de la cosecante.

Dado que $\sec x = 1/\cos x$ y $\cot x = 1/\tan x$, se pueden obtener las gráficas de las funciones secante y cotangente si se toman recíprocos de las coordenadas y de los puntos de las gráficas de las funciones coseno y tangente (figuras 16 y 17).

En el apéndice III aparece un resumen gráfico de las seis funciones trigonométricas y sus inversas (las cuales se analizan en la sección 7.6).

Figura 16 $y = \sec x$, $y = \cos x$ Figura 17 $y = \cot x$, $y = \tan x$ 

Hemos considerado muchas propiedades de las seis funciones trigonométricas de x , en donde x es un número real o la medida en radianes de un

ángulo. La siguiente tabla contiene un resumen de características importantes de estas funciones (n denota un entero arbitrario).

Resumen de características de las funciones trigonométricas y sus gráficas

Características	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$	$y = \sec x$	$y = \csc x$
Dominio	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x \neq \pi n$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x \neq \pi n$
Asíntotas verticales	ninguna	ninguna	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \pi n$
Imagen	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Intersecciones en x	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	ninguna	ninguna
Intersecciones en y	0	1	0	ninguna	1	ninguna
Periodo	2π	2π	π	π	2π	2π
Par o impar	impar	par	impar	impar	par	impar
Simetría	origen	eje de las y	origen	origen	eje de las y	origen

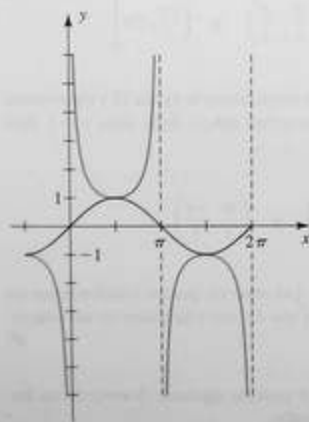
**EJEMPLO 5** Investiga la variación de $\csc x$

Investiga la variación de $\csc x$ a medida que

$$x \rightarrow \pi^-, \quad x \rightarrow \pi^+, \quad x \rightarrow \frac{\pi^-}{2} \quad \text{y} \quad x \rightarrow \frac{\pi^+}{6}.$$

Figura 18

$$y = \csc x, \quad y = \sec x$$



SOLUCIÓN Refiriéndonos a la gráfica de $y = \csc x$ de la figura 18 y usando nuestro conocimiento de los valores especiales de las funciones seno y cosecante, obtenemos:

a medida que $x \rightarrow \pi^-$, $\sin x \rightarrow 0$ (a través de valores positivos) y $\csc x \rightarrow \infty$
a medida que $x \rightarrow \pi^+$, $\sin x \rightarrow 0$ (a través de valores negativos) y $\csc x \rightarrow -\infty$

a medida que $x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$, $\sin x \rightarrow 1$ y $\csc x \rightarrow 1$

a medida que $x \rightarrow \frac{\pi^+}{6}$, $\sin x \rightarrow \frac{1}{2}$ y $\csc x \rightarrow 2$

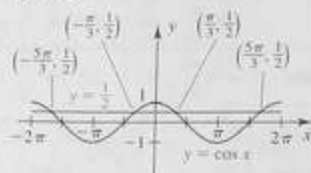
EJEMPLO 6 Solución de ecuaciones y desigualdades con una función trigonométrica

Halla todos los valores de x en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ tales que

$$(a) \cos x = \frac{1}{2} \quad (b) \cos x > \frac{1}{2} \quad (c) \cos x < \frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN Encontraremos las soluciones si consultamos las gráficas de $y = \cos x$ y $y = \frac{1}{2}$, que se trazan en el mismo plano xy de la figura 19 para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

Figura 19



(a) Los valores de x tales que $\cos x = \frac{1}{2}$ son las coordenadas x de los puntos en que las gráficas se cortan. Recuerda que $x = \pi/3$ satisface la ecuación. Por simetría, $x = -\pi/3$ es otra solución de $\cos x = \frac{1}{2}$. Como la función coseno tiene periodo 2π , los otros valores de x en $[-2\pi, 2\pi]$ tales que $\cos x = \frac{1}{2}$ son

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}.$$

(b) Los valores de x tales que $\cos x > \frac{1}{2}$ se pueden establecer si se determina en qué lugar la gráfica de $y = \cos x$ de la figura 19 se encuentra *arriba* de la línea $y = \frac{1}{2}$. Esto nos da los intervalos x

$$\left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right].$$

(c) Para resolver $\cos x < \frac{1}{2}$, otra vez consultamos la figura 19 y observamos dónde la gráfica de $y = \cos x$ se encuentra *debajo* de la línea $y = \frac{1}{2}$. Esto proporciona los intervalos x

$$\left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right).$$

Otro método de resolver $\cos x < \frac{1}{2}$ es observar que las soluciones son los subintervalos abiertos de $[-2\pi, 2\pi]$ que *no estén* incluidos en los intervalos obtenidos en la parte (b).

El resultado que se analiza en el ejemplo siguiente desempeña un importante papel en matemáticas avanzadas.

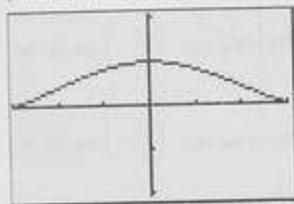
EJEMPLO 7 Trazar la gráfica de $f(x) = (\sin x)/x$

Si $f(x) = (\sin x)/x$, traza la gráfica de f en $[-\pi, \pi]$ e investiga el comportamiento de $f(x)$ a medida que $x \rightarrow 0^-$ y cuando $x \rightarrow 0^+$.

SOLUCIÓN Verás que f no está definida en $x = 0$ porque la sustitución dará la expresión $0/0$, que no tiene sentido.

Asignamos $(\sin x)/x$ a Y_1 . Usamos la pantalla de visión $[-\pi, \pi]$ por $[-2.1, 2.1]$ (puesto que $\frac{3}{2}\pi \approx 2.1$), ya que nuestra pantalla tiene una proporción 3:2 (horizontal: vertical), y obtenemos un trazo similar al de la figura 20. Al aplicar características de zoom y calcado parece que

Figura 20
 $[-\pi, \pi]$ por $[-2.1, 2.1]$



a medida que $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow 1$ y a medida que $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow 1$.

Hay un hueco en la gráfica en el punto $(0, 1)$, pero la mayor parte de los equipos de graficación no puede mostrarlo.

Nuestra técnica de graficación no demuestra que $f(x) \rightarrow 1$ a medida que $x \rightarrow 0$, pero la hace parecer altamente probable. En textos de cálculo podemos encontrar una prueba rigurosa basada en la definición de $\sin x$ y en consideraciones geométricas.

Un resultado interesante que se obtuvo del ejemplo 7 es que si x está en radianes y

$$\text{si } x \rightarrow 0, \text{ entonces } \frac{\sin x}{x} \approx 1, \text{ y o } \sin x \approx x.$$

El último enunciado da una fórmula de aproximación para $\sin x$ si x es cercana a 0. Para ilustrar esto, con una calculadora se encuentra que

$$\sin(0.03) \approx 0.0299955 \approx 0.03$$

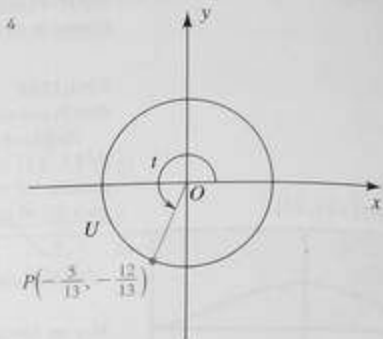
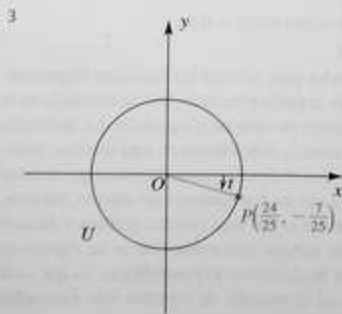
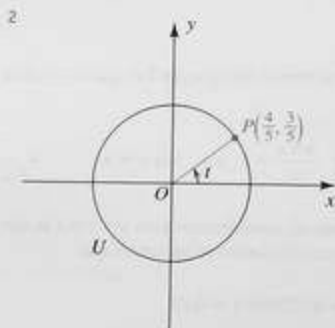
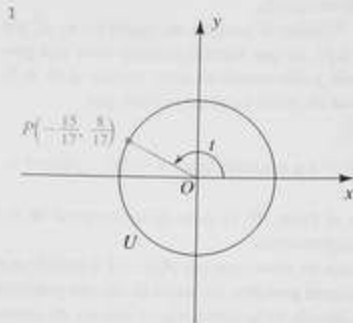
$$\sin(0.02) \approx 0.0199987 \approx 0.02$$

$$\sin(0.01) \approx 0.0099998 \approx 0.01.$$

Ya hemos analizado dos métodos para estudiar las funciones trigonométricas. El desarrollo en términos de ángulos y razones, que se introdujo en la sección 6.2, tiene muchas aplicaciones en ciencias e ingeniería. La definición en términos de la circunferencia unitaria, considerada en esta sección, destaca el hecho de que las funciones trigonométricas tienen dominios que constan de números reales. Tales funciones son los fundamentos del cálculo. Además, el método de la circunferencia unitaria es útil para estudiar gráficas y deducir identidades trigonométricas. Debes trabajar para convertirte en un experto en el uso de ambos planteamientos de las funciones trigonométricas, ya que cada uno refuerza el otro, facilitando así tu maestría de aspectos más avanzados de la trigonometría.

6.3 Ejercicios

Ejercicios 1 al 4: se muestra un punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia unitaria U correspondiente a un número real t . Halla los valores de las funciones trigonométricas en t .



Ejercicios 5 al 8: sea $P(t)$ el punto sobre la circunferencia unitaria U que corresponde a t . Si $P(t)$ tiene las coordenadas rectangulares dadas, encuentra

(a) $P(t + \pi)$ (b) $P(t - \pi)$ (c) $P(-t)$ (d) $P(-t - \pi)$

5 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

6 $(-\frac{8}{17}, \frac{15}{17})$

7 $(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13})$

8 $(\frac{7}{25}, -\frac{24}{25})$

Ejercicios 9 al 16: sea P el punto sobre la circunferencia unitaria U que corresponde a t . Halla las coordenadas de P y los valores exactos de las funciones trigonométricas en t , siempre que sea posible.

9 (a) 2π (b) -3π

10 (a) $-\pi$ (b) 6π

11 (a) $3\pi/2$ (b) $-7\pi/2$

12 (a) $5\pi/2$ (b) $-\pi/2$

13 (a) $9\pi/4$ (b) $-5\pi/4$

14 (a) $3\pi/4$ (b) $-7\pi/4$

15 (a) $5\pi/4$ (b) $-\pi/4$

16 (a) $7\pi/4$ (b) $-3\pi/4$

Ejercicios 17 al 20: con una fórmula para negativos determina el valor exacto.

17 (a) $\sin(-90^\circ)$ (b) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ (c) $\tan(-45^\circ)$

18 (a) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ (b) $\cos(-225^\circ)$ (c) $\tan(-\pi)$

19 (a) $\cot\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ (b) $\sec(-180^\circ)$ (c) $\csc\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

20 (a) $\cot(-225^\circ)$ (b) $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $\csc(-45^\circ)$

Ejercicios 21 al 26: comprueba la identidad al transformar el lado izquierdo en el derecho.

21 $\sin(-x) \sec(-x) = -\tan x$

22 $\csc(-x) \cos(-x) = -\cot x$

23 $\frac{\cot(-x)}{\csc(-x)} = \cos x$

24 $\frac{\sec(-x)}{\tan(-x)} = -\csc x$

25 $\frac{1}{\cos(-x)} - \tan(-x) \sin(-x) = \cos x$

26 $\cot(-x) \cos(-x) + \sin(-x) = -\csc x$

Ejercicios 27 al 38: completa el enunciado haciendo referencia a la gráfica de una función trigonométrica.

27 (a) A medida que $x \rightarrow 0^+$, $\sin x \rightarrow$ ____

(b) A medida que $x \rightarrow (-\pi/2)^+$, $\sin x \rightarrow$ ____

28 (a) A medida que $x \rightarrow \pi^+$, $\sin x \rightarrow$ ____

(b) A medida que $x \rightarrow (\pi/6)^+$, $\sin x \rightarrow$ ____

29 (a) A medida que $x \rightarrow (\pi/4)^+$, $\cos x \rightarrow$ ____

(b) A medida que $x \rightarrow \pi^-$, $\cos x \rightarrow$ ____

30 (a) A medida que $x \rightarrow 0^+$, $\cos x \rightarrow$ ____

(b) A medida que $x \rightarrow (-\pi/3)^+$, $\cos x \rightarrow$ ____

31 (a) A medida que $x \rightarrow (\pi/4)^+$, $\tan x \rightarrow$ ____

(b) A medida que $x \rightarrow (\pi/2)^+$, $\tan x \rightarrow$ ____

32 (a) A medida que $x \rightarrow 0^+$, $\tan x \rightarrow$ ____

(b) A medida que $x \rightarrow (-\pi/2)^+$, $\tan x \rightarrow$ ____

33 (a) A medida que $x \rightarrow (-\pi/4)^+$, $\cot x \rightarrow$ ____

(b) A medida que $x \rightarrow 0^+$, $\cot x \rightarrow$ ____

34 (a) A medida que $x \rightarrow (\pi/6)^+$, $\cot x \rightarrow$ ____

(b) A medida que $x \rightarrow \pi^-$, $\cot x \rightarrow$ ____

35 (a) A medida que $x \rightarrow (\pi/2)^+$, $\sec x \rightarrow$ ____

(b) A medida que $x \rightarrow (\pi/4)^+$, $\sec x \rightarrow$ ____

36 (a) A medida que $x \rightarrow (\pi/2)^+$, $\sec x \rightarrow$ ____

(b) A medida que $x \rightarrow 0^+$, $\sec x \rightarrow$ ____

37 (a) A medida que $x \rightarrow 0^+$, $\csc x \rightarrow$ ____

(b) A medida que $x \rightarrow (\pi/2)^+$, $\csc x \rightarrow$ ____

38 (a) A medida que $x \rightarrow \pi^+$, $\csc x \rightarrow$ ____

(b) A medida que $x \rightarrow (\pi/4)^+$, $\csc x \rightarrow$ ____

Ejercicios 39 al 46: consulta la gráfica de $y = \sin x$ o $y = \cos x$ para hallar los valores exactos de x en el intervalo $[0, 4\pi]$ que satisfagan la ecuación.

39. $\sin x = -1$

40. $\sin x = 1$

41. $\sin x = \frac{1}{2}$

42. $\sin x = -\sqrt{2}/2$

43. $\cos x = 1$

44. $\cos x = -1$

45. $\cos x = \sqrt{2}/2$

46. $\cos x = -\frac{1}{2}$

Ejercicios 47 al 50: consulta la gráfica de $y = \tan x$ para establecer los valores exactos de x en el intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$ que satisfagan la ecuación.

47. $\tan x = 1$

48. $\tan x = \sqrt{3}$

49. $\tan x = 0$

50. $\tan x = -1/\sqrt{3}$

Ejercicios 51 al 54: consulta la gráfica de la ecuación en el intervalo especificado. Halla todos los valores de x tales que para el número real a , (a) $y = a$, (b) $y > a$ y (c) $y < a$.

51. $y = \sin x; [-2\pi, 2\pi]; a = \frac{1}{2}$

52. $y = \cos x; [0, 4\pi]; a = \sqrt{3}/2$

53. $y = \cos x; [-2\pi, 2\pi]; a = -\frac{1}{2}$

54. $y = \sin x; [0, 4\pi]; a = -\sqrt{2}/2$

Ejercicios 55 al 62: usa la gráfica de una función trigonométrica para trazar la gráfica de la ecuación sin dibujar puntos.

55. $y = 2 + \sin x$

56. $y = 3 + \cos x$

57. $y = \cos x - 2$

58. $y = \sin x - 1$

59. $y = 1 + \tan x$

60. $y = \cot x - 1$

61. $y = \sec x - 2$

62. $y = 1 + \csc x$

Ejercicios 63 al 66: halla los intervalos entre -2π y 2π en los que la función dada (a) crece o (b) decrece.

63. secante

64. cosecante

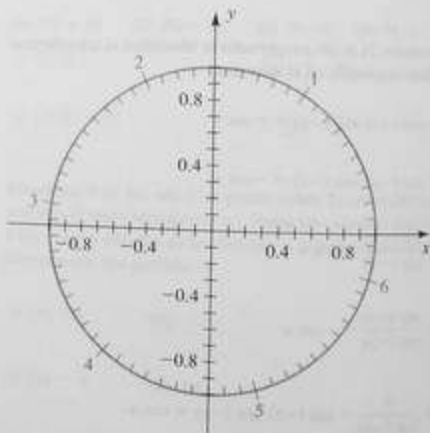
65. tangente

66. cotangente

67. Practica el trazado de gráficas de la función seno, tomando unidades diferentes de longitud de los ejes vertical y horizontal; del mismo modo, practica el trazado de gráficas de las funciones coseno y tangente. Continúa con esto hasta que alcances una etapa en que, si te despiertan en la noche y te piden trazar una de estas gráficas, puedas hacerlo en menos de 30 segundos.

68. Trabaja el ejercicio 67 para las funciones de cosecante, secante y cotangente.

Ejercicios 69 al 72: utiliza la figura para aproximar lo siguiente a un lugar decimal.



69. (a) $\sin 4$ (b) $\sin (-1.2)$

(c) Todos los números t entre 0 y 2π tales que $\sin t = 0.5$.

70. (a) $\sin 2$ (b) $\sin (-2.3)$

(c) Todos los números t entre 0 y 2π tales que $\sin t = -0.2$.

- 71 (a) $\cos 4$
 (b) $\cos(-1.2)$
 (c) Todos los números t entre 0 y 2π tales que $\cos t = -0.6$
- 72 (a) $\cos 2$
 (b) $\cos(-2.3)$
 (c) Todos los números t entre 0 y 2π tales que $\cos t = 0.2$
- 73 Relación temperatura-humedad: El 17 de marzo de 1981, en Tucson, Arizona, la temperatura en grados Fahrenheit se podía describir mediante la ecuación:

$$T(t) = -12 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 60,$$

en tanto que la humedad relativa en porcentaje se podía expresar con

$$H(t) = 20 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 60,$$

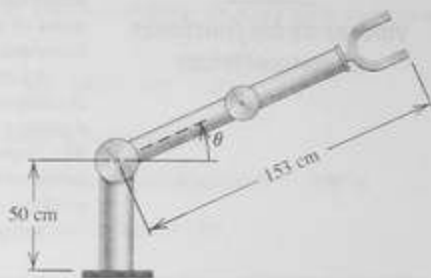
donde t está en horas y $t = 0$ corresponde a las 6 A.M.

- (a) Construye una tabla que haga una lista de las temperaturas y humedad relativa cada tres horas, comenzando a la medianoche.
- (b) Determina las horas en que se presentaron los valores máximos y mínimos para T y H .
- (c) Analiza la relación entre la temperatura y la humedad relativa en ese día.

- 74 Movimiento del brazo de robot: Las funciones trigonométricas se utilizan mucho en el diseño de robots industriales. Supongamos que la articulación de un hombro del robot está motorizada de modo que el ángulo θ aumenta a una rapidez constante de $\pi/12$ radianes por segundo desde un ángulo inicial de $\theta = 0$. Supongamos que la articulación del codo se mantiene siempre recta y que el brazo tiene una longitud constante de 153 centímetros, como se muestra en la figura.

- (a) Supongamos que $h = 50$ cm cuando $\theta = 0$. Elabora una tabla que liste el ángulo θ y la altura h de la mano del robot en cada segundo mientras $0 \leq \theta \leq \pi/2$.
- (b) Determina si un aumento constante en el ángulo θ produce un aumento constante en la altura de la mano.
- (c) Halla la distancia total del movimiento de la mano.

Ejercicio 74



Ejercicios 75 y 76: grafica la ecuación y calcula los valores de x dentro del intervalo especificado, que correspondan al valor dado de y .

75 $y = \sin(x^2)$, $[-\pi, \pi]$; $y = 0.5$

76 $y = \tan(\sqrt{x})$, $[0, 25]$; $y = 5$

Ejercicios 77 y 78: grafica en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ y calcula las coordenadas de los puntos altos y bajos.

77 $f(x) = x \sin x$

78 $f(x) = \sin^2 x \cos x$

Ejercicios 79 al 84: a medida que $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow L$ para algún número real L . Usa una gráfica para predecir L .

79 $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$

80 $f(x) = \frac{6x - 6 \sec x}{x^3}$

81 $f(x) = x \cot x$

82 $f(x) = \frac{x + \tan x}{\sin x}$

83 $f(x) = \frac{\tan x}{x}$

84 $f(x) = \frac{\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)}{x}$

6.4

Valores de las funciones trigonométricas

En secciones previas calculamos valores especiales de las funciones trigonométricas mediante la definición de las funciones trigonométricas en términos de un ángulo o de una circunferencia unitaria. En la práctica suele usarse una calculadora o una tabla.

A continuación demostraremos cómo se pueden encontrar los valores de cualquier función trigonométrica en un número real t o en un ángulo de θ grados a partir de sus valores en el intervalo t $(0, \pi/2)$, o el intervalo θ $(0^\circ, 90^\circ)$, respectivamente. Esta técnica se necesita a veces cuando se usa calculadora o tablas para hallar todos los ángulos o números reales que corresponden a un valor de función dado.

Apliquemos el siguiente concepto.

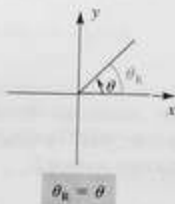
Definición del ángulo de referencia

Sea θ un ángulo no cuadrantal en posición estándar. El **ángulo de referencia** para θ es el ángulo agudo θ_R que el lado terminal de θ forma con el eje x .

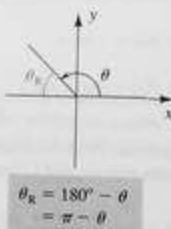
La figura 1 ilustra el ángulo de referencia θ_R para un ángulo θ no cuadrantal, con $0^\circ < \theta < 360^\circ$ o $0 < \theta < 2\pi$, en cada uno de los cuatro cuadrantes.

Figura 1 Ángulos de referencia

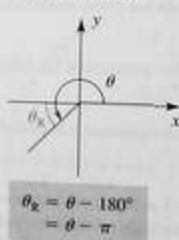
(a) Cuadrante I



(b) Cuadrante II



(c) Cuadrante III



(d) Cuadrante IV



Las fórmulas que aparecen bajo los ejes en la figura 1 son útiles para hallar la medida de θ_R en grados o radianes cuando θ sea en grados o radianes, respectivamente. Para un ángulo no cuadrantal, mayor de 360° o menor de 0° , primero se define el ángulo coterminal θ con $0^\circ < \theta < 360^\circ$ o $0 < \theta < 2\pi$, y luego se usan las fórmulas de la figura 1.

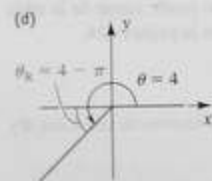
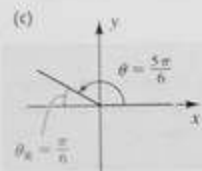
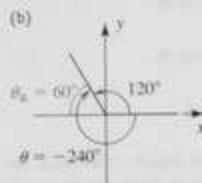
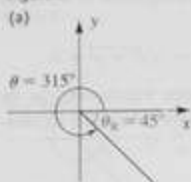


EJEMPLO 1 Hallar los ángulos de referencia

Halla el ángulo de referencia θ_R para θ , y traza θ y θ_R en posición estándar en el mismo plano coordenado.

- (a) $\theta = 315^\circ$ (b) $\theta = -240^\circ$ (c) $\theta = \frac{5\pi}{6}$ (d) $\theta = 4$

Figura 2



SOLUCIÓN

(a) El ángulo $\theta = 315^\circ$ está en el cuadrante IV y, por tanto, como en la figura 1(d)

$$\theta_k = 360^\circ - 315^\circ = 45^\circ.$$

Los ángulos θ y θ_k se trazan en la figura 2(a).

(b) El ángulo entre 0° y 360° que es cotermino con $\theta = -240^\circ$ es

$$-240^\circ + 360^\circ = 120^\circ,$$

que se halla en el segundo cuadrante. Con la fórmula de la figura 1(b) se obtiene

$$\theta_k = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Los ángulos θ y θ_k están trazados en la figura 2(b).

(c) Como el ángulo $\theta = 5\pi/6$ está en el segundo cuadrante, tenemos

$$\theta_k = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

según se muestra en la figura 2(c).

(d) Dado que $\pi < 4 < 3\pi/2$, el ángulo $\theta = 4$ está en el cuadrante III. Con la fórmula de la figura 1(c) tenemos

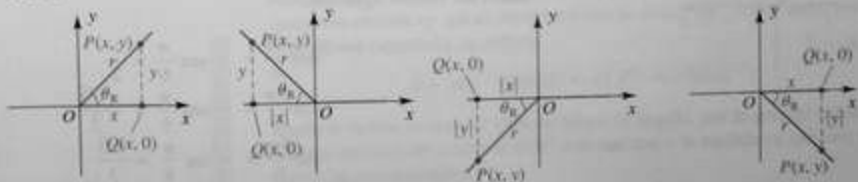
$$\theta_k = 4 - \pi.$$

Los ángulos están en la figura 2(d).

A continuación mostraremos la forma en que los ángulos de referencia se usan para hallar los valores de las funciones trigonométricas.

Si θ es un ángulo no cuadrantal, con ángulo de referencia θ_k , entonces $0^\circ < \theta_k < 90^\circ$ o $0 < \theta_k < \pi/2$. Sea $P(x, y)$ un punto del lado terminal de θ y tome el punto $Q(x, 0)$ en el eje de las x . La figura 3 ilustra una situación

Figura 3



habitual para θ en cada cuadrante. En cada caso, las longitudes de los lados del triángulo OPQ son

$$d(O, Q) = |x|, \quad d(Q, P) = |y| \quad y \quad d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Se pueden aplicar las definiciones de funciones trigonométricas de cualquier ángulo y también usar el triángulo OPQ para obtener las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} |\sin \theta| &= \frac{|y|}{r} = \frac{|y|}{|r|} = \frac{|y|}{r} = \sin \theta_k \\ |\cos \theta| &= \frac{|x|}{r} = \frac{|x|}{|r|} = \frac{|x|}{r} = \cos \theta_k \\ |\tan \theta| &= \frac{|y|}{|x|} = \frac{|y|}{|x|} = \tan \theta_k \end{aligned}$$

Estas fórmulas llevan el teorema adjunto. Si θ es un ángulo cuadrantal, debe utilizarse la definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo para hallar valores.

Teorema sobre ángulos de referencia

Si θ es un ángulo no cuadrantal en posición estándar, entonces, para encontrar el valor de una función trigonométrica en θ , se determina su valor para el ángulo de referencia θ_k y se antepone el signo adecuado.

El "signo adecuado" a que se refiere el teorema se puede tomar de la tabla de los signos de funciones trigonométricas dada en la página 424.



EJEMPLO 2 Usar ángulos de referencia

Usa los ángulos de referencia para hallar los valores exactos de $\sin \theta$, $\cos \theta$ y $\tan \theta$ si

(a) $\theta = \frac{5\pi}{6}$ (b) $\theta = 315^\circ$

SOLUCIÓN

(a) En la figura 4 se trazaron el ángulo $\theta = 5\pi/6$ y su ángulo de referencia $\theta_k = \pi/6$. Como θ se halla en el cuadrante II, $\sin \theta$ es positivo y tanto $\cos \theta$ como $\tan \theta$ son negativos. De ahí que, según el teorema sobre ángulos de referencia y los resultados conocidos respecto a ángulos especiales se obtienen los valores siguientes:

$$\begin{aligned} \sin \frac{5\pi}{6} &= + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{5\pi}{6} &= - \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan \frac{5\pi}{6} &= - \tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Figura 4



Figura 5



(b) En la figura 5 aparecen el ángulo $\theta = 315^\circ$ y su ángulo de referencia $\theta_R = 45^\circ$. Dado que θ está en el cuadrante IV, $\sin \theta < 0$, $\cos \theta > 0$ y $\tan \theta < 0$. Así, según el teorema sobre ángulos de referencia, tenemos que

$$\sin 315^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315^\circ = +\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1.$$

Si se usa una calculadora para calcular los valores de las funciones, los ángulos de referencia no son necesarios (véase el ejercicio de análisis 2 al final del capítulo). Como demostración, para hallar $\sin 210^\circ$, se pone la calculadora en modo de grados y se obtiene $\sin 210^\circ = -0.5$, que es el valor exacto. Al usar el mismo procedimiento para 240° , se obtiene una representación decimal:

$$\sin 240^\circ \approx -0.8660.$$

No debe utilizarse una calculadora para hallar el valor exacto de $\sin 240^\circ$. En este caso, encontramos el ángulo de referencia 60° de 240° , aplicamos el teorema sobre ángulos de referencia y los resultados conocidos sobre ángulos especiales para obtener

$$\sin 240^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Consideremos a continuación la solución de una ecuación del siguiente tipo:

Problema: Si θ es un ángulo agudo y $\sin \theta = 0.6635$, calcula θ .

Algunas calculadoras tienen una tecla marcada como $\boxed{\sin^{-1}}$ que ayuda a resolver la ecuación; con otras, puede requerirse otra tecla o una secuencia de teclas como $\boxed{\text{INV}} \boxed{\sin}$ (consulta el manual del usuario). Aquí usaremos la siguiente notación para hallar θ , cuando $0 \leq k \leq 1$:

$$\text{si } \sin \theta = k, \text{ entonces } \theta = \sin^{-1} k.$$

Esta notación es similar a la empleada en la función inversa f^{-1} de una función f en la sección 5.1, donde vimos que, bajo determinadas condiciones,

$$\text{si } f(x) = y, \text{ entonces } x = f^{-1}(y).$$

Para el problema dado, $\sin \theta = 0.6635$, f es la función seno, $x = \theta$ y $y = 0.6635$. La notación \sin^{-1} se basa en las *funciones trigonométricas inversas* que se estudian en la sección 7.6. En esta etapa, consideramos \sin^{-1} simplemente como una entrada en calculadora mediante la tecla $\boxed{\sin^{-1}}$. Por tanto, para el problema enunciado, se obtiene

$$\theta = \sin^{-1}(0.6635) \approx 41.57^\circ \approx 0.7255.$$

Según se indica, cuando se trata de hallar un ángulo, por lo general redondeamos medidas en grados al 0.01° más cercano y la medida en radianes a cuatro lugares decimales.

Análogamente, dado $\cos \theta = k$ o $\tan \theta = k$, donde θ es agudo, se escribe

$$\theta = \cos^{-1} k \quad \text{o} \quad \theta = \tan^{-1} k$$

para indicar el uso de una tecla $\boxed{\cos^{-1}}$ o $\boxed{\tan^{-1}}$ de una calculadora.

Dado $\csc \theta$, $\sec \theta$ o $\cot \theta$, se usa una relación recíproca para hallar θ como se indica en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN Utiliza una calculadora para hallar soluciones de ángulos agudos de ecuaciones

Ecuación	Solución con calculadora (grados y radianes)
■ $\sin \theta = 0.5$	$\theta = \sin^{-1}(0.5) = 30^\circ \approx 0.5236$
■ $\cos \theta = 0.5$	$\theta = \cos^{-1}(0.5) = 60^\circ \approx 1.0472$
■ $\tan \theta = 0.5$	$\theta = \tan^{-1}(0.5) = 26.57^\circ \approx 0.4636$
■ $\csc \theta = 2$	$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ \approx 0.5236$
■ $\sec \theta = 2$	$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ \approx 1.0472$
■ $\cot \theta = 2$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.57^\circ \approx 0.4636$

Cabe seguir la misma técnica si θ es cualquier ángulo o número real; por tanto, si se usa la tecla $\boxed{\sin^{-1}}$ se obtiene, en modo de grados o radianes,

$$\theta = \sin^{-1}(0.6635) = 41.57^\circ \approx 0.7255,$$

que es el ángulo de referencia para θ . Si $\sin \theta$ es negativo, entonces la calculadora da el negativo del ángulo de referencia; por ejemplo,

$$\sin^{-1}(-0.6635) = -41.57^\circ \approx -0.7255.$$

De manera análoga, dado $\cos \theta$ o $\tan \theta$, se encuentra θ con una calculadora si se usa $\boxed{\cos^{-1}}$ o $\boxed{\tan^{-1}}$, respectivamente. El intervalo que contiene θ se detalla en la tabla que sigue. Es importante observar que si $\cos \theta$ es negativo, entonces θ no es el negativo del ángulo de referencia, pero en cambio si está en el intervalo $\pi/2 < \theta \leq \pi$, o $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$. Las razones para utilizar estos intervalos se explican en la sección 7.6. Se pueden usar relaciones recíprocas para resolver ecuaciones semejantes en donde haya $\csc \theta$, $\sec \theta$ y $\cot \theta$.

Ecuación	Valores de k	Solución de calculadora	Intervalo que contiene a θ si se usa calculadora
$\sin \theta = k$	$-1 \leq k \leq 1$	$\theta = \sin^{-1} k$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, o $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
$\cos \theta = k$	$-1 \leq k \leq 1$	$\theta = \cos^{-1} k$	$0 \leq \theta \leq \pi$, o $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$
$\tan \theta = k$	cualquier k	$\theta = \tan^{-1} k$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, o $-90^\circ < \theta < 90^\circ$

La siguiente ilustración contiene algunos ejemplos específicos tanto para el modo de grados como para el de radianes.

ILUSTRACIÓN Hallar ángulos con calculadora

Ecuación	Solución con calculadora (grados y radianes)
■ $\sin \theta = -0.5$	$\theta = \sin^{-1}(-0.5) = -30^\circ \approx -0.5236$
■ $\cos \theta = -0.5$	$\theta = \cos^{-1}(-0.5) = 120^\circ \approx 2.0944$
■ $\tan \theta = -0.5$	$\theta = \tan^{-1}(-0.5) \approx -26.57^\circ \approx -0.4636$

Figura 6



Figura 7



Figura 8



Figura 9



Cuando usas una calculadora para hallar θ recuerda las restricciones que hay sobre θ . Si buscas otros valores, puedes utilizar ángulos de referencia u otros métodos matemáticos, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3 Aproximación de un ángulo con una calculadora

Si $\tan \theta = -0.4623$ y $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, halla θ al 0.1° más cercano.

SOLUCIÓN Como se señala en el análisis precedente, si se usa una calculadora (en modo de grados) para hallar θ cuando $\tan \theta$ es negativa, entonces la medida en grados está en el intervalo $(-90^\circ, 0^\circ)$. En particular, se obtiene lo siguiente:

$$\theta = \tan^{-1}(-0.4623) \approx -24.8^\circ$$

Como se desea encontrar valores de θ entre 0° y 360° , se usa el ángulo de referencia (aproximado) $\theta_R \approx 24.8^\circ$. Hay dos valores posibles de θ tales que $\tan \theta$ es negativa: uno en el cuadrante II y el otro en el IV. Si θ está en el cuadrante II y $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, resulta la situación que se muestra en la figura 6 y

$$\theta = 180^\circ - \theta_R \approx 180^\circ - 24.8^\circ = 155.2^\circ.$$

Si θ está en el cuadrante IV y $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, entonces, como en la figura 7,

$$\theta = 360^\circ - \theta_R \approx 360^\circ - 24.8^\circ = 335.2^\circ. \quad \color{blue}{\nabla}$$

EJEMPLO 4 Aproximación de un ángulo con una calculadora

Si $\cos \theta = -0.3842$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, halla θ al 0.0001 de radián más próximo.

SOLUCIÓN Si usamos una calculadora (en modo de radianes) para encontrar θ cuando $\cos \theta$ es negativo, la medida en radianes estará en el intervalo $[0, \pi]$. En particular, obtenemos lo siguiente (que se muestra en la figura 8):

$$\theta = \cos^{-1}(-0.3842) \approx 1.965137489.$$

Como queremos hallar valores de θ entre 0 y 2π usamos el ángulo de referencia (aproximado)

$$\theta_R = \pi - \theta \approx 1.176455165.$$

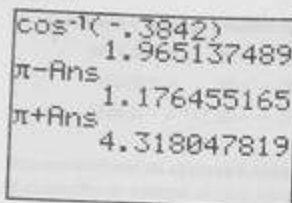
Hay dos valores posibles de θ tales que $\cos \theta$ es negativo: el que encontramos en el segundo cuadrante y el otro en el tercer cuadrante. Si θ está en el tercer cuadrante, entonces

$$\theta = \pi + \theta_R \approx 4.318047819,$$

como se muestra en la figura 9.

(continúa)

Figura 10



La pantalla de calculadora de la figura 10 proporciona sustento numérico a las respuestas

$$\theta = 1.9651 \quad \text{y} \quad \theta = 4.3180.$$

Este problema también lo pudiste resolver gráficamente encontrando los puntos de intersección $Y_1 = \cos(X)$ y $Y_2 = -0.3842$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Sin embargo, el objetivo de esta solución era ilustrar el uso de ángulos de referencia.

6.4 Ejercicios

Ejercicios 1 al 6: halla el ángulo de referencia θ_R si θ tiene la medida dada.

- 1 (a) 240° (b) 340° (c) -202° (d) -660°
- 2 (a) 165° (b) 275° (c) -110° (d) 400°
- 3 (a) $3\pi/4$ (b) $4\pi/3$ (c) $-\pi/6$ (d) $9\pi/4$
- 4 (a) $7\pi/4$ (b) $2\pi/3$ (c) $-3\pi/4$ (d) $-23\pi/6$
- 5 (a) 3 (b) -2 (c) 5.5 (d) 100
- 6 (a) 6 (b) -4 (c) 4.5 (d) 80

Ejercicios 7 al 18: encuentra el valor exacto.

- 7 (a) $\sin(2\pi/3)$ (b) $\sin(-5\pi/4)$
- 8 (a) $\sin 210^\circ$ (b) $\sin(-315^\circ)$
- 9 (a) $\cos 150^\circ$ (b) $\cos(-60^\circ)$
- 10 (a) $\cos(5\pi/4)$ (b) $\cos(-11\pi/6)$
- 11 (a) $\tan(5\pi/6)$ (b) $\tan(-\pi/3)$
- 12 (a) $\tan 330^\circ$ (b) $\tan(-225^\circ)$
- 13 (a) $\cot 120^\circ$ (b) $\cot(-150^\circ)$
- 14 (a) $\cot(13\pi/4)$ (b) $\cot(-2\pi/3)$
- 15 (a) $\sec(2\pi/3)$ (b) $\sec(-\pi/6)$
- 16 (a) $\sec 135^\circ$ (b) $\sec(-210^\circ)$

$$17 \text{ (a) } \csc 240^\circ \quad \text{(b) } \csc(-330^\circ)$$

$$18 \text{ (a) } \csc(3\pi/4) \quad \text{(b) } \csc(-2\pi/3)$$

Ejercicios 19 al 24: aproxima a tres lugares decimales.

- 19 (a) $\sin 73^\circ 20'$ (b) $\cos 0.68$
- 20 (a) $\cos 38^\circ 30'$ (b) $\sin 1.48$
- 21 (a) $\tan 21^\circ 10'$ (b) $\cot 1.13$
- 22 (a) $\cot 9^\circ 10'$ (b) $\tan 0.75$
- 23 (a) $\sec 67^\circ 50'$ (b) $\csc 0.32$
- 24 (a) $\csc 43^\circ 40'$ (b) $\sec 0.26$

Ejercicios 25 al 32: aproxima el ángulo agudo θ al más cercano (a) 0.01° y (b) $1'$.

- 25 $\cos \theta = 0.8620$
- 26 $\sin \theta = 0.6612$
- 27 $\tan \theta = 3.7$
- 28 $\cos \theta = 0.8$
- 29 $\sin \theta = 0.4217$
- 30 $\tan \theta = 4.91$
- 31 $\sec \theta = 4.246$
- 32 $\csc \theta = 11$

Ejercicios 33 y 34: aproxima a cuatro lugares decimales.

- 33 (a) $\sin 98^\circ 10'$ (b) $\cos 623.7^\circ$ (c) $\tan 3$
 (d) $\cot 231^\circ 40'$ (e) $\sec 1175.1^\circ$ (f) $\csc 0.82$
 34 (a) $\sin 496.4^\circ$ (b) $\cos 0.65$ (c) $\tan 105^\circ 40'$
 (d) $\cot 1030.2^\circ$ (e) $\sec 1.46$ (f) $\csc 320^\circ 50'$

Ejercicios 35 y 36: aproxima todos los ángulos θ del intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$ que satisfagan la ecuación al 0.1° más cercano.

- 35 (a) $\sin \theta = -0.5640$ (b) $\cos \theta = 0.7490$
 (c) $\tan \theta = 2.798$ (d) $\cot \theta = -0.9601$
 (e) $\sec \theta = -1.116$ (f) $\csc \theta = 1.485$
 36 (a) $\sin \theta = 0.8225$ (b) $\cos \theta = -0.6604$
 (c) $\tan \theta = -1.5214$ (d) $\cot \theta = 1.3752$
 (e) $\sec \theta = 1.4291$ (f) $\csc \theta = -2.3179$

Ejercicios 37 y 38: aproxima todos los ángulos θ del intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfagan la ecuación al 0.01 de radián más cercano.

- 37 (a) $\sin \theta = 0.4195$ (b) $\cos \theta = -0.1207$
 (c) $\tan \theta = -3.2504$ (d) $\cot \theta = 2.6815$
 (e) $\sec \theta = 1.7452$ (f) $\csc \theta = -4.8521$
 38 (a) $\sin \theta = -0.0135$ (b) $\cos \theta = 0.9235$
 (c) $\tan \theta = 0.42$ (d) $\cot \theta = -2.731$
 (e) $\sec \theta = -3.51$ (f) $\csc \theta = 1.258$

39 Espesor de la capa de ozono. El espesor de la capa de ozono se puede estimar con la fórmula

$$\ln I_0 - \ln I = kx \sec \theta,$$

en donde I_0 es la intensidad de una particular longitud de onda de luz solar antes de que llegue a la atmósfera, I es la intensidad de la misma longitud de onda después de pasar por una capa de ozono de x centímetros de grueso, k es la constante de absorción de ozono para esa longitud de onda y θ es el ángulo agudo que la luz solar hace con la vertical. Supón que para una longitud de onda de 3.055×10^8 centímetros, con $k = 1.88$, I_0/I se mide como 1.72 y $\theta = 12^\circ$. Calcula el espesor de la capa de ozono al 0.01 de centímetro más cercano.

40 Cálculos de ozono. Consulta el ejercicio 39. Si la capa de ozono mide 0.31 centímetros de espesor, y para una longitud

de onda de 3.055×10^8 centímetros, I_0/I se mide como 2.05, calcula el ángulo del Sol con la vertical en el momento de la medición.

41 Radiación solar. La cantidad de luz solar que ilumina una pared de un edificio puede afectar en forma considerable la eficiencia de energía del edificio. La radiación solar que incide sobre una pared vertical que mira hacia el este está dada por

$$R = R_0 \cos \theta \sin \phi,$$

en donde R_0 es la máxima radiación solar posible, θ es el ángulo que hace el Sol con la horizontal y ϕ es la dirección del Sol en el cielo, con $\phi = 90^\circ$ cuando está en el este y $\phi = 0^\circ$ cuando está en el sur.

- (a) ¿Cuándo es máxima la radiación solar R_0 que incide sobre la pared?
 (b) ¿Qué porcentaje de R_0 incide sobre la pared cuando $\theta = 60^\circ$ y el Sol está en el sudeste?

42 Cálculos meteorológicos. En las latitudes medias, a veces es posible calcular la distancia entre regiones consecutivas de baja presión. Si ϕ es la latitud (en grados), R es el radio de la Tierra (en km) y v es la velocidad horizontal del viento (en km/h), entonces la distancia d (en km) de un lugar de baja presión al siguiente se puede calcular mediante

$$d = 2\pi \left(\frac{vR}{0.52 \cos \phi} \right)^{1/3}.$$

- (a) A una latitud de 48° , el radio de la Tierra es aproximadamente 6 369 kilómetros. Calcula d si la velocidad del viento es 45 km/h.
 (b) Si v y R son constantes, ¿cómo varía d a medida que aumenta la latitud?

43 Brazo de un robot. Los puntos en los lados terminales de los ángulos desempeñan una parte importante en el diseño de brazos de robots. Supón que una máquina tiene un brazo recto de 18 pulgadas de largo, que puede girar alrededor del origen en un plano coordenado. Si la mano del robot se sitúa en $(18, 0)$ y luego gira en un ángulo de 60° , ¿cuál es la nueva posición de la mano?

44 Brazo de un robot. Supón que el brazo del ejercicio 43 puede cambiar de longitud, además de girar alrededor del origen. Si la mano está al principio en $(12, 12)$, ¿aproximadamente cuántos grados debe girar y cuánto debe cambiar de longitud para moverla a $(-16, 10)$?

6.5

Gráficas trigonométricas

En esta sección consideramos gráficas de las ecuaciones

$$y = a \operatorname{sen}(bx + c) \quad y \quad y = a \cos(bx + c)$$

para números reales a , b y c . Nuestra meta es trazarnos sin localizar muchos puntos. Para esto, usaremos los datos relativos a las gráficas de las funciones seno y coseno que se estudiaron en la sección 6.3.

Comencemos con el caso especial de $c = 0$ y $b = 1$; es decir,

$$y = a \operatorname{sen} x \quad y \quad y = a \cos x.$$

Se pueden encontrar las coordenadas y de puntos de las gráficas al multiplicar por a las coordenadas y de puntos de las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$. Para ilustrar esto, si $y = 2 \operatorname{sen} x$, multiplicamos por 2 la coordenada y de cada punto de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$. Esto da la figura 1, en donde por comparación hemos mostrado la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$. El procedimiento es el mismo que el que se usó para elongar verticalmente la gráfica de una función y que se estudió en la sección 3.5.

Como otra ilustración, si $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$, multiplicamos las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ por $\frac{1}{2}$. Esto comprime verticalmente la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ en un factor de 2 (figura 2).

Figura 1

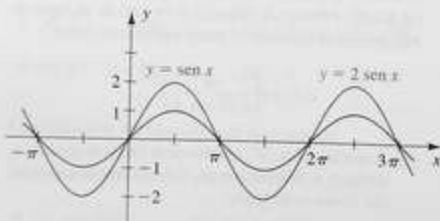
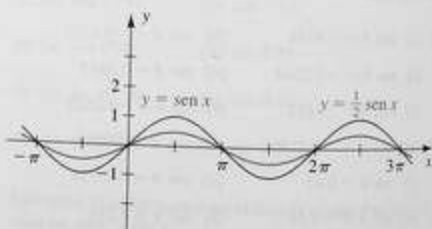


Figura 2



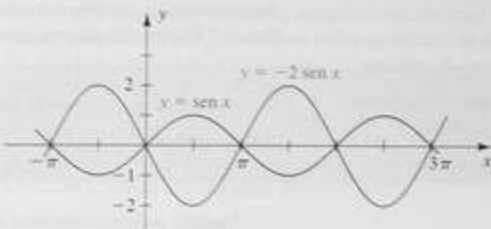
En el siguiente ejemplo se muestra una gráfica de $y = a \operatorname{sen} x$ con a negativa.

EJEMPLO 1 Trazar la gráfica de una ecuación con $\operatorname{sen} x$

Traza la gráfica de la ecuación $y = -2 \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Es posible obtener la gráfica $y = -2 \operatorname{sen} x$ de la figura 3 si se traza primero la gráfica $y = \operatorname{sen} x$ (que se ve en la figura) y luego se multiplican por -2 las coordenadas y . Un método alternativo es reflejar la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$ (figura 1) a través del eje x .

Figura 3



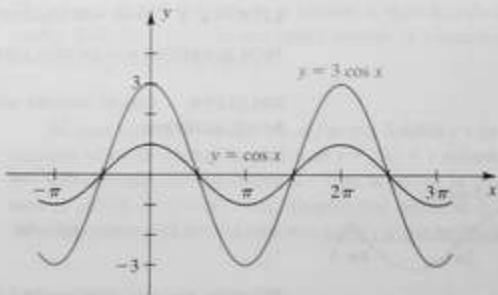
Para cualquier $a \neq 0$, la gráfica de $y = a \operatorname{sen} x$ tiene el aspecto general de una de las gráficas que se incluyeron en las figuras 1, 2 y 3. La magnitud de la elongación de la gráfica $y = \operatorname{sen} x$ y si la gráfica se refleja están determinados por el valor absoluto de a y el signo de a , respectivamente. El $|a|$ de la máxima coordenada y es la **amplitud de la gráfica**, o lo que es igual, la **amplitud de la función f** dada por $f(x) = a \operatorname{sen} x$. En las figuras 1 y 3 la amplitud es 2; en la 2 es $\frac{1}{2}$. Se aplican observaciones y técnicas semejantes si $y = a \cos x$.

EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de una ecuación con $\cos x$

Halla la amplitud y traza la gráfica de $y = 3 \cos x$.

SOLUCIÓN Por el análisis precedente, la amplitud es 3. Como se indica en la figura 4, primero trazamos la gráfica de $y = \cos x$ y luego multiplicamos por 3 las coordenadas y .

Figura 4



A continuación consideremos $y = a \operatorname{sen} bx$ y $y = a \cos bx$ para números reales a y b diferentes de cero. Como antes, la amplitud es $|a|$. Si $b > 0$, entonces se presenta exactamente un ciclo a medida que bx crece de 0 a 2π , o lo que es equivalente, conforme x aumenta de 0 a $2\pi/b$. Si $b < 0$, entonces $-b > 0$ y se presenta un ciclo si x pasa de 0 a $2\pi/(-b)$. En consecuencia, el

periodo de la función f dado por $f(x) = a \sin bx$ o $f(x) = a \cos bx$ es $2\pi/|b|$. Por conveniencia, también nos referimos a $2\pi/|b|$ como el periodo de la gráfica de f . El siguiente teorema resume el análisis.

Teorema sobre amplitudes y periodos

Si $y = a \sin bx$ o $y = a \cos bx$ para números reales a y b diferentes de cero, la gráfica tiene amplitud $|a|$ y periodo $\frac{2\pi}{|b|}$.

También podemos relacionar el papel de b , con el análisis de la compresión y elongación horizontal de una gráfica que vimos en la sección 3.5. Si $|b| > 1$, la gráfica de $y = \sin bx$ o $y = \cos bx$ se comprime horizontalmente por un factor b . Si $0 < |b| < 1$, las gráficas se elongan horizontalmente por un factor $1/b$. Este concepto se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 3 Hallar una amplitud y un periodo

Determina la amplitud y el periodo y traza la gráfica de $y = 3 \sin 2x$.

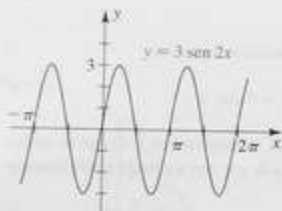
SOLUCIÓN Con el teorema sobre amplitudes y periodos con $a = 3$ y $b = 2$ se obtiene:

$$\text{amplitud: } |a| = |3| = 3$$

$$\text{periodo: } \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Por tanto, hay exactamente una onda senoidal de amplitud 3 en el intervalo en x , $[0, \pi]$. Al trazar esta onda y luego extender la gráfica a derecha e izquierda obtenemos la figura 5.

Figura 5



EJEMPLO 4 Hallar una amplitud y un periodo

Halla la amplitud y el periodo y traza la gráfica de $y = 2 \sin \frac{1}{2}x$.

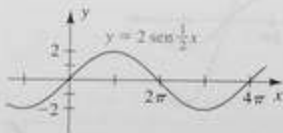
SOLUCIÓN Con el teorema sobre amplitudes y periodos con $a = 2$ y $b = \frac{1}{2}$, se obtiene:

$$\text{amplitud: } |a| = |2| = 2$$

$$\text{periodo: } \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Por tanto, hay una onda senoidal de amplitud 2 en el intervalo $[0, 4\pi]$. Al trazar esta onda y extenderla a izquierda y derecha obtenemos la figura 6.

Figura 6



Si $y = a \sin bx$ y si b es un número positivo grande, entonces el periodo $2\pi/b$ es pequeño y las ondas senoidales están próximas, con b ondas senoidales en el intervalo $[0, 2\pi]$; por ejemplo, en la figura 5, $b = 2$ y tenemos

dos ondas senoidales en $[0, 2\pi]$. Si b es un número positivo pequeño, el periodo $2\pi/b$ es grande y las ondas senoidales estarán muy separadas. Para ilustrar esto, si $y = \sin \frac{1}{10}x$ entonces habrá un décimo de onda senoidal en $[0, 2\pi]$ y se requiere un intervalo de 20π unidades de largo para un ciclo completo. (Consulta también la figura 6; para $y = 2 \sin \frac{1}{2}x$, habrá media onda senoidal en $[0, 2\pi]$.)

Si $b < 0$, se puede usar el hecho de que $\sin(-x) = -\sin x$ para obtener la gráfica de $y = a \sin bx$. A fin de ilustrar lo anterior, la gráfica de $y = \sin(-2x)$ es la misma que la gráfica de $y = -\sin 2x$.

Figura 7

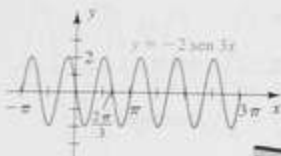


Figura 8

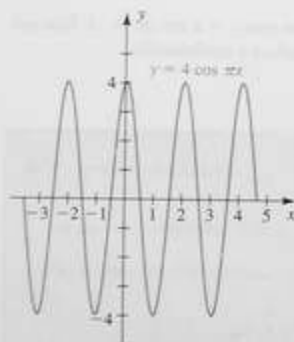
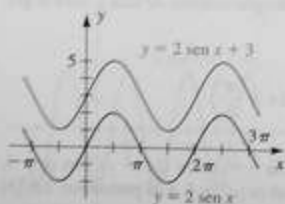


Figura 9



EJEMPLO 5 Hallar una amplitud y un periodo

Halla la amplitud y el periodo, y traza la gráfica de $y = 2 \sin(-3x)$.

SOLUCIÓN Como la función seno es impar, $\sin(-3x) = -\sin 3x$ y se puede escribir $y = -2 \sin 3x$. La amplitud es $|-2| = 2$ y el periodo es $2\pi/3$. En consecuencia, hay un ciclo en un intervalo de longitud $2\pi/3$. El signo negativo indica una reflexión a través del eje x . Si consideramos el intervalo $[0, 2\pi/3]$ y trazamos una onda senoidal de amplitud 2 (reflejada a través del eje x), la forma de la gráfica es evidente. La parte de la gráfica en el intervalo $[0, 2\pi/3]$ se repite periódicamente (figura 7).

EJEMPLO 6 Hallar una amplitud y un periodo

Halla la amplitud y el periodo, y traza la gráfica de $y = 4 \cos \pi x$.

SOLUCIÓN La amplitud es $|4| = 4$, y el periodo es $2\pi/\pi = 2$; por tanto, hay exactamente una onda cosenoidal de amplitud 4 en el intervalo $[0, 2]$. Como el periodo no contiene el número π , tiene sentido usar la escala de enteros en el eje x . Al trazar esta onda y extenderla a izquierda y derecha obtenemos la gráfica de la figura 8.

Al igual que en la sección 3.5, si f es una función y c es un número real positivo, se puede obtener la gráfica de $y = f(x) + c$ subiendo la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente una distancia c . Para la gráfica de $y = f(x) - c$, bajamos la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente una distancia c . En el siguiente ejemplo usamos esta técnica para una gráfica trigonométrica.

EJEMPLO 7 Desplazar verticalmente una gráfica trigonométrica

Traza la gráfica de $y = 2 \sin x + 3$.

SOLUCIÓN Es importante observar que $y \neq 2 \sin(x + 3)$. La gráfica de $y = 2 \sin x$ aparece en la figura 9. Si la subimos de manera vertical a una distancia 3, se obtiene la gráfica de $y = 2 \sin x + 3$.

En seguida consideremos la gráfica de

$$y = a \sin (bx + c).$$

Como antes, la amplitud es $|a|$, y el periodo es $2\pi/|b|$. Habrá un ciclo si $bx + c$ crece de 0 a 2π ; por tanto, se puede encontrar un intervalo que contenga exactamente una onda senoidal resolviendo la desigualdad siguiente para x :

$$0 \leq bx + c \leq 2\pi$$

$$-c \leq bx \leq 2\pi - c \quad \text{restar } c$$

$$-\frac{c}{b} \leq x \leq \frac{2\pi}{b} - \frac{c}{b} \quad \text{dividir entre } b$$

El número $-c/b$ es el **desplazamiento de fase** relacionado con la gráfica. La gráfica de $y = a \sin (bx + c)$ se obtiene corriendo la gráfica de $y = a \sin bx$ a la izquierda si el desplazamiento de fase es negativo, o a la derecha si es positivo.

Los resultados análogos son ciertos para $y = a \cos (bx + c)$. Este análisis se resume en el teorema que se incluye a continuación.

**Teorema sobre
amplitudes, periodos
y desplazamientos de fase**

Si $y = a \sin (bx + c)$ o $y = a \cos (bx + c)$ para números reales a y b diferentes de cero, entonces

- (1) la amplitud es $|a|$, el periodo es $\frac{2\pi}{|b|}$, y el desplazamiento de fase es $-\frac{c}{b}$.
- (2) se puede encontrar un intervalo que contenga exactamente un ciclo resolviendo la desigualdad

$$0 \leq bx + c \leq 2\pi.$$

Algunas veces escribimos $y = a \sin (bx + c)$ en la forma equivalente

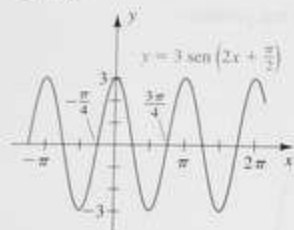
$$y = a \sin \left[b \left(x + \frac{c}{b} \right) \right].$$

EJEMPLO 8 Hallar una amplitud, un periodo y un desplazamiento de fase. Determina la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase y traza la gráfica de

$$y = 3 \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right).$$

SOLUCIÓN La ecuación es de la forma $y = a \sin (bx + c)$ con $a = 3$, $b = 2$ y $c = \pi/2$; por tanto, la amplitud es $|a| = 3$, y el periodo es $2\pi/|b| = \pi$.

Figura 10



De acuerdo con la afirmación (2) del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, es posible encontrar el desplazamiento de fase y un intervalo que contenga una onda senoidal al resolver la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2x + \frac{\pi}{2} \leq 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} &\leq 2x && \leq \frac{3\pi}{2} \quad \text{restar } \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4} &\leq x && \leq \frac{3\pi}{4} \quad \text{dividir entre 2} \end{aligned}$$

En consecuencia, el desplazamiento de fase es $-\pi/4$ y hay una onda senoidal de amplitud 3 en el intervalo $[-\pi/4, 3\pi/4]$. Al trazar esa onda y luego repetirla a derecha e izquierda se llega a la gráfica de la figura 10.

EJEMPLO 9 Hallar una amplitud, un periodo y un desplazamiento de fase

Halla la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase, y traza la gráfica de $y = 2 \cos(3x - \pi)$.

SOLUCIÓN La ecuación tiene la forma $y = a \cos(bx + c)$ donde $a = 2$, $b = 3$ y $c = -\pi$. Así pues, la amplitud es $|a| = 2$, y el periodo es $2\pi/|b| = 2\pi/3$.

Según la afirmación (2) del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, para determinar el desplazamiento de fase y un intervalo que contenga un ciclo debe resolverse la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 3x - \pi \leq 2\pi \\ \pi &\leq 3x && \leq 3\pi \quad \text{sumar } \pi \\ \frac{\pi}{3} &\leq x && \leq \pi \quad \text{dividir entre 3} \end{aligned}$$

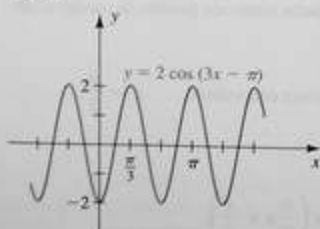
Por tanto, el desplazamiento de fase es $\pi/3$ y hay un ciclo de tipo cosenoidal (de máximo a máximo) de amplitud 2 en el intervalo $[\pi/3, \pi]$. Al trazar esa parte de la gráfica y luego repetirla a derecha e izquierda obtenemos el trazo de la figura 11.

Si resolvemos la desigualdad

$$-\frac{\pi}{2} \leq 3x - \pi \leq \frac{3\pi}{2} \quad \text{en lugar de} \quad 0 \leq 3x - \pi \leq 2\pi,$$

obtenemos el intervalo $\pi/6 \leq x \leq 5\pi/6$, el cual nos da un ciclo entre las intersecciones en el eje x en vez de uno entre máximos.

Figura 11



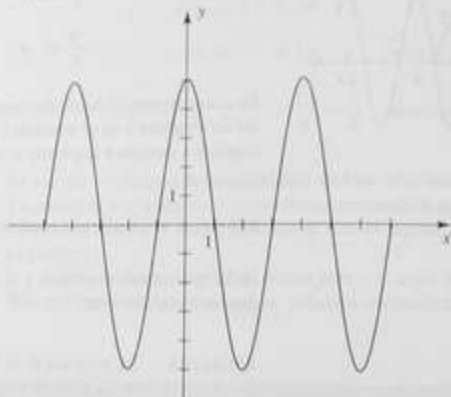
EJEMPLO 10 Hallar una ecuación para una onda senoidal

Expresa la ecuación para la onda senoidal de la figura 12 en la forma

$$y = a \operatorname{sen}(bx + c)$$

para $a > 0$, $b > 0$ y el mínimo número real positivo c .

Figura 12:

**SOLUCIÓN** Las coordenadas y máxima y mínima de puntos sobre la gráfica son 5 y -5, respectivamente; por tanto, la amplitud es $a = 5$.En vista de que hay una onda en el intervalo $[-1, 3]$, el periodo es $3 - (-1) = 4$; como consecuencia, de acuerdo con el teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase (donde $b > 0$),

$$\frac{2\pi}{b} = 4 \quad \text{o de manera equivalente,} \quad b = \frac{\pi}{2}.$$

El desplazamiento de fase es $-c/b = -c/(\pi/2)$. Dado que c ha de ser positivo, el desplazamiento de fase será *negativo*; esto es, la gráfica de la figura 12 debe obtenerse corriendo la gráfica de $y = 5 \operatorname{sen}[(\pi/2)x]$ a la izquierda. Como se pretende que c sea tan pequeña como sea posible, se escoge el desplazamiento de fase -1; por tanto,

$$-\frac{c}{\pi/2} = -1 \quad \text{o de manera equivalente,} \quad c = \frac{\pi}{2}.$$

Así, la ecuación deseada es

$$y = 5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Existen muchas otras ecuaciones para la gráfica; por ejemplo, se podrían usar los desplazamientos de fase -5 , -9 , -13 , etc., pero éstos no darían el *mínimo* valor posible para c . Otras dos ecuaciones para la gráfica son

$$y = 5 \sin \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2} \right) \quad \text{y} \quad y = -5 \sin \left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2} \right).$$

Sin embargo, ninguna de éstas satisface los criterios dados para a , b y c , puesto que en la primera, $c < 0$, y en la segunda, $a < 0$ y c no tiene su *mínimo* valor positivo.

Como solución alternativa, podríamos escribir

$$y = a \sin (bx + c) \quad \text{como} \quad y = a \sin \left[b \left(x + \frac{c}{b} \right) \right].$$

Como antes, encontramos $a = 5$ y $b = \pi/2$. Ahora, como la gráfica tiene una intersección en x , $x = -1$, podemos considerar que esta gráfica es un desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = 5 \sin [(\pi/2)x]$ a la izquierda en 1 unidad, es decir, sustituimos x por $x + 1$. Por tanto, una ecuación es

$$y = 5 \sin \left[\frac{\pi}{2}(x + 1) \right], \quad \text{o bien} \quad y = 5 \sin \left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} \right).$$

Muchos fenómenos que se presentan en la naturaleza varían de manera cíclica o rítmica. A veces es posible representar dicho comportamiento por medio de funciones trigonométricas, como se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 11 Analizar el proceso de respiración

El proceso rítmico de respiración consiste en intervalos alternos de inhalación y exhalación. Por lo general, un ciclo completo tiene lugar cada 5 segundos. Si $F(t)$ denota el volumen de circulación de aire en el instante t (en litros por segundo), y si el volumen máximo es 0.6 litros por segundo, encuentra la fórmula de la forma $F(t) = a \sin bt$ que se adecue a esta información.

SOLUCIÓN Si $F(t) = a \sin bt$ para alguna $b > 0$, entonces el periodo de F es $2\pi/b$. En esta aplicación el periodo es de 5 segundos y, por tanto

$$\frac{2\pi}{b} = 5, \quad \text{o} \quad b = \frac{2\pi}{5}.$$

Puesto que el volumen máximo corresponde a la amplitud a de F , hacemos $a = 0.6$. Esto nos da la fórmula

$$F(t) = 0.6 \sin \left(\frac{2\pi}{5}t \right).$$

**EJEMPLO 12** Calcular el número de horas de luz solar en un día

Es posible estimar el número de horas de luz solar $D(t)$ en una época específica del año mediante la siguiente ecuación

$$D(t) = \frac{K}{2} \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 79) \right] + 12$$

para t en días y $t = 0$ correspondiente al 1 de enero. La constante K determina la variación total en duración del día y depende de la latitud del lugar.

- (a) Para Boston, $K = 6$. Traza la gráfica de D para $0 \leq t \leq 365$.
 (b) ¿Cuál es el día más largo y cuál es el más corto?

SOLUCIÓN

- (a) Si $K = 6$, entonces $K/2 = 3$, y se puede escribir $D(t)$ en la forma

$$D(t) = f(t) + 12,$$

donde
$$f(t) = 3 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 79) \right].$$

Trazamos la gráfica de f y luego aplicamos un desplazamiento vertical a lo largo de una distancia de 12.

Como en el inciso (2) del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, se puede obtener un intervalo t que contenga exactamente un ciclo al resolver la siguiente desigualdad:

$$0 \leq \frac{2\pi}{365}(t - 79) \leq 2\pi$$

$$0 \leq t - 79 \leq 365 \quad \text{multiplicar por } \frac{365}{2\pi}$$

$$79 \leq t \leq 444 \quad \text{sumar 79}$$

Así pues, hay una onda senoidal en el intervalo $[79, 444]$. Este intervalo se divide en cuatro partes iguales y se obtiene la siguiente tabla de valores, que indica la conocida onda senoidal de amplitud 3.

t	79	170.25	261.5	352.75	444
$f(t)$	0	3	0	-3	0

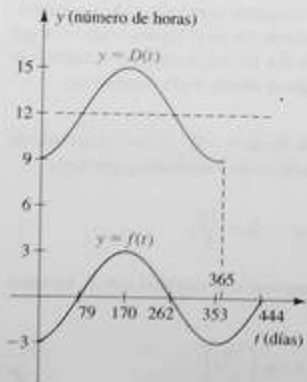
Si $t = 0$,

$$f(0) = 3 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(-79) \right] = 3 \sin(-1.36) \approx -2.9.$$

Dado que el periodo de f es 365, esto implica que $f(365) \approx -2.9$.

En la figura 13 aparece la gráfica de f para el intervalo $[0, 444]$, con escalas diferentes en los ejes y t redondeada al día más cercano.

Figura 13



La aplicación de un desplazamiento vertical de 12 unidades proporciona la gráfica de D para $0 \leq t \leq 365$ que se ilustra en la figura 13.

(b) El día más largo; esto es, el valor máximo de $D(t)$ se presenta 170 días después del 1 de enero; exceptuando un año bisiesto, esto corresponde al 20 de junio. El día más corto ocurre 353 días después del 1 de enero, o sea el 20 de diciembre.

En el ejemplo que sigue usaremos un equipo graficador para calcular la solución de una desigualdad con expresiones trigonométricas.

EJEMPLO 13 Calcular soluciones de una desigualdad trigonométrica

Aproxima la solución de la desigualdad

$$\operatorname{sen} 3x < x + \operatorname{sen} x.$$

SOLUCIÓN La desigualdad dada equivale a

$$\operatorname{sen} 3x - x - \operatorname{sen} x < 0.$$

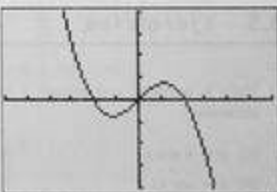
Si se asigna $3x - x - \operatorname{sen} x$ a Y_1 , el problema dado equivale a hallar dónde la gráfica de Y_1 está por debajo del eje x . En la pantalla del dispositivo podremos ver un trazo semejante al de la figura 14(a), donde la gráfica de Y_1 tiene una intersección c en x entre -1 y 0 . Es obvio que la gráfica se halla bajo el eje x en el intervalo (c, ∞) ; sin embargo, esto no queda totalmente claro por la pequeña escala de los ejes.

Figura 14

(a) $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$



(b) $[-1.5, 1.5, 0.25]$ por $[-1, 1, 0.25]$



Si se usa la pantalla $[-1.5, 1.5, 0.25]$ por $[-1, 1, 0.25]$, se obtiene la figura 14(b), en donde vemos que las intersecciones en x son aproximadamente $-0.51, 0$ y 0.51 . Al usar la función "root" se obtiene el valor positivo de 0.51 más preciso. Dado que la función de que se trata es impar, el valor negativo es poco más o menos -0.51 , de manera que las soluciones de la desigualdad están en los intervalos (aproximados) de

$$(-0.51, 0) \cup (0.51, \infty).$$

**EJEMPLO 14** Investigar la corriente alterna en un circuito eléctrico

La corriente I (en amperes) en un circuito de corriente alterna en el instante t (en segundos) está dada por

$$I = 30 \sin \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3} \right).$$

Calcula el mínimo valor de t para el cual $I = 15$.

SOLUCIÓN Al hacer $I = 15$ en la fórmula dada, se obtiene

$$15 = 30 \sin \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3} \right)$$

o lo que es igual,

$$\sin \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} = 0.$$

Si se asigna $\sin(50\pi x - 7\pi/3) - \frac{1}{2}$ a Y_1 , el problema equivale a calcular la mínima intersección en x de la gráfica.

Como el periodo de Y_1 es

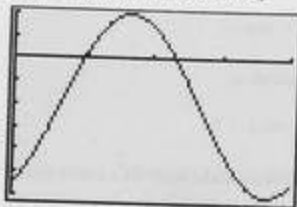
$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{1}{25} = 0.04,$$

y como $-\frac{1}{2} \leq Y_1 \leq \frac{1}{2}$, se selecciona la pantalla dada, con lo que se obtiene un trazo semejante al de la figura 15. Con la función root se obtiene $t \approx 0.01$ segundos.

En la sección 7.2 volveremos a trabajar este ejemplo y demostraremos cómo hallar el valor exacto de t sin un dispositivo graficador.

Figura 15

$[0, 0.04, 0.01]$ por $[-1.5, 0.5, 0.25]$



6.5 Ejercicios

1. Halla la amplitud y el periodo y traza la gráfica de la ecuación:

(a) $y = 4 \sin x$

(b) $y = \sin 4x$

(c) $y = \frac{1}{2} \sin x$

(d) $y = \sin \frac{1}{4}x$

(e) $y = 2 \sin \frac{1}{2}x$

(f) $y = \frac{1}{2} \sin 4x$

(g) $y = -4 \sin x$

(h) $y = \sin(-4x)$

2. Trazas las gráficas de las ecuaciones con coseno y que son análogas a las de los incisos (a) al (h) del ejercicio 1.

3. Halla la amplitud y el periodo y traza la gráfica de la ecuación:

(a) $y = 3 \cos x$

(b) $y = \cos 3x$

(c) $y = \frac{1}{2} \cos x$

(d) $y = \cos \frac{1}{2}x$

(e) $y = 2 \cos \frac{1}{2}x$

(f) $y = \frac{1}{2} \cos 3x$

(g) $y = -3 \cos x$

(h) $y = \cos(-3x)$

4. Traza las gráficas de las ecuaciones con seno y que son análogas a las de los incisos (a) al (b) del ejercicio 3.

Ejercicios 5 al 40: encuentra la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase y traza la gráfica de la ecuación.

$$5. y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$6. y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$7. y = 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$8. y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$9. y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$10. y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$11. y = 4 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$12. y = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$13. y = \sin(2x - \pi) + 1$$

$$14. y = -\sin(3x + \pi) - 1$$

$$15. y = -\cos(3x + \pi) - 2$$

$$16. y = \cos(2x - \pi) + 2$$

$$17. y = -2 \sin(3x - \pi)$$

$$18. y = 3 \cos(3x - \pi)$$

$$19. y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$20. y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$21. y = 6 \sin \pi x$$

$$22. y = 3 \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$23. y = 2 \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$24. y = 4 \sin 3\pi x$$

$$25. y = \frac{1}{2} \sin 2\pi x$$

$$26. y = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$27. y = 5 \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$28. y = -4 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$29. y = 3 \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$30. y = -2 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$31. y = -5 \cos\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) \quad 32. y = 4 \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$33. y = 3 \cos(\pi x + 4\pi)$$

$$34. y = -2 \sin(2\pi x + \pi)$$

$$35. y = -\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$36. y = \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$37. y = -2 \sin(2x - \pi) + 3$$

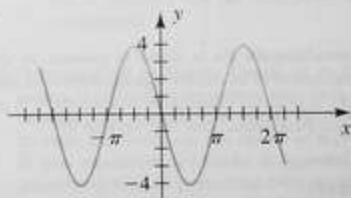
$$38. y = 3 \cos(x + 3\pi) - 2$$

$$39. y = 5 \cos(2x + 2\pi) + 2$$

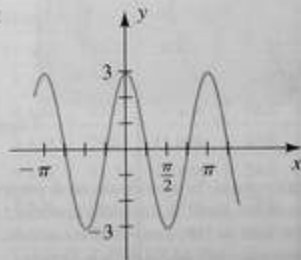
$$40. y = -4 \sin(3x - \pi) - 3$$

Ejercicios 41 al 44: en la figura se muestra la gráfica de una ecuación. (a) Encuentra la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase. (b) Escribe la ecuación en la forma $y = a \sin(bx + c)$ para $a > 0$, $b > 0$ y el mínimo número real positivo c .

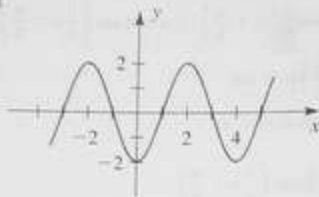
41



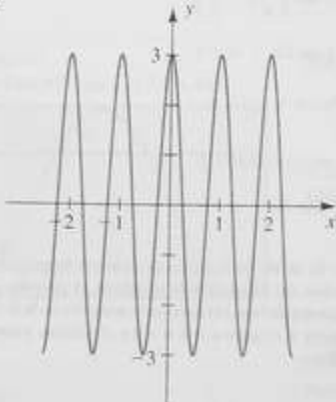
42



43

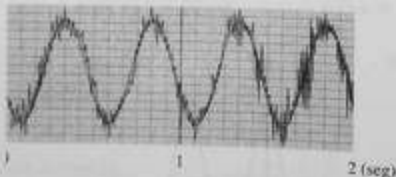


44



- 45 Electroencefalografía En la figura se muestra un electroencefalograma de un cerebro humano durante un sueño profundo. Si se usa la expresión $W = a \sin(bt + c)$ para representar estas ondas, ¿cuál es el valor de b ?

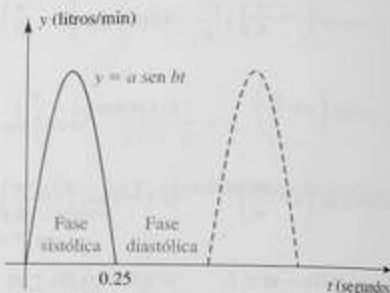
Ejercicio 45



- 46 Intensidad de la luz diurna En determinado día de primavera con 12 horas de luz diurna, la intensidad luminosa I alcanza su máximo valor de 510 calorías/cm² al mediodía. Si $t = 0$ corresponde a la salida del Sol, halla la fórmula $I = a \sin bt$ que se ajusta a esta información.

- 47 Funcionamiento del corazón El bombeo cardíaco consta de una fase sistólica, en la cual la sangre sale del ventrículo izquierdo hacia la aorta, y de una fase diastólica, durante la que el corazón se relaja. En ocasiones, la función cuya gráfica se muestra a continuación sirve para hacer un modelo de un ciclo completo de este proceso. Para un individuo en particular, la fase sistólica dura $\frac{1}{4}$ de segundo y tiene un volumen máximo de 8 litros por minuto. Halla a y b .

Ejercicio 47



- 48 Biorritmo La conocida teoría del biorritmo utiliza la gráficas de tres funciones senoideas simples para hacer predicciones sobre el potencial físico, emocional e intelectual para un día. Las gráficas se dan para $y = a \sin bt$ para t en días, con $t = 0$ correspondiente al nacimiento y $a = 1$ denota 100% del potencial.

- (a) Halla el valor de b para el ciclo físico, que tiene un periodo de 23 días; para el ciclo emocional (28 días) y para el ciclo intelectual (33 días).
- (b) Evalúa los ciclos de biorritmo de una persona que acaba de cumplir 21 años y tiene 7670 días de nacido.
- 49 Componentes de las mareas La altura de la marea, en un lugar en particular de una playa, se puede predecir si se usan siete funciones trigonométricas (llamadas componentes de mareas) de la forma

$$f(t) = a \cos(bt + c).$$

El principal componente lunar se puede aproximar mediante la ecuación

$$f(t) = a \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{11\pi}{12}\right),$$

en donde t es en horas y $t = 0$ corresponde a la medianoche. Trazar la gráfica de f si $a = 0.5$ m.

- 50 Componentes de las mareas. Consulta el ejercicio 49. El principal componente diurno solar se puede aproximar mediante la ecuación

$$f(t) = a \cos \left(\frac{\pi}{12} t - \frac{7\pi}{12} \right)$$

Traza la gráfica de f si $a = 0.2$ m.

- 51 Horas de luz diurna en Fairbanks. Si la fórmula para $D(t)$ del ejemplo 12 se usa para Fairbanks, Alaska, entonces $K = 12$. Traza la gráfica de D en este caso para $0 \leq t \leq 365$.

- 52 Temperatura mínima en Fairbanks. Con base en datos de años respecto a las condiciones atmosféricas, la mínima temperatura T (en °F) esperada en Fairbanks, Alaska, se puede calcular con

$$T = 36 \sin \left[\frac{2\pi}{365} (t - 101) \right] + 14,$$

en donde t está en días y $t = 0$ corresponde al 1 de enero.

- (a) Traza la gráfica de T para $0 \leq t \leq 365$.

- (b) Predice cuál será el día más frío del año.

Ejercicios 53 y 54: grafica la ecuación $y = f(t)$ en el intervalo $[0, 24]$. Representemos la temperatura exterior (en grados Fahrenheit) con y en el tiempo t (en horas), donde $t = 0$ corresponde a las 9:00 A.M. Describe la temperatura durante el intervalo de 24 horas.

53 $y = 20 + 15 \sin \frac{\pi}{12} t$

54 $y = 80 + 22 \cos \left[\frac{\pi}{12} (t - 3) \right]$

Ejercicios 55 al 58: a veces, los científicos utilizan la fórmula,

$$f(t) = a \sin (bt + c) + d,$$

para simular variaciones de temperatura durante el día, con el tiempo t en horas, la temperatura $f(t)$ en °C y $t = 0$ correspondiente a la medianoche. Supongamos que $f(t)$ es decreciente a la medianoche.

- (a) Determina valores de a , b , c y d que se ajusten a la información.

- (b) Traza la gráfica de f para $0 \leq t \leq 24$.

- 55 La temperatura alta es 10°C, y la baja de -10°C se presenta a las 4:00 A.M.

- 56 La temperatura a la medianoche es de 15°C, y las temperaturas alta y baja son 20 y 10°C.

- 57 La temperatura varía entre 10 y 30°C, y la primera temperatura promedio de 20°C se presenta a las 9:00 A.M.

- 58 La temperatura alta de 28°C se da a las 2:00 P.M., y la temperatura promedio de 20°C, 6 horas más tarde.

- 59 Precipitación en el sur del lago Tahoe. El promedio mensual de precipitación P (en pulgadas) en el sur del lago Tahoe, California, se indica en la tabla.

Mes	P	Mes	P	Mes	P
Ene.	6.1	May.	1.2	Sep.	0.5
Feb.	5.4	Jun.	0.6	Oct.	2.8
Mar.	3.9	Jul.	0.3	Nov.	3.1
Abr.	2.2	Ago.	0.2	Dic.	5.4

- (a) Sea t el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiendo a enero, $t = 2$ a febrero, ..., $t = 12$ a diciembre, $t = 13$ a enero, y así sucesivamente. Localiza los puntos de información para un periodo de dos años.

- (b) Encuentra una función $P(t) = a \sin (bt + c) + d$ que aproxime el promedio mensual de precipitación. Grafica la función P con los datos en los mismos ejes coordenados.

- 60 Profundidad del río Támesis. Cuando un río fluye hacia el océano, la profundidad del primero varía cerca de la desembocadura como resultado de las mareas. Tener la información necesaria relacionada con este cambio en la profundidad es de gran importancia para efectos de seguridad. La tabla siguiente proporciona la profundidad D (en pies) del río Támesis, en Londres, durante un periodo de 24 horas.


Tiempo	D	Tiempo	D	Tiempo	D
12 A.M.	27.1	8 A.M.	20.0	4 P.M.	34.0
1 A.M.	30.1	9 A.M.	18.0	5 P.M.	32.4
2 A.M.	33.0	10 A.M.	18.3	6 P.M.	29.1
3 A.M.	34.3	11 A.M.	20.6	7 P.M.	25.2
4 A.M.	33.7	12 P.M.	24.2	8 P.M.	21.9
5 A.M.	31.1	1 P.M.	28.1	9 P.M.	19.6
6 A.M.	27.1	2 P.M.	31.7	10 P.M.	18.6
7 A.M.	23.2	3 P.M.	33.7	11 P.M.	19.6

- (a) Grafica los datos, con el tiempo en el eje horizontal y la profundidad en el eje vertical. Sea $t = 0$, correspondiente a las 12:00 A.M.
- (b) Determina una función $D(t) = a \sin(bt + c) + d$, en donde $D(t)$ representa la profundidad del agua en el puerto al tiempo t . Grafica la función D con los datos. (Sugerencia: Para determinar b , calcula el tiempo entre las profundidades máximas.)
- (c) Si un barco requiere, por lo menos, 24 pies de agua para navegar por el Támesis con seguridad, determina gráficamente el(los) intervalo(s) de tiempo en que la navegación no es segura.
61. Horas de luz solar El número de horas de luz solar D en determinado lugar varía de acuerdo con el mes y la latitud. En la tabla siguiente se proporciona el número de horas de luz solar el primer día de cada mes a una latitud de 60° N.

Mes	D	Mes	D	Mes	D
Ene.	6.03	May.	15.97	Sep.	14.18
Feb.	7.97	Jun.	18.28	Oct.	11.50
Mar.	10.43	Jul.	18.72	Nov.	8.73
Abr.	13.27	Ago.	16.88	Dic.	5.88

- (a) Sea t el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiendo a enero, $t = 2$ a febrero, ..., $t = 12$ a diciembre, $t = 13$ a enero, y así sucesivamente. Localiza los puntos de información para un periodo de dos años.
- (b) Encuentra una función $D(t) = a \sin(bt + c) + d$ que dé una aproximación del número de horas de luz solar. Grafica la función D con los datos.
62. Horas de luz solar Consulta el ejercicio 61. El número máximo de horas de luz solar en el paralelo 40° N es de 15.02 horas y se presentan el 21 de junio. El número mínimo de horas de luz solar es de 9.32 horas, lo que ocurre el 22 de diciembre.

- (a) Determina una función $D(t) = a \sin(bt + c) + d$ que modele el número de horas de luz solar, donde t sea en meses y $t = 1$ corresponda al 1 de enero.
- (b) Grafica la función D usando la pantalla [0.5, 24.5, 4] por [0, 20, 4].
- (c) Pronostica el número de horas de luz solar el 1 de febrero y el 1 de septiembre. Compara tus respuestas con los valores verdaderos de 10.17 y 13.08 horas, respectivamente.


 Ejercicios 63 al 66: grafica la ecuación en el intervalo $[-2, 2]$ y describe el comportamiento de y a medida que $x \rightarrow 0^+$ y $x \rightarrow 0^-$.

$$63. y = \sin \frac{1}{x}$$

$$64. y = |x| \sin \frac{1}{x}$$


$$65. y = \frac{\sin 2x}{x}$$

$$66. y = \frac{1 - \cos 3x}{x}$$

 Ejercicios 67 y 68: grafica la ecuación en el intervalo $[-20, 20]$ y estima la asíntota horizontal.

$$67. y = x^2 \sin^2 \left(\frac{2}{x} \right)$$

$$68. y = \frac{1 - \cos^2(2/x)}{\sin(1/x)}$$

 Ejercicios 69 y 70: usa una gráfica para resolver la desigualdad en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

$$69. \cos 3x \geq \frac{1}{2}x - \sin x$$

$$70. \frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{3}x \right) < \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4}x^2$$

6.6

Otras gráficas trigonométricas

Los métodos que desarrollamos en la sección 6.5 para el seno y el coseno se pueden aplicar a las otras cuatro funciones trigonométricas, pero, existen varias diferencias. Como las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante no tienen valores máximos, la noción de amplitud carece de significado; además no nos referimos a ciclos. Para algunas gráficas de tangente y cotangente, comenzamos por trazar la porción entre asíntotas verticales sucesivas y luego repetimos la figura a la derecha y a la izquierda.

La gráfica de $y = a \tan x$ para $a > 0$ se puede obtener por elongación o compresión de la gráfica de $y = \tan x$. Si $a < 0$, entonces también se usa una reflexión alrededor del eje x . Puesto que la función tangente tiene periodo π , basta trazar la gráfica entre las dos asíntotas verticales sucesivas $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$. Se presenta la misma figura a la derecha y a la izquierda, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Traza la gráfica de una ecuación con $\tan x$

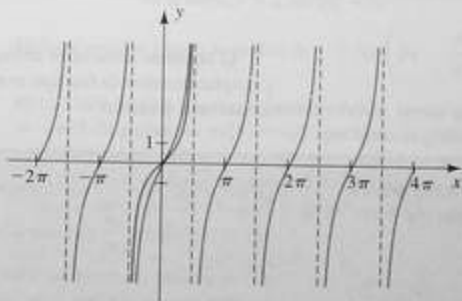
Traza la gráfica de la ecuación:

(a) $y = 2 \tan x$ (b) $y = \frac{1}{2} \tan x$

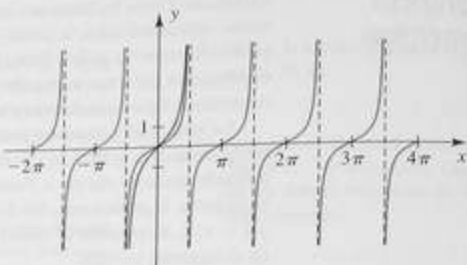
SOLUCIÓN Comencemos por trazar la gráfica de una rama de $y = \tan x$, como se muestra en gris en las figuras 1 y 2, entre las asíntotas verticales $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$.

(a) Para $y = 2 \tan x$, se multiplica por 2 la coordenada y de cada punto y luego se extiende la gráfica resultante a derecha e izquierda (figura 1).

Figura 1 $y = 2 \tan x$



(b) Para $y = \frac{1}{2} \tan x$, se multiplican por $\frac{1}{2}$ las coordenadas y para obtener el trazo de la figura 2.

Figura 2: $y = \frac{1}{2} \tan x$ 

El método que se utiliza en el ejemplo 1 se puede aplicar a otras funciones. Así, para trazar la gráfica de $y = 3 \sec x$, podríamos trazar primero la gráfica de $y = \sec x$ y luego multiplicar por 3 la coordenada y de cada punto.

En la figura siguiente se muestra el caso típico de la gráfica de $y = \tan x$ obtenida con una calculadora graficadora. Tal parece que la calculadora ha incluido las asíntotas, pero en realidad las líneas verticales son resultado de un intento de la calculadora de conectar píxeles consecutivos.

$[-\pi, \pi, \pi/4]$ por $[-2.1, 2.1]$



El siguiente teorema es análogo al teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase que se examinaron en la sección 6.5 para las funciones seno y coseno.

Teorema sobre la gráfica de $y = a \tan (bx + c)$

Si $y = a \tan (bx + c)$ para números reales a y b diferentes de cero, entonces:

- (1) el periodo es $\frac{\pi}{|b|}$ y el desplazamiento es $-\frac{c}{b}$;
- (2) se pueden encontrar asíntotas verticales sucesivas para la gráfica de una rama al resolver la desigualdad

$$-\frac{\pi}{2} < bx + c < \frac{\pi}{2}$$

EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \tan (bx + c)$ Halla el periodo y traza la gráfica de $y = \frac{1}{2} \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.**SOLUCIÓN** La ecuación tiene la forma dada en el teorema precedente con $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, y $c = \pi/4$; por tanto, por la parte (1), el periodo es $\pi/|b| = \pi/1 = \pi$.

Al igual que en la parte (2), para hallar asíntotas verticales sucesivas se resuelve la desigualdad:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\pi}{2} &\leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \\
 -\frac{3\pi}{4} &\leq x \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{restar } \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Como $a = \frac{1}{2}$, la gráfica de la ecuación en el intervalo $[-3\pi/4, \pi/4]$ tiene la forma de la gráfica de $y = \frac{1}{2} \tan x$ (figura 2). Al trazar esa parte de la gráfica y extenderla a la derecha y a la izquierda se obtiene la figura 3.Notarás que como $c = \pi/4$ y $b = 1$, el desplazamiento de fase es $-c/b = -\pi/4$; por tanto, la gráfica se puede obtener corriendo a la izquierda la gráfica de $y = \frac{1}{2} \tan x$ de la figura 2, una distancia $\pi/4$.Si $y = a \cot (bx + c)$, la situación resulta semejante a la indicada en el teorema previo; la única diferencia es la parte (2). Como las sucesivas asíntotas verticales para la gráfica de $y = \cot x$ son $x = 0$ y $x = \pi$ (figura 17 en la sección 6.3), se obtienen asíntotas verticales sucesivas para la gráfica de $y = a \cot (bx + c)$ resolviendo la desigualdad

$$0 < bx + c < \pi.$$

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \cot (bx + c)$ Halla el periodo y traza la gráfica de $y = \cot \left(2x - \frac{\pi}{2} \right)$.**SOLUCIÓN** Con la notación acostumbrada, vemos que $a = 1$, $b = 2$ y $c = -\pi/2$. El periodo es $\pi/|b| = \pi/2$; por tanto, la gráfica se repite en intervalos de longitud $\pi/2$.

Como en el análisis que precede a este ejemplo, para hallar dos asíntotas verticales sucesivas para la gráfica de una rama resolvemos la desigualdad:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq 2x - \frac{\pi}{2} \leq \pi \\
 \frac{\pi}{2} &\leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} \quad \text{sumar } \frac{\pi}{2} \\
 \frac{\pi}{4} &\leq x \leq \frac{3\pi}{4} \quad \text{dividir entre 2}
 \end{aligned}$$

(continúa)

Figura 3

$$y = \frac{1}{2} \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

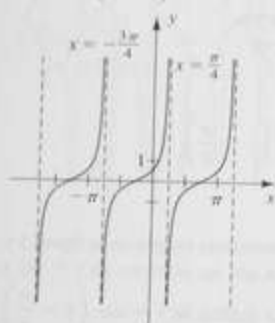
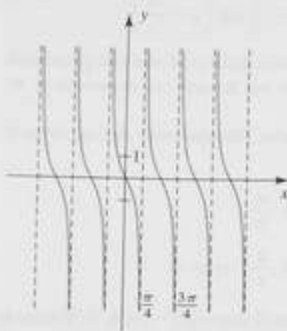


Figura 4

$$y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$



Puesto que a es positiva, se traza una gráfica en forma cotangente en el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$ y luego se repite a la derecha y a la izquierda en intervalos de longitud $\pi/2$ (figura 4).

Se pueden obtener gráficas con funciones secante y cosecante si se siguen métodos semejantes a los de tangente y cotangente, o bien, se toman los recíprocos de las gráficas correspondientes a las funciones de seno y coseno.

EJEMPLO 4 Trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \sec(bx + c)$

Traza la gráfica de la ecuación:

$$(a) y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (b) y = 2 \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $y = \sec x$ aparece (sin asíntotas) en gris en la figura 5 y en negro, la gráfica de $y = \cos x$. Notarás que las asíntotas de $y = \sec x$ corresponden a los ceros de $y = \cos x$. La gráfica de $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ se obtiene al desplazar la gráfica de $y = \sec x$ a la derecha una distancia $\pi/4$, según se muestra en azul en la figura 5.

(b) Se puede trazar la gráfica al multiplicar por 2 las coordenadas y de la gráfica en la parte (a). Esto da la figura 6.

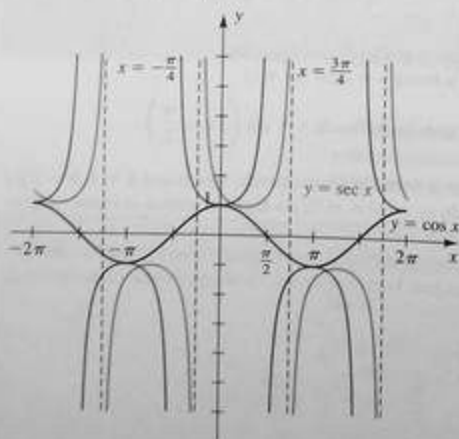
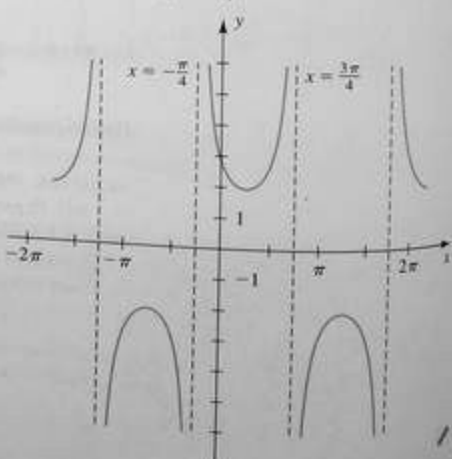
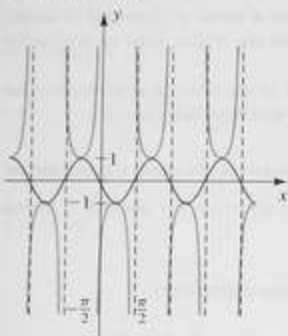
Figura 5 $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ Figura 6 $y = 2 \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 

Figura 7

$$y = \csc(2x + \pi)$$



EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \csc(bx + c)$

Traza la gráfica de $y = \csc(2x + \pi)$.

SOLUCIÓN Como $\csc \theta = 1/\sin \theta$, escribimos la ecuación dada así

$$y = \frac{1}{\sin(2x + \pi)}$$

Por tanto, se puede obtener la gráfica de $y = \csc(2x + \pi)$ si encontramos la gráfica de $y = \sin(2x + \pi)$ y luego tomamos el recíproco de la coordenada y de cada punto. Con $a = 1$, $b = 2$ y $c = \pi$ vemos que la amplitud de $y = \sin(2x + \pi)$ es 1 y el periodo es $2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$. Para hallar un intervalo que contenga un ciclo resolvemos la desigualdad

$$0 \leq 2x + \pi \leq 2\pi$$

$$-\pi \leq 2x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Figura 8

(a)



Esto conduce a la gráfica en gris de la figura 7. Tomar los recíprocos da como resultado la gráfica de $y = \csc(2x + \pi)$ que aparece en azul en la figura. Advierte que los ceros de la curva seno corresponden a las asíntotas de la gráfica de la cosecante.

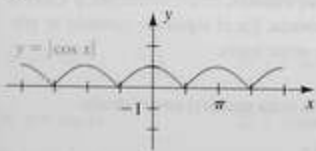
En el siguiente ejemplo interviene el valor absoluto de una función trigonométrica.



EJEMPLO 6 Trazar la gráfica de una ecuación con un valor absoluto

Traza la gráfica de $y = |\cos x| + 1$.

(b)



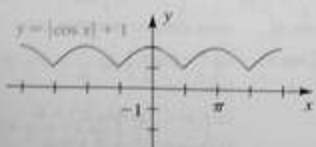
SOLUCIÓN Trazaremos la gráfica en tres etapas. Primero, la gráfica de $y = \cos x$ como en la figura 8(a).

A continuación, obtenemos la gráfica de $y = |\cos x|$ al reflejar las coordenadas y negativas de la figura 8(a) a través del eje x , lo cual nos da la figura 8(b).

Por último, subimos la gráfica (b) una unidad y obtenemos la figura 8(c).

Para mayor claridad se han usado tres gráficas. En la práctica, se pueden trazar las gráficas sucesivamente en un plano coordenado.

(c)

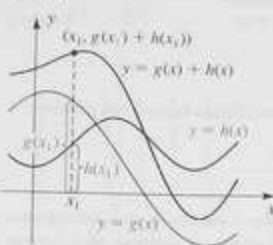


A menudo, las aplicaciones matemáticas comprenden una función f , que es la suma de otras dos o más funciones. Para ilustrarlo, supón que

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

en donde f , g y h tienen el mismo dominio D . Antes de que se inventaran los equipos graficadores electrónicos, a veces se usaba una técnica conocida como **suma de coordenadas** y para trazar la gráfica de f . El método se ilustra

Figura 9



en la figura 9, en donde, para cada x_1 , la coordenada y , $f(x_1)$ de un punto de la gráfica de f es la suma $g(x_1) + h(x_1)$ de coordenadas y de puntos de las gráficas de g y h . La gráfica de f se obtiene al sumar gráficamente un número suficiente de tales coordenadas y , tarea que realiza mejor un dispositivo graficador.

A veces es útil comparar la gráfica de una suma de funciones con las funciones individuales, como se plantea en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 Trazar la gráfica de una suma de dos funciones trigonométricas

Traza la gráfica de $y = \cos x$, $y = \sin x$ y $y = \cos x + \sin x$ en el mismo plano coordenado para $0 \leq x \leq 3\pi$.

SOLUCIÓN Se establecen las siguientes asignaciones:

$$Y_1 = \cos x, \quad Y_2 = \sin x, \quad y \quad Y_3 = Y_1 + Y_2$$

Como deseamos una proporción de pantalla 3:2 (horizontal : vertical), escogemos la pantalla $[0, 3\pi, \pi/4]$ por $[-\pi, \pi]$ y obtenemos un trazo semejante al de la figura 10(a). La claridad de la gráfica mejora cambiando la pantalla a $[0, 3\pi, \pi/4]$ por $[-1.5, 1.5]$ [figura 10(b)].

Advertirás que la gráfica de Y_3 corta la gráfica de Y_1 cuando $Y_2 = 0$, y la gráfica de Y_2 cuando $Y_1 = 0$. Las intersecciones en x para Y_3 corresponden a las soluciones de $Y_2 = -Y_1$. Por último, verás que los valores máximo y mínimo de Y_3 se presentan cuando $Y_1 = Y_2$ (esto es, cuando $x = \pi/4, 5\pi/4$ y $9\pi/4$). Estos valores de y son:

$$\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 = \sqrt{2} \quad y \quad -\sqrt{2}/2 + (-\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2} \quad \checkmark$$

La gráfica de una ecuación de la forma

$$y = f(x) \sin(ax + b) \quad \text{o} \quad y = f(x) \cos(ax + b),$$

cuando f es una función y a y b son números reales, se llama **onda senoidal amortiguada** u **onda cosenoidal amortiguada**, respectivamente, y a $f(x)$ se le denomina **factor de amortiguamiento**. En el siguiente ejemplo se presenta un método para graficar dichas ecuaciones.

EJEMPLO 8 Trazar la gráfica de una onda senoidal amortiguada

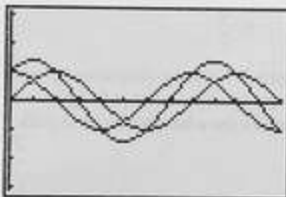
Traza la gráfica de f si $f(x) = 2^{-x} \sin x$.

SOLUCIÓN Primero analizamos el valor absoluto de f :

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |2^{-x} \sin x| && \text{valor absoluto de ambos lados} \\ &= |2^{-x}| |\sin x| && |ab| = |a||b| \\ &\leq |2^{-x}| \cdot 1 && |\sin x| \leq 1 \\ |f(x)| &\leq 2^{-x} && |2^{-x}| = 2^{-x} \text{ porque } 2^{-x} > 0 \\ -2^{-x} &\leq f(x) \leq 2^{-x} && |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \end{aligned}$$

Figura 10

(a) $[0, 3\pi, \pi/4]$ por $[-\pi, \pi]$



(b) $[0, 3\pi, \pi/4]$ por $[-1.5, 1.5]$

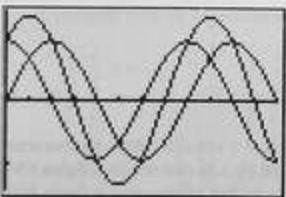
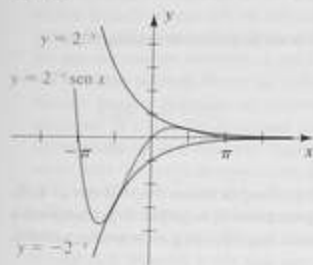


Figura 11



La última desigualdad implica que la gráfica de f se encuentra entre las gráficas de las ecuaciones $y = -2^{-x}$ y $y = 2^{-x}$. La gráfica de f coincidirá con una de éstas si $|\sin x| = 1$; esto es, si $x = (\pi/2) + \pi n$ para algún entero n .

Como $2^{-x} > 0$, las intersecciones x de la gráfica de f se presentan en $\sin x = 0$; es decir, en $x = \pi n$. Debido a que existe una infinidad de intersecciones con x , éste es un ejemplo de una función que interseca su asíntota horizontal infinidad de veces. Con esta información se obtiene el trazo de la figura 11.

El factor de amortiguamiento del ejemplo 8 es 2^{-x} . Con el uso de diferentes factores de amortiguamiento es posible obtener otras variaciones comprimidas o expandidas de ondas senoidales. El análisis de dichas gráficas es importante en física e ingeniería.

6.6 Ejercicios

Ejercicios 1 al 52: halla el periodo y traza la gráfica de la ecuación. Indica cuáles son las asíntotas.

1 $y = 4 \tan x$

2 $y = \frac{1}{4} \tan x$

3 $y = 3 \cot x$

4 $y = \frac{1}{3} \cot x$

5 $y = 2 \csc x$

6 $y = \frac{1}{2} \csc x$

7 $y = 3 \sec x$

8 $y = \frac{1}{4} \sec x$

9 $y = \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$

10 $y = \tan \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$

11 $y = \tan 2x$

12 $y = \tan \frac{1}{2}x$

13 $y = \tan \frac{1}{4}x$

14 $y = \tan 4x$

15 $y = 2 \tan \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$

16 $y = \frac{1}{3} \tan \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$

17 $y = -\frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \right)$

18 $y = -3 \tan \left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3} \right)$

19 $y = \cot \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$

20 $y = \cot \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

21 $y = \cot 2x$

22 $y = \cot \frac{1}{2}x$

23 $y = \cot \frac{1}{3}x$

24 $y = \cot 3x$

25 $y = 2 \cot \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$

26 $y = -\frac{1}{2} \cot (3x - \pi)$

27 $y = -\frac{1}{2} \cot \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \right)$

28 $y = 4 \cot \left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6} \right)$

29. $y = \sec \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$

30. $y = \sec \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)$

31. $y = \sec 2x$

32. $y = \sec \frac{1}{2}x$

33. $y = \sec \frac{1}{3}x$

34. $y = \sec 3x$

35. $y = 2 \sec \left(2x - \frac{\pi}{2} \right)$

36. $y = \frac{1}{2} \sec \left(2x - \frac{\pi}{2} \right)$

37. $y = -\frac{1}{3} \sec \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \right)$

38. $y = -3 \sec \left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3} \right)$

39. $y = \csc \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$

40. $y = \csc \left(x + \frac{3\pi}{4} \right)$

41. $y = \csc 2x$

42. $y = \csc \frac{1}{2}x$

43. $y = \csc \frac{1}{3}x$

44. $y = \csc 3x$

45. $y = 2 \csc \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$

46. $y = -\frac{1}{3} \csc (2x - \pi)$

47. $y = -\frac{1}{4} \csc \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right)$

48. $y = 4 \csc \left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} \right)$

49. $y = \tan \frac{\pi}{2}x$

50. $y = \cot \pi x$

51. $y = \csc 2\pi x$

52. $y = \sec \frac{\pi}{8}x$

53. Encuentra una ecuación usando la función cotangente que tenga la misma gráfica que $y = \tan x$.

54. Halla una ecuación empleando la función cosecante que tenga la misma gráfica que $y = \sec x$.

Ejercicios 55 al 60: usa la gráfica de una función trigonométrica para ayudar en el trazado de la gráfica de la ecuación sin ubicar puntos.

55. $y = |\sin x|$

56. $y = |\cos x|$

57. $y = |\sin x| + 2$

58. $y = |\cos x| - 3$

59. $y = -|\cos x| + 1$

60. $y = -|\sin x| - 2$

Ejercicios 61 al 66: traza la gráfica de la ecuación.

61. $y = x + \cos x$

62. $y = x - \sin x$

63. $y = 2^{-x} \cos x$

64. $y = e^x \sin x$

65. $y = |x| \sin x$

66. $y = |x| \cos x$

Ejercicios 67 al 72: grafica f en $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$. Usa la gráfica de f para predecir la gráfica de g . Compara tu pronóstico trazando la gráfica de g en la misma pantalla.

67. $f(x) = \tan 0.5x$; $g(x) = \tan \left[0.5 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right]$

68. $f(x) = 0.5 \csc 0.5x$; $g(x) = 0.5 \csc 0.5x - 2$

69. $f(x) = 0.5 \sec 0.5x$; $g(x) = 0.5 \sec \left[0.5 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] - 1$

70. $f(x) = \tan x - 1$; $g(x) = -\tan x + 1$

71. $f(x) = 3 \cos 2x$; $g(x) = |3 \cos 2x| - 1$

72. $f(x) = 1.2^{-x} \cos x$; $g(x) = 1.2^x \cos x$

Ejercicios 73 y 74: identifica el factor de amortiguamiento $f(x)$ para la onda amortiguada. Trazas gráficas de $y = \pm f(x)$ y de la ecuación en el mismo plano coordenado para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

73. $y = e^{-0.4x} \sin 4x$

74. $y = 3^{-0.5x} \cos 2x$

Ejercicios 75 y 76: grafica la función f en $[-\pi, \pi]$ y calcula los puntos alto y bajo.

75. $f(x) = \cos 2x + 2 \sin 4x - \sin x$

76. $f(x) = \tan \frac{1}{4}x - 2 \sin 2x$

Ejercicios 77 y 78: usa una gráfica para calcular el máximo intervalo $[a, b]$ con $a < 0$ y $b > 0$, en que f es biunívoca.

77. $f(x) = \sin (2x + 2) \cos (1.5x - 1)$

78. $f(x) = 1.5 \cos \left(\frac{1}{2}x - 0.3 \right) + \sin (1.5x + 0.5)$

Ejercicios 79 y 80: resuelve la desigualdad en el intervalo $[-\pi, \pi]$ con una gráfica.

79. $\cos (2x - 1) + \sin 3x \geq \sin \frac{1}{4}x + \cos x$

80. $\frac{1}{2} \cos 2x + 2 \cos (x - 2) < 2 \cos (1.5x + 1) + \sin (x - 1)$

- 81 **Intensidad de una señal de radio** En ocasiones, las estaciones de radio tienen más de una torre de transmisión porque los lineamientos federales generalmente no permiten que una estación transmita su señal en todas direcciones con igual potencia. Como las ondas de radio pueden recorrer grandes distancias, es importante controlar sus diagramas de irradiación direccional para que las estaciones no interfieran unas con otras. Supongamos que una estación tiene dos torres de transmisión ubicadas a lo largo de la línea norte-sur, como se muestra en la figura. Si la estación transmite a una longitud de onda λ y la distancia entre las dos torres es igual a $\frac{1}{2}\lambda$, entonces la intensidad I de la señal en la dirección θ está dada por

$$I = \frac{1}{2}I_0[1 + \cos(\pi \sin \theta)],$$

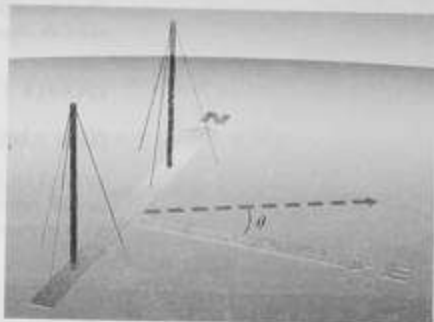
donde I_0 es la intensidad máxima. Aproxima I en términos de I_0 para cada θ .

- (a) $\theta = 0$ (b) $\theta = \pi/3$ (c) $\theta = \pi/2$

- 82 **Intensidad de una señal de radio** Consulta el ejercicio 81.

- (a) Determina las direcciones en que I tiene valores máximos o mínimos.
(b) Grafica I en el intervalo $[0, 2\pi]$. Gráficamente, aproxima θ a tres lugares decimales, cuando I es igual a $\frac{1}{2}I_0$. (Sugerencia: Hacer $I_0 = 1$.)

Ejercicio 81



- 83 **Campo magnético de la Tierra** La intensidad del campo magnético terrestre varía con la profundidad bajo la superficie. A la profundidad z y en el tiempo t , a veces es posible calcular la intensidad con la onda senoidal amortiguada

$$S = A_0 e^{-\alpha z} \sin(kz - \alpha t),$$

donde A_0 , α , y k son constantes.

- (a) ¿Cuál es el factor de amortiguamiento?
(b) Halla el desplazamiento de fase a la profundidad z_0 .
(c) ¿A qué profundidad la amplitud de la onda es la mitad de la amplitud de la intensidad en la superficie?

6.7

Problemas de aplicación

La trigonometría se desarrolló para ayudar a resolver problemas de ángulos y longitudes de lados de triángulos. Aun cuando las dificultades de este tipo ya no representan las aplicaciones más importantes, todavía surgen problemas con triángulos en situaciones físicas. Los analizaremos en esta sección, pero aquí nos restringiremos a los triángulos rectángulos; los triángulos de otros tipos se estudiarán en el capítulo 8.

Con frecuencia usaremos la notación que sigue: los vértices de un triángulo se denotarán por A , B y C ; los ángulos en A , B y C , por α , β y γ , respectivamente; las longitudes de los lados opuestos a estos ángulos, serán a , b y c , respectivamente. El triángulo en sí recibirá el nombre de *triángulo ABC* (denotado como $\triangle ABC$). Si un triángulo es rectángulo y se conoce uno de sus ángulos agudos y uno o dos de sus lados, se pueden encontrar las partes restantes aplicando las fórmulas de la sección 6.2, que expresan las funciones trigonométricas como razones de los lados de un triángulo. Al proceso de encontrar las partes faltantes lo llamamos **resolver el triángulo**.

En todos los ejemplos asumimos que sabes hallar los valores de las funciones trigonométricas y ángulos usando calculadora, tablas o los resultados de ángulos especiales.

EJEMPLO 1 Resolver un triángulo rectángulo

Dados $\triangle ABC$, resuelve el $\gamma = 90^\circ$, $\alpha = 34^\circ$ y $b = 10.5$.

SOLUCIÓN Como la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180° tenemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Al despejar el ángulo desconocido β tenemos que

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 34^\circ - 90^\circ = 56^\circ.$$

Al referirnos a la figura 1, obtenemos

$$\tan 34^\circ = \frac{a}{10.5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$a = (10.5) \tan 34^\circ \approx 7.1 \quad \text{despejar } a, \text{ aproximar}$$

Para hallar el lado c se puede usar la función coseno o la secante, como en (1) o (2), respectivamente:

$$(1) \cos 34^\circ = \frac{10.5}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$$

$$c = \frac{10.5}{\cos 34^\circ} \approx 12.7$$

despejar c , aproximar

$$(2) \sec 34^\circ = \frac{c}{10.5}$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$c = (10.5) \sec 34^\circ \approx 12.7 \quad \text{despejar } c, \text{ aproximar}$$

Como se expone en el ejemplo 1, las respuestas suelen redondearse cuando se trabaja con triángulos. Una razón es que, en la mayor parte de los casos, las longitudes de los triángulos y las medidas de los ángulos se encuentran con aparatos mecánicos y, por tanto, sólo son aproximaciones a los valores exactos. Así, se supone que un número como el 10.5 del ejemplo 1 se ha redondeado al décimo más cercano. No se puede esperar más precisión en los valores calculados para los lados restantes y, por tanto, también hay que redondearlos al décimo más cercano.

Para hallar ángulos, las respuestas deben redondearse como se indica en la tabla siguiente.

Número de cifras significativas para lados	Redondear grados de ángulos al más cercano
2	1°
3	0.1° , o $10'$
4	0.01° , o $1'$

Figura 1



La justificación de esta tabla requiere un análisis cuidadoso de los problemas en que intervienen datos aproximados.



EJEMPLO 2 Resolver un triángulo rectángulo

Dados $\triangle ABC$, resuelve el $\gamma = 90^\circ$, $a = 12.3$ y $b = 31.6$.

SOLUCIÓN Con referencia al triángulo de la figura 2, se obtiene

$$\tan \alpha = \frac{12.3}{31.6}$$

En vista de que los lados están dados con tres cifras significativas, la regla establecida en la tabla anterior dice que α debe redondearse al 0.1° más cercano, o al múltiplo de $10'$ más próximo. Con el modo de grados de una calculadora, tenemos

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{12.3}{31.6} \approx 21.3^\circ \quad \text{o su equivalente,} \quad \alpha \approx 21^\circ 20'$$

Como α y β son ángulos complementarios,

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 21.3^\circ = 68.7^\circ$$

La única parte restante por hallar es c . Se pueden usar varias relaciones que involucren a c para determinar su valor, como

$$\cos \alpha = \frac{31.6}{c}, \quad \sec \beta = \frac{c}{12.3}, \quad \text{y} \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Siempre que sea posible, es mejor utilizar una relación donde haya sólo información dada, ya que ésta no depende de ningún valor calculado antes; por tanto, con $a = 12.3$ y $b = 31.6$, tenemos

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(12.3)^2 + (31.6)^2} = \sqrt{1149.85} \approx 33.9. \quad \checkmark$$

Como se ilustra en la figura 3, si un observador en el punto X avista un objeto, el ángulo que forma la línea visual con la horizontal l es el **ángulo de elevación** del objeto (si éste se encuentra arriba de la horizontal), o **ángulo de depresión** del objeto (si está debajo de la horizontal). Se usará esta terminología en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 3 Usar un ángulo de elevación

Desde el punto al nivel del suelo y a 135 pies de la base de una torre, el ángulo de elevación a la parte más alta de la torre es $57^\circ 20'$. Calcula la altura de la torre.

Figura 2



Figura 3



SOLUCIÓN Si se denota por d la altura de la torre, el triángulo de la figura 4 representa las cantidades dadas. Con referencia a la figura, se tiene

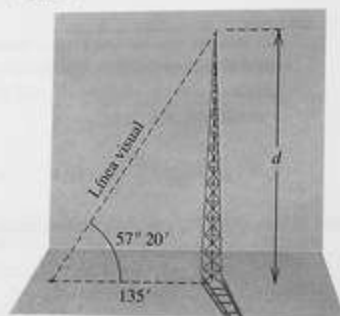
$$\tan 57^\circ 20' = \frac{d}{135}$$

$$\tan 57^\circ 20' = \frac{op}{ady}$$

$$d = 135 \tan 57^\circ 20' = 211. \quad \text{despejar } d; \text{ aproximar}$$

La torre mide alrededor de 211 pies de altura.

Figura 4

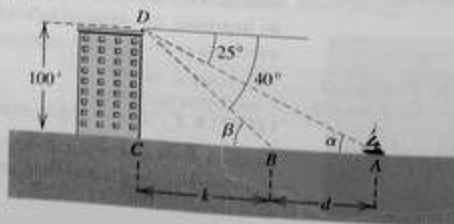


EJEMPLO 4 Uso de ángulos de depresión

Desde lo alto de un edificio que mira al mar, un observador avista una lancha que navega directamente hacia el edificio. Si el observador está a 100 pies *sm* (sobre el nivel del mar) y el ángulo de depresión de la lancha cambia de 25° a 40° durante el periodo de observación, calcula la distancia que recorre la lancha.

SOLUCIÓN Como en la figura 5, A y B son las posiciones de la lancha que corresponden a los ángulos de 25° y 40° , respectivamente. Supón que el observador está en el punto D y que C es el punto 100 pies directamente abajo. Denota con d la distancia que recorre la lancha, y con k la distancia de B a C . Si α y β

Figura 5



representan los ángulos DAC y DBC , respectivamente, por geometría (ángulos alternos internos) se deduce que $\alpha = 25^\circ$ y $\beta = 40^\circ$.

Del triángulo BCD :

$$\begin{aligned}\cot \beta &= \cot 40^\circ = \frac{k}{100} & \cot \beta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} \\ k &= 100 \cot 40^\circ & \text{despejando } k\end{aligned}$$

Del triángulo DAC :

$$\begin{aligned}\cot \alpha &= \cot 25^\circ = \frac{d+k}{100} & \cot \alpha &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} \\ d+k &= 100 \cot 25^\circ & \text{multiplicar por med} \\ d &= 100 \cot 25^\circ - k & \text{despejar } d \\ &= 100 \cot 25^\circ - 100 \cot 40^\circ & k &= 100 \cot 40^\circ \\ &= 100(\cot 25^\circ - \cot 40^\circ) & \text{factorizar } 100 \\ &\approx 100(2.145 - 1.192) \approx 95 & \text{aproximar}\end{aligned}$$

Por tanto, la lancha recorre unos 95 pies.

En determinados problemas de navegación y agrimensura, la **dirección** o **rumbo** de un punto P a uno Q se especifica indicando el ángulo agudo que el segmento PQ hace con la línea norte-sur que pasa por P . También se establece si Q se localiza al norte, sur, este u oeste de P . En la figura 6 se ilustran cuatro posibilidades. El rumbo de P a Q_1 es 25° al este del norte y se denota por $N25^\circ E$. También nos referimos a la **dirección** $N25^\circ E$, que es la dirección de P a Q_1 . Los rumbos de P a Q_2 , a Q_3 y a Q_4 están representados de manera semejante en la figura. Notarás que cuando se usa esta notación para rumbos o direcciones, N o S aparecen siempre a la *izquierda* del ángulo y O o E a la *derecha*.

Figura 6

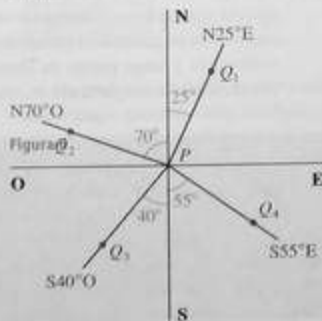


Figura 7

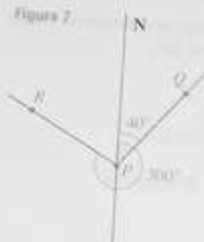


Figura 8

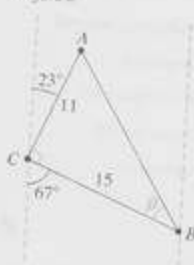
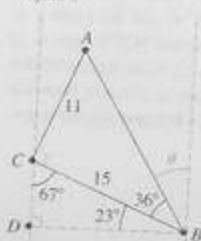


Figura 9



En la navegación aérea, las direcciones y los rumbos se especifican al medir desde el norte en *sentido de las manecillas del reloj*. En este caso se asigna una medida positiva al ángulo, en lugar de la medida negativa que suele darse a este giro. Con referencia a la figura 7, la dirección de PQ es 40° y la dirección de PR es 300° .

**EJEMPLO 5** Usar rumbos

Dos barcos salen de puerto al mismo tiempo, uno de ellos en dirección $N23^\circ E$ a una velocidad de 11 millas por hora y el segundo en dirección $S67^\circ E$ a 15 millas por hora. Calcula el rumbo del segundo barco con respecto al primer una hora después.

SOLUCIÓN El trazado de la figura 8 indica las posiciones de las dos naves en los puntos A y B, respectivamente, después de una hora; el punto C representa el puerto. Halla el rumbo de B a A. Notarás que

$$\angle ACB = 180^\circ - 23^\circ - 67^\circ = 90^\circ,$$

y, por tanto, el triángulo ACB es rectángulo. Debido a esto,

$$\tan \beta = \frac{11}{15} \quad \tan \beta = \frac{\text{op}}{\text{ady.}}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{11}{15} \approx 36^\circ \quad \text{resolver para } \beta; \text{ aproximar}$$

Hemos redondeado β al grado más cercano, ya que los lados de los triángulos están dados con dos cifras significativas.

Al referirnos a la figura 9, obtenemos:

$$\angle CBD = 90^\circ - \angle BCD = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$$

$$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 36^\circ + 23^\circ = 59^\circ$$

$$\theta = 90^\circ - \angle ABD \approx 90^\circ - 59^\circ = 31^\circ.$$

Por tanto, el rumbo de B a A es aproximadamente $N31^\circ O$.

Las funciones trigonométricas son útiles en la investigación del movimiento vibratorio u oscilatorio, como lo es el movimiento de una partícula en una cuerda de guitarra en vibración o en un resorte que haya sido comprimido o elongado y luego puesto en libertad de oscilar. El tipo fundamental de desplazamiento de una partícula en estas ilustraciones es el *movimiento armónico*.

Definición de movimiento armónico simple

Un punto que se mueve en una recta coordenada está en **movimiento armónico simple** si su distancia d desde el origen en el tiempo t está dada ya sea por

$$d = a \cos \omega t \quad \text{o por} \quad d = a \sin \omega t,$$

donde a y ω son constantes, con $\omega > 0$.

En la definición precedente, la **amplitud** del movimiento es el desplazamiento máximo $|a|$ del punto desde el origen. El **periodo** es el tiempo $2\pi/\omega$ necesario para una oscilación completa. El recíproco del periodo, $\omega/(2\pi)$, es el número de oscilaciones por unidad de tiempo y se llama **frecuencia**.

Se puede obtener una interpretación física del movimiento armónico simple si se considera un resorte con una pesa que oscila verticalmente en relación a una recta coordenada, como se ilustra en la figura 10. El número d representa la coordenada de un punto fijo Q en la pesa, y suponemos que la amplitud a del movimiento es constante. En este caso ninguna fuerza de fricción retarda el movimiento. Si hay fricción, entonces la amplitud disminuye con el tiempo, y se dice que el movimiento está *amortiguado*.

EJEMPLO 6 Descripción del movimiento armónico

Imagina que la oscilación de la pesa que se muestra en la figura 10 está dada por

$$d = 10 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

con t medido en segundos y d en centímetros. Analiza el movimiento de la pesa.

SOLUCIÓN Por definición, el movimiento es armónico simple con amplitud $a = 10$ cm. Como $\omega = \pi/6$, se obtiene lo siguiente:

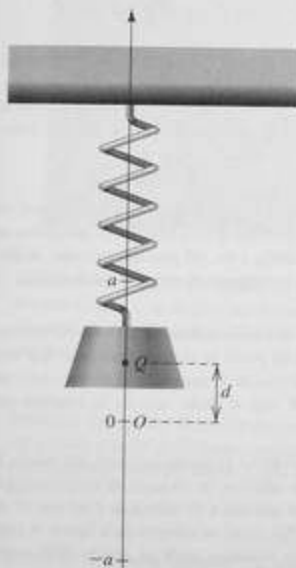
$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12.$$

Entonces, en 12 segundos la pesa hace una oscilación completa. La frecuencia es $\frac{1}{12}$, lo que significa que, cada segundo, tiene lugar un doceavo de oscilación. En la siguiente tabla se indica la posición de Q en instantes diferentes.

t	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{\pi}{6}t$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
d	10	$5\sqrt{3} \approx 8.7$	5	0	-5	$-5\sqrt{3} \approx -8.7$	-10

La posición inicial de Q es 10 centímetros arriba del origen O . Se mueve hacia abajo, ganando velocidad hasta que llega a O . Observa que Q viaja aproximadamente $10 - 8.7 = 1.3$ cm durante el primer segundo, $8.7 - 5 = 3.7$ cm durante el siguiente segundo, y $5 - 0 = 5$ cm durante el tercer segundo. Entonces disminuye su movimiento hasta que llega a un punto ubicado a 10 centímetros debajo de O al término de 6 segundos. Entonces se invierte la dirección del movimiento y la pesa se mueve hacia arriba, ganando velocidad hasta que llega a O . Una vez que llega a O , disminuye su movimiento hasta que regresa a su posición original al término de 12 segundos. La dirección de movimiento se invierte otra vez, y se repite el modelo indefinidamente.

Figura 10



6.7 Ejercicios

Ejercicios 1 al 8: dadas las partes indicadas del triángulo ABC con $\gamma = 90^\circ$, encuentra los valores exactos de las partes restantes.

$$1. \alpha = 30^\circ, \quad b = 20 \qquad 2. \beta = 45^\circ, \quad b = 35$$

$$3. \beta = 45^\circ, \quad c = 30 \qquad 4. \alpha = 60^\circ, \quad c = 6$$

$$5. a = 5, \quad b = 5 \qquad 6. a = 4\sqrt{3}, \quad c = 8$$

$$7. b = 5\sqrt{3}, \quad c = 10\sqrt{3} \qquad 8. b = 7\sqrt{2}, \quad c = 14$$

Ejercicios 9 al 16: dadas las partes indicadas del triángulo ABC con $\gamma = 90^\circ$, haz una aproximación de las partes restantes.

$$9. \alpha = 37^\circ, \quad b = 24 \qquad 10. \beta = 64^\circ 20', \quad a = 20.1$$

$$11. \beta = 71^\circ 51', \quad b = 240.0 \qquad 12. \alpha = 31^\circ 10', \quad a = 510$$

$$13. a = 25, \quad b = 45 \qquad 14. a = 31, \quad b = 9.0$$

$$15. c = 5.8, \quad b = 2.1 \qquad 16. a = 0.42, \quad c = 0.68$$

Ejercicios 17 al 24: dadas las partes indicadas del triángulo ABC con $\gamma = 90^\circ$, expresa la tercera parte en términos de las primeras dos.

$$17. a, c; \quad b \qquad 18. \beta, c; \quad b$$

$$19. \beta, b; \quad a \qquad 20. a, b; \quad a$$

$$21. a, a; \quad c \qquad 22. \beta, a; \quad c$$

$$23. a, c; \quad b \qquad 24. a, b; \quad c$$

25. **Altura de una cometa.** Una persona que hace volar una cometa sostiene la cuerda a 4 pies sobre el nivel del suelo. La cuerda de la cometa está tensa y hace un ángulo de 60° con la horizontal (consulta la figura). Calcula la altura de la cometa sobre el nivel del suelo, si se sueltan 500 pies de cuerda.

Ejercicio 25



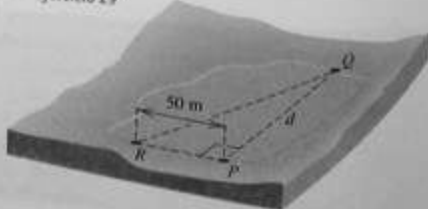
26. **Agrimensura.** Desde un punto a 15 metros sobre el nivel del suelo, un agrimensor obtiene una medición de 68° para el ángulo de depresión de un objeto sobre el suelo. Calcula la distancia del objeto al punto sobre el suelo que está directamente abajo del agrimensor.

27. **Aterrizaje de aviones.** Un piloto que vuela a una altitud de 5000 pies, desea aproximarse a los números de una pista a un ángulo de 10° . Calcula, a los 100 pies más cercanos, la distancia del avión a los números al principio del descenso.

28. **Antena de radio.** Un cable está sujeto a lo alto de una antena de radio y a un punto en el suelo horizontal que está a 40 metros de la base de la antena. Si el alambre hace un ángulo de $58^\circ 20'$ con el suelo, calcula la longitud del alambre.

29. **Agrimensura.** Para hallar la distancia d entre dos puntos P y Q en las orillas opuestas de un lago, un agrimensor localiza un punto R que está a 50 metros de P tal que RP es perpendicular a PQ , como se muestra en la figura. A continuación, con un teodolito, mide el ángulo PRQ como $72^\circ 40'$. Halla d .

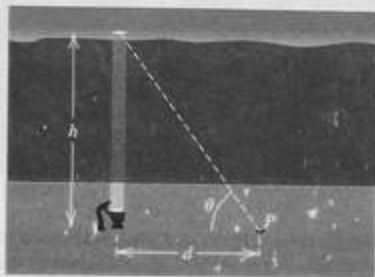
Ejercicio 29



- 30 Cálculos meteorológicos. Para medir la altura h de una capa de nubes, un estudiante de meteorología dirige la luz de un faro verticalmente hacia arriba desde el suelo. Desde un punto P a nivel del suelo que está a d metros del faro, se mide entonces el ángulo de elevación θ de la imagen de luz en las nubes (consulta la figura).

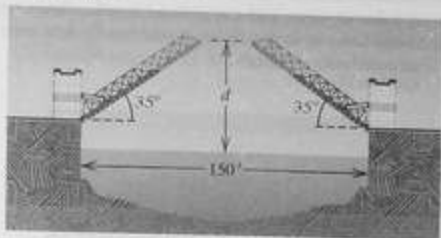
- (a) Expresa h en términos de d y θ .
 (b) Calcula h si $d = 1000$ m y $\theta = 59^\circ$.

Ejercicio 30



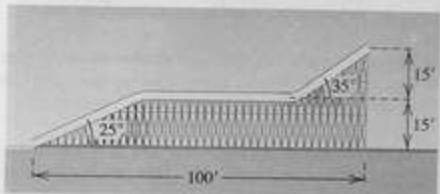
- 31 Altitud de un cohete. Un cohete es disparado al nivel del mar y sube a un ángulo constante de 75° hasta una distancia de 10 000 pies. Calcula su altitud al pie más cercano.
- 32 Despegue de aviones. Un avión despegue a un ángulo de 10° y vuela a razón de 250 pies/segundo. ¿Aproximadamente cuánto tarda en llegar a una altitud de 15 000 pies?
- 33 Diseño de un puente levadizo. Un puente levadizo mide 150 pies de largo cuando se tiende sobre un río. Como se muestra en la figura, las dos secciones del puente pueden girar hacia arriba hasta un ángulo de 35° .
- (a) Si el nivel del agua está 15 pies abajo del puente cerrado, halla la distancia d entre el extremo de una sección y el nivel del agua cuando el puente esté abierto por completo.
- (b) ¿Aproximadamente qué tan separados están los extremos de las dos secciones cuando el puente está abierto por completo, como se muestra en la figura?

Ejercicio 33



- 34 Diseño de un tobogán acuático. En la figura se aprecia parte de un tobogán acuático. Halla la longitud total del tobogán al pie más cercano.

Ejercicio 34



- 35 Elevación del Sol. Calcula el ángulo de elevación α del Sol si una persona que mide 5 pies de estatura proyecta una sombra de 4 pies de largo al nivel del suelo (observa la figura).

Ejercicio 35



- 36 Construcción de una rampa. Un constructor desea construir una rampa de 24 pies de largo que se levanta a una altura de 5 pies sobre el nivel del suelo. Calcula el ángulo que la rampa debería hacer con la horizontal.
- 37 Juegos de video. En la figura se ve la pantalla de una máquina sencilla de juego de video en la que los patos se mue-

ven de A a B a razón de 7 cm/s . Las balas disparadas desde el punto O viajan a 25 cm/s . Si un jugador dispara tan pronto como ve un pato en A , ¿a qué ángulo φ debe apuntar para dar en el blanco?

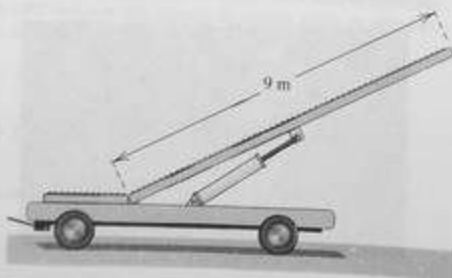
Ejercicio 37



38. Banda transportadora. Una banda transportadora de 9 metros de largo puede girar hidráulicamente hasta un ángulo de 40° para descargar aeronaves (observa la figura).

- Encuentra, al grado más cercano, el ángulo hasta el cual hay que girar la banda para llegar a una puerta que está 4 metros arriba de la plataforma que la sostiene.
- Calcula la altura máxima sobre la plataforma a que la banda puede llegar.

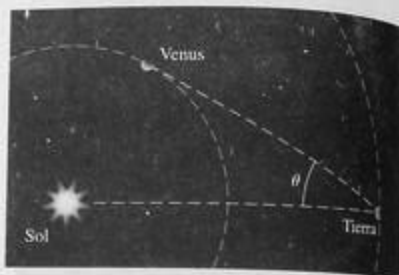
Ejercicio 38



39. Estructura más alta. La estructura más alta hecha por el hombre, en el mundo, es una torre transmisora de televisión situada cerca de Fargo, Dakota del Norte. Desde una distancia de 1 milla a nivel del suelo, su ángulo de elevación es de $21^\circ 20' 24''$. Determina su altura al pie más cercano.

40. Elongación de Venus. La elongación del planeta Venus está definida como el ángulo θ determinado por el Sol, la Tierra y Venus, como se muestra en la figura. La elongación máxima de Venus ocurre cuando la Tierra está a su máxima distancia D_T del Sol y Venus está a su distancia más cercana al Sol. Si $D_T = 91,500,000$ millas y $D_V = 68,000,000$ millas, haz una aproximación de la elongación θ_{max} de Venus. Imagina que la órbita de Venus es circular.

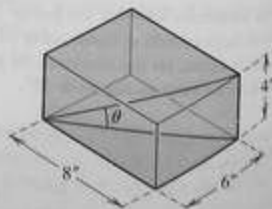
Ejercicio 40



- Terreno del pentágono. El Pentágono es el edificio de oficinas más grande del mundo, en términos de terreno. Su perímetro tiene la forma de un pentágono regular y cada uno de sus lados mide 921 pies. Encuentra el área encerrada por el perímetro.
- Un octágono regular está inscrito en un círculo de 12 m de radio. Calcula el perímetro del octágono.

43. Una caja rectangular tiene dimensiones de $8'' \times 6'' \times 4''$. Calcula, al décimo de grado más cercano, el ángulo θ que está formado por una diagonal de la base y la diagonal de la caja, como se muestra en la figura.

Ejercicio 43



44. Volumen de un cono de papel. Un cono de papel tiene un radio de 2 pulgadas. Calcula el ángulo β al grado más cercano (observa la figura), de modo que el cono tenga un volumen de 20 pulgadas cúbicas.

Ejercicio 44



45. **Altura de una torre.** Desde un punto P situado a nivel del suelo, el ángulo de elevación de la parte alta de una torre es $26^{\circ}50'$. De un punto que está 25 metros más cercano a la torre y en la misma línea con P y la base de la torre, el ángulo de elevación de la parte alta es $53^{\circ}30'$. Calcula la altura de la torre.

46. **Cálculo de escaleras.** Una escalera que mide 20 pies se apoya en un edificio y el ángulo entre ambos es de 22° .

- (a) Calcula la distancia de la base de la escalera al edificio.
(b) Si la distancia de la base de la escalera al edificio aumenta 3 pies, ¿aproximadamente cuánto bajará del edificio la parte alta de la escalera?

47. **Ascenso de un globo de aire caliente.** A medida que un globo de aire caliente sube, su ángulo de elevación desde un punto P al nivel del suelo y a 110 kilómetros del punto Q , que está directamente bajo el globo, cambia de $19^{\circ}20'$ a $31^{\circ}50'$ (observa la figura). ¿Aproximadamente cuánto sube el globo durante este periodo?

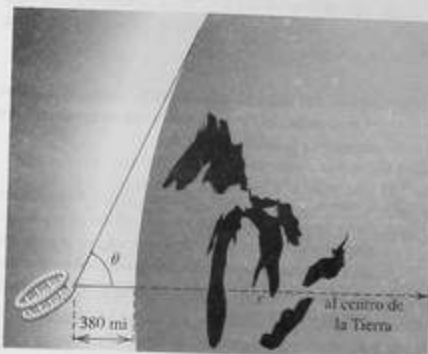
Ejercicio 47



48. **Altura de un edificio.** Desde un punto A que está 8.20 metros sobre el nivel del suelo, el ángulo de elevación de la parte alta de un inmueble es $31^{\circ}20'$ y el ángulo de depresión de la base del mismo es $12^{\circ}50'$. Calcula la altura del edificio.

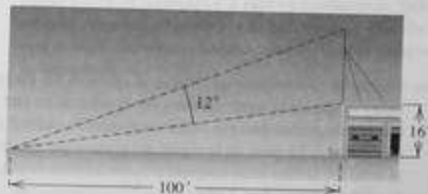
49. **Radio de la Tierra.** Un laboratorio espacial gira alrededor de la Tierra a una altitud de 380 millas. Cuando un astronauta observa el horizonte terrestre, el ángulo θ mostrado en la figura es de 65.8° . Utiliza esta información para calcular el radio de la Tierra.

Ejercicio 49



50. **Longitud de una antena.** Una antena de CB (banda civil) está instalada en el techo de una cochera de 16 pies de alto. Desde un punto a nivel del suelo y que está a 100 pies directamente bajo la antena, ésta subtende un ángulo de 12° como se muestra en la figura. Calcula la longitud de la antena.

Ejercicio 50



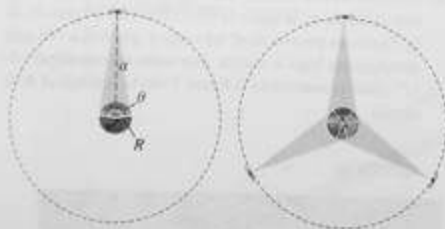
51. **Rapidez de un aeroplano.** Un avión que vuela a una altitud de 10 000 pies pasa directamente sobre un objeto fijo en el suelo. Un minuto después el ángulo de depresión del objeto es de 42° . Calcula la rapidez del avión a la milla por hora más cercana.

- 52 **Altura de una montaña** Un automovilista, que circula por una carretera a una rapidez de 60 km/h directamente hacia una montaña, observa que entre la 1:00 y la 1:10 P.M. el ángulo de elevación de la montaña cambia de 10° a 70° . Calcula la altura de la montaña.

- 53 **Satélite de comunicaciones** En la parte izquierda de la figura se muestra un satélite de comunicaciones con órbita ecuatorial; es decir, una órbita casi circular en el plano determinado por el ecuador de la Tierra. Si el satélite circula alrededor del globo a una altitud de $a = 22\,300$ millas, su rapidez es la misma que la de rotación del planeta; para un observador situado en el ecuador el satélite parece estar estacionario, lo cual significa que su órbita es sincrónica.

- (a) Con $R = 4\,000$ millas (radio de la Tierra), determina el porcentaje del ecuador que se encuentra dentro del alcance de la señal del satélite.
- (b) Como se muestra en la siguiente figura, tres satélites están igualmente separados en órbitas ecuatoriales sincrónicas. Usa el valor de θ obtenido en la parte (a) para explicar por qué todos los puntos sobre el ecuador están dentro del alcance de señal de por lo menos uno de los tres satélites.

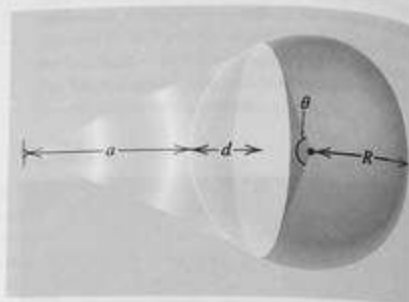
Ejercicio 53



- 54 **Satélite de comunicaciones** Vuelve al ejercicio 53. En la figura se aprecia la región cubierta por la señal de un satélite de comunicaciones que orbita un planeta de radio R a una altitud a . La parte de la región del planeta que abarca la señal del satélite es un casquete o sector esférico de profundidad d y área $A = 2\pi R d$.

- (a) Expresa d en términos de R y θ .
- (b) Calcula el porcentaje de la superficie del planeta que se encuentra dentro del alcance de la señal de un satélite en órbita sincrónica ecuatorial.

Ejercicio 54



- 55 **Altura de una cometa** Generaliza el ejercicio 25 al caso en que el ángulo es α , el número de pies de cuerda es d y el extremo de la cuerda se mantiene c pies arriba del suelo. Expresa la altura h de la cometa en términos de α , d y c .

- 56 **Agrimensura** Lleva el ejercicio 26 al caso en que el punto está d metros sobre el nivel del suelo y el ángulo de depresión es α . Expresa la distancia x en términos de d y α .

- 57 **Altura de una torre** Generaliza el ejercicio 45 al caso en que el primer ángulo es α , el segundo ángulo es β , y la distancia entre los dos puntos es d . Expresa la altura h de la torre en términos de d , α y β .

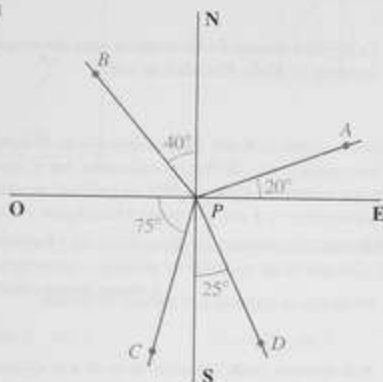
- 58 Generaliza el ejercicio 42 al caso de un polígono de n lados, inscrito en un círculo de radio r . Expresa el perímetro P en términos de n y r .

- 59 **Ascenso de un globo de aire caliente** Extiende el ejercicio 47 al caso en que la distancia de P a Q es d kilómetros y el ángulo de elevación cambia de α a β .

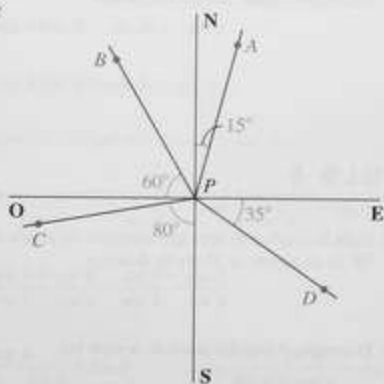
- 60 **Altura de un edificio** Generaliza el ejercicio 48 al caso en que el punto A está d metros sobre el suelo y los ángulos de elevación y depresión son α y β , respectivamente. Expresa la altura h del edificio en términos de d , α y β .

Ejercicios 61 y 62: halla el rumbo de P a cada uno de los puntos A , B , C y D .

61



62



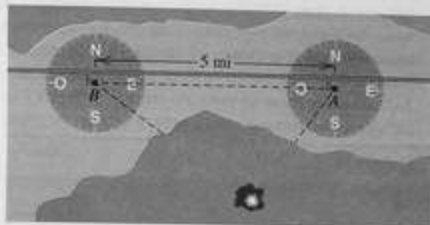
63. **Rumbos de naves.** Un barco sale de puerto a la 1:00 P.M. y navega en dirección $N34^\circ O$ a razón de 24 millas por hora. Otra nave sale de puerto a la 1:30 P.M. y navega en dirección $N56^\circ E$ a 18 millas por hora.

- (a) ¿Aproximadamente a qué distancia se encuentran los barcos a las 3:00 P.M.?
- (b) ¿Cuál es el rumbo, al grado más cercano, del primer barco al segundo?

64. **Determinación del sitio de un incendio forestal.** Desde un punto de observación A , un guardabosques avista un incendio en la

dirección $S35^\circ 50' O$ (observa la figura). Desde un punto B , 5 millas al oeste de A , otro guardabosques advierte el mismo incendio en dirección $S54^\circ 10' E$. Calcula, al décimo de milla más cercano, la distancia del incendio desde A .

Ejercicio 64



65. **Vuelo de aviones.** Un aeroplano, que viaja a 360 millas por hora, vuela desde un punto A en dirección 137° durante 30 minutos y luego en dirección 227° durante 45 minutos. Aproxima a la milla más cercana la distancia del avión al punto A .

66. **Plan de vuelo de aviones.** Una nave, que viaja a una velocidad de 400 millas por hora, vuela desde un punto A en dirección 153° durante una hora y luego en dirección 63° durante una hora.

- (a) ¿Qué dirección necesita tomar para poder volver al punto A ?
- (b) ¿Cuánto tardará en regresar al punto A ?

Ejercicios 67 al 70: la fórmula especifica la posición de un punto P que se mueve armónicamente en un eje vertical, donde t está en segundos y d está en centímetros. Determina la amplitud, el período y la frecuencia, y describe el movimiento del punto durante una oscilación completa (comenzando en $t = 0$).

$$67. d = 10 \sin 6\pi t \quad 68. d = \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{4} t$$

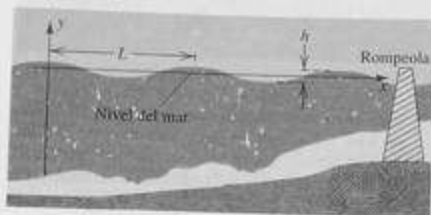
$$69. d = 4 \cos \frac{3\pi}{2} t \quad 70. d = 6 \sin \frac{2\pi}{3} t$$

71. Un punto P en movimiento armónico simple tiene un período de 3 segundos y una amplitud de 5 centímetros. Expresa el movimiento de P por medio de una ecuación de la forma $d = a \cos \omega t$.

72. Un punto P en movimiento armónico simple tiene una frecuencia de $\frac{1}{2}$ oscilación por minuto y una amplitud de 4 pies. Expresa el movimiento de P por medio de una ecuación de la forma $d = a \sin \omega t$.

73. **Tsunamis** Un tsunami es una ola de marea ocasionada por un terremoto bajo el mar. Estas olas pueden medir más de 100 pies de altura y pueden viajar a grandes velocidades. A veces, los ingenieros representan estas olas por expresiones trigonométricas de la forma $y = a \cos bt$ y utilizan estas representaciones para calcular la eficacia de muros rompeolas. Supongamos que una ola tiene una altura $h = 50$ pies y un periodo de 30 minutos, y viaja a razón de 180 pies/segundo.

Ejercicio 73



(a) Sea (t, y) un punto de la ola representada en la figura. Expresa y como función de t si $y = 25$ pies cuando $t = 0$.

(b) La longitud de onda L es la distancia entre dos crestas sucesivas de la ola. Calcula L en pies.

74. **Algunos tsunamis en Hawai** Para un intervalo de 45 minutos, los tsunamis cerca de Hawai ocasionados por el terremoto que ocurrió en Chile en 1960 se pudieron modelar por la ecuación $y = 8 \sin \frac{\pi}{6} t$, donde y está en pies y t está en minutos.

(a) Encuentra la amplitud y el periodo de las olas.

(b) Si la distancia desde una cresta de la ola a la siguiente era de 21 kilómetros, ¿cuál era la velocidad de la ola? (Las olas de mareas pueden tener velocidades de más de 700 km/h en aguas marinas profundas.)

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

1. Encuentra la medida, en radianes, que corresponda a cada medida en grados: 330° , 405° , -150° , 240° , 36° .

2. Determina la medida, en grados, que corresponda a cada medida en radianes: $\frac{9\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$, 5π , $\frac{\pi}{5}$.

3. Un ángulo central θ está subtendido por un arco de 20 centímetros de largo en un círculo de 2 metros de radio.

(a) Encuentra la medida en radianes de θ .

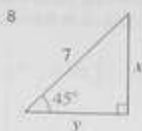
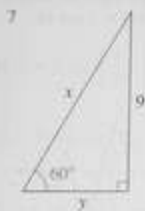
(b) Establece el área del sector determinado por θ .

4. (a) Halla la longitud de arco que subtende un ángulo de 70° en un círculo de 15 cm de diámetro.

(b) Determina el área del sector de la parte (a).

5. **Rapidez angular de discos fonográficos** Los dos tipos comunes de discos fonográficos, el de larga duración (o LP) y el sencillo, tenían diámetros de 12 pulgadas y 7 pulgadas, respectivamente. El LP giraba a razón de 33 rpm y el sencillo a 45 rpm. Halla la rapidez angular (en radianes por minuto) del LP y del sencillo.

6. **Rapidez lineal de discos fonográficos** Indica la rapidez lineal (en pies/min) de un punto sobre la circunferencia del LP y del sencillo. Utiliza la información del ejercicio 5.

Ejercicios 7 y 8: encuentra los valores exactos de x y y .Ejercicios 9 y 10: usa identidades fundamentales para escribir la primera expresión en términos de la segunda, para cualquier ángulo agudo θ .

9 $\tan \theta, \sec \theta$

10 $\cot \theta, \csc \theta$

Ejercicios 11 al 20: comprueba la identidad transformando el lado izquierdo en el derecho.

11 $\sin \theta (\csc \theta - \sin \theta) = \cos^2 \theta$

12 $\cos \theta (\tan \theta + \cot \theta) = \csc \theta$

13 $(\cos^2 \theta - 1)(\tan^2 \theta + 1) = 1 - \sec^2 \theta$

14 $\frac{\sec \theta - \cos \theta}{\tan \theta} = \frac{\tan \theta}{\sec \theta}$

15 $\frac{1 + \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} = \csc^2 \theta$

16 $\frac{\sec \theta + \csc \theta}{\sec \theta - \csc \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$

17 $\frac{\cot \theta - 1}{1 - \tan \theta} = \cot \theta$

18 $\frac{1 + \sec \theta}{\tan \theta + \sin \theta} = \csc \theta$

19 $\frac{\tan(-\theta) + \cot(-\theta)}{\tan \theta} = -\csc^2 \theta$

20 $\frac{1}{\csc(-\theta)} - \frac{\cot(-\theta)}{\sec(-\theta)} = \csc \theta$

21 Si θ es el ángulo agudo de un triángulo rectángulo y el lado adyacente y la hipotenusa tienen longitudes de 4 y 7, respectivamente, encuentra los valores de las funciones trigonométricas de θ .22 Halla, siempre que sea posible, los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ si θ está en posición estándar y satisface la condición indicada.(a) El punto $(30, -40)$ está en el lado terminal de θ .(b) El lado terminal de θ está en el cuadrante II y es paralelo a la línea $2x + 3y + 6 = 0$.(c) El lado terminal de θ se halla sobre la parte negativa del eje y .23 Halla el cuadrante que contenga θ si θ está en posición estándar.(a) $\sec \theta < 0$ y $\sin \theta > 0$ (b) $\cot \theta > 0$ y $\csc \theta < 0$ (c) $\cos \theta > 0$ y $\tan \theta < 0$

24 Encuentra los valores exactos de las funciones trigonométricas restantes si

(a) $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ y $\cos \theta = \frac{3}{5}$

(b) $\csc \theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$ y $\cot \theta = -\frac{3}{2}$

Ejercicios 25 y 26: $P(t)$ denota el punto en el círculo unitario U que corresponde al número real t .25 Halla las coordenadas rectangulares de $P(7\pi)$, $P(-5\pi/2)$, $P(9\pi/2)$, $P(-3\pi/4)$, $P(18\pi)$ y $P(\pi/6)$.26 Si $P(t)$ tiene coordenadas $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, establece las coordenadas de $P(t + 3\pi)$, $P(t - \pi)$, $P(-t)$ y $P(2\pi - t)$.

27 (a) Define el ángulo de referencia para cada medida en radianes:

$$\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{8}$$

(b) Determina el ángulo de referencia para cada medida en grados:

$$245^\circ, 137^\circ, 892^\circ$$

28. Sin usar tablas o calculadora, halla, siempre que sea posible, los valores exactos de las funciones trigonométricas correspondientes a cada número real:

(a) $\frac{9\pi}{2}$ (b) $-\frac{5\pi}{4}$ (c) 0 (d) $\frac{11\pi}{6}$

29. Halla el valor exacto:

(a) $\cos 225^\circ$ (b) $\tan 150^\circ$ (c) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

(d) $\sec \frac{4\pi}{3}$ (e) $\cot \frac{7\pi}{4}$ (f) $\csc 300^\circ$

30. Si $\sin \theta = -0.7604$ y $\sec \theta$ es positiva, calcula θ al 0.1° más cercano para $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$.

31. Si $\tan \theta = 2.7381$, aproxima θ para $0 \leq \theta < 2\pi$ al 0.0001 de radián más cercano.

32. Si $\sec \theta = 1.6403$, aproxima θ para $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ para el 0.01° más cercano.

Ejercicios 33 al 40: encuentra la amplitud y periodo y traza la gráfica de la ecuación.

33. $y = 5 \cos x$

34. $y = \frac{1}{2} \sin x$

35. $y = \frac{1}{3} \sin 3x$

36. $y = -\frac{1}{2} \cos \frac{1}{3}x$

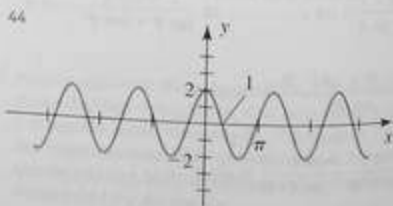
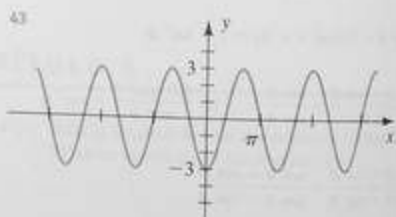
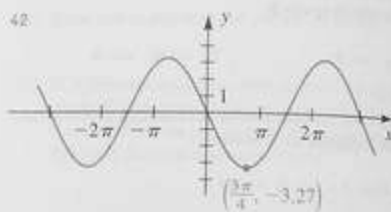
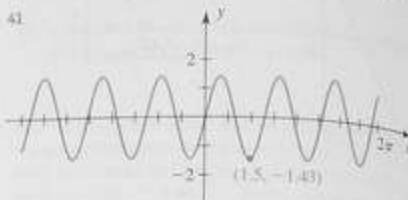
37. $y = -3 \cos \frac{1}{2}x$

38. $y = 4 \sin 2x$

39. $y = 2 \sin \pi x$

40. $y = 4 \cos \frac{\pi}{2}x - 2$

Ejercicios 41 al 44: en la figura se muestra la gráfica de una ecuación. (a) Halla la amplitud y el periodo; (b) expresa la ecuación en la forma $y = a \sin bx$ o $y = a \cos bx$.



Ejercicios 45 al 56: traza las gráficas de la ecuación.

45. $y = 2 \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 46. $y = -3 \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned}
 47. y &= -4 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) & 48. y &= 5 \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \\
 49. y &= 2 \tan \left(\frac{1}{2}x - \pi \right) & 50. y &= -3 \tan \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \\
 51. y &= -4 \cot \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) & 52. y &= 2 \cot \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \right) \\
 53. y &= \sec \left(\frac{1}{2}x + \pi \right) & 54. y &= \sec \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) \\
 55. y &= \csc \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) & 56. y &= \csc \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

Ejercicios 57 al 60: dadas las partes indicadas del triángulo ABC con $\gamma = 90^\circ$, calcula las partes restantes.

$$57. \beta = 60^\circ, \quad b = 40 \qquad 58. \alpha = 54^\circ 40', \quad b = 220$$

$$59. a = 62, \quad b = 25 \qquad 60. a = 9.0, \quad c = 41$$

61. **Hélice de un avión.** La longitud de la hélice más grande que se haya usado en aviones fue de 22 pies 7.5 pulgadas. El avión estaba impulsado por cuatro motores que la movían a 545 revoluciones por minuto.

(a) ¿Cuál era la rapidez angular de la hélice en radianes por segundo?

(b) ¿Aproximadamente con qué rapidez (en millas por hora) se movía la hélice a lo largo de la circunferencia que generaba?

62. **La torre Eiffel.** Cuando se observa la parte más alta de la torre Eiffel desde una distancia de 200 pies de su base, el ángulo de elevación es 79.2° . Calcula la altura de la torre.

63. **Láser y velocidades.** Los rayos láser se utilizan para medir con precisión velocidades de objetos. La luz láser produce un campo electromagnético oscilatorio E con una frecuencia constante f que puede describirse mediante la ecuación

$$E = E_0 \cos(2\pi ft).$$

Si un rayo láser se apunta a un objeto que se mueve hacia él, se reflejará luz hacia el láser a una frecuencia ligeramente más alta, en forma muy parecida a como el silbato de un

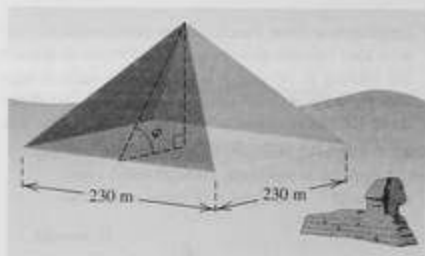
tren suena más alto cuando se mueve hacia una persona. Si Δf es este cambio en frecuencia y v es la velocidad del objeto, entonces se puede emplear la ecuación

$$\Delta f = \frac{2fv}{c},$$

para determinar v , donde $c = 186\,000$ millas/segundo es la velocidad de la luz. Aproxima la velocidad v de un objeto si $\Delta f = 10^6$ y $f = 10^{14}$.

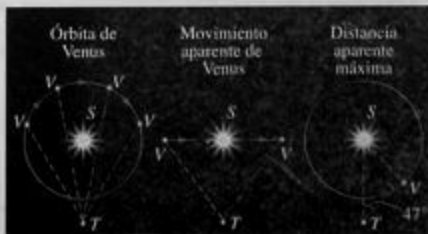
64. **La Gran Pirámide.** La Gran Pirámide de Egipto mide 147 metros de altura, con una base cuadrada de 230 metros por lado (observa la figura). Aproxima, al grado más cercano, el ángulo ϕ que se forma cuando un observador se sitúa en el punto medio de uno de los lados y contempla la cúspide de la pirámide.

Ejercicio 64



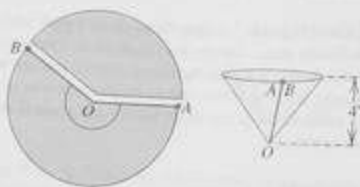
65. **Venus.** Cuando se observa desde la Tierra durante cierto periodo, el planeta Venus parece moverse hacia delante y hacia atrás a lo largo de un segmento, con el Sol en su punto medio (ve la figura). A la máxima distancia aparente del Sol, el ángulo STV es de unos 47° . Utiliza el valor $TS = 92\,900\,000$ millas para calcular la distancia de Venus al Sol. Supón que la órbita de Venus es circular.

Ejercicio 65



86. Construcción de una taza cónica. Se elabora una taza cónica de papel cortando un sector de un círculo de 5 pulgadas de radio y uniendo el borde OA al OB (véase la figura). Halla el ángulo AOR de modo que la taza tenga una profundidad de 4 pulgadas.

Ejercicio 86



67. Longitud de un túnel. Para una nueva carretera debe excavarse un túnel bajo una montaña que mide 260 pies de altura. A una distancia de 200 pies de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 36° (observa la figura). De una distancia de 150 pies en el otro lado, el ángulo de elevación es de 47° . Calcula la longitud del túnel al pie más próximo.

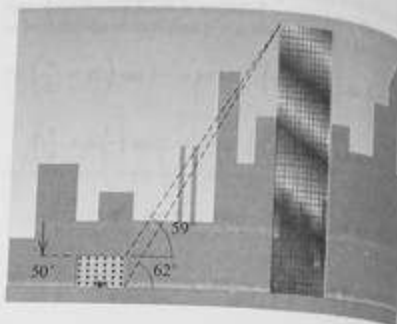
Ejercicio 67



68. Altura de un rascacielos. Cuando se observa un rascacielos desde lo alto de un edificio de 50 pies de altura, el ángulo de elevación es de 59° (consulta la figura); cuando se observa desde la calle junto al edificio más bajo, el ángulo de observación es de 62° .

- (a) ¿Aproximadamente a qué distancia están las dos estructuras?
- (b) Calcula la altura del rascacielos, al décimo de pie más cercano.

Ejercicio 68



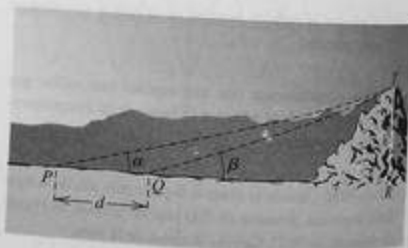
69. Altura de una montaña. Cuando se observa la cima de la montaña desde el punto P de la figura, el ángulo de elevación es α . Desde el punto Q que está d millas más cerca de la montaña, el ángulo de elevación aumenta a β .

- (a) Demuestra que la altura h de la montaña está dada por

$$h = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

- (b) Aproxima la altura de la montaña si $d = 2$ millas, $\alpha = 15^\circ$ y $\beta = 20^\circ$.

Ejercicio 69



70. Altura de un edificio. Un observador de estatura h está de pie en un terreno inclinado y a una distancia d de la base de una construcción de altura T , como se muestra en la figura. El ángulo de elevación del observador a la parte más alta del edificio es θ y el terreno inclinado hace un ángulo de α con la horizontal.

- (a) Expresa T en términos de h , d , α y θ .
- (b) Calcula la altura del edificio si $h = 6$ pies, $d = 50$ pies, $\alpha = 15^\circ$ y $\theta = 31.4^\circ$.

Ejercicio 70



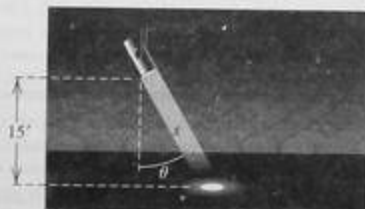
- 71 Iluminación Un proyector de luz cuya intensidad es de 5000 candelas está a 15 pies sobre un escenario. Si se hace girar hasta un ángulo θ como se muestra en la figura, la iluminación E (en pies-candelas) de la parte iluminada del escenario está dada por

$$E = \frac{5000 \cos \theta}{s^2}$$

donde s es la distancia (en pies) que la luz debe recorrer.

- Halla la iluminación si se hace girar el proyector hasta un ángulo de 30° .
- La iluminación máxima se da cuando $\theta = 0^\circ$. ¿Para qué valor de θ tendrá la iluminación la mitad del valor máximo?

Ejercicio 71



- 72 Altura de una montaña Si se observa la cima de una montaña desde un punto P situado directamente al sur de la misma, el ángulo de elevación es α (observa la figura); si es vista desde un punto Q que está a d millas al este de P , el ángulo de elevación es β .

- Demuestra que la altura h de la montaña está dada por

$$h = \frac{d \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}}$$

- Si $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 20^\circ$ y $d = 10$ millas, calcula h al centésimo de milla más cercano.

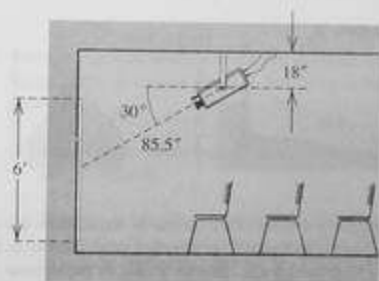
Ejercicio 72



- 73 Montaje de un sistema de proyección El fabricante de un sistema computarizado de proyección recomienda instalar un proyector en un techo, como se muestra en la figura. La distancia del extremo del soporte de montaje al centro de la pantalla es de 85.5 pulgadas, y el ángulo de depresión es de 30° .

- Si se desprecia el grosor de la pantalla, ¿a qué distancia de la pared debe montarse el soporte?
- Si el soporte mide 18 pulgadas de largo y la pantalla está a 6 pies de altura, determina la distancia del techo al borde superior de la pantalla.

Ejercicio 73

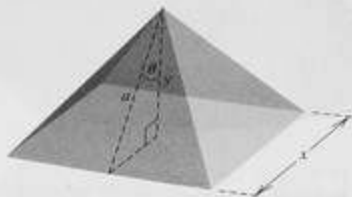


- 74 Relaciones en pirámides Una pirámide tiene una base cuadrada y caras triangulares congruentes. Sea θ el ángulo que la altura a de una cara triangular hace con la altura y de la pirámide, y sea x la longitud de un lado (observa la figura).

- Expresa la superficie total S de las cuatro caras en términos de a y de θ .

- (b) El volumen V de la pirámide es igual a un tercio del área de la base por la altura. Expresa V en términos de a y θ .

Ejercicio 74



- 75 Levantamiento del plano de una barranca. Por medio de un teodolito, un agrimensor avista el borde B de una barranca que se ilustra en la parte izquierda de la figura (no se dibuja a escala). Debido a la curvatura de la Tierra, la verdadera elevación h de la barranca es mayor que la medida por el agrimensor. En la parte derecha de la figura se muestra un corte transversal de la Tierra.

- (a) Si r es la longitud del arco PQ y R es la distancia de P al centro C de la Tierra, expresa h en términos de R y de s .

- (b) Si $R = 4\,000$ millas y $s = 50$ millas, calcula la elevación de la barranca en pies.

Ejercicio 75

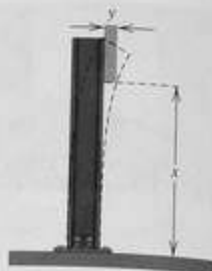


- 76 Respuesta a sismo. Para simular la respuesta de una estructura a un temblor, un ingeniero debe seleccionar una forma para el desplazamiento inicial de las viguetas del edificio. Cuando la vigueta tiene una longitud de L pies y el desplazamiento máximo es a pies, los ingenieros han usado la ecuación

$$y = a - a \cos \frac{\pi x}{2L}$$

para calcular el desplazamiento y (observa la figura). Si $a = 1$ y $L = 10$, traza la gráfica de la ecuación para $0 \leq x \leq 10$.

Ejercicio 76



- 77 Ritmos de periodicidad diaria. La variación de la temperatura del cuerpo es un ejemplo de ritmo periódico, proceso biológico que se repite aproximadamente cada 24 horas. La temperatura del cuerpo es máxima alrededor de las 5 P.M. y mínima a las 5 A.M. Representa con y la temperatura corporal (en $^{\circ}\text{F}$) y haz que $t = 0$ corresponda a la medianoche. Si las temperaturas corporales mínima y máxima son 98.3° y 98.9° , respectivamente, halla una ecuación de la forma $y = 98.6 + a \sin(bt + c)$ que se ajuste a esta información.

- 78 Variación de temperatura en Ottawa. La variación anual de la temperatura T (en $^{\circ}\text{C}$) en Ottawa, Canadá, se puede aproximar mediante

$$T(t) = 15.8 \sin \left[\frac{\pi}{6}(t - 3) \right] + 5,$$

en donde t es el tiempo en meses y $t = 0$ corresponde al 1 de enero.

- (a) Traza la gráfica de T para $0 \leq t \leq 12$.
 (b) Halla la temperatura máxima del año y la fecha en que se presenta.
 79 Demanda de agua. Un depósito abastece de agua a una comunidad. Durante los meses de verano, la demanda $D(t)$ de agua (en pies³ por día) está dada por

$$D(t) = 2000 \sin \frac{\pi}{90} t + 4000,$$

en donde t es el tiempo en días y $t = 0$ corresponde al comienzo del verano.

- (a) Traza la gráfica de D para $0 \leq t \leq 90$.
 (b) ¿Cuándo es máxima la demanda de agua?

- 80 Corcho flotante Un trozo de corcho flota en un lago. La distancia del fondo del lago al centro del corcho en el tiempo $t \geq 0$ está dada por $s(t) = 12 + \cos \pi t$, en donde $s(t)$ está en pies y t en segundos.

- (a) Describe el movimiento del corcho para $0 \leq t \leq 2$.
(b) ¿Durante qué intervalos se eleva el corcho?

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 6

- 1 Grafica $y = \sin(ax)$ en $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1, 1]$ para $a = 15$, 30 y 45. Analiza la precisión de las gráficas y la capacidad de graficación (en términos de precisión) de tu calculadora graficadora. (Nota: Si algo extraño no ocurre para $a = 45$, sigue aumentando a hasta que se presente.)

- 2 Encuentra el máximo entero k en tu calculadora, tal que $\sin(10^k)$ se pueda evaluar. Ahora analiza cómo puede evaluar $\sin(10^{k+1})$ en la misma calculadora, y luego encuentra realmente ese valor.

- 3 Determina el número de soluciones de la ecuación

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \pi.$$

- 4 Analiza las relaciones entre funciones periódicas, funciones biunívocas y funciones inversas. Con estas relaciones en mente, explica qué debe pasar para que las funciones trigonométricas tengan inversas.

- 5 Grafica $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$ y $y_3 = \tan x$ en $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.1]$. Crea una tabla de valores para estas tres funciones, con pequeños valores positivos (del orden de 10^{-10} o parecidos). ¿Qué conclusión puedes obtener a partir de la gráfica y de la tabla?

- 6 Coordenadas de pista de carreras En la figura se muestra una pista de carreras circular de 2 km de diámetro. Todas las carreras comienzan en S y continúan en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj. Aproxima, a cuatro lugares decimales, las coordenadas del punto en el que las siguientes carreras terminan en relación a un sistema de coordenadas rectangulares, con origen en el centro de la pista y S en el eje x positivo.

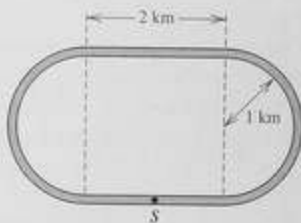
Ejercicio 6



- (a) Una carrera de velocidad de 2 km de largo.
(b) Una carrera de resistencia de 500 km de largo.

- 7 Coordenadas de pista de carreras Trabaja el ejercicio 6 para la pista que se muestra en la figura, si el origen del sistema de coordenadas rectangulares está en el centro de la pista y S está en el eje y negativo.

Ejercicio 7



- 8 Hélice de motor de fuera de borda Un motor de fuera de borda, de 90 hp a plena potencia, hará girar su hélice a 5000 rpm.

- (a) Encuentra la rapidez angular ω de la hélice en radianes por segundo.
(b) El centro de una hélice de 10 pulgadas de diámetro está ubicado 18 pulgadas bajo la superficie del agua. Expresa la profundidad $D(t) = a \cos(\omega t + c) + d$ de un punto en el borde de una pala de hélice como función del tiempo t , donde t está en segundos. Imagina que el punto está inicialmente a una profundidad de 23 pulgadas.
(c) Gráficamente, determina el número de veces que gira la hélice en 0.12 segundos.

Trigonometría analítica

- 7.1 Verificación de identidades trigonométricas
- 7.2 Ecuaciones trigonométricas
- 7.3 Fórmulas de suma y resta
- 7.4 Fórmulas de ángulos múltiples
- 7.5 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto
- 7.6 Funciones trigonométricas inversas

En matemáticas avanzadas, ciencias naturales o ingeniería, a veces es necesario simplificar expresiones trigonométricas complicadas y resolver ecuaciones que involucren funciones trigonométricas. En las primeras dos secciones del capítulo se estudian estos temas y luego se derivan muchas fórmulas útiles con respecto a sumas, diferencias y múltiplos; para consultarlas, busca en el reverso de la contratapa de este libro. Además de su manejo formal, también se consideran numerosas aplicaciones de estas fórmulas. La última sección contiene las definiciones y propiedades de las funciones trigonométricas inversas.

7.1

Verificación de
identidades
trigonométricas

Una **expresión trigonométrica** contiene símbolos que implican funciones trigonométricas.

ILUSTRACIÓN Expresiones trigonométricas

$$\blacksquare x + \sin x \quad \blacksquare \frac{\sqrt{\theta} + 2^{\sin \theta}}{\cot \theta} \quad \blacksquare \frac{\cos(3t+1)}{t^2 + \tan^2(2-t^2)}$$

Suponemos que el dominio de cada variable de una expresión trigonométrica es el conjunto de números reales o ángulos para los que la expresión tiene sentido. A fin de que te ejercites en la simplificación de expresiones trigonométricas complicadas, usaremos las identidades fundamentales (pág. 417) y los procedimientos algebraicos como hicimos en los ejemplos 5 y 6 de la sección 6.2. En los tres primeros, nuestro método consiste en transformar el lado izquierdo de una identidad dada en el derecho o viceversa.

EJEMPLO 1 Verificar una identidad

Verifica la identidad $\sec \alpha - \cos \alpha = \sec \alpha \tan \alpha$.

SOLUCIÓN El lado izquierdo se transforma en el derecho:

$$\begin{aligned} \sec \alpha - \cos \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha && \text{identidad recíproca} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} && \text{sumar expresiones} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} && \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ &= \sin \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) && \text{expresión equivalente} \\ &= \sin \alpha \tan \alpha && \text{identidad tangente} \end{aligned}$$

En la sección 6.2 abordamos el hecho de proporcionar sustento numérico a identidades mediante el análisis de una tabla de valores. También podemos proporcionar apoyo gráfico a identidades analizando las gráficas del lado izquierdo y del lado derecho de una identidad propuesta. Si las gráficas son iguales (con excepción de los huecos en ellas), decimos que aquellas apoyan la identidad. Si no coinciden, entonces la identidad propuesta es falsa.

La gráfica de la figura 1 proporciona sustento gráfico a la comprobación del ejemplo 1. Se trata de la gráfica (en modo de radianes y de puntos) de

$$Y_1 = 1/\cos(X) - \cos(X) \quad \text{y} \quad Y_2 = \sin(X) \tan(X).$$

Figura 1

$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-5, 5]$

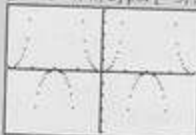


Figura 2

X	Y ₁	Y ₂
0.1158	-2.805	-2.805
0.3774	-1.5	-1.5
0.6394	-0.7071	-0.7071
0.9012	-0.3897	-0.3897
0.162	-0.0994	-0.0994
0.4238	0	0
0.6856	-0.0994	-0.0994

$Y_2 = -4E-26$

Otras variantes
del apoyo gráfico
para el ejemplo 1

Los valores de Y_1 y Y_2 en la figura 2 también proporcionan sustento gráfico a la comprobación. Es posible que haya pequeñas discrepancias en los valores, como se indica en el renglón resaltado.

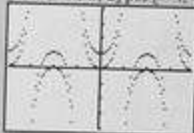
(1) Gráfica Y_1 y $Y_3 = Y_2 + 1$, como se muestra en las figuras 3 y 4. Esto permite ver la gráfica de Y_2 desplazada una unidad hacia arriba, y no sobre Y_1 .

Figura 3

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=1/cos(X)-cos(X)
Y2=sin(X)tan(X)
Y3=Y2+1
Y4=
Y5=
```

Figura 4

$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$



(2) Gráfica $Y_3 = Y_1 - Y_2 + 1$, como se muestra en las figuras 5 y 6. Si la identidad propuesta es verdadera, entonces $Y_1 - Y_2$ es cero, de modo que la gráfica de Y_3 será la gráfica de la recta $y = 1$ con huecos donde Y_1 o Y_2 están indefinidas.

Figura 5

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=1/cos(X)-cos(X)
Y2=sin(X)tan(X)
Y3=Y1-Y2+1
Y4=
Y5=
```

Figura 6

$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$



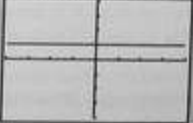
(3) Gráfica $Y_3 = (Y_1 = Y_2)$, como se muestra en las figuras 7 y 8. Cuando $Y_1 = Y_2$ es verdadera, el valor de Y_3 es 1. La gráfica de Y_3 es la gráfica de la recta $y = 1$ con huecos donde Y_1 o Y_2 están indefinidas.

Figura 7

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=1/cos(X)-cos(X)
Y2=sin(X)tan(X)
Y3=Y1=Y2
Y4=
Y5=
```

Figura 8

$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$



EJEMPLO 2 Verificar una identidad

Verifica la identidad $\sec \theta = \sin \theta (\tan \theta + \cot \theta)$.

SOLUCIÓN Como la expresión del lado derecho es más complicada que la del izquierdo, el extremo derecho se transforma en el izquierdo:

$$\begin{aligned}
 \sin \theta (\tan \theta + \cot \theta) &= \sin \theta \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) && \text{identidades tangente y cotangente} \\
 &= \sin \theta \left(\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \right) && \text{sumar fracciones} \\
 &= \sin \theta \left(\frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \right) && \text{identidad Pitagórica} \\
 &= \frac{1}{\cos \theta} && \text{cancelar } \sin \theta \\
 &= \sec \theta && \text{identidad recíproca}
 \end{aligned}$$

Figura 9

X	Y ₁	Y ₂
-0.236	1.1597	1.1597
-0.618	1.0383	1.0383
0	1	ERROR
0.618	1.0383	1.0383
0.236	1.1597	1.1597
0.9472	1.1597	1.1597

Y₂=ERROR

La tabla (con $\Delta Tbl = \pi/12$) de la figura 9 muestra algunos valores de

$$Y_1 = 1/\cos(X) \quad \text{y} \quad Y_2 = \sin(X)(\tan(X) + 1/\tan(X)).$$

los lados izquierdo y derecho de la identidad en el ejemplo 2. Notarás que para $X = 0$, $Y_1 = 1$, pero en el valor correspondiente a Y_2 aparece la leyenda "ERROR". Esto resulta del uso de $1/\tan(X)$ por $\cot(X)$ en Y_2 para $X = 0$, intentamos dividir entre cero.

EJEMPLO 3 Verificar una identidad

Verifica la identidad $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$.

SOLUCIÓN Puesto que el denominador del lado izquierdo es un binomio y el denominador del lado derecho es un monomio, se cambia la forma de la fracción del lado izquierdo multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y, luego, se usa una de las identidades Pitagóricas:

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos x}{1 - \sin x} &= \frac{\cos x}{1 - \sin x} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} && \text{multiplicar numerador y denominador por } 1 + \sin x \\
 &= \frac{\cos x (1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} && \text{propiedad de los cocientes} \\
 &= \frac{\cos x (1 + \sin x)}{\cos^2 x} && \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \\
 &= \frac{1 + \sin x}{\cos x} && \text{cancelar } \cos x
 \end{aligned}$$

Otra técnica para demostrar que una ecuación $p = q$ es una identidad, es comenzar por transformar el lado izquierdo p en otra expresión s , asegurándose de que cada paso es reversible; es decir, que sea posible transformar s en p al invertir el procedimiento que se utiliza en cada paso. En este caso, la ecuación $p = s$ es una identidad. A continuación, como ejercicio aparte, demostraremos que el lado derecho q también se puede transformar en una expresión s por medio de pasos reversibles y, por lo tanto, que $q = s$ es una identidad. Se deduce entonces que $p = q$ es una identidad. Este método se ilustra en el siguiente ejemplo.



EJEMPLO 4 Verificar una identidad

Verifica la identidad $(\tan \theta - \sec \theta)^2 = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$.

SOLUCIÓN Verificaremos la identidad demostrando que cada lado de la ecuación se puede transformar en la misma expresión. Primero se trabaja sólo con el lado izquierdo:

Trabajo con el lado izquierdo.

$$\begin{aligned} (\tan \theta - \sec \theta)^2 &= \tan^2 \theta - 2 \tan \theta \sec \theta + \sec^2 \theta \quad \text{expresión al cuadrado} \\ &= \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 - 2 \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) + \left(\frac{1}{\cos \theta} \right)^2 \quad \text{identidades tangente y recíproca} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{expresión equivalente} \\ &= \frac{\sin^2 \theta - 2 \sin \theta + 1}{\cos^2 \theta} \quad \text{sumar fracciones} \end{aligned}$$

expresiones
equivalentes

En este punto puede que no sea obvia la forma de obtener el lado derecho de la ecuación dada a partir de la última expresión; por tanto, a continuación se trabaja sólo con el lado derecho para obtener la última expresión. Al multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador se obtiene lo siguiente:

Trabajo con el lado derecho.

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} &= \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \cdot \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin \theta} \quad \text{multiplicar numerador y denominador por } 1 - \sin \theta \\ &= \frac{1 - 2 \sin \theta + \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} \quad \text{propiedad de los cocientes} \\ &= \frac{1 - 2 \sin \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

La última expresión es la misma que la obtenida de $(\tan \theta - \sec \theta)^2$. Como todos los pasos son reversibles, la ecuación dada es una identidad.

En cálculo a veces es conveniente cambiar la forma de ciertas expresiones algebraicas mediante una **sustitución trigonométrica**, como se ilustra en el ejemplo que sigue.

**EJEMPLO 5** Efectuar una sustitución trigonométrica

Expresa $\sqrt{a^2 - x^2}$ en términos de una función trigonométrica de θ sin radicales, sustituyendo $x = a \sin \theta$ con $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ y $a > 0$.

SOLUCIÓN Se procede de esta forma:

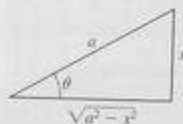
$$\begin{aligned}
 \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \sin \theta)^2} && \text{sea } x = a \sin \theta \\
 &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} && \text{ley de exponentes} \\
 &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} && \text{factor común } a^2 \\
 &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} && \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\
 &= \sqrt{(a \cos \theta)^2} && c^2 d^2 = (cd)^2 \\
 &= |a \cos \theta| && \sqrt{c^2} = |c| \\
 &= |a| |\cos \theta| && |cd| = |c||d| \\
 &= a \cos \theta && \text{ver abajo}
 \end{aligned}$$

La última igualdad es cierta porque (1) si $a > 0$, entonces $|a| = a$, y (2) si $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, entonces $\cos \theta \geq 0$ y, por tanto, $|\cos \theta| = \cos \theta$.

También podemos usar una solución geométrica. Si $x = a \sin \theta$, entonces $\sin \theta = x/a$, y el triángulo de la figura 10 ilustra el problema cuando $0 < \theta < \pi/2$. El tercer lado del triángulo es $\sqrt{a^2 - x^2}$, y se puede determinar con el teorema de Pitágoras. A partir la figura se desprende que

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \quad \text{de manera equivalente, } \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$$

Figura 10

**7.1 Ejercicios****Ejercicios 1 al 50: verifica la identidad.**

1 $\sin \theta - \sin \theta = \cot \theta \cos \theta$

2 $\sin x + \cos x \cot x = \csc x$

3 $\frac{\sec^2 2u - 1}{\sec^2 2u} = \sin^2 2u$

4 $\tan t + 2 \cos t \csc t = \sec t \csc t + \cot t$

5 $\frac{\csc^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \cot^2 \theta$

6 $(\tan u + \cot u)(\cos u + \sin u) = \csc u + \sec u$

7 $\frac{1 + \cos 3t}{\sin 3t} + \frac{\sin 3t}{1 + \cos 3t} = 2 \csc 3t$

8 $\tan^2 \alpha - \sec^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sec^2 \alpha$

9 $\frac{1}{1 - \cos \gamma} + \frac{1}{1 + \cos \gamma} = 2 \csc^2 \gamma$

10 $\frac{1 + \csc 3\beta}{\sec 3\beta} - \cot 3\beta = \cos 3\beta$

11 $(\sec u - \tan u)(\csc u + 1) = \cot u$

12 $\frac{\cot \theta - \tan \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \csc \theta - \sec \theta$

13 $\csc^4 t - \cot^4 t = \csc^2 t + \cot^2 t$

14 $\cos^4 2\theta + \sin^2 2\theta = \cos^2 2\theta + \sin^4 2\theta$

$$15 \frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} = \sec \beta + \tan \beta$$

$$16 \frac{1}{\csc y - \cot y} = \csc y + \cot y$$

$$17 \frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \frac{1 - \cos x}{\cos x} \quad 18 \frac{\cot x}{\csc x + 1} = \frac{\csc x - 1}{\cot x}$$

$$19 \frac{\cot 4u - 1}{\cot 4u + 1} = \frac{1 - \tan 4u}{1 + \tan 4u} \quad 20 \frac{1 + \sec 4x}{\sec 4x + \tan 4x} = \csc 4x$$

$$21 \sin^4 t - \cos^4 t = \sin^2 t - \cos^2 t$$

$$22 \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta = 1$$

$$23 \tan^4 k - \sec^4 k = 1 - 2 \sec^2 k$$

$$24 \sec^4 u - \sec^2 u = \tan^4 u + \tan^2 u$$

$$25 (\sec t + \tan t)^2 = \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}$$

$$26 \sec^2 \gamma + \tan^2 \gamma = (1 - \sin^4 \gamma) \sec^4 \gamma$$

$$27 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^3 = 1$$

$$28 \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \csc t + \cot t \quad 29 \frac{1 + \csc \beta}{\cot \beta + \cos \beta} = \sec \beta$$

$$30 \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = 1 + \sin x \cos x$$

$$31 (\csc t - \cot t)^4 (\csc t + \cot t)^4 = 1$$

$$32 (a \cos t - b \sin t)^2 + (a \sin t + b \cos t)^2 = a^2 + b^2$$

$$33 \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$34 \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v} = \frac{\cot v - \cot u}{\cot u \cot v + 1}$$

$$35 \frac{\tan \alpha}{1 + \sec \alpha} + \frac{1 + \sec \alpha}{\tan \alpha} = 2 \csc \alpha$$

$$36 \frac{\csc x}{1 + \csc x} - \frac{\csc x}{1 - \csc x} = 2 \sec^2 x$$

$$37 \frac{1}{\tan \beta + \cot \beta} = \sin \beta \cos \beta$$

$$38 \frac{\cot y - \tan y}{\sin y \cos y} = \csc^2 y - \sec^2 y$$

$$39 \sec \theta + \csc \theta - \cos \theta - \sin \theta = \sin \theta \tan \theta + \cos \theta \cot \theta$$

$$40 \sin^2 t + \cos^2 t = (1 - \sin t \cos t)(\sin t + \cos t)$$

$$41 (1 - \tan^2 \phi)^2 = \sec^4 \phi - 4 \tan^2 \phi$$

$$42 \cos^4 w + 1 - \sin^4 w = 2 \cos^2 w$$

$$43 \frac{\cot(-t) + \tan(-t)}{\cot t} = -\sec^2 t$$

$$44 \frac{\csc(-t) - \sin(-t)}{\sin(-t)} = \cot^2 t$$

$$45 \log 10^{m+1} = \tan t$$

$$46 10^{|\sin t|} = |\sin t|$$

$$47 \ln \cot x = -\ln \tan x$$

$$48 \ln \sec \theta = -\ln \cos \theta$$

$$49 \ln |\sec \theta + \tan \theta| = -\ln |\sec \theta - \tan \theta|$$

$$50 \ln |\csc x - \cot x| = -\ln |\csc x + \cot x|$$

Ejercicios 51 al 60: demuestra que la ecuación *no* es una identidad. (Sugerencia: halla un número para el que la ecuación sea falsa.)

$$51 \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$$

$$52 \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \sin t + \cos t$$

$$53 \sqrt{\sec^2 t} = \sec t$$

$$54 \sec t = \sqrt{\tan^2 t + 1}$$

$$55 (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$56 \log \left(\frac{1}{\sin t} \right) = \frac{1}{\log \sin t}$$

57 $\cos(-t) = -\cos t$

58 $\sin(t + \pi) = \sin t$

59 $\cos(\sec t) = 1$

60 $\cot(\tan \theta) = 1$

Ejercicios 61 al 64: demuestra que la ecuación es o que no es una identidad.

61 $(\sec x + \tan x)^2 = 2 \tan x (\tan x + \sec x)$

62 $\frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \sec x$

63 $\cos 3t \tan t + \cot t = \csc t$

64 $\csc^2 x + \sec^2 x = \csc^2 x \sec^2 x$

Ejercicios 65 al 68: consulta el ejemplo 5. Haz la sustitución trigonométrica $x = a \sin \theta$ para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ y $a > 0$. Usa identidades fundamentales para simplificar la expresión resultante.

65 $(a^2 - x^2)^{3/2}$

66 $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$

67 $\frac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

68 $\frac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$

Ejercicios 69 al 72: realiza la sustitución trigonométrica $x = a \tan \theta$ para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ y $a > 0$. Simplifica la expresión resultante.

69 $\sqrt{a^2 + x^2}$

70 $\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

71 $\frac{1}{x^2 + a^2}$

72 $\frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x}$

Ejercicios 73 al 76: lleva a cabo la sustitución trigonométrica $x = a \sec \theta$ para $0 < \theta < \pi/2$ y $a > 0$. Simplifica la expresión resultante.

73 $\sqrt{x^2 - a^2}$

74 $\frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}}$

75 $x^2 \sqrt{x^2 - a^2}$

76 $\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2}$

Ejercicios 77 al 80: usa la gráfica de f para hallar la expresión más simple $g(x)$ tal que la ecuación $f(x) = g(x)$ sea una identidad. Comprueba esta identidad.

77 $f(x) = \frac{\sec^2 x - \sec^4 x}{(1 - \sec^2 x) \cos^4 x}$

78 $f(x) = \frac{\sec x - \sec^3 x}{\cos^4 x + \cos^2 x \sec^2 x}$

79 $f(x) = \sec x (\sec x \cos^2 x + \cos^2 x) - \sec x$

80 $f(x) = \frac{\sec^3 x + \sec x \cos^2 x}{\csc x} + \frac{\cos^3 x + \cos x \sec^2 x}{\sec x}$

7.2

Ecuaciones trigonométricas

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación que contiene expresiones trigonométricas. Cada identidad considerada en la sección precedente es un ejemplo de ecuación trigonométrica donde todos los números (o ángulos) del dominio de la variable son una solución de la ecuación. Si una ecuación trigonométrica no es una identidad, a menudo se hallan soluciones aplicando técnicas semejantes a las usadas para ecuaciones algebraicas. La diferencia principal es que primero se resuelve la ecuación trigonométrica para $\sin \theta$, $\cos \theta$ y así sucesivamente, y luego se hallan valores de x o θ que la satisfagan. Las soluciones se pueden expresar como números reales o ángulos. En toda esta obra usaremos la regla siguiente: si no se especifica una medida en grados, las soluciones de una ecuación trigonométrica deben expresarse en radianes (o como números reales). Si se desea que las soluciones tengan medidas en grados, así se indicará en el ejemplo o ejercicio.

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación trigonométrica con la función senoHalla las soluciones de la ecuación $\sin \theta = \frac{1}{2}$ si

- (a) θ está en el intervalo, $[0, 2\pi)$
 (b) θ es cualquier número real

SOLUCIÓN

(a) Si $\sin \theta = \frac{1}{2}$, entonces el ángulo de referencia para θ es $\theta_R = \pi/6$. Si θ se considera como ángulo en posición estándar, entonces, como $\sin \theta > 0$, el lado terminal está en el primero o en el segundo cuadrante, como se ilustra en la figura 1; por tanto, hay dos soluciones para $0 \leq \theta < 2\pi$:

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

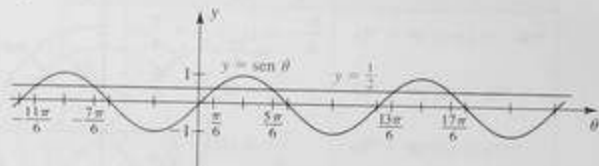
(b) Dado que la función seno tiene periodo 2π , es posible obtener todas las soluciones de x sumando múltiplos de 2π a $\pi/6$ y $5\pi/6$. Esto dará

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{y} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

Figura 1



Figura 2



Una solución alterna (gráfica) comprende la determinación de los puntos donde la gráfica de $y = \sin \theta$ corta la recta horizontal $y = \frac{1}{2}$, como se muestra en la figura 2.

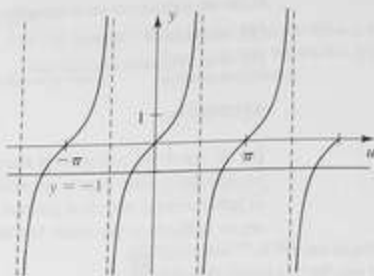
**EJEMPLO 2** Solución de una ecuación trigonométrica con función tangenteEncuentra las soluciones de la ecuación $\tan u = -1$.

SOLUCIÓN Puesto que la función tangente tiene periodo π , basta hallar un número real u tal que $\tan u = -1$ y luego sumar los múltiplos de π .

En la figura 3 se dibuja una porción de la gráfica de $y = \tan u$. Dado que $\tan (3\pi/4) = -1$, una solución es $3\pi/4$; de aquí que

$$\text{si } \tan u = -1, \text{ entonces } u = \frac{3\pi}{4} + \pi n \text{ para todo entero } n.$$

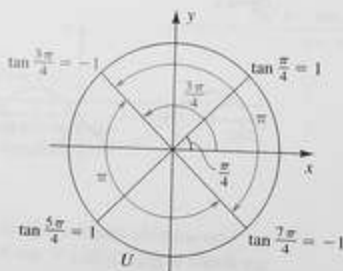
(continúa)

Figura 3 $y = \tan u$ 

También podríamos haber escogido $-\pi/4$ (o algún otro número u tal que $\tan u = -1$), para la solución inicial y haber escrito

$$u = -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

Figura 4



Una solución alternativa implica una circunferencia unitaria. Usando $\tan 3\pi/4 = -1$ y el hecho de que el periodo de la tangente es π , a partir de la figura 4 podemos ver que las soluciones buscadas son

$$u = \frac{3\pi}{4} + \pi n \quad \text{para cada entero } n.$$

EJEMPLO 3 Resolver una ecuación trigonométrica con ángulos múltiples

- Resuelve la ecuación $\cos 2x = 0$, y expresa las soluciones en radianes y grados.
- Halla las soluciones que están en los intervalos $[0, 2\pi)$ y $[0^\circ, 360^\circ)$.

SOLUCIÓN

(a) Se procede como sigue, donde n denota cualquier entero:

$$\cos 2x = 0$$

dado

$$\cos \theta = 0$$

sea $\theta = 2x$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{consultar la gráfica de } y = \cos x \text{ (pág. 435)}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \theta = 2x$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n \quad \text{dividir entre 2}$$

En grados, tenemos $x = 45^\circ + 90^\circ n$.

(b) Podemos encontrar soluciones particulares de la ecuación sustituyendo n con enteros en cualquiera de las fórmulas para x obtenidas en el inciso (a). En la tabla siguiente se enumeran varias soluciones.

n	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$	$45^\circ + 90^\circ n$
-1	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(-1) = -\frac{\pi}{4}$	$45^\circ + 90^\circ(-1) = -45^\circ$
0	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(0) = \frac{\pi}{4}$	$45^\circ + 90^\circ(0) = 45^\circ$
1	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(1) = \frac{3\pi}{4}$	$45^\circ + 90^\circ(1) = 135^\circ$
2	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2) = \frac{5\pi}{4}$	$45^\circ + 90^\circ(2) = 225^\circ$
3	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(3) = \frac{7\pi}{4}$	$45^\circ + 90^\circ(3) = 315^\circ$
4	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(4) = \frac{9\pi}{4}$	$45^\circ + 90^\circ(4) = 405^\circ$

Podrás notar que las soluciones en los intervalos $[0, 2\pi)$ y $[0^\circ, 360^\circ)$ están dadas para $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$. Estas soluciones son

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \quad \text{o} \quad 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$$

EJEMPLO 4 Resolver una ecuación trigonométrica por factorización

Resuelve la ecuación $\sec \theta \tan \theta = \sec \theta$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta \tan \theta &= \text{sen } \theta && \text{dada} \\ \text{sen } \theta \tan \theta - \text{sen } \theta &= 0 && \text{igualar a 0} \\ \text{sen } \theta (\tan \theta - 1) &= 0 && \text{factorizar sen } \theta \\ \text{sen } \theta = 0, \quad \tan \theta - 1 &= 0 && \text{teorema del factor cero} \\ \text{sen } \theta = 0, \quad \tan \theta &= 1 && \text{resolver para sen } \theta \text{ y tan } \theta \end{aligned}$$

Las soluciones de la ecuación $\text{sen } \theta = 0$ son $0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$ por tanto, si $\text{sen } \theta = 0$, entonces $\theta = \pi n$ para todo entero n .

La función tangente tiene un periodo de π y, en consecuencia, encontramos las soluciones de la ecuación $\tan \theta = 1$ que están en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y luego sumamos múltiplos de π . Como la única solución de $\tan \theta = 1$ en $(-\pi/2, \pi/2)$ es $\pi/4$, vemos que

$$\text{si } \tan \theta = 1, \text{ entonces } \theta = \frac{\pi}{4} + \pi n \text{ para todo entero } n.$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación dada son

$$\pi n \text{ y } \frac{\pi}{4} + \pi n \text{ para todo entero } n.$$

Algunas soluciones particulares, obtenidas al hacer $n = 0, n = 1, n = 2$ y $n = -1$, son

$$0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi, \frac{9\pi}{4}, -\pi \text{ y } -\frac{3\pi}{4}.$$

En el ejemplo 4 hubiera sido incorrecto comenzar por dividir ambos lados entre $\text{sen } \theta$, ya que habríamos perdido las soluciones de $\text{sen } \theta = 0$.

EJEMPLO 5 Resolver una ecuación trigonométrica por factorización

Resuelve la ecuación $2 \text{sen}^2 t - \cos t - 1 = 0$, y expresa las soluciones en radianes y en grados.

SOLUCIÓN Parece que tenemos una ecuación cuadrática en $\text{sen } t$ o $\cos t$. No tenemos una simple sustitución para $\cos t$ en términos de $\text{sen } t$, o no una para $\text{sen}^2 t$ en términos de $\cos^2 t$ ($\text{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t$), por lo que primero expresaremos la ecuación en términos de $\cos t$ y luego la resolveremos por factorización.

$$\begin{aligned} 2 \text{sen}^2 t - \cos t - 1 &= 0 && \text{dada} \\ 2(1 - \cos^2 t) - \cos t - 1 &= 0 && \text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \\ -2 \cos^2 t - \cos t + 1 &= 0 && \text{simplificar} \\ 2 \cos^2 t + \cos t - 1 &= 0 && \text{multiplicar por } -1 \\ (2 \cos t - 1)(\cos t + 1) &= 0 && \text{factorizar} \\ 2 \cos t - 1 = 0, \quad \cos t + 1 &= 0 && \text{teorema del factor cero} \\ \cos t = \frac{1}{2}, \quad \cos t &= -1 && \text{despejar cos } t \end{aligned}$$

Esta es una ecuación cuadrática en $\cos t$, por lo que ahora puedes aplicar la fórmula cuadrática. En caso de usarla, recuerda despejar $\cos t$, no t .

En virtud de que la función coseno tiene un periodo de 2π , se pueden encontrar todas las soluciones de estas ecuaciones sumando múltiplos de 2π a las soluciones que están en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Si $\cos t = \frac{1}{2}$, el ángulo de referencia es $\pi/3$ (o 60°). Dado que $\cos t$ es positivo, el ángulo t (en radianes) está en el primero o en el cuarto cuadrante. En consecuencia, en el intervalo $[0, 2\pi)$, advertimos que

$$\text{si } \cos t = \frac{1}{2}, \text{ entonces } t = \frac{\pi}{3} \text{ o } t = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

Al referirnos a la gráfica de la función coseno, vemos que

$$\text{si } \cos t = -1, \text{ entonces } t = \pi.$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación dada son las siguientes, donde n es cualquier entero:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \quad \text{y} \quad \pi + 2\pi n.$$

Con medidas en grados, tenemos

$$60^\circ + 360^\circ n, \quad 300^\circ + 360^\circ n \quad \text{y} \quad 180^\circ + 360^\circ n.$$

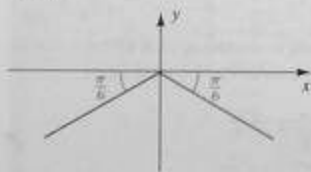
EJEMPLO 6 Resolver una ecuación trigonométrica por factorización

Halla las soluciones de $4 \sin^2 x \tan x - \tan x = 0$ que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$.

$$\begin{array}{ll} \text{SOLUCIÓN} & 4 \sin^2 x \tan x - \tan x = 0 \quad \text{dada} \\ & \tan x (4 \sin^2 x - 1) = 0 \quad \text{factorizar } \tan x \\ & \tan x = 0, \quad 4 \sin^2 x - 1 = 0 \quad \text{teorema del factor cero} \\ & \tan x = 0, \quad \sin^2 x = \frac{1}{4} \quad \text{despejar } \tan x, \sin^2 x \\ & \tan x = 0, \quad \sin x = \pm \frac{1}{2} \quad \text{despejar } \sin x \end{array}$$

En la figura 5 se muestra el ángulo de referencia $\pi/6$ para los cuadrantes tercero y cuarto. Estos ángulos, $7\pi/6$ y $11\pi/6$, son las soluciones de la ecuación $\sin x = -\frac{1}{2}$ para $0 \leq x < 2\pi$. Las soluciones de las tres ecuaciones se enumeran en la tabla siguiente:

Figura 5



Ecuación	Soluciones en $[0, 2\pi)$	Consulta
$\tan x = 0$	$0, \pi$	Figura 3
$\sin x = \frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	Ejemplo 1
$\sin x = -\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$	Figura 5 (usa ángulo de referencia)

Por tanto, la ecuación dada tiene las seis soluciones que se enlistan en la segunda columna de la tabla.

**EJEMPLO 7** Resolver una ecuación trigonométrica con ángulos múltiplesHalla las soluciones de $\csc^2 2u - 4 = 0$.**SOLUCIÓN**

$$\csc^2 2u - 4 = 0$$

dada

$$(\csc^2 2u - 2)(\csc^2 2u + 2) = 0$$

diferencia de dos cuadrados

$$\csc^2 2u - 2 = 0, \quad \csc^2 2u + 2 = 0$$

teorema del factor

$$\csc^2 2u = 2, \quad \csc^2 2u = -2$$

despejar $\csc^2 2u$

$$\csc 2u = \pm\sqrt{2}, \quad \csc 2u = \pm\sqrt{-2}$$

tomar raíces cuadradas

La segunda ecuación no tiene solución porque $\sqrt{-2}$ no es número real. La primera ecuación equivale a

$$\sin 2u = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como el ángulo de referencia para $2u$ es $\pi/4$, se obtiene la siguiente tabla en la que n denota cualquier entero.

Ecuación	Solución para $2u$	Solución para u
$\sin 2u = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$2u = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{\pi}{8} + \pi n$
	$2u = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{3\pi}{8} + \pi n$
$\sin 2u = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2u = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{5\pi}{8} + \pi n$
	$2u = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{7\pi}{8} + \pi n$

Las soluciones de la ecuación dada se enumeran en la última columna. Notarás que *todas* estas soluciones se pueden escribir en la forma

$$u = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n$$

En el ejemplo siguiente se muestra el uso de una calculadora en la solución de una ecuación trigonométrica.

EJEMPLO 8 Aproximar soluciones de una ecuación trigonométricaAproxima, al grado más cercano, las soluciones de la siguiente ecuación en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$:

$$5 \sin \theta \tan \theta - 10 \tan \theta + 3 \sin \theta - 6 = 0$$

**EJEMPLO 7** Resolver una ecuación trigonométrica con ángulos múltiplesHalla las soluciones de $\csc^4 2u - 4 = 0$.**SOLUCIÓN**

$$\csc^4 2u - 4 = 0$$

dada

$$(\csc^2 2u - 2)(\csc^2 2u + 2) = 0$$

diferencia de dos cuadrados

$$\csc^2 2u - 2 = 0, \quad \csc^2 2u + 2 = 0$$

teorema del factor cero

$$\csc^2 2u = 2, \quad \csc^2 2u = -2$$

despejar $\csc^2 2u$

$$\csc 2u = \pm\sqrt{2}, \quad \csc 2u = \pm\sqrt{-2}$$

tomar raíces cuadradas

La segunda ecuación no tiene solución porque $\sqrt{-2}$ no es número real. La primera ecuación equivale a

$$\sin 2u = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como el ángulo de referencia para $2u$ es $\pi/4$, se obtiene la siguiente tabla en la que n denota cualquier entero.

Ecuación	Solución para $2u$	Solución para u
$\sin 2u = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$2u = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{\pi}{8} + \pi n$
	$2u = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{3\pi}{8} + \pi n$
$\sin 2u = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2u = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{5\pi}{8} + \pi n$
	$2u = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{7\pi}{8} + \pi n$

Las soluciones de la ecuación dada se enumeran en la última columna. Notarás que *todas* estas soluciones se pueden escribir en la forma

$$u = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n$$

En el ejemplo siguiente se muestra el uso de una calculadora en la solución de una ecuación trigonométrica.

EJEMPLO 8 Aproximar soluciones de una ecuación trigonométrica

Aproxima, al grado más cercano, las soluciones de la siguiente ecuación en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$:

$$5 \sin \theta \tan \theta - 10 \tan \theta + 3 \sin \theta - 6 = 0$$

SOLUCIÓN

$$5 \operatorname{sen} \theta \tan \theta - 10 \tan \theta + 3 \operatorname{sen} \theta - 6 = 0 \quad \text{dada}$$

$$(5 \operatorname{sen} \theta \tan \theta - 10 \tan \theta) + (3 \operatorname{sen} \theta - 6) = 0 \quad \text{agrupar términos}$$

$$5 \tan \theta (\operatorname{sen} \theta - 2) + 3(\operatorname{sen} \theta - 2) = 0 \quad \text{factorizar cada grupo}$$

$$(5 \tan \theta + 3)(\operatorname{sen} \theta - 2) = 0 \quad \text{factorizar } (\operatorname{sen} \theta - 2)$$

$$5 \tan \theta + 3 = 0, \quad \operatorname{sen} \theta - 2 = 0 \quad \text{teorema del factor cero}$$

$$\tan \theta = -\frac{3}{5}, \quad \operatorname{sen} \theta = 2 \quad \text{despejar } \tan \theta \text{ y } \operatorname{sen} \theta$$

La ecuación $\operatorname{sen} \theta = 2$ no tiene solución, porque $-1 \leq \operatorname{sen} \theta \leq 1$ para todo θ . Para $\tan \theta = -\frac{3}{5}$, se usa una calculadora en modo de grados y se obtiene

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) \approx -31^\circ.$$

Por tanto, el ángulo de referencia es $\theta_R \approx 31^\circ$. Dado que θ está en el segundo o cuarto cuadrante, se obtienen estas soluciones:

$$\theta = 180^\circ - \theta_R = 180^\circ - 31^\circ = 149^\circ$$

$$\theta = 360^\circ - \theta_R = 360^\circ - 31^\circ = 329^\circ$$

Consideremos cómo es que una calculadora graficadora puede ayudar a resolver la ecuación del ejemplo 8.

TI-83 Plus

TI-86

Selecciona el modo de radianes y de punto. Asigna el lado izquierdo de la ecuación a Y_1 .

Aproximación de las soluciones de una ecuación trigonométrica

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=5sin(X)tan(X)
Y2=-10tan(X)+3sin(X)-6
Y3=
Y4=
Y5=

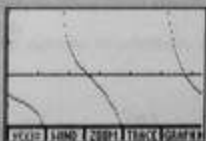
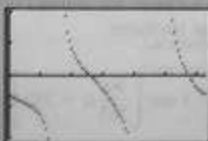
```

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=5sin(X)tan(X)-10tan(X)+3sin(X)-6
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
MODE FMODE 2000 TRACE GRAPH

```

Fija la pantalla de $[0, 2\pi]$ por $[-20, 20, 10]$. Grafica Y_1 .



(continúa)

Calcula el cero entre 2 y 3.

2nd CALC 2
2 ENTER 3 ENTER 2.5 ENTER



MORE MATH(F1) ROOT(F1)
2 ENTER 3 ENTER 2.5 ENTER



Convierte a grados; la ubicación X en la memoria contiene el estimado de la raíz.

2nd QUIT X,T,θ,n
× 180 ÷ 2nd π ENTER

X*180/π
149.0362435

2nd QUIT x-VAR
× 180 ÷ 2nd π ENTER

x*180/π
149.036243468

Calcula el cero entre 5 y 6.

GRAPH 2nd CALC 2
5 ENTER 6 ENTER 5.5 ENTER
2nd QUIT 2nd ENTRY ENTER

X*180/π
149.0362435
X*180/π
329.0362435

GRAPH MORE MATH(F1) ROOT(F1)
5 ENTER 6 ENTER 5.5 ENTER
2nd QUIT 2nd ENTRY ENTER

x*180/π
149.036243468
x*180/π
329.036243468

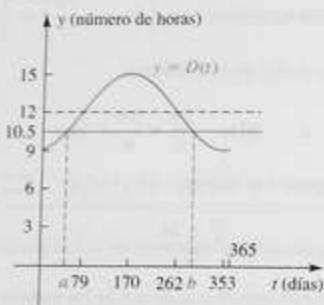
EJEMPLO 9 Investigar el número de horas de luz diurna

En Boston, el número de horas de luz diurna $D(t)$ en una época específica del año se puede aproximar mediante

$$D(t) = 3 \sin \left[\frac{2\pi}{365} (t - 79) \right] + 12,$$

con t en días y $t = 0$ correspondiente al 1 de enero. ¿Cuántos días del año tienen más de 10.5 horas de luz diurna?

Figura 6



SOLUCIÓN En el ejemplo 12 de la sección 6.5 se estudió la gráfica de D , la cual se vuelve a dibujar en la figura 6. Como se ilustra en ésta, si se pueden encontrar dos números a y b con $D(a) = 10.5$, $D(b) = 10.5$ y $0 < a < b < 365$, entonces habrá más de 10.5 horas de luz diurna en el t -ésimo día del año si $a < t < b$.

Resolvamos la ecuación $D(t) = 10.5$ así:

$$3 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 79) \right] + 12 = 10.5 \quad \text{hacer } D(t) = 10.5$$

$$3 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 79) \right] = -1.5 \quad \text{restar 12}$$

$$\sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 79) \right] = -0.5 = -\frac{1}{2} \quad \text{dividir entre 3}$$

Si $\sin \theta = -\frac{1}{2}$, entonces el ángulo de referencia es $\pi/6$ y el ángulo θ estará ya sea en el tercero o en el cuarto cuadrante; por lo tanto, podemos encontrar los números a y b resolviendo las ecuaciones

$$\frac{2\pi}{365}(t - 79) = \frac{7\pi}{6} \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{365}(t - 79) = \frac{11\pi}{6}$$

A partir de la primera obtenemos

$$t - 79 = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{365}{2\pi} = \frac{2555}{12} \approx 213,$$

$$\text{y, por tanto,} \quad t \approx 213 + 79, \quad \text{o} \quad t \approx 292.$$

En forma análoga, la segunda ecuación dará $t \approx 414$. Dado que el periodo de la función D es de 365 días (figura 6), obtenemos

$$t \approx 414 - 365, \quad \text{o} \quad t \approx 49.$$

En consecuencia, habrá por lo menos 10.5 horas de luz diurna de $t = 49$ a $t = 292$; es decir, durante 243 días del año.

En el ejemplo 14 de la sección 6.5 se dio una solución gráfica al ejemplo que sigue.

EJEMPLO 10 Hallar la corriente mínima en un circuito eléctrico

La corriente I (en amperes) de un circuito de corriente alterna en un tiempo t (en segundos) está dada por

$$I = 30 \sin \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3} \right).$$

Halla el valor mínimo exacto de t para que $I = 15$.

SOLUCIÓN Con $t = 15$ en la fórmula dada, obtenemos

$$15 = 30 \sin \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3} \right) \text{ o en forma equivalente, } \sin \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, el ángulo de referencia es $\pi/6$ y, en consecuencia,

$$50\pi t - \frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{o} \quad 50\pi t - \frac{7\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$

donde n es cualquier entero. Al despejar t se obtiene

$$t = \frac{\frac{15}{6} + 2n}{50} \quad \text{o} \quad t = \frac{\frac{19}{6} + 2n}{50}.$$

El valor positivo más pequeño de t se presentará cuando uno de los numeradores de estas dos fracciones tenga su mínimo valor positivo. Como $\frac{15}{6} = 2.5$, $\frac{19}{6} \approx 3.17$, y $2(-1) = -2$, vemos que el mínimo valor positivo de t se presenta cuando $n = -1$ en la primera fracción; es decir, cuando

$$t = \frac{\frac{15}{6} + 2(-1)}{50} = \frac{1}{100}.$$

En el ejemplo siguiente se ilustra cómo un equipo graficador puede ayudar en la solución de una ecuación trigonométrica complicada.



EJEMPLO 11 Usar una gráfica para determinar las soluciones de una ecuación trigonométrica

Encuentra las soluciones de la siguiente ecuación que están en el intervalo $[0, 2\pi)$:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

SOLUCIÓN Asignamos $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$ a Y_1 . Dado que $|\sin \theta| \leq 1$ para $\theta = x, 2x$ y $3x$, el lado izquierdo de la ecuación está entre -3 y 3 ; se escoge la pantalla $[0, 2\pi, \pi/4]$ por $[-3, 3]$ y se obtiene un trazo similar al de la figura 7. Con la función "root", se llega a las siguientes aproximaciones para las intersecciones en x ; esto es, las soluciones aproximadas de la ecuación dada en $[0, 2\pi)$:

$$0, \quad 1.57, \quad 2.09, \quad 3.14, \quad 4.19, \quad 4.71$$

Se cambia a grados, se redondea al más cercano y se obtiene

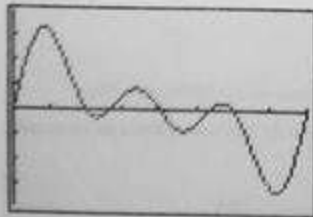
$$0^\circ, \quad 90^\circ, \quad 120^\circ, \quad 180^\circ, \quad 240^\circ \quad \text{y} \quad 270^\circ.$$

La conversión de esta medida en grados a radianes dará

$$0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \pi, \quad \frac{4\pi}{3} \quad \text{y} \quad \frac{3\pi}{2}.$$

Al comprobar estos valores en la ecuación dada, vemos que los seis son soluciones. La figura 7 sugiere que la gráfica tiene un periodo de 2π . Después

Figura 7
 $[0, 2\pi, \pi/4]$ por $[-3, 3]$



de estudiar la sección 7.4, podrás cambiar la forma de Y_1 y demostrar que el periodo es 2π y, por lo tanto, que todas las soluciones de la ecuación dada se pueden obtener al sumar múltiplos enteros de 2π .

En el ejemplo anterior fue posible utilizar un equipo graficador para determinar las soluciones exactas de la ecuación; sin embargo, en muchas ecuaciones que se presentan en aplicaciones prácticas, sólo es posible aproximar las soluciones.

7.2 Ejercicios

Ejercicios 1 al 36: halla todas las soluciones de la ecuación.

$$1 \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \quad \cos t = -1$$

$$3 \quad \tan \theta = \sqrt{3}$$

$$4 \quad \cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$5 \quad \sec \beta = 2$$

$$6 \quad \csc \gamma = \sqrt{2}$$

$$7 \quad \sin x = \frac{\pi}{2}$$

$$8 \quad \cos x = -\frac{\pi}{3}$$

$$9 \quad \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

$$10 \quad \csc \theta \sin \theta = 1$$

$$11 \quad 2 \cos 2\theta - \sqrt{3} = 0$$

$$12 \quad 2 \sin 3\theta + \sqrt{2} = 0$$

$$13 \quad \sqrt{3} \tan \frac{1}{3}t = 1$$

$$14 \quad \cos \frac{1}{4}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$15 \quad \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

$$16 \quad \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -1$$

$$17 \quad \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$18 \quad \cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$19 \quad 2 \cos t + 1 = 0$$

$$20 \quad \cot \theta + 1 = 0$$

$$21 \quad \tan^2 x = 1$$

$$22 \quad 4 \cos \theta - 2 = 0$$

$$23 \quad (\cos \theta - 1)(\sin \theta + 1) = 0$$

$$24 \quad 2 \cos x = \sqrt{3}$$

$$25 \quad \sec^2 \alpha - 4 = 0$$

$$26 \quad 3 - \tan^2 \beta = 0$$

$$27 \quad \sqrt{3} + 2 \sin \beta = 0$$

$$28 \quad 4 \sin^2 x - 3 = 0$$

$$29 \quad \cot^2 x - 3 = 0$$

$$30 \quad (\sin t - 1) \cos t = 0$$

$$31 \quad (2 \sin \theta + 1)(2 \cos \theta + 3) = 0$$

$$32 \quad (2 \sin u - 1)(\cos u - \sqrt{2}) = 0$$

$$33 \quad \sin 2x (\csc 2x - 2) = 0$$

$$34 \quad \tan \alpha + \tan^2 \alpha = 0$$

$$35 \quad \cos (\ln x) = 0$$

$$36 \quad \ln (\sin x) = 0$$

Ejercicios 37 al 60: encuentra las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$.

$$37 \quad \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \qquad 38 \quad \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

$$39 \quad 2 - 8 \cos^2 t = 0 \qquad 40 \quad \cot^2 \theta - \cot \theta = 0$$

41. $2 \sin^2 u = 1 - \sin u$

42. $2 \cos^2 t + 3 \cos t + 1 = 0$

43. $\tan^2 x \sin x = \sin x$

44. $\sec \beta \csc \beta = 2 \csc \beta$

45. $2 \cos^2 \gamma + \cos \gamma = 0$

46. $\sin x - \cos x = 0$

47. $\sin^2 \theta + \sin \theta - 6 = 0$

48. $2 \sin^2 u + \sin u - 6 = 0$

49. $1 - \sin t = \sqrt{3} \cos t$

50. $\cos \theta - \sin \theta = 1$

51. $\cos \alpha + \sin \alpha = 1$

52. $\sqrt{3} \sin t + \cos t = 1$

53. $2 \tan t - \sec^2 t = 0$

54. $\tan \theta + \sec \theta = 1$

55. $\cot \alpha + \tan \alpha = \csc \alpha \sec \alpha$

56. $\sin x + \cos x \cot x = \csc x$

57. $2 \sin^3 x + \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$

58. $\sec^3 \theta = 4 \sec \theta$

59. $2 \tan t \csc t + 2 \csc t + \tan t + 1 = 0$

60. $2 \sin v \csc v - \csc v = 4 \sin v - 2$

Ejercicios 61 al 66: aproxima, a los 10' más cercanos, las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.

61. $\sin^2 t - 4 \sin t + 1 = 0$

62. $\cos^2 t - 4 \cos t + 2 = 0$

63. $\tan^2 \theta + 3 \tan \theta + 2 = 0$

64. $2 \tan^2 x - 3 \tan x - 1 = 0$

65. $12 \sin^2 u - 5 \sin u - 2 = 0$

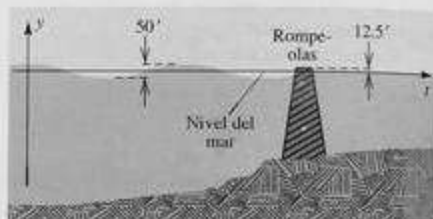
66. $5 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha - 2 = 0$

67. **Olas de marea.** Una ola, de 50 pies de altura y 30 minutos de periodo, se aproxima a un rompeolas que sobresale 12.5 pies del nivel del mar (observa la figura). En un punto particular en la playa, la distancia y desde el nivel del mar a la parte alta de la ola está dada por

$$y = 25 \cos \frac{\pi}{15} t,$$

con t en minutos. ¿Durante cuántos minutos de cada periodo de media hora la parte alta de la ola rebasa el rompeolas?

Ejercicio 67



68. **Temperatura en Fairbanks.** La temperatura mínima T (en $^\circ\text{F}$) esperada en Fairbanks, Alaska, se puede aproximar mediante

$$T = 36 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 101) \right] + 14,$$

donde t está en días y donde $t = 0$ corresponde al 1 de enero. ¿Durante cuántos días del año la temperatura mínima esperada estará por debajo de -4°F ?




69. **Temperatura en Chicago.** El promedio mensual de las temperaturas máximas T (en $^\circ\text{F}$) en Chicago, Illinois, se puede calcular con la función

$$T(t) = 26.5 \sin \left(\frac{\pi}{6} t - \frac{2\pi}{3} \right) + 56.5,$$

donde t está en meses y $t = 1$ corresponde a enero.

- Grafica T en el intervalo $[1, 25]$, de dos años.
- Calcula el promedio de las temperaturas altas en julio y en octubre.
- Determina, gráficamente, los meses en los que el promedio de temperaturas altas es 69°F o mayor.
- Explica por qué una función seno es adecuada para calcular esas temperaturas.

-  70 Temperatura en Augusta: El promedio mensual de las temperaturas altas T (en $^{\circ}\text{F}$) en Augusta, Georgia, se puede determinar con la función

$$T(t) = 17 \cos \left(\frac{\pi}{6}t - \frac{7\pi}{6} \right) + 75,$$

donde t son meses y $t = 1$ corresponde a enero.

- Grafica T en el intervalo $[1, 25]$, de dos años.
- Calcula el promedio de temperaturas altas en abril y en diciembre.
- Determina, gráficamente, los meses en los que el promedio de temperaturas altas es de 67°F o menor.

- 71 Intensidad de la luz solar: En un día despejado con D horas de iluminación, la intensidad de luz solar I (en calorías/ cm^2) se puede aproximar mediante

$$I = I_m \sin \frac{\pi t}{D} \quad \text{para } 0 \leq t \leq D,$$

donde $t = 0$ corresponde al amanecer e I_m es la intensidad máxima. Si $D = 12$, ¿aproximadamente cuántas horas después del amanecer será $I = \frac{1}{2}I_m$?

- 72 Intensidad de luz solar: Consulta el ejercicio 71. En días nublados, un cálculo más aproximado de la intensidad luminosa I está dado por

$$I = I_m \sin^2 \frac{\pi t}{D}.$$

Si $D = 12$, ¿alrededor de cuántas horas después del amanecer será $I = \frac{1}{2}I_m$?

- 73 Protección de la luz solar: Consulta los ejercicios 71 y 72. Un dermatólogo recomienda protegerse del sol cuando la intensidad I rebasa 75% de la máxima. Si $D = 12$ horas, calcula el número de horas para las que se requiere protección en:

- Un día despejado
- Un día nublado.

- 74 Ingeniería de carreteras: En el estudio de problemas de penetración de hielo en ingeniería de carreteras, la temperatura T en un instante de t horas y profundidad de x pies, estará dada por

$$T = T_0 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x),$$

en donde T_0 , ω , y λ son constantes y el periodo T es de 24 horas.

- Hallar una fórmula para la temperatura de la superficie.

- ¿A qué horas será mínima la temperatura de la superficie?

- Si $\lambda = 2.5$, halla las horas en que la temperatura sea mínima a una profundidad de 1 pie.

- 75 Población de conejos: Muchas poblaciones de animales, como la de los conejos, fluctúan en periodos cíclicos de 10 años. Supón que el número de conejos en el instante t (en años) está dado por

$$N(t) = 1000 \cos \frac{\pi}{5}t + 4000.$$

- Traza la gráfica de N para $0 \leq t \leq 10$.
- ¿Para qué valores de t del inciso (a) la población de conejos rebasará los 4500?

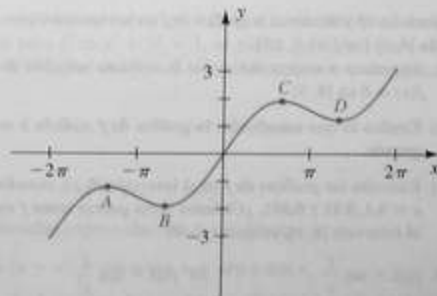
- 76 Caudal de un río: El caudal (o rapidez de descarga de agua) en la desembocadura del río Orinoco en Sudamérica se puede calcular mediante

$$F(t) = 26000 \sin \left[\frac{\pi}{6}(t - 5.5) \right] + 34000,$$

en donde t es el tiempo en meses y $F(t)$ es el caudal en m^3/s . ¿Durante aproximadamente cuántos meses de cada año rebasará el caudal los $55000 \text{ m}^3/\text{s}$?

- 77 En la figura se muestra una gráfica de $y = \frac{1}{2}x + \sin x$ para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Con el uso de cálculo, se puede demostrar que las coordenadas x de los puntos de retorno A , B , C y D de la gráfica son soluciones de la ecuación $\frac{1}{2} + \cos x = 0$. Determina las coordenadas de estos puntos.

Ejercicio 77

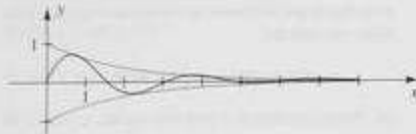


78. En la figura se ilustra la gráfica de la ecuación

$$y = e^{-x/2} \sin 2x.$$

Las coordenadas de x de los puntos de retorno de la gráfica son soluciones de $4 \cos 2x - \sin 2x = 0$. Calcula las coordenadas x de estos puntos para $x > 0$.

Ejercicio 78



Ejercicios 79 y 80: si $I(t)$ es la corriente (en amperes) de un circuito de corriente alterna en el instante t (en segundos), determina el mínimo valor exacto de t para el que $I(t) = k$.

79. $I(t) = 20 \sin(60\pi t - 6\pi)$; $k = -10$

80. $I(t) = 40 \sin(100\pi t - 4\pi)$; $k = 20$

Ejercicios 81 al 84: aproxima la solución de cada desigualdad en el intervalo $[0, 2\pi]$.

81. $\cos x \geq 0.3$

82. $\sin x < -0.6$

83. $\cos 3x < \sin x$

84. $\tan x \leq \sin 2x$

Ejercicios 85 y 86: traza la gráfica de f en la ventana o pantalla $[0, 3]$ por $[-1.5, 1.5]$.

(a) Aproxima a cuatro decimales la máxima solución de $f(x) = 0$ en $[0, 3]$.

(b) Explica lo que sucede con la gráfica de f cuando x es grande.

(c) Examina las gráficas de f en el intervalo $[0, c]$, cuando $c = 0.1, 0.01$ y 0.001 . ¿Cuántos ceros parece tener f en el intervalo $[0, c]$, cuando $c > 0$?

85. $f(x) = \cos \frac{1}{x}$

86. $f(x) = \sin \frac{1}{x^2}$

Ejercicios 87 al 90: como los planetas no siguen órbitas circulares exactas, para calcular la posición de un planeta se requiere resolver la ecuación de Kepler, que no puede solucionarse algebraicamente. Tiene la forma $M = \theta + e \sin \theta$, siendo M la anomalía media, e la excentricidad de la órbita y θ un ángulo llamado anomalía excéntrica. Para los valores de M y e de la lista de abajo, utiliza técnicas gráficas para determinar θ con la ecuación de Kepler, con tres decimales de aproximación.

87. Posición de Mercurio. $M = 5.241$, $e = 0.206$

88. Posición de Marte. $M = 4.028$, $e = 0.093$

89. Posición de la Tierra. $M = 3.611$, $e = 0.0167$

90. Posición de Plutón. $M = 0.09424$, $e = 0.255$

Ejercicios 91 al 96: estima las soluciones de la ecuación en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

91. $\sin 2x = 2 - x^2$

92. $\cos^3 x + \cos 3x - \sin^3 x = 0$

93. $\ln(1 + \sin^2 x) = \cos x$

94. $e^{\cos x} = \sec\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)$

95. $3 \cos^4 x - 2 \cos^3 x + \cos x - 1 = 0$

96. $\cos 2x + \sin 3x - \tan \frac{1}{2}x = 0$

97. Peso a diversas latitudes. El peso W de una persona en la superficie terrestre es directamente proporcional a la fuerza de gravedad g (en m/s^2). Debido a la rotación del planeta, éste se ha achatado en los polos y, como resultado, el peso varía en las diferentes latitudes. Si θ es la latitud, entonces g se puede aproximar con $g = 9.80665(1 - 0.00264 \cos 2\theta)$.

(a) ¿A qué latitud es $g = 9.8$?

(b) Si una persona pesa 150 libras en el ecuador ($\theta = 0^\circ$), ¿en qué latitud pesará 150.5 libras?

7.3

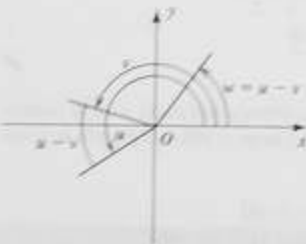
Fórmulas de suma y resta

En esta sección deduciremos fórmulas con funciones trigonométricas de $u + v$ o $u - v$ para cualesquiera números reales o ángulos u y v , las cuales se conocen como fórmulas de suma y resta, respectivamente, o como identidades de suma y diferencia. La primera fórmula que consideramos se puede expresar así:

Fórmulas de suma y resta

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

Figura 1



DEMOSTRACIÓN Sean u y v cualesquiera números reales, y considere los ángulos u y v en radianes. Sea $w = u - v$. En la figura 1 se ilustra una posibilidad con los ángulos en posición estándar. Por conveniencia, hemos supuesto que tanto u como v son positivos y que $0 \leq u - v < v$.

Al igual que en la figura 2, $P(u_1, u_2)$, $Q(v_1, v_2)$ y $R(w_1, w_2)$ serán los puntos de los lados terminales de los ángulos indicados que estén cada uno a una distancia 1 del origen. En este caso, P , Q y R se localizan en la circunferencia unitaria U con centro en el origen. A partir de la definición de funciones trigonométricas en términos de una circunferencia unitaria,

$$\begin{aligned} \cos u &= u_1 & \cos v &= v_1 & \cos(u - v) &= w_1 \\ \sin u &= u_2 & \sin v &= v_2 & \sin(u - v) &= w_2 \end{aligned} \quad (*)$$

Figura 2



Enseguida se observa que la distancia entre $A(1, 0)$ y R debe ser igual a la distancia entre Q y P porque los ángulos AOR y QOP tienen la misma medida, $u - v$. Con la fórmula de la distancia se obtiene

$$\begin{aligned} d(A, R) &= d(Q, P) \\ \sqrt{(w_1 - 1)^2 + (w_2 - 0)^2} &= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2} \end{aligned}$$

Ambos lados se elevan al cuadrado, se simplifican las expresiones bajo los radicales y resulta lo siguiente:

$$w_1^2 - 2w_1 + 1 + w_2^2 = u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2$$

Como los puntos (u_1, u_2) , (v_1, v_2) y (w_1, w_2) están en la circunferencia unitaria U y una ecuación para U es $x^2 + y^2 = 1$, se puede sustituir 1 para cada uno de los términos $u_1^2 + u_2^2$, $v_1^2 + v_2^2$ y $w_1^2 + w_2^2$. Al hacer esto y simplificar, se obtiene

$$2 - 2w_1 = 2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2$$

que se reduce a

$$w_1 = u_1v_1 + u_2v_2$$

Al sustituir en las fórmulas expresadas con (*) se obtiene

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v,$$

que es lo que se quería demostrar. Es posible ampliar este análisis a todos los valores de u y de v .

En el ejemplo siguiente se demuestra el uso de la fórmula de la resta para hallar el valor exacto de $\cos 15^\circ$. Por supuesto, si sólo se desea una aproximación, basta usar una calculadora.

EJEMPLO 1 Uso de la fórmula para la resta

Halla el valor exacto de $\cos 15^\circ$ aprovechando que $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$.

SOLUCIÓN Se utiliza la fórmula de la resta para el coseno con $u = 60^\circ$ y $v = 45^\circ$:

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos (60^\circ - 45^\circ) \\&= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\&= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\&= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Es relativamente fácil obtener una fórmula para $\cos(u + v)$. Se comienza por escribir $u + v$ como $u - (-v)$ y luego se utiliza la fórmula de la resta para coseno:

$$\begin{aligned}\cos(u + v) &= \cos[u - (-v)] \\&= \cos u \cos(-v) + \sin u \sin(-v)\end{aligned}$$

Al usar las fórmulas para negativos, $\cos(-v) = \cos v$ y $\sin(-v) = -\sin v$, se obtiene la siguiente fórmula.

**Fórmula de la suma
para el coseno**

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

EJEMPLO 2 Uso de la fórmula para la suma

Halla el valor exacto de $\cos \frac{7\pi}{12}$ usando el hecho de que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.

SOLUCIÓN Aplicamos la fórmula de la suma para el coseno:

$$\begin{aligned}\cos \frac{7\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \\&= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\&= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\&= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Figura 3



Las funciones seno y coseno se denominan **cofunciones** una de la otra. En forma análoga, las funciones tangente y cotangente son cofunciones, lo mismo que las funciones secante y cosecante. Si u es la medida en radianes de un ángulo agudo, el ángulo con medida en radianes $\pi/2 - u$ es complementario de u , y podemos considerar el triángulo rectángulo que se muestra en la figura 3. Al usar razones, se observa que

$$\operatorname{sen} u = \frac{a}{c} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - u \right)$$

$$\cos u = \frac{b}{c} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - u \right)$$

$$\tan u = \frac{a}{b} = \cot \left(\frac{\pi}{2} - u \right)$$

Estas tres fórmulas, y sus análogas para $\sec u$, $\csc u$ y $\cot u$, indican que el valor de la función de u es igual a la cofunción del ángulo complementario $\pi/2 - u$.

En las siguientes fórmulas usamos las fórmulas de la resta para ampliar estas relaciones a cualquier número u , suponiendo que los valores de la función están definidos.

Fórmulas de cofunciones

Si u es un número real o la medida en radianes de un ángulo, entonces

$$(1) \cos \left(\frac{\pi}{2} - u \right) = \operatorname{sen} u \quad (2) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - u \right) = \cos u$$

$$(3) \tan \left(\frac{\pi}{2} - u \right) = \cot u \quad (4) \cot \left(\frac{\pi}{2} - u \right) = \tan u$$

$$(5) \sec \left(\frac{\pi}{2} - u \right) = \csc u \quad (6) \csc \left(\frac{\pi}{2} - u \right) = \sec u$$

DEMOSTRACIÓN Al usar la fórmula de la resta para el coseno, tenemos

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\pi}{2} - u \right) &= \cos \frac{\pi}{2} \cos u + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} u \\ &= (0) \cos u + (1) \operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u. \end{aligned}$$

con lo que se obtiene la primera fórmula.

Si sustituimos $\pi/2 - v$ por u en la primera fórmula, llegamos a

$$\cos \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - v \right) \right] = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - v \right),$$

$$\text{o} \quad \cos v = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - v \right).$$

(continúa)

Dado que el símbolo v es arbitrario, la ecuación equivale a la segunda fórmula de cofunción:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

Si usamos la identidad tangente, las fórmulas 1 y 2 de cofunción y la identidad cotangente, obtenemos una demostración de la tercera fórmula:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} = \frac{\cos u}{\sin u} = \cot u$$

Las demostraciones de las tres fórmulas restantes son semejantes.

Para recordar fácilmente las fórmulas de las cofunciones basta consultar el triángulo de la figura 3.

Ahora se pueden demostrar las siguientes identidades.

**Fórmulas de suma y resta
para seno y tangente**

$$(1) \sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$(2) \sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

$$(3) \tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$(4) \tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

DEMOSTRACIÓN Demostraremos las fórmulas 1 y 3. Con las fórmulas de cofunción y la fórmula de la resta para el coseno podemos comprobar la fórmula 1:

$$\begin{aligned} \sin(u + v) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (u + v)\right] \\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cos v + \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \sin v \\ &= \sin u \cos v + \cos u \sin v \end{aligned}$$

Para verificar la fórmula (3), se comienza por lo siguiente:

$$\begin{aligned}\tan(u+v) &= \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} \\ &= \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v - \sin u \sin v}\end{aligned}$$

Al dividir entre $\cos u \cos v$ se obtiene una expresión con tangentes; al dividir entre $\sin u \sin v$ se obtendría una expresión con cotangentes.

Si $\cos u \cos v \neq 0$, se divide el numerador y el denominador entre $\cos u \cos v$, con lo que resulta

$$\begin{aligned}\tan(u+v) &= \frac{\left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)\left(\frac{\cos v}{\cos v}\right) + \left(\frac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\frac{\sin v}{\cos v}\right)}{\left(\frac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\frac{\cos v}{\cos v}\right) - \left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)\left(\frac{\sin v}{\cos v}\right)} \\ &= \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}\end{aligned}$$

Si $\cos u \cos v = 0$, entonces $\cos u = 0$ o $\cos v = 0$. En este caso, una de las no está definida $\tan u$ o $\tan v$ y la fórmula no es válida. Las demostraciones de las fórmulas 2 y 4 se dejan como ejercicios.



EJEMPLO 3 Usar fórmulas de la suma para hallar el cuadrante que contiene a un ángulo

Supón que $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ y $\cos \beta = -\frac{12}{13}$, donde α está en el primer cuadrante y β está en el segundo.

- Halla los valores exactos de $\sin(\alpha + \beta)$ y $\tan(\alpha + \beta)$.
- Localiza el cuadrante que contiene $\alpha + \beta$.

SOLUCIÓN En la figura 4 se ilustran los ángulos α y β . No hay pérdida de generalidad al considerar α y β como ángulos positivos entre 0 y 2π , como se ha hecho en la figura. Dado que $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, podemos escoger el punto $(3, 4)$ en el lado terminal de α . En forma análoga, puesto que $\cos \beta = -\frac{12}{13}$, el punto $(-12, 5)$ está en el lado terminal de β . Si consultas la figura 4 y usas la definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo, verás que

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \tan \alpha = \frac{4}{3}, \quad \sin \beta = \frac{5}{13}, \quad \tan \beta = -\frac{5}{12}.$$

- Con la fórmula para la suma se obtiene

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{33}{65}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{4}{3} + \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{12}\right)} = \frac{36}{36} = \frac{33}{56}$$

- Como $\sin(\alpha + \beta)$ es negativo y $\tan(\alpha + \beta)$ es positiva, el ángulo $\alpha + \beta$ debe estar en el tercer cuadrante.

Figura 4

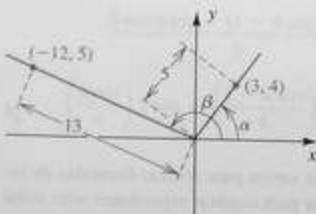


Figura 5

```

sin-1(4/5)→A
927295218
cos-1(-12/13)→B
2.746801534
sin(A+B)→Frac
-33/65
tan(A+B)→Frac
33/56

```

A continuación se describe cómo puede usarse una calculadora graficadora para encontrar valores exactos en el ejemplo 3. Como α está en el primer cuadrante, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ implica que $\alpha = \sin^{-1} \frac{4}{5}$; y como β está en el segundo cuadrante, $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ implica que $\beta = \cos^{-1}(-\frac{12}{13})$. (Si los ángulos estuviesen en cuadrantes diferentes, podríamos usar ángulos de referencia, como se hizo en la sección 6.4). En la figura 5 guardamos los ángulos α y β en las ubicaciones A y B y luego encontramos los valores exactos de $\sin(\alpha + \beta)$ y $\tan(\alpha + \beta)$ como fracciones. Los valores coinciden con los que se encontraron en el ejemplo 3.

En el ejemplo siguiente se ilustra un tipo de simplificación del cociente de diferencias (el cual se introdujo en la sección 3.4) con la función seno. La forma que resulta es útil en cálculo.

EJEMPLO 4 Una fórmula usada en cálculo

Si $f(x) = \sin x$ y $h \neq 0$, demuestra que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right)$$

SOLUCIÓN Usamos la definición de f y la fórmula de la suma para el seno:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
 &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
 &= \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
 &= \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right)
 \end{aligned}$$

Las fórmulas de la suma también sirven para obtener **fórmulas de reducción**. Estas últimas se pueden usar para cambiar expresiones tales como

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) \quad \text{y} \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) \quad \text{para cualquier entero } n$$

por expresiones donde sólo haya $\sin \theta$ o $\cos \theta$. Fórmulas semejantes son verdaderas para las demás funciones trigonométricas. En lugar de deducir fórmulas generales de reducción, ilustraremos dos casos especiales en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Obtener fórmulas de reducción

En términos de una sola función trigonométrica de θ , expresa:

$$(a) \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) \quad (b) \cos(\theta + \pi)$$

SOLUCIÓN Si se usan las fórmulas de la suma y la resta, se obtiene:

$$\begin{aligned}(a) \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) &= \sin \theta \cos \frac{3\pi}{2} - \cos \theta \sin \frac{3\pi}{2} \\ &= \sin \theta \cdot (0) - \cos \theta \cdot (-1) = \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) \cos(\theta + \pi) &= \cos \theta \cos \pi - \sin \theta \sin \pi \\ &= \cos \theta \cdot (-1) - \sin \theta \cdot (0) = -\cos \theta.\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Combinar una suma con funciones de seno y coseno

Sean a y b números reales con $a > 0$. Demuestra que para toda x ,

$$a \cos Bx + b \sin Bx = A \cos(Bx - C),$$

Como $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$,

también podemos expresar la suma en términos de una función seno.

donde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan C = \frac{b}{a}$ con $-\frac{\pi}{2} < C < \frac{\pi}{2}$.

SOLUCIÓN Dados $a \cos Bx + b \sin Bx$, consideremos $\tan C = b/a$ con $-\pi/2 < C < \pi/2$; por tanto, $b = a \tan C$, y se puede escribir

$$a \cos Bx + b \sin Bx = a \cos Bx + (a \tan C) \sin Bx$$

$$= a \cos Bx + a \frac{\sin C}{\cos C} \sin Bx$$

$$= \frac{a}{\cos C} (\cos C \cos Bx + \sin C \sin Bx)$$

$$= (a \sec C) \cos(Bx - C).$$

Completaremos la demostración al probar que $a \sec C = \sqrt{a^2 + b^2}$. Puesto que $-\pi/2 < C < \pi/2$, deducimos que $\sec C$ es positiva y, por tanto,

$$a \sec C = a \sqrt{1 + \tan^2 C}.$$

Con $\tan C = b/a$ y $a > 0$, obtenemos

$$a \sec C = a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

EJEMPLO 7 Una aplicación del ejemplo 6

Si $f(x) = \cos x + \sin x$, usa las fórmulas del ejemplo 6 para expresar $f(x)$ en la forma $A \cos(Bx - C)$ y luego traza la gráfica de f .

SOLUCIÓN Con $a = 1$, $b = 1$ y $B = 1$ en las fórmulas del ejemplo 6, tenemos

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \tan C = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1.$$

Como $\tan C = 1$ y $-\pi/2 < C < \pi/2$, se obtiene $C = \pi/4$. Sustituyendo por a , b , A , B y C en la fórmula

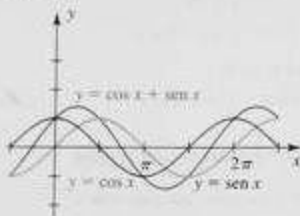
$$a \cos Bx + b \sin Bx = A \cos (Bx - C)$$

se obtiene

$$f(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

Al comparar la última fórmula con la ecuación $y = a \cos (bx + c)$, que estudiamos en la sección 6.5, vemos que la amplitud de la gráfica es $\sqrt{2}$, el periodo es 2π y el desfaseamiento es $\pi/4$. En la figura 6 aparece la gráfica de f , en donde también se muestran las gráficas de $y = \sin x$ y $y = \cos x$. Estos trazos concuerdan con el obtenido en el capítulo 6, donde se utilizó un equipo graficador (figura 10, sección 6.6).

Figura 6



7.3 Ejercicios

Ejercicios 1 al 4: expresa como cofunción de un ángulo complementario.

1 (a) $\sin 46^\circ 37'$ (b) $\cos 73^\circ 12'$

(c) $\tan \frac{\pi}{6}$ (d) $\sec 17.28^\circ$

2 (a) $\tan 24^\circ 12'$ (b) $\sin 89^\circ 41'$

(c) $\cos \frac{\pi}{3}$ (d) $\cot 61.87^\circ$

3 (a) $\cos \frac{7\pi}{20}$ (b) $\sin \frac{1}{4}$

(c) $\tan 1$ (d) $\csc 0.53$

4 (a) $\sin \frac{\pi}{12}$ (b) $\cos 0.64$

(c) $\tan \sqrt{2}$ (d) $\sec 1.2$

Ejercicios 5 al 10: halla los valores exactos.

5 (a) $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6}$

(b) $\cos \frac{5\pi}{12}$ (use $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$)

6 (a) $\sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4}$

(b) $\sin \frac{11\pi}{12}$ (use $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$)

7 (a) $\tan 60^\circ + \tan 225^\circ$

(b) $\tan 285^\circ$ (use $285^\circ = 60^\circ + 225^\circ$)

8 (a) $\cos 135^\circ - \cos 60^\circ$

(b) $\cos 75^\circ$ (use $75^\circ = 135^\circ - 60^\circ$)

$$9 \text{ (a) } \sin \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6}$$

$$(b) \sin \frac{7\pi}{12} \left(\text{use } \frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$10 \text{ (a) } \tan \frac{3\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}$$

$$(b) \tan \frac{7\pi}{12} \left(\text{use } \frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right)$$

Ejercicios 11 al 16: expresa como función trigonométrica de un ángulo.

$$11 \cos 48^\circ \cos 23^\circ + \sin 48^\circ \sin 23^\circ$$

$$12 \cos 13^\circ \cos 50^\circ - \sin 13^\circ \sin 50^\circ$$

$$13 \cos 10^\circ \sin 5^\circ - \sin 10^\circ \cos 5^\circ$$

$$14 \sin 57^\circ \cos 4^\circ + \cos 57^\circ \sin 4^\circ$$

$$15 \cos 3 \sin (-2) - \cos 2 \sin 3$$

$$16 \sin (-5) \cos 2 + \cos 5 \sin (-2)$$

17 Si α y β son ángulos agudos tales que $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ y $\tan \beta = \frac{6}{13}$, encuentra

$$(a) \sin(\alpha + \beta) \quad (b) \cos(\alpha + \beta)$$

(c) El cuadrante que contiene $\alpha + \beta$

18 Si α y β son ángulos agudos tales que $\csc \alpha = \frac{13}{12}$ y $\cot \beta = \frac{4}{3}$, halla

$$(a) \sin(\alpha + \beta) \quad (b) \tan(\alpha + \beta)$$

(c) El cuadrante que contiene a $\alpha + \beta$

19 Si $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ y $\sec \beta = \frac{5}{3}$ para un ángulo α en el tercer cuadrante y un ángulo β en el primer cuadrante, encuentra

$$(a) \sin(\alpha + \beta) \quad (b) \tan(\alpha + \beta)$$

(c) El cuadrante que contiene a $\alpha + \beta$

20 Si $\tan \alpha = -\frac{7}{24}$ y $\cot \beta = \frac{3}{4}$ para un ángulo α en el segundo cuadrante y un ángulo β en el tercer cuadrante, determina

$$(a) \sin(\alpha + \beta) \quad (b) \cos(\alpha + \beta) \quad (c) \tan(\alpha + \beta)$$

$$(d) \sin(\alpha - \beta) \quad (e) \cos(\alpha - \beta) \quad (f) \tan(\alpha - \beta)$$

21 Si α y β son ángulos en el tercer cuadrante tales que $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ y $\cos \beta = -\frac{1}{5}$, encuentra

$$(a) \sin(\alpha - \beta) \quad (b) \cos(\alpha - \beta)$$

(c) El cuadrante que contiene $\alpha - \beta$

22 Si α y β son ángulos en el segundo cuadrante tales que $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ y $\cos \beta = -\frac{1}{5}$, halla

$$(a) \sin(\alpha + \beta) \quad (b) \tan(\alpha + \beta)$$

(c) El cuadrante que contiene a $\alpha + \beta$

Ejercicios 23 al 34: comprueba la fórmula de reducción.

$$23 \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta \quad 24 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$25 \sin\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = -\cos x \quad 26 \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos \theta$$

$$27 \cos(\theta - \pi) = -\cos \theta \quad 28 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$29 \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x \quad 30 \cos\left(\theta - \frac{5\pi}{2}\right) = \sin \theta$$

$$31 \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x \quad 32 \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

$$33 \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta$$

$$34 \tan(x + \pi) = \tan x$$

Ejercicios 35 al 44: verifica la identidad.

$$35 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \theta + \cos \theta)$$

$$36 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta - \sin \theta)$$

$$37 \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

$$38 \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$$

$$39 \cos (u + v) + \cos (u - v) = 2 \cos u \cos v$$

$$40 \sin (u + v) + \sin (u - v) = 2 \sin u \cos v$$

$$41 \sin (u + v) - \sin (u - v) = \sin^2 u - \sin^2 v$$

$$42 \cos (u + v) - \cos (u - v) = \cos^2 u - \cos^2 v$$

$$43 \frac{1}{\cos \alpha - \cos \beta} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}$$

$$44 \frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

45 Expresa $\sin (u + v + w)$ en términos de funciones trigonométricas de u , v y w . (Sugerencia: escribe

$$\sin (u + v + w) \text{ como } \sin [(u + v) + w]$$

y usa las fórmulas para la suma.)

46 Expresa $\tan (u + v + w)$ en términos de funciones trigonométricas de u , v y w .

$$47 \text{ Obtén la fórmula } \cot (u + v) = \frac{\cot u \cot v - 1}{\cot u + \cot v}.$$

48 Si α y β son ángulos complementarios, demuestra que $\sec^2 \alpha + \sec^2 \beta = 1$.

49 Deriva la fórmula de la resta para la función seno.

50 Deriva la fórmula de la resta para la función tangente.

51 Si $f(x) = \cos x$, demuestra que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) - \sin x \left(\frac{\sin h}{h} \right)$$

52 Si $f(x) = \tan x$, demuestra que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sec^2 x \left(\frac{\sin h}{h} \right) \frac{1}{\cos h - \sin h \tan x}$$

Ejercicios 53 y 54: (a) compara las aproximaciones decimales de los dos lados de la ecuación (1). (b) Halla el ángulo

agudo x con el cual la ecuación (2) sea una identidad. (c) ¿Cuál es la relación entre la ecuación (1) y la ecuación (2)?

$$53 \quad (1) \sin 63^\circ - \sin 57^\circ = \sin 3^\circ$$

$$(2) \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) = \sin \beta$$

$$54 \quad (1) \sin 35^\circ + \sin 25^\circ = \cos 5^\circ$$

$$(2) \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) = \cos \beta$$

Ejercicios 55 al 60: usa una fórmula de suma o resta para hallar las soluciones de la ecuación que están en el intervalo $[0, \pi]$.

$$55 \sin 4t \cos t = \sin t \cos 4t$$

$$56 \cos 5t \cos 3t = \frac{1}{2} + \sin (-5t) \sin 3t$$

$$57 \cos 5t \cos 2t = -\sin 5t \sin 2t$$

$$58 \sin 3t \cos t + \cos 3t \sin t = -\frac{1}{2}$$

$$59 \tan 2t + \tan t = 1 - \tan 2t \tan t$$

$$60 \tan t - \tan 4t = 1 + \tan 4t \tan t$$

Ejercicios 61 al 64: (a) utiliza la fórmula del ejemplo 6 para expresar f en términos de la función coseno. (b) Determina la amplitud, el periodo y el desfase de f . (c) Traza la gráfica de f .

$$61 f(x) = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x$$

$$62 f(x) = \cos 4x + \sqrt{3} \sin 4x$$

$$63 f(x) = 2 \cos 3x - 2 \sin 3x$$

$$64 f(x) = 5 \cos 10x - 5 \sin 10x$$

Ejercicios 65 y 66: para ciertas aplicaciones en ingeniería eléctrica, la suma de varias señales de voltaje u ondas de

radio de la misma frecuencia tiene su expresión en la forma compacta $y = A \cos(Bt - C)$. Expresa la señal dada en esta forma.

65. $y = 50 \sin 60\pi t + 40 \cos 60\pi t$

66. $y = 10 \sin\left(120\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 5 \sin 120\pi t$

67. **Movimiento de una masa** Si una masa sujeta a un resorte se eleva y_0 pies y se suelta con una velocidad vertical inicial de v_0 pies/s, la posición subsecuente y de la masa está dada por

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

donde t es el tiempo en segundos y ω es una constante positiva.

- (a) Si $\omega = 1$, $y_0 = 2$ pies y $v_0 = 3$ pies/s, expresa y en la forma $A \cos(Bt - C)$ y encuentra la amplitud y el período del movimiento resultante.
- (b) Determina los instantes en que $y = 0$, es decir, cuando la masa pasa por la posición de equilibrio.
68. **Movimiento de una masa** Consulta el ejercicio 67. Si $y_0 = 1$ y $\omega = 2$, encuentra las velocidades iniciales que resultan en una amplitud de 4 pies.

69. **Presión en el tímpano** Si se golpea ligeramente un diapason y luego se mantiene a cierta distancia del tímpano, la presión $p_1(t)$ en la parte exterior del tímpano en el instante t se puede representar por $p_1(t) = A \sin \omega t$, donde A y ω son constantes positivas. Si otro diapason idéntico se golpea con una fuerza diferente y se sostiene a una distancia distinta (ve la figura), su efecto se puede representar por $p_2(t) = B \sin(\omega t + \tau)$, donde B es una constante positiva y $0 \leq \tau \leq 2\pi$. La presión total $p(t)$ en el tímpano está dada por

$$p(t) = A \sin \omega t + B \sin(\omega t + \tau).$$

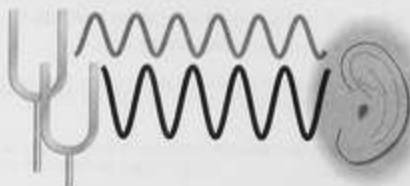
- (a) Demuestra que $p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, donde

$$a = B \sin \tau \quad \text{y} \quad b = A + B \cos \tau.$$

- (b) Prueba que la amplitud C de p está dada por

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \tau.$$

Ejercicio 69



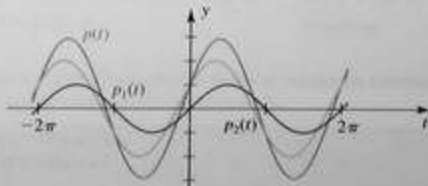
70. **Interferencia destructiva** Consulta el ejercicio 69. Una interferencia destructiva se presenta si la amplitud de la onda acústica resultante es menor que A . Supón que los dos diapasones son golpeados por la misma fuerza; esto es, $A = B$.

- (a) Cuando ocurre una interferencia destructiva total, la amplitud de p es cero y no se escucha nada. Encuentra el mínimo valor positivo de τ para que esto suceda.
- (b) Determina el intervalo (a, b) de τ para que haya interferencia destructiva y a tenga el mínimo valor positivo.

71. **Interferencia constructiva** Consulta el ejercicio 69. Si se golpean dos diapasones, hay interferencia constructiva si la amplitud C de la onda acústica resultante es mayor que A o B (observa la figura).

- (a) Demuestra que $C \leq A + B$.
- (b) Halla los valores de τ tales que $C = A + B$.
- (c) Si $A \geq B$, determina una condición en que se presente interferencia constructiva.

Ejercicio 71



72. **Presión en el tímpano** Consulta el ejercicio 69. Si dos diapasones de frecuencias diferentes se golpean en forma

simultánea con fuerza distinta, la presión total $p(t)$ sobre el tímpano en el instante t está dada por

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = A \sin \omega_1 t + B \sin (\omega_2 t + \tau),$$

en donde A , B , ω_1 , ω_2 y τ son constantes.

- (a) Grafica p para $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ si $A = B = 2$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 20$, y $\tau = 3$.
- (b) Con la gráfica describe la variación del tono que se produce.



Ejercicios 73 y 74: consulta el ejercicio 71. Grafica la ecuación para $-\pi \leq t \leq \pi$, y estima los intervalos en que ocurre interferencia constructiva.

$$73 \quad y = 3 \sin 2t + 2 \sin (4t + 1)$$

$$74 \quad y = 2 \sin t + 2 \sin (3t + 3)$$

7.4

Fórmulas de ángulos múltiples

Las fórmulas consideradas en esta sección se conocen como **fórmulas de ángulo múltiple**. En particular, las siguientes identidades son **fórmulas de ángulo doble**, porque contienen la expresión $2u$.

Fórmulas de ángulo doble

$$(1) \quad \sin 2u = 2 \sin u \cos u$$

$$(2) \quad (a) \quad \cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$

$$(b) \quad \cos 2u = 1 - 2 \sin^2 u$$

$$(c) \quad \cos 2u = 2 \cos^2 u - 1$$

$$(3) \quad \tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

DEMOSTRACIÓN Es posible demostrar cada una de estas fórmulas con $v = u$ en las fórmulas adecuadas de la suma. Si usamos la fórmula para $\sin(u + v)$, entonces

$$\begin{aligned} \sin 2u &= \sin(u + u) \\ &= \sin u \cos u + \cos u \sin u \\ &= 2 \sin u \cos u. \end{aligned}$$

Con la fórmula para $\cos(u + v)$, tenemos

$$\begin{aligned} \cos 2u &= \cos(u + u) \\ &= \cos u \cos u - \sin u \sin u \\ &= \cos^2 u - \sin^2 u. \end{aligned}$$

Para obtener las otras dos formas para $\cos 2u$ en 2(b) y 2(c), utilizamos la identidad fundamental $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \cos 2u &= \cos^2 u - \sin^2 u \\ &= (1 - \sin^2 u) - \sin^2 u \\ &= 1 - 2 \sin^2 u. \end{aligned}$$

En forma análoga, si se sustituye $\sec^2 u$ en lugar de $\cos^2 u$, se obtiene

$$\begin{aligned}\cos 2u &= \cos^2 u - (1 - \cos^2 u) \\ &= 2 \cos^2 u - 1.\end{aligned}$$

La fórmula 3 para $\tan 2u$ se obtiene con $v = u$ en la fórmula para $\tan(u + v)$.



EJEMPLO 1 Usar fórmulas de ángulo doble

Si $\sec \alpha = \frac{4}{3}$ y α es un ángulo agudo, halla los valores exactos de $\sin 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$.

SOLUCIÓN Si α se considera como un ángulo agudo de un triángulo rectángulo (figura 1), se obtiene $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. A continuación se sustituye en las fórmulas de ángulo doble:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{8}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} - \frac{16}{16} = -\frac{7}{16}$$

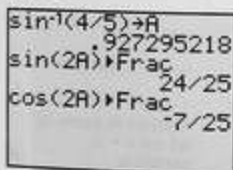
Figura 1



En la figura 2 se muestra una forma de encontrar los valores del ejemplo 1 con una calculadora.

En el ejemplo siguiente se demuestra cómo cambiar una expresión de ángulo múltiple a una de un solo ángulo.

Figura 2



EJEMPLO 2 Cambiar la forma de $\cos 3\theta$

Expresa $\cos 3\theta$ en términos de $\cos \theta$.

SOLUCIÓN

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$$

$$= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta$$

$$= (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - (2 \sin \theta \cos \theta) \sin \theta$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$3\theta = 2\theta + \theta$$

fórmula de la suma

fórmulas de
ángulo doble

multiplicar

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

simplificar

Cada una de las tres fórmulas siguientes recibe el nombre de **identidad de ángulo mitad**, porque u es la mitad del número $2u$.

Identidades de ángulo mitad

$$(1) \sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$(2) \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$(3) \tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

DEMOSTRACIÓN La primera identidad se puede verificar así:

$$\cos 2u = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u \quad \text{fórmula de ángulo doble } 2u$$

$$2 \operatorname{sen}^2 u = 1 - \cos 2u \quad \text{despejar para } 2 \operatorname{sen}^2 u$$

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2} \quad \text{dividir entre 2}$$

La segunda identidad se puede obtener de modo semejante con

$$\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1.$$

La tercera identidad se obtiene de las dos primeras, al advertir que

$$\tan^2 u = (\tan u)^2 = \left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \right)^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u}.$$

Las identidades de ángulo mitad sirven para expresar potencias pares de funciones trigonométricas en términos de funciones con exponente 1, como se expone en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 3 Usar identidades de ángulo mitad para comprobar una identidad

Verifica la identidad $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) && \text{identidades de ángulo mitad} \\ &= \frac{1}{4}(1 - \cos^2 2x) && \text{multiplicar} \\ &= \frac{1}{4}(\operatorname{sen}^2 2x) && \operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 2x = 1 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) && \text{identidad de ángulo mitad con } u = 2x \\ &= \frac{1}{8}(1 - \cos 4x) && \text{multiplicar} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Usar identidades de ángulo mitad para reducir una potencia de $\cos t$

Expresa $\cos^4 t$ en términos de valores de la función coseno con exponente 1.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \cos^4 t &= (\cos^2 t)^2 && \text{ley de exponentes} \\ &= \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 && \text{identidad de ángulo mitad} \\ &= \frac{1}{4}(1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) && \text{elevar al cuadrado} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) && \text{identidad de ángulo mitad con } u = 2t \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t && \text{simplificar} \end{aligned}$$

Si sustituyes $v/2$ por u en las tres identidades de ángulo mitad tendrás

$$\sin^2 \frac{v}{2} = \frac{1 - \cos v}{2} \quad \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1 + \cos v}{2} \quad \tan^2 \frac{v}{2} = \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}$$

Tomamos las raíces cuadradas de ambos lados de cada una de estas ecuaciones y obtenemos las *fórmulas de ángulo mitad*, llamadas así para distinguirlas de las identidades de los ángulos mitad.

Fórmulas del ángulo mitad

$$\begin{aligned} (1) \sin \frac{v}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}} & (2) \cos \frac{v}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}} \\ (3) \tan \frac{v}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}} \end{aligned}$$

Al usar una fórmula de ángulo mitad, se selecciona el signo $+$ o el $-$, dependiendo del cuadrante que contenga el ángulo $v/2$ medido en radianes; por tanto, para $\sin(v/2)$, se usa $+$ si $v/2$ es un ángulo del primero o segundo cuadrante, y $-$ si $v/2$ está en el tercero o cuarto cuadrante. Para $\cos(v/2)$, se utiliza $+$ si $v/2$ está en el primero o cuarto cuadrante, y así sucesivamente.

EJEMPLO 5 Usar fórmulas de ángulo mitad para el seno y coseno

Halla los valores exactos de

(a) $\sin 22.5^\circ$ (b) $\cos 112.5^\circ$

SOLUCIÓN

(a) Elegimos el signo positivo porque 22.5° está en el primer cuadrante, por lo que $\sin 22.5^\circ > 0$.

$$\begin{aligned} \sin 22.5^\circ &= +\sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} && \text{fórmula de ángulo mitad para seno con } v = 45^\circ \\ &= \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{2}} && \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} && \text{multiplicar radicando por } \frac{2}{2} \text{ y simplificar} \end{aligned}$$

(b) Análogamente, escogemos el signo negativo porque 112.5° está en el segundo cuadrante y, por tanto, $\cos 112.5^\circ < 0$.

$$\begin{aligned} \cos 112.5^\circ &= -\sqrt{\frac{1 + \cos 225^\circ}{2}} && \text{fórmula de ángulo mitad para coseno} \\ & && \text{donde } v = 225^\circ \\ &= -\sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{2}} && \cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} && \text{multiplicar el radicando por } \frac{2}{2} \text{ y simplificar} \end{aligned}$$

Se puede obtener una forma alternativa a la fórmula de ángulo mitad para $\tan(v/2)$. Al multiplicar el numerador y el denominador del radicando de la tercera fórmula de ángulo mitad por $1 - \cos v$, tendremos

$$\begin{aligned}\tan \frac{v}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v} \cdot \frac{1 - \cos v}{1 - \cos v}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos v)^2}{1 - \cos^2 v}} \\ &= \pm \frac{\sqrt{(1 - \cos v)^2}}{\sqrt{\sin^2 v}} = \pm \frac{1 - \cos v}{\sin v}.\end{aligned}$$

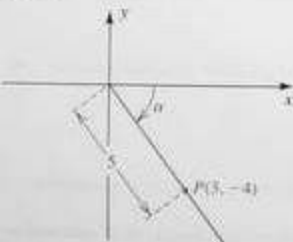
Podemos eliminar el signo \pm de la fórmula precedente. Observa primero que el numerador $1 - \cos v$ nunca es negativo. Se puede demostrar que $\tan(v/2)$ y $\sin v$ siempre tienen el mismo signo; por ejemplo, si $0 < v < \pi$, entonces $0 < v/2 < \pi/2$ y, en consecuencia, $\sin v$ y $\tan(v/2)$ son positivos. Si $\pi < v < 2\pi$, entonces $\pi/2 < v/2 < \pi$, por lo cual $\sin v$ y $\tan(v/2)$ son negativos, lo que da la primera de las siguientes dos identidades. La segunda identidad para $\tan(v/2)$ se obtiene multiplicando el numerador y el denominador del radicando de la tercera fórmula de ángulo mitad por $1 + \cos v$.

Fórmulas de ángulo mitad para la tangente

$$(1) \tan \frac{v}{2} = \frac{1 - \cos v}{\sin v}$$

$$(2) \tan \frac{v}{2} = \frac{\sin v}{1 + \cos v}$$

Figura 3



EJEMPLO 6 Usar una fórmula de ángulo mitad para la tangente

Si $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ y α está en el cuarto cuadrante, halla $\tan \frac{\alpha}{2}$.

SOLUCIÓN Si se escoge el punto $(3, -4)$ en el lado terminal de α (figura 3), entonces $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ y $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. La aplicación de la primera fórmula de ángulo mitad de la tangente resulta en lo siguiente

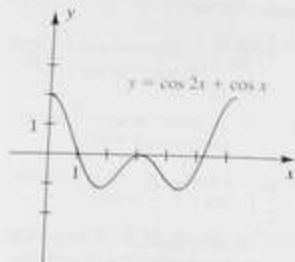
$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{1}{2}.$$



EJEMPLO 7 Hallar las intersecciones en x de una gráfica

En la figura 4 se muestra una gráfica de la ecuación $y = \cos 2x + \cos x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$. Se aprecia que las intersecciones en x son aproximadamente 1.1, 3.1 y 5.2. Halla sus valores exactos y aproximaciones de tres lugares decimales.

Figura 4



SOLUCIÓN Para hallar las intersecciones en x , se procede de esta forma:

$$\begin{aligned}
 \cos 2x + \cos x &= 0 && \text{sea } y = 0 \\
 (2 \cos^2 x - 1) + \cos x &= 0 && \text{fórmula de ángulo doble } 2(x) \\
 2 \cos^2 x + \cos x - 1 &= 0 && \text{ecuación equivalente} \\
 (2 \cos x - 1)(\cos x + 1) &= 0 && \text{factorizar} \\
 2 \cos x - 1 = 0, & \cos x + 1 = 0 && \text{teorema del factor 0} \\
 \cos x = \frac{1}{2}, & \cos x = -1 && \text{despejar } \cos x
 \end{aligned}$$

Las soluciones de las últimas dos ecuaciones en el intervalo $[0, 2\pi]$ dan estas intersecciones en x :

$$\frac{\pi}{3} = 1.047, \quad \frac{5\pi}{3} = 5.236, \quad \pi = 3.142$$

Figura 5



Figura 6



EJEMPLO 8 Deducir una fórmula para el área de un triángulo isósceles

Un **triángulo isósceles** tiene dos lados iguales de longitud a con un ángulo θ entre ellos (figura 5). Expresa el área A del triángulo en términos de a y de θ .

SOLUCIÓN En la figura 6 vemos que la altura desde el punto P biseca el ángulo θ y que $A = \frac{1}{2}(2k)h = kh$. Por lo tanto, tendremos lo siguiente, donde $\theta/2$ es un ángulo agudo:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{k}{a} \qquad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{h}{a} \qquad \text{véase la figura 6}$$

$$k = a \sin \frac{\theta}{2} \qquad h = a \cos \frac{\theta}{2} \qquad \text{despejar } k \text{ y } h$$

A continuación encontramos el área:

$$A = a^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \qquad \text{sustituir en } A = kh \qquad (*)$$

$$= a^2 \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \qquad \text{fórmulas de ángulo mitad con } \theta/2 \text{ en el primer cuadrante}$$

$$= a^2 \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta}{4}} \qquad \text{ley de radicales}$$

$$= a^2 \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{4}} \qquad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$= \frac{1}{2} a^2 |\sin \theta| \qquad \text{tomar la raíz cuadrada}$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \sin \theta \qquad \sin \theta > 0 \text{ para } 0^\circ < \theta < 180^\circ$$

(continúa)

Otro método para simplificar (•) es escribir la fórmula de ángulo doble para el seno, $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$, como

$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$$

y proceder así:

$$\begin{aligned} A &= a^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} && \text{usar (•) en } A = ab \\ &= a^2 \cdot \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\theta}{2} \right) && \text{sea } u = \frac{\theta}{2} \text{ en (••)} \\ &= \frac{1}{2} a^2 \sin \theta && \text{simplificar} \end{aligned}$$

7.4 Ejercicios

Ejercicios 1 al 4: halla los valores exactos de $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ y $\tan 2\theta$ para los valores dados de θ .

1. $\cos \theta = \frac{3}{5}$; $0^\circ < \theta < 90^\circ$

2. $\cot \theta = \frac{4}{3}$; $180^\circ < \theta < 270^\circ$

3. $\sec \theta = -3$; $90^\circ < \theta < 180^\circ$

4. $\sin \theta = -\frac{4}{5}$; $270^\circ < \theta < 360^\circ$

Ejercicios 5 al 8: encuentra los valores exactos de $\sin(\theta/2)$, $\cos(\theta/2)$ y $\tan(\theta/2)$ para las condiciones dadas.

5. $\sec \theta = \frac{5}{4}$; $0^\circ < \theta < 90^\circ$

6. $\csc \theta = -\frac{5}{3}$; $-90^\circ < \theta < 0^\circ$

7. $\tan \theta = 1$; $-180^\circ < \theta < -90^\circ$

8. $\sec \theta = -4$; $180^\circ < \theta < 270^\circ$

Ejercicios 9 y 10: usa las fórmulas de ángulo mitad para determinar los valores exactos.

9. (a) $\cos 67^\circ 30'$ (b) $\sin 15^\circ$ (c) $\tan \frac{3\pi}{8}$

10. (a) $\cos 165^\circ$ (b) $\sin 157^\circ 30'$ (c) $\tan \frac{\pi}{8}$

Ejercicios 11 al 30: verifica la identidad.

11. $\sin 10\theta = 2 \sin 5\theta \cos 5\theta$

12. $\cos^2 3x - \sin^2 3x = \cos 6x$

13. $4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin x$

14. $\frac{\sin^2 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = 4 - 4 \sin^2 \alpha$

15. $(\sin t + \cos t)^2 = 1 + \sin 2t$

16. $\csc 2u = \frac{1}{2} \csc u \sec u$

17. $\sin 3u = \sin u (3 - 4 \sin^2 u)$

18. $\sin 4t = 4 \sin t \cos t (1 - 2 \sin^2 t)$

19. $\cos 4\theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$

20. $\cos 6t = 32 \cos^6 t - 48 \cos^4 t + 18 \cos^2 t - 1$

21. $\sin^4 t = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t$

22. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

23. $\sec 2\theta = \frac{\sec^2 \theta}{2 - \sec^2 \theta}$ 24. $\cot 2u = \frac{\cot^2 u - 1}{2 \cot u}$

25. $2 \sin^2 2t + \cos 4t = 1$ 26. $\tan \theta + \cot \theta = 2 \csc 2\theta$

$$27 \tan 3u = \frac{\tan u (3 - \tan^2 u)}{1 - 3 \tan^2 u}$$

$$28 \frac{1 + \sin 2v + \cos 2v}{1 + \sin 2v - \cos 2v} = \cot v$$

$$29 \tan \frac{\theta}{2} = \csc \theta - \cot \theta$$

$$30 \tan^2 \frac{\theta}{2} = 1 - 2 \cot \theta \csc \theta + 2 \cot^2 \theta$$

Ejercicios 31 al 34: escribe las siguientes expresiones en términos de la función coseno con exponente 1.

$$31 \cos^4 \frac{\theta}{2}$$

$$32 \cos^4 2x$$

$$33 \sin^4 2x$$

$$34 \sin^4 \frac{\theta}{2}$$

Ejercicios 35 al 42: halla las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$.

$$35 \sin 2t + \sin t = 0$$

$$36 \cos t - \sin 2t = 0$$

$$37 \cos u + \cos 2u = 0$$

$$38 \cos 2\theta - \tan \theta = 1$$

$$39 \tan 2x = \tan x$$

$$40 \tan 2t - 2 \cos t = 0$$

$$41 \sin \frac{1}{2}u + \cos u = 1$$

$$42 2 - \cos^2 x = 4 \sin^2 \frac{1}{2}x$$

43 Si $a > 0$, $b > 0$, y $0 < u < \pi/2$, demuestra que

$$a \sin u + b \cos u = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(u + v)$$

para $0 < v < \pi/2$, con

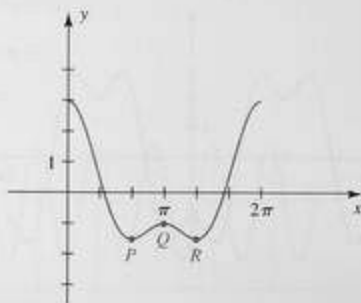
$$\sin v = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{y} \quad \cos v = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

44 Usa el ejercicio 43 para expresar $8 \sin u + 15 \cos u$ en la forma $c \sin(u + v)$.

45 En la figura se muestra una gráfica de $y = \cos 2x + 2 \cos x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

- (a) Aproxima las intersecciones en x hasta dos lugares decimales.
- (b) Las coordenadas x de los puntos de retorno P , Q y R de la gráfica son soluciones de la ecuación $\sin 2x + \sin x = 0$. Encuentra las coordenadas de esos puntos.

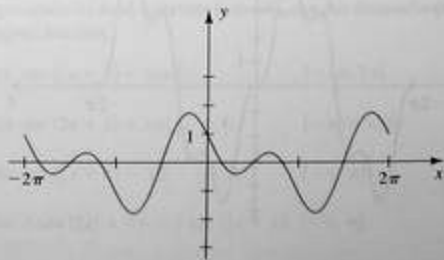
Ejercicio 45



46 En la figura se muestra una gráfica de $y = \cos x - \sin 2x$ para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

- (a) Encuentra las intersecciones en x .
- (b) Las coordenadas x de los ocho puntos de retorno en la gráfica son soluciones de $\sin x + 2 \cos 2x = 0$. Aproxima estas coordenadas de x hasta dos lugares decimales.

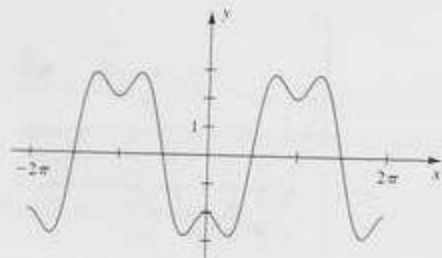
Ejercicio 46



47 En la figura se muestra una gráfica de $y = \cos 3x - 3 \cos x$ para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

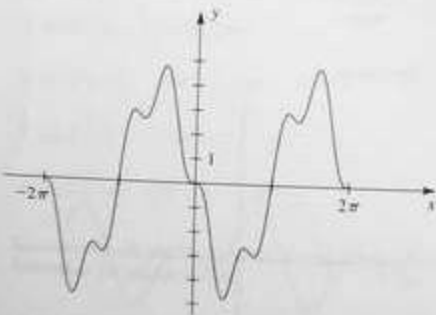
- (a) Halla las intersecciones en x . (*Sugerencia:* usa la fórmula para $\cos 3\theta$ del ejemplo 2.)
- (b) Las coordenadas x de los 13 puntos de retorno en la gráfica son soluciones de $\sin 3x = \sin x = 0$. Halla estas coordenadas de x . (*Sugerencia:* utiliza la fórmula para $\sin 3x$ del ejercicio 17.)

Ejercicio 47



- 48 En la figura se muestra una gráfica de $y = \sin 4x - 4 \sin x$ para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Halla las intersecciones en x . (*Sugerencia:* emplea la fórmula para $\sin 4t$ del ejercicio 18.)

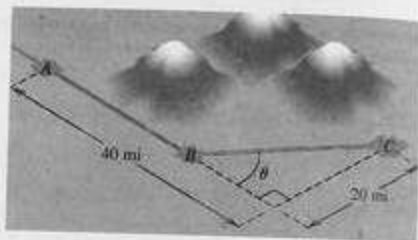
Ejercicio 48



- 49 Planeación de una ruta ferroviaria. En la figura se muestra una ruta ferroviaria propuesta para tres poblaciones ubicadas en los puntos A , B y C . La vía se desviará de B hacia C en un ángulo θ .

- (a) Demuestra que la distancia total d de A a C está dada por $d = 20 \tan \frac{1}{2} \theta + 40$.
- (b) Debido a las montañas que se encuentran entre A y C , el punto de desviación B debe estar al menos a 20 millas de A . ¿Hay una ruta que evite las montañas y mida exactamente 50 millas?

Ejercicio 49



- 50 Alcance de un proyectil. Si al nivel del suelo se dispara un proyectil con una velocidad inicial de v pies/s y en un ángulo de θ grados con la horizontal, el alcance R del proyectil está dado por

$$R = \frac{v^2}{16} \sin \theta \cos \theta$$

Si $v = 80$ pies/s calcula los ángulos que resultan en un alcance de 150 pies.

- 51 Construcción de un canal de desagüe. En la figura se ilustra el diseño de un canal de desagüe.

- (a) Expresa el volumen V como función de θ . (*Sugerencia:* ve el ejemplo 8.)
- (b) Aproxima el ángulo agudo θ que desagüe un volumen de 2 pies³.

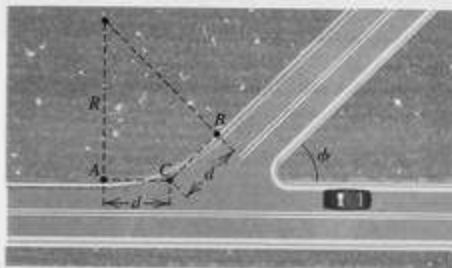
Ejercicio 51



52. Diseño de una guarnición. Un ingeniero está diseñando guarniciones en un punto en que dos carreteras se cruzan a un ángulo ϕ (ve la figura). La guarnición entre A y B ha de construirse usando un círculo tangente a la carretera en estos dos puntos.

- (a) Demuestra que la relación entre el radio R del círculo y la distancia d de la figura está dada por la ecuación $d = R \tan(\phi/2)$.
- (b) Si $\phi = 45^\circ$ y $d = 20$ pies, calcula R y la longitud de la guarnición.

Ejercicio 52



53. Bifurcación arterial. Una forma común de ramificación cardiovascular es la bifurcación, en que una arteria se divide en dos vasos sanguíneos más pequeños. El ángulo θ de bifurcación es el formado por las dos arterias más pequeñas; en la figura, la línea de A y D biseca el ángulo θ y es perpendicular a la línea de B y C .

- (a) Demuestra que la longitud l de la arteria de A a B está

$$\text{dada por } l = a + \frac{b}{2} \tan \frac{\theta}{4}.$$

- (b) Calcula l a partir de las tres mediciones $a = 10$ mm, $b = 6$ mm y $\theta = 156^\circ$.

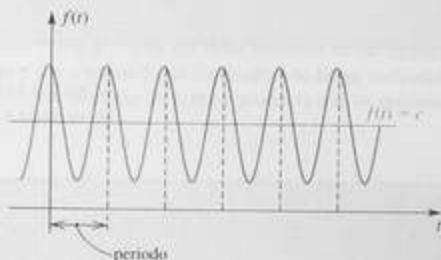
Ejercicio 53



54. Generación de calor en un circuito de CA. Por definición, el valor promedio de $f(t) = c + a \cos bt$ para uno o más ciclos completos es c (ve la figura).

- (a) Usa una fórmula de ángulo doble para hallar el valor promedio de $f(t) = \sin^2 \omega t$ para $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$, con t en segundos.
- (b) En un circuito eléctrico con una corriente alterna $I = I_0 \sin \omega t$, la razón r (en cal/s) a la que se produce calor en una resistencia de R ohms está dada por $r = RI^2$. Halla la razón promedio con que se genera calor para un ciclo completo.

Ejercicio 54



Ejercicios 55 y 56: con la gráfica de f halla la expresión $g(x)$ más sencilla, tal que la ecuación $f(x) = g(x)$ sea una identidad. Verifica esta identidad.

55 $f(x) = \frac{\sin 2x + \sin x}{\cos 2x + \cos x + 1}$

56 $f(x) = \frac{\sin x(1 + \cos 2x)}{\sin 2x}$

Ejercicios 57 al 62: resuelve gráficamente la ecuación trigonométrica en el intervalo indicado, con dos decimales de aproximación.

57 $\tan\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \sin \frac{1}{2}x; \quad [-2\pi, 2\pi]$

58 $\sec(2x + 1) = \cos \frac{1}{2}x + 1; \quad [-\pi/2, \pi/2]$

59 $\csc\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 1.5 - \cos 2x; \quad [-\pi, \pi]$

60 $3 \sin(2x) + 0.5 = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x + 1\right); \quad [-\pi, \pi]$

61 $2 \cot \frac{1}{4}x = 1 - \sec \frac{1}{4}x; \quad [-2\pi, 2\pi]$

62 $\tan\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin 2x; \quad [-\pi, \pi]$

7.5

Fórmulas de producto a suma y de suma a producto

Las siguientes fórmulas sirven para cambiar la forma de ciertas expresiones trigonométricas de productos a sumas. Se denominan **fórmulas de producto a suma** (aun cuando dos de ellas expresan un producto como diferencia) porque cualquier diferencia $x - y$ de dos números reales también es una suma $x + (-y)$. Con frecuencia, estas fórmulas se utilizan en cálculo como recursos auxiliares en un proceso llamado *integración*.

Fórmulas de producto a suma

$$(1) \quad \sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u+v) + \sin(u-v)]$$

$$(2) \quad \cos u \sin v = \frac{1}{2}[\sin(u+v) - \sin(u-v)]$$

$$(3) \quad \cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$$

$$(4) \quad \sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$$

DEMOSTRACIÓN Sumemos los lados izquierdo y derecho de las fórmulas de suma y resta para la función seno:

$$\begin{array}{rcl} \sin(u+v) & = & \sin u \cos v + \cos u \sin v \\ \sin(u-v) & = & \sin u \cos v - \cos u \sin v \\ \hline \sin(u+v) + \sin(u-v) & = & 2 \sin u \cos v \end{array}$$

Al dividir ambos lados de la última ecuación entre 2 tendremos la fórmula 1.

La fórmula 2 se obtiene al *restar* los lados izquierdo y derecho de las fórmulas de suma y resta para la función seno. Las fórmulas 3 y 4 se desarrollaron de modo semejante, usando las fórmulas de la suma y resta para la función coseno.

**EJEMPLO 1** Usar las fórmulas de producto a suma

Expresa como suma:

(a) $\sin 4\theta \cos 3\theta$ (b) $\sin 3x \sin x$

SOLUCIÓN

(a) Usamos la fórmula 1 de producto a suma con $u = 4\theta$ y $v = 3\theta$:

$$\begin{aligned} \sin 4\theta \cos 3\theta &= \frac{1}{2}[\sin(4\theta + 3\theta) + \sin(4\theta - 3\theta)] \\ &= \frac{1}{2}(\sin 7\theta + \sin \theta) \end{aligned}$$

También se puede obtener esta relación con la fórmula 2 de producto a suma.

(b) Empleamos la fórmula 4 de producto a suma con $u = 3x$ y $v = x$:

$$\begin{aligned} \sin 3x \sin x &= \frac{1}{2}[\cos(3x - x) - \cos(3x + x)] \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) \end{aligned}$$

Las fórmulas de producto a suma también sirven para expresar una suma o diferencia en forma de producto. A fin de obtener formas de aplicación más simples, cambiaremos la notación como sigue. Si dejamos que

$$u + v = a \quad \text{y} \quad u - v = b,$$

entonces $(u + v) + (u - v) = a + b$, que se simplifica a

$$u = \frac{a + b}{2}.$$

Del mismo modo, puesto que $(u + v) - (u - v) = a - b$, obtenemos

$$v = \frac{a - b}{2}.$$

Ahora se sustituyen $u + v$ y $u - v$ en los lados derechos de las fórmulas de producto a suma y u y v en los lados izquierdos. Si luego multiplicamos por 2, tendremos las fórmulas de suma a producto que se enumeran a continuación.

Fórmulas de suma a producto

$$(1) \quad \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$$

$$(2) \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \sin \frac{a - b}{2}$$

$$(3) \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$$

$$(4) \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a + b}{2} \sin \frac{a - b}{2}$$

EJEMPLO 2 Usar una fórmula de suma a producto

Expresa $\sin 5x - \sin 3x$ como producto.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula 2 de suma a producto con $a = 5x$ y $b = 3x$:

$$\begin{aligned} \sin 5x - \sin 3x &= 2 \cos \frac{5x + 3x}{2} \sin \frac{5x - 3x}{2} \\ &= 2 \cos 4x \sin x \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Usar fórmulas de suma a producto para comprobar una identidad

Verifica la identidad $\frac{\sin 3t + \sin 5t}{\cos 3t - \cos 5t} = \cot t$.

SOLUCIÓN Primero usamos una fórmula de suma a producto para el numerador y otra para el denominador:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin 3t + \sin 5t}{\cos 3t - \cos 5t} &= \frac{2 \sin \frac{3t+5t}{2} \cos \frac{3t-5t}{2}}{-2 \sin \frac{3t+5t}{2} \sin \frac{3t-5t}{2}} && \text{fórmulas (1) y (4) de suma a producto} \\
 &= \frac{2 \sin 4t \cos (-t)}{-2 \sin 4t \sin (-t)} && \text{simplificar} \\
 &= \frac{\cos (-t)}{-\sin (-t)} && \text{cancelar } 2 \sin 4t \\
 &= \frac{\cos t}{\sin t} && \text{fórmulas para negativos} \\
 &= \cot t && \text{identidad cotangente}
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Usar una fórmula de suma a producto para resolver una ecuación

Halla las soluciones de $\sin 5x + \sin x = 0$.

SOLUCIÓN Cambiar de una suma a un producto permite usar el teorema del factor cero para resolver la ecuación.

$$\begin{aligned}
 \sin 5x + \sin x &= 0 && \text{dado} \\
 2 \sin \frac{5x+x}{2} \cos \frac{5x-x}{2} &= 0 && \text{fórmula 1 de suma a producto} \\
 \sin 3x \cos 2x &= 0 && \text{simplificar y dividir entre 2} \\
 \sin 3x = 0, \quad \cos 2x = 0 &&& \text{teorema del factor cero}
 \end{aligned}$$

Las soluciones de las últimas dos ecuaciones son

$$3x = \pi n \quad \text{y} \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{para cada entero } n.$$

Al dividir entre 3 y 2, respectivamente, se obtiene

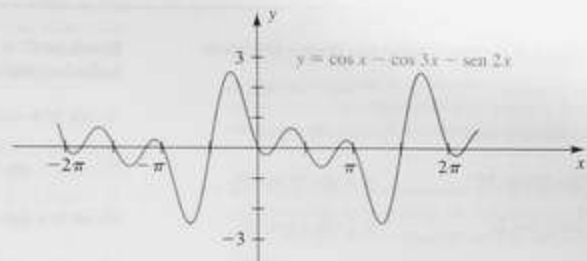
$$\frac{\pi}{3}n \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \quad \text{para cada entero } n.$$



EJEMPLO 5 Hallar las intersecciones en el eje x de una gráfica

En la figura 1 se muestra la gráfica de la ecuación $y = \cos x - \cos 3x - \sin 2x$. Encuentra las 13 intersecciones en x que están en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Figura 1



SOLUCIÓN Para hallar las intersecciones en x , se procede de esta manera:

$$\cos x - \cos 3x - \sin 2x = 0 \quad \text{sea } y = 0$$

$$(\cos x - \cos 3x) - \sin 2x = 0 \quad \text{agrupar los dos primeros términos}$$

$$-2 \sin \frac{x+3x}{2} \sin \frac{x-3x}{2} - \sin 2x = 0 \quad \text{fórmula 4 de suma a producto}$$

$$-2 \sin 2x \sin(-x) - \sin 2x = 0 \quad \text{simplificar}$$

$$2 \sin 2x \sin x - \sin 2x = 0 \quad \text{fórmula para negativos}$$

$$\sin 2x (2 \sin x - 1) = 0 \quad \text{factorizar } \sin 2x$$

$$\sin 2x = 0, \quad 2 \sin x - 1 = 0 \quad \text{teorema del factor cero}$$

$$\sin 2x = 0, \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{despejar } \sin x$$

La ecuación $\sin 2x = 0$ tiene soluciones $2x = \pi n$, o, al dividir entre 2,

$$x = \frac{\pi}{2} n \quad \text{para cada entero } n.$$

Si hacemos $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ y ± 4 , se obtienen nueve intersecciones en x en $[-2\pi, 2\pi]$:

$$0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi$$

Las soluciones de la ecuación $\sin x = \frac{1}{2}$ son

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{y} \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{para cada entero } n.$$

Las cuatro soluciones en $[-2\pi, 2\pi]$ se obtienen con $n = 0$ y $n = -1$:

$$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$$

7.5 Ejercicios

Ejercicios 1 al 8: expresa como una suma o diferencia.

1. $\sin 7t \sin 3t$

2. $\sin(-4x) \cos 8x$

3. $\cos 6u \cos(-4u)$

4. $\cos 4t \sin 6t$

5. $2 \sin 9\theta \cos 3\theta$

6. $2 \sin 7\theta \sin 5\theta$

7. $3 \cos x \sin 2x$

8. $5 \cos u \cos 5u$

Ejercicios 9 al 16: expresa como un producto.

9. $\sin 6\theta + \sin 2\theta$

10. $\sin 4\theta - \sin 8\theta$

11. $\cos 5x - \cos 3x$

12. $\cos 5t + \cos 6t$

13. $\sin 3t - \sin 7t$

14. $\cos \theta - \cos 5\theta$

15. $\cos x + \cos 2x$

16. $\sin 8t + \sin 2t$

Ejercicios 17 al 24: verifica la identidad.

17. $\frac{\sin 4t + \sin 6t}{\cos 4t - \cos 6t} = \cot t$

18. $\frac{\sin \theta + \sin 3\theta}{\cos \theta + \cos 3\theta} = \tan 2\theta$

19. $\frac{\sin u + \sin v}{\cos u + \cos v} = \tan \frac{1}{2}(u + v)$

20. $\frac{\sin u - \sin v}{\cos u - \cos v} = -\cot \frac{1}{2}(u + v)$

21. $\frac{\sin u - \sin v}{\sin u + \sin v} = \frac{\tan \frac{1}{2}(u - v)}{\tan \frac{1}{2}(u + v)}$

22. $\frac{\cos u - \cos v}{\cos u + \cos v} = -\tan \frac{1}{2}(u + v) \tan \frac{1}{2}(u - v)$

23. $4 \cos x \cos 2x \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x + \sin 6x$

24. $\frac{\cos t + \cos 4t + \cos 7t}{\sin t + \sin 4t + \sin 7t} = \cot 4t$

Ejercicios 25 y 26: expresa como suma.

25. $(\sin ax)(\cos bx)$

26. $(\cos au)(\cos bu)$

Ejercicios 27 al 34: usa fórmulas de suma o producto para hallar las soluciones de la ecuación.

27. $\sin 5t + \sin 3t = 0$

28. $\sin t + \sin 3t = \sin 2t$

29. $\cos x = \cos 3x$

30. $\cos 4x - \cos 3x = 0$

31. $\cos 3x + \cos 5x = \cos x$

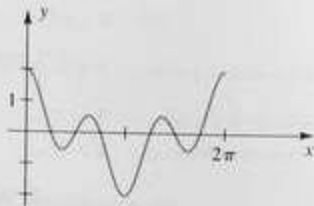
32. $\cos 3x = -\cos 6x$

33. $\sin 2x - \sin 5x = 0$

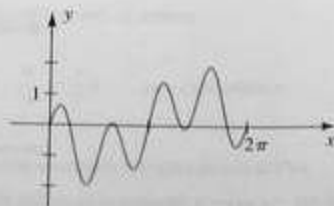
34. $\sin 5x - \sin x = 2 \cos 3x$

Ejercicios 35 y 36: en la figura se muestra una gráfica de la función f para $0 \leq x \leq 2\pi$. Usa una fórmula de suma o producto para encontrar las intersecciones en x .

35. $f(x) = \cos x + \cos 3x$



36. $f(x) = \sin 4x - \sin x$



37. Consulta el ejercicio 47 de la sección 7.4. La gráfica de $y = \cos 3x - 3 \cos x$ tiene 13 puntos de retorno para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Las coordenadas de x en estos puntos son soluciones de la ecuación $\sin 3x - \sin x = 0$. Con una fórmula de suma a producto halla estas coordenadas de x .

38. Consulta el ejercicio 48 de la sección 7.4. Las coordenadas de x de los puntos de retorno de la gráfica de $y = \sin 4x - 4 \sin x$ son soluciones de la ecuación $\cos 4x - \cos x = 0$. Encuentra estas coordenadas de x para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ utilizando una fórmula de suma a producto.

39. Vibración de una cuerda de violín En el análisis matemático de una cuerda de violín de longitud l en vibración, intervienen funciones como

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \cos\left(\frac{k\pi n}{l}t\right)$$

donde n es un entero, k la constante y t el tiempo. Expresa f como una suma de dos funciones seno.

40. Presión en el tímpano Si se golpean simultáneamente dos diapasones con la misma fuerza y luego se sostienen a igual distancia del tímpano, la presión en la parte externa de éste en el tiempo t está dada por

$$p(t) = a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t$$

donde a , ω_1 y ω_2 son constantes. Si ω_1 y ω_2 son casi iguales, se produce un tono que se alterna entre intenso y casi silencio. Este fenómeno se conoce con el nombre de pulsaciones.

(a) Con una fórmula de suma a producto expresa $p(t)$ como producto.

(b) Prueba que $p(t)$ puede considerarse como una onda cosenoidal con periodo aproximado de $2\pi/\omega_1$ y amplitud variable $f(t) = 2a \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$. Halla la amplitud máxima.

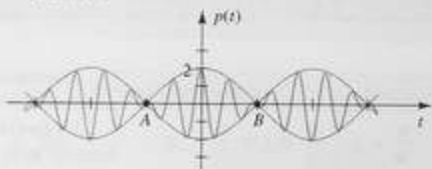
(c) En la figura se ve una gráfica de la ecuación

$$p(t) = \cos 4.5t + \cos 3.5t$$

En los puntos A y B , donde la amplitud variable $f(t)$ en el inciso (b) es cero, se da un silencio casi completo. Encuentra las coordenadas de estos puntos y determina con cuánta frecuencia se presenta este último.

(d) Emplea la gráfica para demostrar que la función p del inciso (c) tiene un periodo de 4π . Concluye que la amplitud máxima de 2 se presenta cada 4π unidades de tiempo.

Ejercicio 40



Ejercicios 41 y 42: grafica f en el intervalo $[-\pi, \pi]$. (a) Estima las intersecciones en x . (b) Halla los valores exactos de las intersecciones en x con las fórmulas de suma a producto.

$$41. f(x) = \sin 4x + \sin 2x \quad 42. f(x) = \cos 3x - \cos 2x$$

Ejercicios 43 y 44: con la gráfica de f halla la expresión $g(x)$ más sencilla, tal que la ecuación $f(x) = g(x)$ sea una identidad. Comprueba esta identidad.

$$43. f(x) = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$$

$$44. f(x) = \frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$$

7.6

Funciones trigonométricas inversas

En la sección 5.1 explicamos que, para definir la función inversa f^{-1} de una función f , es esencial que f sea biunívoca, esto es, si $a \neq b$ en el dominio de f , entonces $f(a) \neq f(b)$. La función inversa, f^{-1} , invierte la correspondencia descrita por f , esto es:

$$u = f(v) \quad \text{si y sólo si} \quad v = f^{-1}(u).$$

En la sección 5.1 describimos las siguientes relaciones generales, donde intervienen f y f^{-1} ,

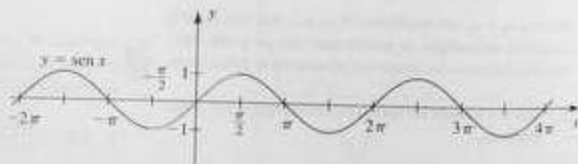
Relaciones entre f^{-1} y f

- (1) $y = f^{-1}(x)$ si y sólo si $x = f(y)$, donde x está en el dominio de f^{-1} y y está en el dominio de f .
- (2) El dominio de f^{-1} = imagen de f .
- (3) Imagen de f^{-1} = dominio de f .
- (4) $f(f^{-1}(x)) = x$ para todo x en el dominio de f^{-1} .
- (5) $f^{-1}(f(y)) = y$ para todo y en el dominio de f .
- (6) El punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1} .
- (7) Las gráficas de f^{-1} y de f son reflexiones, una de otra, respecto a la recta $y = x$.

Emplearemos la relación 1 para definir cada una de las funciones trigonométricas inversas.

La función seno no es biunívoca, porque con números diferentes, por ejemplo $\pi/6$, $5\pi/6$ y $-7\pi/6$ se obtiene el mismo valor funcional ($\frac{1}{2}$). Si restringimos el dominio a $[-\pi/2, \pi/2]$ entonces, como se ve en la parte azul de la gráfica de $y = \sin x$ de la figura 1, tendremos ya una función biunívoca (creciente) que asume cada valor de la función seno una sola vez. Utilizamos esta función *nueva*, cuyo dominio es $[-\pi/2, \pi/2]$ y cuya imagen es $[-1, 1]$, para definir la *función seno inversa*.

Figura 1

**Definición de la función seno inversa**

La **función seno inversa** representada por \sin^{-1} , se define como sigue:

$$y = \sin^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \sin y$$

$$\text{para } -1 \leq x \leq 1 \text{ y } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

El dominio de la función seno inversa es $[-1, 1]$ y la imagen es $[-\pi/2, \pi/2]$.

Observación acerca de la notación:

es cierto que

$$(\sec x)^{-1} = \frac{1}{\sec x} = \csc x,$$

mientras que ninguno de los anteriores es igual a $\sec^{-1} x$.

¡Precaución!

La notación $y = \sec^{-1} x$ se lee a veces "y es el seno inverso de x". La ecuación $x = \sec y$ en la definición nos permite considerar que y es un ángulo, y por eso también $y = \sec^{-1} x$ se puede leer "y es el ángulo cuyo seno es x" ($-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$).

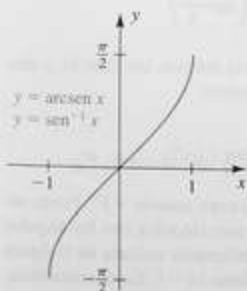
También a la función seno inversa se le llama **función arcoseno**, y en lugar de $\sec^{-1} x$ se puede escribir $\arcsen x$. Si $t = \arcsen x$, entonces $\sen t = x$ y t se puede interpretar como una *longitud de arco* en la circunferencia unitaria U con centro en el origen. En esta obra usaremos ambas notaciones: \sec^{-1} y \arcsen .

En la tabla siguiente se muestran varios valores de la función seno inversa.

Es esencial elegir el valor y en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ de \sec^{-1} . Así, aun cuando $\sen(5\pi/6) = \frac{1}{2}$, el número $y = 5\pi/6$ no es el valor de la función inversa $\sec^{-1} \frac{1}{2}$.

Ecuación	Enunciado equivalente	Solución
$y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sen y = \frac{1}{2} \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{\pi}{6}$
$y = \sec^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\sen y = -\frac{1}{2} \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = -\frac{\pi}{6}$
$y = \sec^{-1}(1)$	$\sen y = 1 \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{\pi}{2}$
$y = \arcsen(0)$	$\sen y = 0 \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = 0$
$y = \arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\sen y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = -\frac{\pi}{3}$

Figura 2



Ya justificamos el método de resolver una ecuación de la forma $\sen \theta = k$, que mencionamos en el capítulo 6. Vemos que la tecla **SEN⁻¹** de la calculadora, que se usa para obtener $\theta = \sec^{-1} k$, da el valor de la función seno inversa.

La relación 7 para las gráficas de f y f^{-1} nos dice que podemos trazar la gráfica de $y = \sec^{-1} x$ reflejando la parte azul de la figura 1 en la recta $y = x$. También podemos emplear la ecuación $x = \sen y$ con la restricción $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ para encontrar puntos de la gráfica. En esta forma se obtuvo la figura 2.

La relación 4, $f(f^{-1}(x)) = x$, y la relación 5, $f^{-1}(f(y)) = y$, que son válidas para cualquier función inversa f^{-1} , dan lugar a las propiedades siguientes:

Propiedades de \sec^{-1}

- (1) $\sen(\sec^{-1} x) = \sen(\arcsen x) = x$ si $-1 \leq x \leq 1$
- (2) $\sec^{-1}(\sen y) = \arcsen(\sen y) = y$ si $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

**EJEMPLO 1** Usar las propiedades de \sin^{-1}

Halla el valor exacto:

(a) $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$ (b) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

SOLUCIÓN

(a) El modo *difícil* de encontrar el valor de esta expresión consiste en hallar primero el ángulo $\sin^{-1}\frac{1}{2}$; o sea, $\pi/6$, y evaluar $\sin(\pi/6)$, con lo que se obtiene $\frac{1}{2}$. La forma *fácil* es usar la propiedad 1 de \sin^{-1} :

$$\text{ya que } -1 \leq \frac{1}{2} \leq 1, \quad \sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

(b) Puesto que $-\pi/2 \leq \pi/4 \leq \pi/2$, es posible utilizar la propiedad 2 de \sin^{-1} para obtener

$$\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(c) ¡Cuidado! Dado que $2\pi/3$ no está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, no se puede usar la propiedad 2 de \sin^{-1} . En lugar de esto, primero se evalúa la expresión interior, $\sin(2\pi/3)$, y luego se aplica la definición de \sin^{-1} :

$$\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

EJEMPLO 2 Determinación de un valor de \sin^{-1}

Determina el valor exacto de y , si $y = \sin^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$.

SOLUCIÓN Primero evaluamos la expresión interior, $\tan(3\pi/4)$, y después determinamos el seno inverso de ese número:

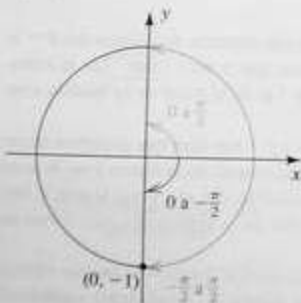
$$y = \sin^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = \sin^{-1}(-1)$$

En palabras, tenemos que " y es el ángulo cuyo seno es -1 ". Puede ser de utilidad recordar los valores del arcoseno asociándolos con los ángulos que corresponden a la parte azul de la circunferencia unitaria de la figura 3. Allí vemos que $-\pi/2$ es el ángulo cuyo seno es -1 . En consecuencia, $y = -\pi/2$, y así

$$y = \sin^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

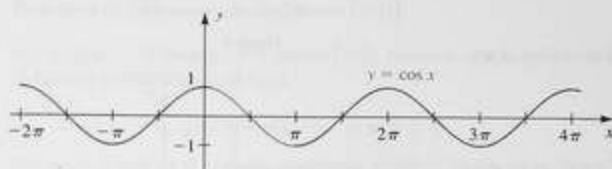
También se pueden emplear las demás funciones trigonométricas para formar otras funciones trigonométricas inversas. El procedimiento consiste en determinar primero un subconjunto adecuado del dominio para obtener una función biunívoca. Si el dominio de la función coseno se restringe al in-

Figura 3



tervalo $[0, \pi]$, como se indica en la parte azul de la gráfica de $y = \cos x$ de la figura 4, obtenemos una función biunívoca (decreciente) que asume todos los valores de la función coseno sólo una vez. Entonces se puede usar esa función *nueva*, con dominio $[0, \pi]$ e imagen $[-1, 1]$ para definir la **función coseno inversa**.

Figura 4



Definición de la función coseno inversa

La **función coseno inversa**, denotada por \cos^{-1} , está definida por

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \cos y$$

para $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$.

El dominio de la función coseno inversa es $[-1, 1]$ y la imagen es $[0, \pi]$. Nota que la imagen de \cos^{-1} *no* es igual a la imagen de \sin^{-1} , aunque sus dominios son iguales.

La notación $y = \cos^{-1} x$ se puede leer “y es el coseno inverso de x” o bien “y es el ángulo cuyo coseno es x” (con $0 \leq y \leq \pi$).

La función coseno inversa también se llama **función arcocoseno** (arccos), y se usa la notación $\arccos x$ como sinónimo de $\cos^{-1} x$.

En la tabla a continuación se enumeran diversos valores de la función coseno inversa.

¡Precaución!

Es *esencial* seleccionar el valor y en el intervalo $[0, \pi]$ de \cos^{-1} .

Ecuación	Enunciado equivalente	Solución
$y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cos y = \frac{1}{2} \quad y \quad 0 \leq y \leq \pi$	$y = \frac{\pi}{3}$
$y = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\cos y = -\frac{1}{2} \quad y \quad 0 \leq y \leq \pi$	$y = \frac{2\pi}{3}$
$y = \cos^{-1}(1)$	$\cos y = 1 \quad y \quad 0 \leq y \leq \pi$	$y = 0$
$y = \arccos(0)$	$\cos y = 0 \quad y \quad 0 \leq y \leq \pi$	$y = \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad y \quad 0 \leq y \leq \pi$	$y = \frac{5\pi}{6}$

Se puede trazar la gráfica de $y = \cos^{-1} x$ si se refleja la porción azul de la figura 4 a través de la recta $y = x$; esto dará el trazo de la figura 5. También se podría usar la ecuación $x = \cos y$, con $0 \leq y \leq \pi$, para hallar puntos en la gráfica. Según se indica en la gráfica, los valores de la función coseno inversa nunca son negativos.

Al igual que en el ejemplo 2 y en la figura 3 para el arcoseno, puede ser útil asociar los valores del arcocoseno a los ángulos correspondientes al arco azul de la figura 6.

Figura 5

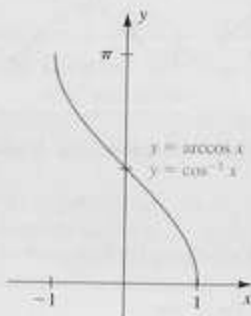
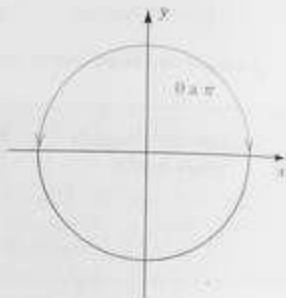


Figura 6



Al utilizar las relaciones 4 y 5 para las funciones inversas generales f^{-1} , se obtienen estas propiedades:

Propiedades de \cos^{-1}

$$(1) \cos(\cos^{-1} x) = \cos(\arccos x) = x \quad \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$(2) \cos^{-1}(\cos y) = \arccos(\cos y) = y \quad \text{si} \quad 0 \leq y \leq \pi$$

EJEMPLO 3 Uso de las propiedades de \cos^{-1}

Halla el valor exacto:

$$(a) \cos[\cos^{-1}(-0.5)] \quad (b) \cos^{-1}(\cos 3.14) \quad (c) \cos^{-1}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

SOLUCIÓN Para los incisos (a) y (b) se pueden emplear las propiedades 1 y 2 de \cos^{-1} , respectivamente.

$$(a) \cos[\cos^{-1}(-0.5)] = -0.5, \quad \text{porque} \quad -1 \leq -0.5 \leq 1.$$

$$(b) \cos^{-1}(\cos 3.14) = 3.14, \quad \text{porque} \quad 0 \leq 3.14 \leq \pi.$$

- (c) Primero se encuentra $\sin(-\pi/6)$ y luego se utiliza la definición de \cos^{-1} :

$$\cos^{-1} \left[\sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

EJEMPLO 4 Hallar el valor de una función trigonométrica

Determina el valor exacto de $\sin \left[\arccos \left(-\frac{2}{3} \right) \right]$.

SOLUCIÓN Si hacemos $\theta = \arccos \left(-\frac{2}{3} \right)$, entonces, con la definición de la función coseno inversa se tiene

$$\cos \theta = -\frac{2}{3} \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Por tanto, θ está en el segundo cuadrante, como se ilustra en la figura 7. Si se escoge el punto P en el lado terminal con coordenada x igual a -2 , la hipotenusa del triángulo de la figura debe tener longitud 3 porque $\cos \theta = -\frac{2}{3}$; en consecuencia, por el teorema de Pitágoras, la coordenada y de P es

$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5},$$

y, por tanto,

$$\sin \left[\arccos \left(-\frac{2}{3} \right) \right] = \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Si se restringe el dominio de la función tangente al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, se obtiene la función biunívoca (creciente) de la figura 3, sección 7.2. Esta nueva función sirve para definir la **función tangente inversa**.

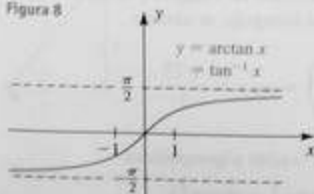
Definición de la función tangente inversa

La **función tangente inversa**, o **función arcotangente**, que se denota por \tan^{-1} o \arctan , se define por

$$y = \tan^{-1} x = \arctan x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \tan y$$

para cualquier número real x y para $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Figura 8



El dominio de la función arcotangente es \mathbb{R} y la imagen es el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$.

Se puede obtener la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ de la figura 8 trazando la gráfica de $x = \tan y$ para $-\pi/2 < y < \pi/2$. Observa que las asíntotas verticales, $x = \pm \pi/2$, de la función tangente corresponden a las asíntotas horizontales, $y = \pm \pi/2$, de la función arcotangente.

Al igual que con \sin^{-1} y \cos^{-1} , tenemos las propiedades siguientes para \tan^{-1} .

Propiedades de \tan^{-1}

(1) $\tan(\tan^{-1} x) = \tan(\arctan x) = x$ para todo x

(2) $\tan^{-1}(\tan y) = \arctan(\tan y) = y$ si $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

EJEMPLO 5 Uso de las propiedades de \tan^{-1}

Halla el valor exacto:

(a) $\tan(\tan^{-1} 1000)$ (b) $\tan^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{4}\right)$ (c) $\arctan(\tan \pi)$

SOLUCIÓN(a) Por la propiedad 1 de \tan^{-1} ,

$$\tan(\tan^{-1} 1000) = 1000.$$

(b) Puesto que $-\pi/2 < \pi/4 < \pi/2$, por la propiedad 2 de \tan^{-1} , tenemos que

$$\tan^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Dado que $\pi > \pi/2$, no se puede usar la segunda propiedad de \tan^{-1} . Por lo tanto, primero se encuentra $\tan \pi$ y luego se evalúa de esta forma:

$$\arctan(\tan \pi) = \arctan 0 = 0$$

EJEMPLO 6 Hallar el valor de una función trigonométricaDetermina el valor exacto de $\sec\left(\arctan \frac{2}{3}\right)$.

SOLUCIÓN Si se hace $y = \arctan \frac{2}{3}$, entonces $\tan y = \frac{2}{3}$. Deseamos hallar $\sec y$. Como $-\pi/2 < \arctan x < \pi/2$ para toda x y $\tan y > 0$, se deduce que $0 < y < \pi/2$; por lo tanto, podemos considerar a y como la medida en radianes de un ángulo de un triángulo rectángulo tal que $\tan y = \frac{2}{3}$, como se ve en la figura 9. Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa es $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Con referencia al triángulo, se obtiene

$$\sec\left(\arctan \frac{2}{3}\right) = \sec y = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Figura 9

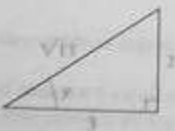
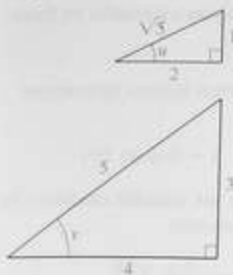
**EJEMPLO 7** Hallar el valor de una función trigonométricaEncuentra el valor exacto de $\sin\left(\arctan \frac{1}{3} - \arccos \frac{4}{5}\right)$.

Figura 10



SOLUCIÓN Sean

$$u = \arctan \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad v = \arccos \frac{4}{5},$$

$$\text{entonces} \quad \tan u = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos v = \frac{4}{5}.$$

Deseamos encontrar $\sin(u - v)$. Dado que u y v están en el intervalo $(0, \pi/2)$, se pueden considerar como las medidas en radianes de ángulos agudos positivos, y podemos referirnos a los triángulos rectángulos de la figura 10. Esto dará

$$\sin u = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos u = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin v = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \cos v = \frac{4}{5}.$$

Por la fórmula de la resta para el seno,

$$\begin{aligned} \sin(u - v) &= \sin u \cos v - \cos u \sin v \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{-2}{5\sqrt{5}}, \quad \text{o} \quad \frac{-2\sqrt{5}}{25}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Cambiar una expresión con $\sin^{-1} x$ a una expresión algebraica

Si $-1 \leq x \leq 1$, reescribe $\cos(\sin^{-1} x)$ como una expresión algebraica en x .

SOLUCIÓN Sea

$$y = \sin^{-1} x \quad \text{o, lo que es equivalente,} \quad \sin y = x.$$

Deseamos expresar $\cos y$ en términos de x . Dado que $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, se deduce que $\cos y \geq 0$ y, por tanto (a partir de $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$)

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

En consecuencia, $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

La última identidad también es evidente geoméricamente si $0 < x < 1$. En este caso $0 < y < \pi/2$, y se puede considerar a y como la medida en radianes de un ángulo de un triángulo rectángulo tal que $\sin y = x$, como se ilustra en la figura 11. (El lado de longitud $\sqrt{1 - x^2}$ se encuentra por el teorema de Pitágoras.) Al referirnos al triángulo, tenemos

$$\cos(\sin^{-1} x) = \cos y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Figura 11



Notarás que $\sin y = \frac{x}{1} = x$.

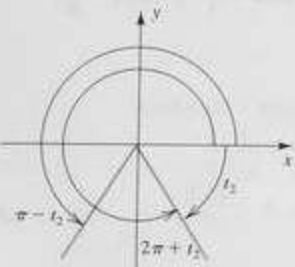
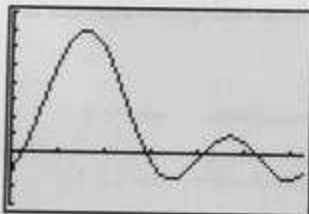
La mayor parte de las ecuaciones trigonométricas que consideramos en la sección 7.2 tenían soluciones que eran múltiplos racionales de π , como

Figura 12

(a)



(b)

Figura 13
[0, 2\pi] por [-3, 8]

$\pi/3, 3\pi/4, \pi$, etc. Si las soluciones de ecuaciones trigonométricas no son de ese tipo, a veces se usan funciones inversas para expresarlas en forma exacta, según se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 Uso de las funciones trigonométricas inversas para resolver una ecuación

Encuentra las soluciones de $5 \sin^2 t + 3 \sin t - 1 = 0$ en $[0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN Se puede considerar que ésta es una ecuación cuadrática en $\sin t$. Si aplicamos la fórmula cuadrática obtendremos:

$$\sin t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10}$$

Si usamos la definición de la función seno inversa llegaremos a las soluciones siguientes:

$$t_1 = \sin^{-1} \frac{1}{10}(-3 + \sqrt{29}) = 0.2408$$

$$t_2 = \sin^{-1} \frac{1}{10}(-3 - \sqrt{29}) = -0.9946$$

Como la imagen del arc seno es $[-\pi/2, \pi/2]$, sabemos que t_1 está en $[0, \pi/2]$ y que t_2 está en $[-\pi/2, 0]$. Si tomamos a t_1 como ángulo de referencia, tenemos también la solución $\pi - t_1$ en el cuadrante II, como se muestra en la figura 12(a). Podemos sumar 2π a t_2 para obtener una solución en el cuadrante IV, como vemos en la figura 12(b). La solución en el cuadrante III es $\pi - t_2$, y no $\pi + t_2$, porque t_2 es negativo.

Por lo anterior, si t_1 y t_2 son como se definieron antes, las cuatro soluciones exactas son

$$t_1, \pi - t_1, \pi - t_2 \text{ y } 2\pi + t_2,$$

y las cuatro soluciones aproximadas son

$$0.2408, 2.9008, 4.1361 \text{ y } 5.2886.$$

Si sólo se requieren soluciones aproximadas, podemos utilizar una gráfica para determinar las abscisas al origen de $Y_1 = 5 \sin^2 t + 3 \sin t - 1$. Al graficar Y_1 como se ve en la figura 13, y emplear el modo de raíz, obtenemos las mismas cuatro soluciones aproximadas que se incluyeron arriba. /

El siguiente ejemplo expone una de las muchas identidades ciertas para las funciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 10 Verificar una identidad con funciones trigonométricas inversas

Comprueba la identidad $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ para $-1 \leq x \leq 1$.

SOLUCIÓN Sean

$$\alpha = \sin^{-1} x \quad \text{y} \quad \beta = \cos^{-1} x.$$

Deseamos demostrar que $\alpha + \beta = \pi/2$. De las definiciones de \sin^{-1} y \cos^{-1} ,

$$\sin \alpha = x \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{y} \quad \cos \beta = x \quad \text{para} \quad 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Al sumar las dos desigualdades de la derecha, vemos que

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Notarás también que

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{y} \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Con una fórmula de suma para el seno obtenemos

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= x \cdot x + \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - x^2} \\ &= x^2 + (1 - x^2) = 1. \end{aligned}$$

En vista de que $\alpha + \beta$ está en el intervalo $[-\pi/2, 3\pi/2]$, la ecuación $\sin(\alpha + \beta) = 1$ tiene una sola solución, $\alpha + \beta = \pi/2$, que es lo que deseábamos demostrar.

Cabe interpretar geoméricamente la identidad si $0 < x < 1$. Si construimos un triángulo rectángulo con un lado de longitud x e hipotenusa de longitud 1 (figura 14), el ángulo β en B es un ángulo cuyo coseno es x ; esto es, $\beta = \cos^{-1} x$. En forma análoga, el ángulo α en A es un ángulo cuyo seno es x ; es decir, $\alpha = \sin^{-1} x$. Como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, $\alpha + \beta = \pi/2$ o, de manera equivalente,

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

Cada una de las funciones trigonométricas inversas restantes se define de la misma manera que las primeras tres. Es decir, se selecciona un dominio D en que la función trigonométrica correspondiente sea biunívoca y luego se aplica la técnica acostumbrada (donde y esté en D):

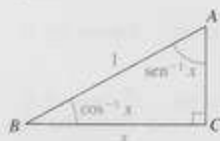
$$y = \cot^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \cot y$$

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \sec y$$

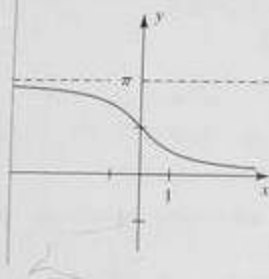
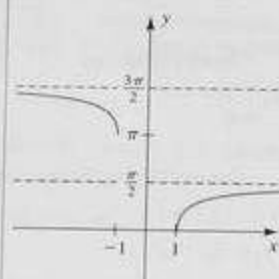
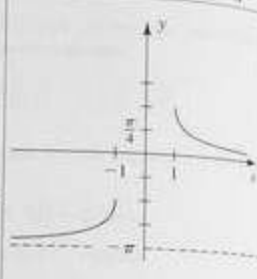
$$y = \csc^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \csc y$$

La función \sec^{-1} se utiliza en cálculo, pero \cot^{-1} y \csc^{-1} raras veces se emplean. Debido a su uso limitado en aplicaciones, no consideraremos ejemplos o ejercicios en relación con estas funciones. Tan sólo resumiremos las gráficas, dominios e imágenes característicos en la tabla siguiente. Un resumen similar para las seis funciones trigonométricas y sus inversas aparece en el apéndice III.

Figura 14



Resumen de características de \cot^{-1} , \sec^{-1} y \csc^{-1}

Características	$y = \cot^{-1} x$	$y = \sec^{-1} x$	$y = \csc^{-1} x$
Dominio	\mathbb{R}	$ x \geq 1$	$ x \geq 1$
Rango	$(0, \pi)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$
Gráfica			

Como vimos en el ejemplo 10, a veces es difícil comprobar una identidad donde intervienen funciones trigonométricas inversas. En estos casos, una graficadora es de suma utilidad para determinar si una ecuación con funciones trigonométricas inversas es una identidad y, si no lo es, para encontrar algunas soluciones de dicha ecuación. En el ejemplo que sigue mostraremos este proceso.

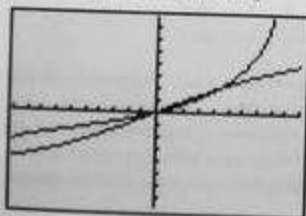
**EJEMPLO 11** Análisis de una ecuación

Sabemos que $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$ es una identidad. Determina si la ecuación

$$\arctan x = \frac{\arcsen x}{\arccos x}$$

es una identidad. Si no lo es, aproxima los valores de x para los cuales la ecuación es cierta, esto es, resuelve la ecuación.

Figura 15
 $[-1, 1, 0.1]$ por $[-\pi/2, \pi/2, 0.2]$



SOLUCIÓN Comenzaremos haciendo las asignaciones

$$Y_1 = \tan^{-1} x \quad \text{y} \quad Y_2 = \sin^{-1} x / \cos^{-1} x.$$

Como los dominios de \sin^{-1} y \cos^{-1} son $[-1, 1]$ y la imagen de \tan^{-1} es $(-\pi/2, \pi/2)$, definimos las dimensiones de la pantalla como se ve en la figura 15.

Como las gráficas que representan a Y_1 y Y_2 no son las mismas, sabemos que la ecuación dada no es una identidad. Sin embargo, como se intersecan dos veces, la ecuación tiene dos soluciones. Parece que $x = 0$ es una solución, y con una comprobación rápida en esa ecuación se verifica que

esto es cierto. Para estimar el punto de intersección en el primer cuadrante usamos la función intersección y determinamos que las coordenadas aproximadas del punto son (0.450, 0.423). En consecuencia,

$$x = 0 \quad y = x = 0.450$$

son los valores de x para los que la ecuación dada es válida.

7.6 Ejercicios

Ejercicios 1 al 22: halla el valor exacto de la expresión, siempre que se encuentre definida.

1 (a) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

(c) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

2 (a) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(c) $\tan^{-1}(-1)$

3 (a) $\arcsen \frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$

4 (a) $\arcsen 0$ (b) $\arccos(-1)$ (c) $\arctan 0$

5 (a) $\sin^{-1} \frac{\pi}{3}$ (b) $\cos^{-1} \frac{\pi}{2}$ (c) $\tan^{-1} 1$

6 (a) $\arcsen \frac{\pi}{2}$ (b) $\arccos \frac{\pi}{3}$ (c) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

7 (a) $\sin[\arcsen(-\frac{1}{10})]$ (b) $\cos(\arccos \frac{1}{2})$

(c) $\tan(\arctan 14)$

8 (a) $\sin(\sin^{-1} \frac{2}{3})$ (b) $\cos[\cos^{-1}(-\frac{1}{2})]$

(c) $\tan[\tan^{-1}(-9)]$

9 (a) $\sin^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

(c) $\tan^{-1}\left[\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

10 (a) $\arcsen\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$ (b) $\arccos(\cos 0)$

(c) $\arctan\left(\tan \frac{\pi}{4}\right)$

11 (a) $\arcsen\left(\sin \frac{5\pi}{4}\right)$ (b) $\arccos\left(\cos \frac{5\pi}{4}\right)$

(c) $\arctan\left(\tan \frac{7\pi}{4}\right)$

12 (a) $\sin^{-1}\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\cos \frac{4\pi}{3}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\tan \frac{7\pi}{6}\right)$

13 (a) $\sin[\cos^{-1}(-\frac{1}{2})]$ (b) $\cos(\tan^{-1} 1)$

(c) $\tan[\sin^{-1}(-1)]$

14 (a) $\sin(\tan^{-1} \sqrt{3})$ (b) $\cos(\sin^{-1} 1)$

(c) $\tan(\cos^{-1} 0)$

15 (a) $\cot(\sin^{-1} \frac{2}{3})$ (b) $\sec[\tan^{-1}(-\frac{1}{2})]$

(c) $\csc[\cos^{-1}(-\frac{1}{4})]$

16. (a) $\cot \left[\sin^{-1} \left(-\frac{3}{4} \right) \right]$

(b) $\sec \left(\tan^{-1} \frac{1}{4} \right)$

(c) $\csc \left(\cos^{-1} \frac{1}{5} \right)$

17. (a) $\sin \left(\arcsen \frac{1}{3} + \arccos \theta \right)$

(b) $\cos \left[\arctan \left(-\frac{1}{4} \right) - \arcsen \frac{4}{5} \right]$

(c) $\tan \left(\arctan \frac{4}{3} + \arccos \frac{8}{11} \right)$

18. (a) $\sin \left[\sin^{-1} \frac{5}{13} - \cos^{-1} \left(-\frac{1}{5} \right) \right]$

(b) $\cos \left(\sin^{-1} \frac{4}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{4} \right)$

(c) $\tan \left[\cos^{-1} \frac{1}{2} - \sin^{-1} \left(-\frac{1}{5} \right) \right]$

19. (a) $\sin \left[2 \arccos \left(-\frac{2}{3} \right) \right]$ (b) $\cos \left(2 \sin^{-1} \frac{10}{13} \right)$

(c) $\tan \left(2 \tan^{-1} \frac{1}{2} \right)$

20. (a) $\sin \left(2 \tan^{-1} \frac{3}{12} \right)$ (b) $\cos \left(2 \arccos \frac{2}{41} \right)$

(c) $\tan \left[2 \arcsen \left(-\frac{5}{17} \right) \right]$

21. (a) $\sin \left[\frac{1}{2} \sin^{-1} \left(-\frac{7}{35} \right) \right]$ (b) $\cos \left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{8}{15} \right)$

(c) $\tan \left(\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1}{4} \right)$

22. (a) $\sin \left[\frac{1}{2} \cos^{-1} \left(-\frac{1}{5} \right) \right]$ (b) $\cos \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{12}{13} \right)$

(c) $\tan \left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{40}{9} \right)$

Ejercicios 23 al 30: escribe como expresión algebraica en x para $x > 0$.

23. $\sin (\tan^{-1} x)$

24. $\tan (\arccos x)$

25. $\sec \left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \right)$

26. $\cot \left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} \right)$

27. $\sin (2 \sin^{-1} x)$

28. $\cos (2 \tan^{-1} x)$

29. $\cos \left(\frac{1}{2} \arccos x \right)$

30. $\tan \left(\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1}{x} \right)$

Ejercicios 31 y 32: completa los enunciados.

31. (a) Como $x \rightarrow -1^-$, $\sin^{-1} x \rightarrow$ _____

(b) Como $x \rightarrow 1^-$, $\cos^{-1} x \rightarrow$ _____

(c) Como $x \rightarrow \infty$, $\tan^{-1} x \rightarrow$ _____

32. (a) Como $x \rightarrow 1^-$, $\sin^{-1} x \rightarrow$ _____

(b) Como $x \rightarrow -1^+$, $\cos^{-1} x \rightarrow$ _____

(c) Como $x \rightarrow -\infty$, $\tan^{-1} x \rightarrow$ _____

Ejercicios 33 al 42: traza la gráfica de la ecuación.

33. $y = \sin^{-1} 2x$

34. $y = \frac{1}{2} \sin^{-1} x$

35. $y = \sin^{-1} (x+1)$

36. $y = \sin^{-1} (x-2) + \frac{\pi}{2}$

37. $y = \cos^{-1} \frac{1}{2}x$

38. $y = 2 \cos^{-1} x$

39. $y = 2 + \tan^{-1} x$

40. $y = \tan^{-1} 2x$

41. $y = \sin (\arccos x)$

42. $y = \sin (\sin^{-1} x)$

Ejercicios 43 al 46: la ecuación dada tiene la forma $y = f(x)$; (a) halla el dominio de f ; (b) encuentra la imagen de f ; y (c) despeja x en términos de y .

43. $y = \frac{1}{2} \sin^{-1} (x-3)$

44. $y = 3 \tan^{-1} (2x+1)$

45. $y = 4 \cos^{-1} \frac{2}{3}x$

46. $y = 2 \sin^{-1} (3x-4)$

Ejercicios del 47 al 50: resuelve la ecuación para x en términos de y si x está restringida al intervalo dado.

$$47 \quad y = -3 - \sin x; \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$48 \quad y = 2 + 3 \sin x; \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$49 \quad y = 15 - 2 \cos x; \quad [0, \pi]$$

$$50 \quad y = 6 - 3 \cos x; \quad [0, \pi]$$

Ejercicios 51 y 52: despeja la ecuación para x en términos de y si $0 < x < \pi$ y $0 < y < \pi$.

$$51 \quad \frac{\sin x}{3} = \frac{\sin y}{4}$$

$$52 \quad \frac{4}{\sin x} = \frac{7}{\sin y}$$

Ejercicios 53 al 64: con funciones trigonométricas inversas, encuentra las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo dado y aproxima las soluciones hasta cuatro lugares decimales.

$$53 \quad \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0; \quad [0, 2\pi]$$

$$54 \quad \sin^2 x - \sin x - 1 = 0; \quad [0, 2\pi]$$

$$55 \quad 2 \tan^2 t + 9 \tan t + 3 = 0; \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$56 \quad 3 \sec^2 t + 7 \tan t + 3 = 0; \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$57 \quad 15 \cos^4 x - 14 \cos^2 x + 3 = 0; \quad [0, \pi]$$

$$58 \quad 3 \tan^2 \theta - 19 \tan^2 \theta + 2 = 0; \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$59 \quad 6 \sec^2 \theta + 18 \sec^2 \theta - 5 \sec \theta - 15 = 0; \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$60 \quad 6 \sin 2x - 8 \cos x + 9 \sin x - 6 = 0; \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$61 \quad (\cos x)(15 \cos x + 4) = 3; \quad [0, 2\pi]$$

$$62 \quad 6 \sec^2 x = \sin x + 2; \quad [0, 2\pi]$$

$$63 \quad 3 \cos 2x - 7 \cos x + 5 = 0; \quad [0, 2\pi]$$

$$64 \quad \sin 2x = -1.5 \cos x; \quad [0, 2\pi]$$

Ejercicios 65 y 66: si un sismo tiene un desplazamiento horizontal total de S metros a lo largo de su línea de falla, el movimiento horizontal M de un punto sobre la superficie de la Tierra, a d kilómetros de la línea de falla, se puede estimar mediante la fórmula:

$$M = \frac{S}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{d}{D} \right),$$

donde D es la profundidad (en km) bajo la superficie del punto focal del sismo.

65 Movimiento telúrico Para el sismo de San Francisco en 1906, S fue de 4 metros y D alcanzó 3.5 kilómetros. Aproxima M para los valores expresados de d .

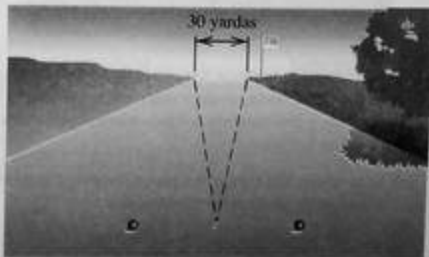
(a) 1 kilómetro (b) 4 kilómetros

(c) 10 kilómetros

66 Movimiento telúrico Calcula la profundidad D del punto focal de un sismo con $S = 3$ metros, si un punto sobre la superficie terrestre a 5 kilómetros de la línea de falla se movió horizontalmente 0.6 metros.

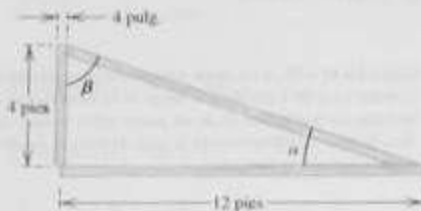
67 Un tiro de golf Un golfista que se encuentra al centro de una calle recta, de 30 yardas de ancho, manda su pelota a 280 yardas. Calcula, aproximadamente, el ángulo máximo al que la pueda mandar, respecto al centro de la calle, para que no se salga de ella (ve la figura).

Ejercicio 67



68. Colocación de una viga de madera. Una viga de madera de 14 pies de longitud se va a colocar como pental, como se ve en la figura. Suponiendo que todas las piezas tienen 2 pulgadas por 4 pulgadas, determina α y β .

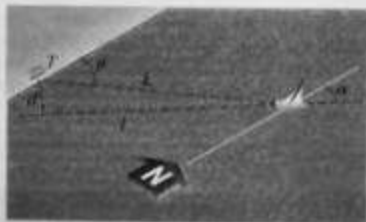
Ejercicio 68



69. Rastreo de un velero. Como se muestra en la figura, un velero sigue un rumbo l en línea recta. (Supón que la línea costera es paralela a la recta norte-sur.) La distancia más corta desde una estación T de rastreo (o seguidora) a la línea de rumbo es d millas. A medida que el velero se desplaza, la estación de rastreo registra su distancia k desde T y su dirección θ respecto a T . El ángulo α especifica la dirección de la embarcación.

- (a) Expresa α en términos de d , k y θ .
 (b) Estima α al grado más cercano si $d = 50$ millas, $k = 210$ millas y $\theta = 53.4^\circ$.

Ejercicio 69



70. Cálculo de ángulos de visión. Un crítico de arte, cuyos ojos están a 6 pies del suelo, observa una pintura que mide 10 pies de altura y está montada a 4 pies sobre el piso, como se muestra en la figura.

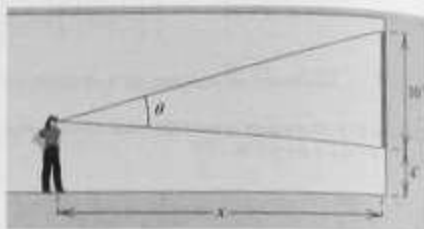
- (a) Si el crítico está parado a x pies de la pared, expresa el ángulo de visión θ en términos de x .

- (b) Con la fórmula de la suma para la tangente demuestra que

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{10x}{x^2 - 16} \right)$$

- (c) ¿Para qué valor de x es $\theta = 45^\circ$?

Ejercicio 70



Ejercicios 71 al 76: verifica la identidad.

71 $\sec^{-1} x = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

72 $\arccos x + \arccos \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq 1$

73 $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

74 $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$


75 $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, x > 0$

76 $2 \cos^{-1} x = \cos^{-1} (2x^2 - 1), 0 \leq x \leq 1$

Ejercicios 77 y 78: grafica f y determina su dominio e imagen.


77 $f(x) = 2 \sin^{-1}(x-1) + \cos^{-1} \frac{1}{x}$

78 $f(x) = \frac{1}{2} \tan^{-1}(1-2x) + 3 \tan^{-1} \sqrt{x+2}$

 **Ejercicios 79 y 80:** usa una gráfica para calcular las soluciones de la ecuación.

$$79. \sin^{-1} 2x = \tan^{-1} (1 - x)$$

$$80. \cos^{-1} \left(x - \frac{1}{3}\right) = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{3} - x\right)$$


 **81. Diseño de un colector solar.** Al diseñar un colector para energía solar, una consideración importante es la cantidad de luz solar transmitida por el vidrio al agua que se calienta. Si el ángulo de incidencia θ de los rayos solares se mide de una línea perpendicular a la superficie del vidrio, la fracción $f(\theta)$ de luz solar reflejada por el vidrio se aproxima con

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} + \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \beta} \right),$$

donde

$$\alpha = \theta - \gamma, \quad \beta = \theta + \gamma, \quad \gamma = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \theta}{1.52} \right).$$

Gráfica f para $0 < \theta < \pi/2$, y estima θ cuando $f(\theta) = 0.2$.


 **82. Diseño de un colector solar.** La altitud del sol es el ángulo ϕ que los rayos solares forman con el horizonte en un momento y lugar dados. Es importante determinar ϕ cuando se inclina un colector solar, a fin de obtener la máxima eficiencia. El 21 de junio, a una latitud de 51.7° N, es posible aproximar la altitud del sol mediante la fórmula

$$\sin \phi = \sin 23.5^\circ \sin 51.7^\circ + \cos 23.5^\circ \cos 51.7^\circ \cos H,$$

donde H se llama ángulo horario, con $H = -\pi/2$ a las 6 a.m., $H = 0$ al mediodía y $H = \pi/2$ a las 6 p.m.

(a) Resuelve la fórmula para ϕ y grafica la ecuación resultante para $-\pi/2 \leq H \leq \pi/2$.

(b) Calcula los tiempos en que $\phi = 45^\circ$.

 **Ejercicios 83 al 86:** muchas calculadoras tienen pantallas más anchas que altas. La relación aproximada de altura a ancho es, con frecuencia, 2:3. Si la altura real de la pantalla de la calculadora en el eje y es 2 unidades, el ancho real en el eje x debe ser 3 unidades, y $X_{\text{sc1}} = Y_{\text{sc1}} = 1$. Como la línea $y = x$ debe pasar por el punto $(1, 1)$, la pendiente real, m_A , de esta recta en la pantalla de la calculadora es:

$$m_A = \frac{\text{distancia real entre acotaciones en el eje } y}{\text{distancia real entre acotaciones en el eje } x}$$

(Una acotación es una marca en la escala respectiva.) Con esta información, grafica $y = x$ en la pantalla que se pide, y deduce el ángulo real θ que forma la gráfica con el eje x en la pantalla.

$$83. [0, 3] \text{ por } [0, 2]$$

$$84. [0, 6] \text{ por } [0, 2]$$

$$85. [0, 3] \text{ por } [0, 4]$$

$$86. [0, 2] \text{ por } [0, 2]$$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 7

Ejercicios 1 al 22: verifica la identidad.

$$1. (\cot^2 x + 1)(1 - \cos^2 x) = 1$$

$$2. \cos \theta + \sin \theta \tan \theta = \sec \theta$$

$$3. \frac{(\sec^2 \theta - 1) \cot \theta}{\tan \theta \sin \theta + \cos \theta} = \sin \theta$$

$$4. (\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x \csc^2 x$$

$$5. \frac{1}{1 + \sin t} = (\sec t - \tan t) \sec t$$

$$6. \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$7. \tan 2u = \frac{2 \cot u}{\csc^2 u - 2}$$

$$8. \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1 + \sec v}{2 \sec v}$$

$$9. \frac{\tan^3 \phi - \cot^3 \phi}{\tan^2 \phi + \csc^2 \phi} = \tan \phi - \cot \phi$$

$$10. \frac{\sin u + \sin v}{\csc u + \csc v} = \frac{1 - \sin u \sin v}{-1 + \csc u \csc v}$$

$$11. \left(\frac{\sin^2 x}{\tan^2 x} \right) \left(\frac{\csc^2 x}{\cot^2 x} \right) = 1$$

$$12. \frac{\cos \gamma}{1 - \tan \gamma} + \frac{\sin \gamma}{1 - \cot \gamma} = \cos \gamma + \sin \gamma$$

$$13 \frac{\cos(-t)}{\sec(-t) + \tan(-t)} = 1 + \sec t$$

$$14 \frac{\cot(-t) + \csc(-t)}{\sec(-t)} = \frac{1}{1 - \cos t}$$

$$15 \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = \frac{1 - \cos t}{|\sin t|}$$

$$16 \sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}} = \frac{|\cos \theta|}{1 + \sin \theta}$$

$$17 \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$18 \tan\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$$

$$19 \frac{1}{4} \sin 4\beta = \sin \beta \cos^3 \beta - \cos \beta \sin^3 \beta$$

$$20 \tan \frac{1}{2} \theta = \csc \theta - \cot \theta$$

$$21 \sin 8\theta = 8 \sin \theta \cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) \\ (1 - 8 \sin^3 \theta \cos^2 \theta)$$

$$22 \arctan x = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2}, \quad -1 < x < 1$$

Ejercicios 23 al 40: halla las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$.

$$23 \ 2 \cos^3 \theta - \cos \theta = 0$$

$$24 \ 2 \cos \alpha + \tan \alpha = \sec \alpha$$

$$25 \ \sin \theta = \tan \theta$$

$$26 \ \csc^3 \theta - 4 \csc \theta = 0$$

$$27 \ 2 \cos^3 t + \cos^3 t - 2 \cos t - 1 = 0$$

$$28 \ \cos x \cot^2 x = \cos x$$

$$29 \ \sin \beta + 2 \cos^2 \beta = 1$$

$$30 \ \cos 2x + 3 \cos x + 2 = 0$$

$$31 \ 2 \sec u \sin u + 2 = 4 \sin u + \sec u$$

$$32 \ \tan 2x \cos 2x = \sin 2x$$

$$33 \ 2 \cos 3x \cos 2x = 1 - 2 \sin 3x \sin 2x$$

$$34 \ \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = 0$$

$$35 \ \cos \pi x + \sin \pi x = 0$$

$$36 \ \sin 2u = \sin u$$

$$37 \ 2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta - 3 \cos \theta = 0$$

$$38 \ \sec 2x \csc 2x = 2 \csc 2x$$

$$39 \ \sin 5x = \sin 3x$$

$$40 \ \cos 3x = -\cos 2x$$

Ejercicios 41 al 44: determina el valor exacto.

$$41 \ \cos 75^\circ$$

$$42 \ \tan 285^\circ$$

$$43 \ \sin 195^\circ$$

$$44 \ \csc \frac{\pi}{8}$$

Ejercicios 45 al 56: si θ y ϕ son ángulos agudos tales que $\csc \theta = \frac{5}{3}$ y $\cos \phi = \frac{8}{17}$, encuentra el valor exacto.

$$45 \ \sin(\theta + \phi)$$

$$46 \ \cos(\theta + \phi)$$

$$47 \ \tan(\phi + \theta)$$

$$48 \ \tan(\theta - \phi)$$

$$49 \ \sin(\phi - \theta)$$

$$50 \ \sin(\theta - \phi)$$

$$51 \ \sin 2\phi$$

$$52 \ \cos 2\phi$$

$$53 \ \tan 2\theta$$

$$54 \ \sin \frac{1}{2} \theta$$

$$55 \ \tan \frac{1}{2} \theta$$

$$56 \ \cos \frac{1}{2} \phi$$

57 Expresa como suma o diferencia:

$$(a) \ \sin 7t \sin 4t$$

$$(b) \ \cos \frac{1}{4} u \cos \left(-\frac{1}{4} u\right)$$

$$(c) \ 6 \cos 5x \sin 3x$$

$$(d) \ 4 \sin 3\theta \cos 7\theta$$

58 Expresa como producto:

$$(a) \ \sin 8u + \sin 2u$$

$$(b) \ \cos 3\theta - \cos 8\theta$$

(c) $\sin \frac{1}{2}t - \sin \frac{1}{2}t$ (d) $3 \cos 2x + 3 \cos 6x$

Ejercicios 59 al 70: halla el valor exacto de la expresión, siempre que esté definida.

59 $\cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

60 $\arcsen \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

61 $\arctan \sqrt{3}$

62 $\arccos \left(\tan \frac{3\pi}{4} \right)$

63 $\arcsen \left(\sin \frac{5\pi}{4} \right)$

64 $\cos^{-1} \left(\cos \frac{5\pi}{4} \right)$

65 $\sec \left[\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$

66 $\tan (\tan^{-1} 2)$

67 $\sec (\sin^{-1} \frac{1}{2})$

68 $\cos^{-1} (\sin 0)$

69 $\cos (\sin^{-1} \frac{15}{17} - \sin^{-1} \frac{8}{17})$

70 $\cos (2 \sin^{-1} \frac{2}{3})$

Ejercicios 71 al 74: traza la gráfica de la ecuación.

71 $y = \cos^{-1} 3x$

72 $y = 4 \sin^{-1} x$

73 $y = 1 - \sin^{-1} x$

74 $y = \sin (\frac{1}{2} \cos^{-1} x)$

75 Expresa $\cos (\alpha + \beta + \gamma)$ en términos de funciones trigonométricas de α , β y γ .

76 Fuerza de un pie Cuando una persona camina, la magnitud F de la fuerza vertical de un pie en el suelo (ve la figura) se puede describir mediante

$$F = A(\cos bt - a \cos 3bt),$$

en donde t está en segundos, $A > 0$, $b > 0$ y $0 < a < 1$.

Ejercicio 76



- (a) Demuestra que $F = 0$ cuando $t = -\pi/(2b)$ y $t = \pi/(2b)$. (El tiempo $t = -\pi/(2b)$ corresponde al momento en que el pie toca el suelo y el peso del cuerpo está sos-

tenido por el otro pie.)

- (b) La fuerza máxima ocurre cuando

$$3a \sin 3bt = \sin bt.$$

Si $a = \frac{1}{3}$, halla las soluciones de esta ecuación para el intervalo $-\pi/(2b) < t < \pi/(2b)$.

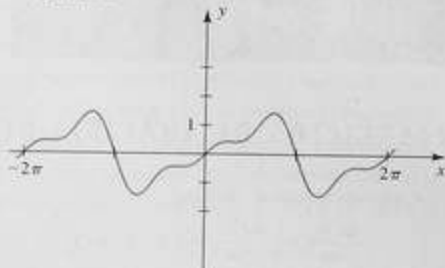
- (c) Si $a = \frac{1}{3}$, expresa la fuerza máxima en términos de A .

77 En la figura se muestra una gráfica de la ecuación

$$y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x.$$

Las coordenadas x de los puntos de retorno son soluciones de la ecuación $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$. Usa una fórmula de suma a producto para hallar estas coordenadas.

Ejercicio 77



78 Distinción visual El ojo humano puede distinguir entre dos puntos distantes P y Q siempre que el ángulo de resolución θ no sea demasiado pequeño. Supón que P y Q están a x unidades entre sí y a d unidades del ojo, como se ilustra en la figura.

- (a) Expresa x en términos de d y θ .

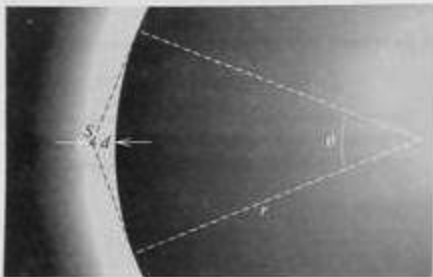
- (b) Para una persona con visión normal, el ángulo de resolución mínimo que se puede distinguir es de alrededor de 0.0005 radianes. Si un individuo observa una pluma de 6 pulgadas de largo desde una distancia de d pies, ¿para qué valores de d serán perceptibles los puntos extremos de la pluma?

Ejercicio 78



- 78 **Satélites** Un satélite S sigue una órbita alrededor de un planeta a una distancia de d millas de la superficie. La porción de la superficie del planeta visible desde el satélite se determina por el ángulo θ que se muestra en la figura.

Ejercicio 79



- (a) Suponiendo que el planeta es de forma esférica, expresa d en términos de θ y el radio r del planeta.
 (b) Calcule θ para un satélite ubicado a 300 millas de la superficie de la Tierra, usando $r = 4000$ millas.

- 80 **Cañones urbanos** Debido a los altos edificios y a la cantidad de luz solar que ilumina estos "cañones" se ha reducido en gran parte. Si h es la altura promedio de los edificios y w es el ancho de la calle, la estrechez N de la calle estará determinada por $N = h/w$. El ángulo θ del horizonte está definido por $\tan \theta = N$ (el valor $\theta = 63^\circ$ puede dar como resultado una pérdida de iluminación de 85%). Calcule el ángulo del horizonte para los siguientes valores de h y w .

- (a) $h = 400$ pies, $w = 80$ pies
 (b) $h = 55$ m, $w = 30$ m

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 7

- 1 Comprueba la siguiente identidad:

$$\frac{\tan x}{1 - \cot x} + \frac{\cot x}{1 - \tan x} = 1 + \sec x \csc x$$

(Sugerencia: En determinado momento, considera una factorización especial.)

- 2 En el ejemplo 5 de la sección 7.1, supongamos que $0 \leq \theta < 2\pi$; vuelve a escribir la conclusión usando una función definida por tramos.
 3 ¿Cuántas soluciones tiene la siguiente ecuación en $[0, 2\pi)$? Determina la mayor.

$$3 \cos 45x + 4 \sin 45x = 5$$

- 4 Grafica el cociente de diferencias de $f(x) = \sin x$ y $h = 0.5, 0.1, y 0.001$, en la pantalla $[0, 2\pi, \pi/2]$ por $[-1, 1]$. ¿Qué generalización puedes hacer con esas gráficas? Demuestra que este cociente se puede escribir como sigue:

$$\sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right)$$

Pasa que es la función coseno.

- 5 Hay varias relaciones exactas de interés entre π y las funciones trigonométricas inversas, como por ejemplo,

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \left(\frac{1}{5} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{239} \right)$$

Usa las identidades trigonométricas para demostrar que esta relación es cierta. Otras dos relaciones de este tipo son

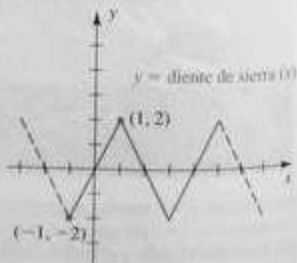
$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{5} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{8} \right)$$

$$\text{y} \quad \pi = \tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3.$$

- 6 En la siguiente figura se ve la gráfica de la llamada *función diente de sierra*.

- (a) Define una función diente de sierra (inversa **arcosierra**), incluyendo su dominio e imagen.
 (b) Determina **arcosierra** (1.7) y **arcosierra** (-0.8).
 (c) Formula dos propiedades de **arcosierra** (semejante a la propiedad $\sin(\sin^{-1})$).
 (d) Grafica la función **arcosierra**.

Ejercicio 6



Aplicaciones de la trigonometría

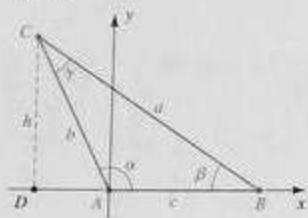
- 8.1 Ley de los senos
- 8.2 Ley de los cosenos
- 8.3 Vectores
- 8.4 Producto punto
- 8.5 Forma trigonométrica para números complejos
- 8.6 Teorema de De Moivre y raíces enésimas de números complejos

En las primeras dos secciones de este capítulo se estudian métodos para resolver triángulos oblicuos mediante la ley de los senos y la ley de los cosenos. Las dos secciones siguientes contienen una introducción a los vectores, tema con muchas aplicaciones en ingeniería, ciencias naturales y matemáticas avanzadas. Después se introduce la forma trigonométrica de los números complejos y se le emplea para hallar todas las n soluciones de ecuaciones de la forma $w^n = z$, donde n es cualquier entero positivo, y w y z son números complejos.

8.1

Ley de los senos

Figura 1



Un **triángulo oblicuo** (u oblicuángulo) es aquel que no contiene un ángulo recto. Usaremos las literales $A, B, C, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ para distinguir las partes de los triángulos, como hicimos en el capítulo 6. Dado el triángulo ABC , coloquemos un ángulo α en posición estándar, de modo que B se localice en el eje x positivo. Aun cuando el caso para el ángulo obtuso α se ilustra en la figura 1, el estudio que presentamos a continuación también es válido si α es agudo.

Considera la línea que pasa por C , paralela al eje de las y , y que corta al eje x en el punto D . Si hacemos $d(C, D) = h$, entonces la ordenada y de C es h . A partir de la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, tendremos que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{b}, \quad \text{por lo que} \quad h = b \operatorname{sen} \alpha.$$

Con referencia al triángulo rectángulo BDC , se ve que

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{h}{a}, \quad \text{por lo que} \quad h = a \operatorname{sen} \beta.$$

Al igualar las dos expresiones para h , obtenemos

$$b \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen} \beta.$$

que podemos escribir como $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b}$.

Si α se pone en posición estándar con C en el eje positivo de las x , entonces, por el mismo razonamiento,

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}.$$

Las dos últimas igualdades nos dan el siguiente resultado:

Ley de los senos

Si ABC es un triángulo oblicuo con los ángulos y lados marcados en la forma acostumbrada (como en la figura 1), entonces

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}.$$

Observa que la ley de los senos consta de las siguientes tres fórmulas:

$$(1) \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} \quad (2) \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c} \quad (3) \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

Para aplicar cualquiera de estas fórmulas a un triángulo específico, debemos conocer los valores de tres de las cuatro variables. Si sustituimos estos tres valores en la fórmula apropiada, podremos despejar el valor de la cuarta variable. Se deduce que la ley de los senos se puede usar para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuo siempre que se conozcan cualquiera de las siguientes dos condiciones (las tres letras dentro del paréntesis denotan las partes conocidas: L representa un lado y A un ángulo):

- (1) Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos (LLA).
- (2) Dos ángulos y cualquier lado (AAL o ALA).

En la sección siguiente estudiaremos la ley de los cosenos y demostraremos cómo se puede utilizar ésta para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuo cuando se conoce lo siguiente:

- (1) Dos lados y el ángulo entre ellos (LAL).
- (2) Tres lados (LLL).

La ley de los senos no se puede aplicar directamente a los dos últimos casos. Esta ley también se puede escribir en la forma

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

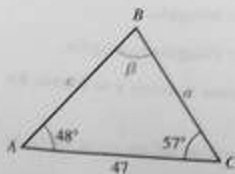
En lugar de memorizar las tres fórmulas relacionadas con la ley de los senos, puede ser más conveniente recordar el siguiente enunciado, que toma en cuenta a todas ellas.

**Ley de los senos
(forma general)**

En cualquier triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo es igual a la razón entre el seno de otro ángulo y el lado opuesto a éste.

En ejemplos y ejercicios con triángulos supondremos que las longitudes de los lados y los ángulos conocidos se han obtenido por medición y, por tanto, son aproximaciones a los valores exactos. A menos que se indique de otra manera, cuando nos topemos con partes de triángulos redondearemos las respuestas, según la regla siguiente: *si los lados o ángulos conocidos se indican con cierta precisión, los lados o ángulos desconocidos deben calcularse con la misma precisión.* Para ilustrar lo anterior, si los lados conocidos se presentan al 0.1 más cercano, se debe hacer lo mismo con los lados desconocidos. Si los ángulos conocidos se expresan a los 10' más cercanos, los ángulos desconocidos deben calcularse de la misma manera. Observaciones semejantes se cumplen para precisiones al 0.01 más cercano, al 0.1° más cercano, y así sucesivamente.

Figura 2



EJEMPLO 1 Uso de la ley de los senos (ALA)

Resuelve el $\triangle ABC$, dados $\alpha = 48^\circ$, $\gamma = 57^\circ$ y $b = 47$.

SOLUCIÓN El triángulo aparece en la figura 2. Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180° ,

$$\beta = 180^\circ - 57^\circ - 48^\circ = 75^\circ.$$

(continúa)

Dado que se conocen el lado b y los tres ángulos, se puede encontrar a usando una forma de la ley de los senos en que intervienen a , α , b y β :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad \text{ley de los senos}$$

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{despejar } a$$

$$= \frac{47 \sin 48^\circ}{\sin 75^\circ} \quad \text{sustituir } b, \alpha \text{ y } \beta$$

$$\approx 36 \quad \text{aproximar al entero más cercano}$$

Para hallar c , basta sustituir $\frac{a}{\sin \alpha}$ con $\frac{c}{\sin \gamma}$ de la solución precedente de a , con lo que resulta

$$c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{47 \sin 57^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 41.$$

Datos como los del ejemplo 1 conducen exactamente a un triángulo ABC ; sin embargo, si se dan dos lados y el ángulo *opuesto* a uno de ellos, no siempre el triángulo que se representa es único. Para ilustrar este caso, supón que a y b son las longitudes de los lados del triángulo ABC y que un ángulo dado α ha de ser opuesto al lado de longitud a . Examinemos el caso para α agudo; pongamos α en posición estándar y consideremos el segmento de recta AC de longitud b en el lado terminal de α (figura 3). El tercer vértice, B , debe estar en algún punto del eje x . Como nos dan la longitud a del lado opuesto a α , podemos encontrar B si trazamos un arco circular de longitud a con centro en C . En la figura 4 se presentan los cuatro resultados posibles (sin los ejes coordenados).

Figura 3

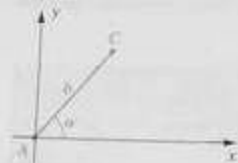


Figura 4

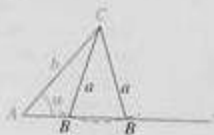
(a)



(b)



(c)



(d)



Las cuatro opciones de la figura se pueden describir de esta forma:

- El arco no corta al eje x y no se forma un triángulo.
- El arco es tangente al eje x y se forma un triángulo rectángulo.
- El arco corta al eje x positivo en dos puntos distintos y se forman dos triángulos.
- El arco corta las partes positivas y no positivas del eje x y se forma un triángulo.

Figura 5
(a) $a < b$



(b) $a > b$



El caso particular que se presenta en un problema dado se hará evidente al tratar de obtener la solución; por ejemplo, si resolvemos la ecuación

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$$

y obtenemos $\sin \beta > 1$, entonces no existe un triángulo y tenemos el caso (a); si resulta que $\sin \beta = 1$, entonces $\beta = 90^\circ$ y, por tanto, ocurre (b); si $\sin \beta < 1$, hay dos posibilidades para el ángulo β . Al comprobar ambas, se puede determinar si ocurre (c) o (d).

Si la medida de α es mayor que 90° , entonces existe un triángulo si y sólo si $a > b$ (figura 5). En virtud de que se puede tener más de una posibilidad cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, esta situación a veces recibe el nombre de **caso ambiguo**.

EJEMPLO 2 Uso de la ley de los senos (LLA)

Resuelve el $\triangle ABC$, dados $\alpha = 67^\circ$, $a = 100$ y $c = 125$.



SOLUCIÓN Dado que se conocen α , a y c , podemos encontrar γ con una forma de la ley de los senos en donde aparezcan α , a , c y γ :

$$\begin{aligned} \frac{\sin \gamma}{c} &= \frac{\sin \alpha}{a} && \text{ley de los senos} \\ \sin \gamma &= \frac{c \sin \alpha}{a} && \text{despejar } \sin \gamma \\ &= \frac{125 \sin 67^\circ}{100} && \text{sustituir } c, \alpha \text{ y } a \\ &\approx 1.1506 && \text{aproximar} \end{aligned}$$

Como $\sin \gamma$ no puede ser mayor que 1, no es posible construir un triángulo con las partes dadas.

EJEMPLO 3 Uso de la ley de los senos (LLA)

Resuelve el $\triangle ABC$, dados $a = 12.4$, $b = 8.7$ y $\beta = 36.7^\circ$.

SOLUCIÓN Para hallar α , procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{a} &= \frac{\sin \beta}{b} && \text{ley de los senos} \\ \sin \alpha &= \frac{a \sin \beta}{b} && \text{despejar } \sin \alpha \\ &= \frac{12.4 \sin 36.7^\circ}{8.7} && \text{sustituir } a, \beta \text{ y } b \\ &\approx 0.8518 && \text{aproximar} \end{aligned}$$

(continúa)

Hay dos posibles ángulos α entre 0° y 180° tales que $\sin \alpha = 0.8518$. El ángulo de referencia α_R es

$$\alpha_R = \sin^{-1}(0.8518) \approx 58.4^\circ.$$

En consecuencia, las dos posibilidades para α son

$$\alpha_1 = 58.4^\circ \quad \text{y} \quad \alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 = 121.6^\circ.$$

El ángulo $\alpha_1 = 58.4^\circ$ da el triángulo A_1BC de la figura 6 y el ángulo $\alpha_2 = 121.6^\circ$ el triángulo A_2BC .

Si γ_1 y γ_2 denotan los tercetos ángulos de los triángulos A_1BC y A_2BC correspondientes a los ángulos α_1 y α_2 , respectivamente, entonces

$$\gamma_1 = 180^\circ - \alpha_1 - \beta = 180^\circ - 58.4^\circ - 36.7^\circ \approx 84.9^\circ$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - \alpha_2 - \beta = 180^\circ - 121.6^\circ - 36.7^\circ \approx 21.7^\circ.$$

Si $c_1 = \overline{BA_1}$ es el lado opuesto a γ_1 en el triángulo A_1BC , entonces

$$\frac{c_1}{\sin \gamma_1} = \frac{a}{\sin \alpha_1} \quad \text{ley de los senos}$$

$$c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha_1} \quad \text{despejar } c_1$$

$$= \frac{12.4 \sin 84.9^\circ}{\sin 58.4^\circ} \approx 14.5 \quad \text{sustituir y aproximar}$$

Por tanto, las partes restantes del triángulo A_1BC son

$$\alpha_1 \approx 58.4^\circ, \quad \gamma_1 \approx 84.9^\circ \quad \text{y} \quad c_1 \approx 14.5.$$

Del mismo modo, si $c_2 = \overline{BA_2}$ es el lado opuesto a γ_2 en el triángulo A_2BC , entonces

$$c_2 = \frac{a \sin \gamma_2}{\sin \alpha_2} = \frac{12.4 \sin 21.7^\circ}{\sin 121.6^\circ} \approx 5.4,$$

y las partes restantes del triángulo A_2BC son

$$\alpha_2 \approx 121.6^\circ, \quad \gamma_2 \approx 21.7^\circ \quad \text{y} \quad c_2 \approx 5.4. \quad \checkmark$$

EJEMPLO 4 Uso de un ángulo de elevación

Cuando el ángulo de elevación del Sol es de 64° , un poste de teléfonos inclinado a un ángulo de 9° en dirección opuesta al Sol proyecta una sombra de 21 pies de largo a nivel del suelo. Calcula la longitud del poste.

Figura 6

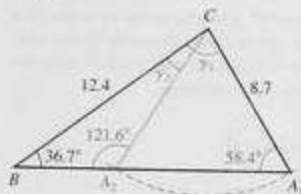


Figura 7

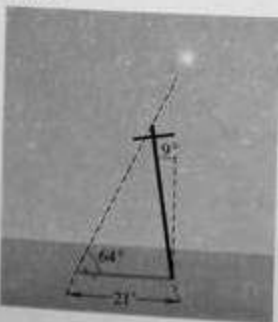


Figura 8



SOLUCIÓN El problema se ilustra en la figura 7. El triángulo ABC de la figura 8 también muestra los datos dados. Observa que en la figura 8 hemos calculado los siguientes ángulos:

$$\beta = 90^\circ - 9^\circ = 81^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 64^\circ - 81^\circ = 35^\circ$$

Para hallar la longitud del poste; es decir, el lado a del triángulo ABC , se procede como sigue:

$$\frac{a}{\sin 64^\circ} = \frac{21}{\sin 35^\circ} \quad \text{ley de los senos}$$

$$a = \frac{21 \sin 64^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 33 \quad \text{despejar } a \text{ y aproximar}$$

Por tanto, el poste de teléfonos mide 33 pies de largo.



EJEMPLO 5 Uso de rumbos

Un punto P a nivel del suelo está a 3.0 kilómetros al norte del punto Q . Un corredor avanza en dirección $N25^\circ E$ desde Q al punto R , y luego de R a P en dirección $S70^\circ O$. Calcula la distancia recorrida.

SOLUCIÓN La notación utilizada para especificar direcciones se presentó en la sección 6.7. Las flechas de la figura 9 muestran la trayectoria del corredor, junto con una línea punteada en dirección norte-sur, desde R a otro punto S .

Como las líneas que pasan por PQ y RS son paralelas, se deduce por geometría que los ángulos alternos internos PQR y QRS miden ambos 25° . Así pues,

$$\angle PRQ = \angle PRS - \angle QRS = 70^\circ - 25^\circ = 45^\circ.$$

Estas observaciones nos dan el triángulo PQR de la figura 10 con

$$\angle QPR = 180^\circ - 25^\circ - 45^\circ = 110^\circ.$$

Aplicamos la ley de los senos para encontrar q y p :

$$\frac{q}{\sin 25^\circ} = \frac{3.0}{\sin 45^\circ} \quad \text{y} \quad \frac{p}{\sin 110^\circ} = \frac{3.0}{\sin 45^\circ}$$

$$q = \frac{3.0 \sin 25^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 1.8 \quad \text{y} \quad p = \frac{3.0 \sin 110^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 4.0$$

La distancia recorrida, $p + q$, es aproximadamente $1.8 + 4.0 = 5.8$ km.

EJEMPLO 6 Localización de un banco de peces

Una embarcación pesquera comercial utiliza equipo de sonar para detectar un banco (o cardumen) de peces a 2 millas al este de la embarcación, la cual se mueve en dirección $N51^\circ O$ a razón de 8 millas por hora (figura 11).

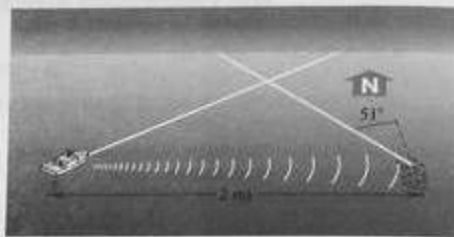
Figura 9



Figura 10



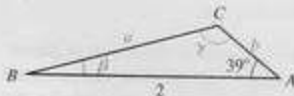
Figura 11



- (a) Si la embarcación navega a 20 millas por hora, calcula, al 0.1° más cercano, en qué dirección debe avanzar para interceptar el cardumen.
- (b) Halla, al minuto más cercano, el tiempo que tardará en interceptar el banco de peces.

SOLUCIÓN

Figura 12



- (a) El triángulo de la figura 12 ilustra el problema, con el banco de peces en A, la embarcación en B y el punto de interceptación en C. Notarás que $\alpha = 90^\circ - 51^\circ = 39^\circ$. Para obtener β hacemos lo siguiente:

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin 39^\circ}{a} \quad \text{ley de los senos}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \sin 39^\circ \quad \text{despejar } \sin \beta \quad (1)$$

A continuación se encuentra b/a , denotando con t el tiempo en que la embarcación y los peces se encontrarán en C:

$$a = 20t, \quad b = 8t \quad (\text{distancia} = (\text{velocidad})(\text{tiempo}))$$

$$\frac{b}{a} = \frac{8t}{20t} = \frac{2}{5} \quad \text{dividir } b \text{ entre } a$$

$$\sin \beta = \frac{2}{5} \sin 39^\circ \quad \text{sustituir para } b/a \text{ en (1)}$$

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{2}{5} \sin 39^\circ \right) \approx 14.6^\circ \quad \text{aproximar}$$

Como $90^\circ - 14.6^\circ = 75.4^\circ$, el pesquero debe navegar en dirección (aproximada) N75.4°E.

- (b) Podemos encontrar t usando la relación $a = 20t$. Encontremos primero la distancia a de B a C. Como el único lado conocido es 2, debemos encontrar el ángulo y opuesto al lado de longitud 2 para poder aplicar la ley de los senos. Comenzamos por advertir que

$$\gamma = 180^\circ - 39^\circ - 14.6^\circ = 126.4^\circ.$$

Para encontrar a tenemos

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \text{ley de los senos}$$

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \text{despejar } a$$

$$\approx \frac{2 \sin 39^\circ}{\sin 126.4^\circ} \approx 1.56 \text{ mi.} \quad \text{sustituir y aproximar}$$

Con $a = 20t$, encontramos el tiempo t para que la nave alcance el punto C:

$$t = \frac{a}{20} = \frac{1.56}{20} \approx 0.08 \text{ hr} \approx 5 \text{ min.}$$

8.1 Ejercicios

Ejercicios 1 al 16: resuelve el $\triangle ABC$.

1 $\alpha = 41^\circ$, $\gamma = 77^\circ$, $a = 10.5$

2 $\beta = 20^\circ$, $\gamma = 31^\circ$, $b = 210$

3 $\alpha = 27^\circ 40'$, $\beta = 52^\circ 10'$, $a = 32.4$

4 $\beta = 50^\circ 50'$, $\gamma = 70^\circ 30'$, $c = 537$

5 $\alpha = 42^\circ 10'$, $\gamma = 61^\circ 20'$, $b = 19.7$

6 $\alpha = 103.45^\circ$, $\gamma = 27.19^\circ$, $b = 38.84$

7 $\gamma = 81^\circ$, $c = 11$, $b = 12$

8 $\alpha = 32.32^\circ$, $c = 574.3$, $a = 263.6$

9 $\gamma = 53^\circ 20'$, $a = 140$, $c = 115$

10 $\alpha = 27^\circ 30'$, $c = 52.8$, $a = 28.1$

11 $\gamma = 47.74^\circ$, $a = 131.08$, $c = 97.84$

12 $\alpha = 42.17^\circ$, $a = 5.01$, $b = 6.12$

13 $\alpha = 65^\circ 10'$, $a = 21.3$, $b = 18.9$

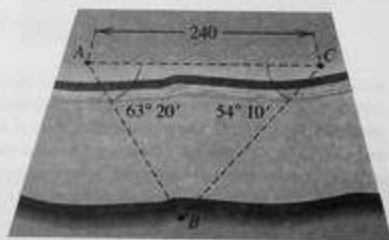
14 $\beta = 113^\circ 10'$, $b = 248$, $c = 195$

15 $\beta = 121.624^\circ$, $b = 0.283$, $c = 0.178$

16 $\gamma = 73.01^\circ$, $a = 17.31$, $c = 20.24$

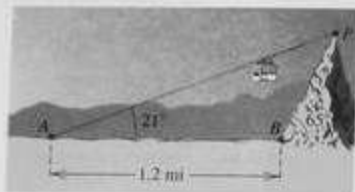
- 17 **Agrimensura** Para hallar la distancia entre dos puntos A y B en las márgenes opuestas de un río, un agrimensor traza un segmento de recta AC de 240 yardas de longitud a lo largo de una de las márgenes, y determina que las medidas de $\angle BAC$ y $\angle ACB$ son $63^\circ 20'$ y $54^\circ 10'$, respectivamente (ve la figura). Calcula la distancia entre A y B.

Ejercicio 17



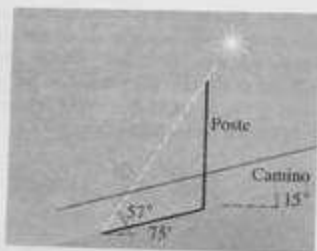
- 18 **Agrimensura** A fin de establecer la distancia entre los puntos A y B, un agrimensor selecciona un punto C que está a 375 yardas de A y 530 yardas de B. Si el $\angle BAC$ mide $49^\circ 30'$, calcula la distancia entre A y B.
- 19 **Ruta de un teleférico** Como se muestra en la figura, un teleférico transporta pasajeros desde el punto A, que está a 1.2 millas del punto B, que se halla en la base de una montaña, hasta un punto P en la cima de la misma. Los ángulos de elevación de P desde A y B son 21° y 65° , respectivamente.
- Calcula la distancia entre A y P.
 - Calcula la altura de la montaña.

Ejercicio 19



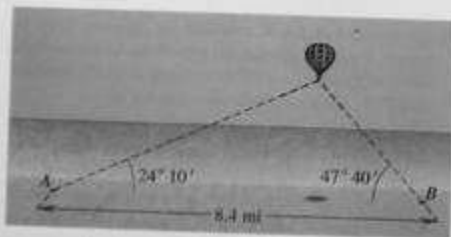
- 20 Longitud de una sombra Un camino recto hace un ángulo de 15° con la horizontal. Cuando el ángulo de elevación del Sol es de 57° , un poste vertical que está a un lado del camino proyecta una sombra de 75 pies de largo directamente cuesta abajo, como se muestra en la figura. Calcula la longitud del poste.

Ejercicio 20



- 21 Altura de un globo de aire caliente Los ángulos de elevación de un globo desde los puntos A y B a nivel del suelo son de $24^\circ 10'$ y $47^\circ 40'$, respectivamente. Como se muestra en la figura, los puntos A y B están a 8.4 millas uno del otro y el globo se encuentra entre ambos, en el mismo plano vertical. Calcula la altura del globo sobre el suelo.

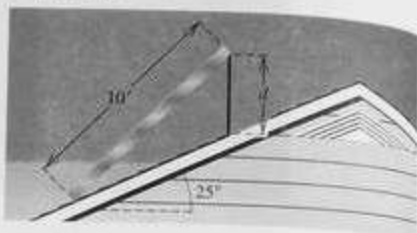
Ejercicio 21



- 22 Instalación de un panel solar En la figura se muestra un panel solar de 10 pies de ancho, que debe instalarse en un techo que forma un ángulo de 25° con la horizontal.

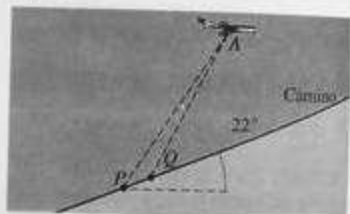
Calcula la longitud d del soporte que se requiere, si el panel hace un ángulo de 45° con la horizontal.

Ejercicio 22



- 23 Distancia a un aeroplano Un camino recto hace un ángulo de 22° con la horizontal. Desde un punto P sobre el camino, el ángulo de elevación de un aeroplano en el punto A es de 57° . En el mismo instante, desde otro punto Q situado a 100 metros cuesta arriba, el ángulo de elevación es de 63° . Como se indica en la figura, los puntos P , Q y A están en el mismo plano vertical. Calcula la distancia de P al aeroplano.

Ejercicio 23



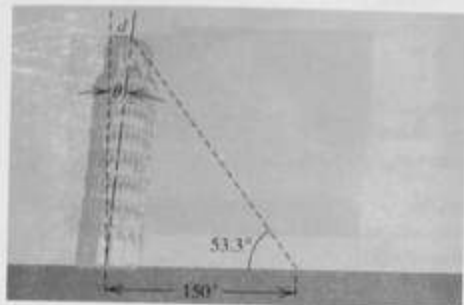
- 24 Agrimensura Un agrimensor observa que la dirección al punto A al B es $S63^\circ O$ y la dirección de A a C es $S87^\circ O$. La distancia de A a B es de 239 yardas y la de B a C es de 374 yardas. Calcula la distancia de A a C .

- 25 Localización de un incendio forestal Un guardabosque ubicado en un punto de observación A avista un incendio en dirección $N27^\circ 10' E$. Otro guardabosque, que está en un punto de observación B a 6.0 millas directamente al este de A , advierte el mismo incendio en $N52^\circ 40' O$. Calcula la distancia entre cada punto de observación y el incendio.

- 26 Inclinación de la torre de Pisa Originalmente, esta torre estaba perpendicular al suelo y medía 179 pies de altura. Debido al hundimiento del terreno, ahora se ha inclinado a cierto ángulo θ con respecto a la perpendicular, como se muestra en la figura. Cuando se observa la parte alta de la torre desde un punto situado a 150 pies del centro de la base, el ángulo de elevación es de 53.3° .

- (a) Calcula el ángulo θ .
- (b) Calcula la distancia d que se ha movido el centro de la parte superior de la torre con respecto a la perpendicular.

Ejercicio 26



27. **Altura de una catedral.** Una catedral se encuentra sobre una colina, como se muestra en la figura. Cuando se observa la parte superior del campanario desde la base de la colina, el ángulo de elevación es de 48° ; cuando esto se hace a una distancia de 200 pies desde la base de la colina, el ángulo es de 41° . La colina se eleva en un ángulo de 32° . Calcula la altura de la catedral.

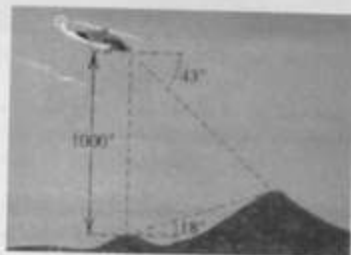
Ejercicio 27



28. **Observación desde un helicóptero.** Un helicóptero vuela a una altitud de 1000 pies sobre la cima de una montaña que mide 5210 pies, como se indica en la figura. Desde lo alto de esta montaña y desde el helicóptero se ve una segunda montaña, más elevada que la primera. Desde el helicóptero, el ángulo de depresión es de 43° , y desde la cima de la primera montaña, el ángulo de elevación es de 18° .

- (a) Calcula la distancia de pico a pico.
- (b) Calcula la altitud de la montaña más alta.

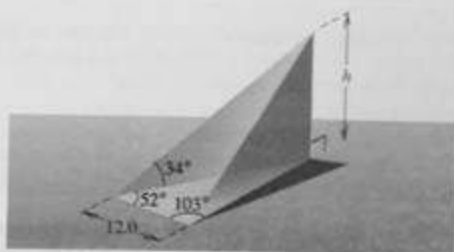
Ejercicio 28



29. El volumen V del prisma triangular recto que se muestra en la figura es de $\frac{1}{3}Bh$, donde B es el área de la base y h es la altura del prisma.

- (a) Calcula h . (b) Calcula V .

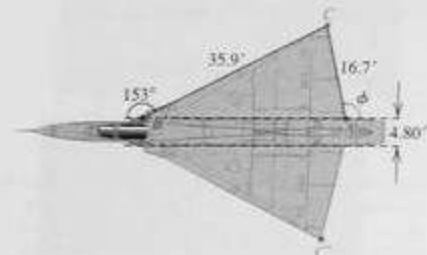
Ejercicio 29



30. **Diseño de un avión caza a reacción.** En la figura se ilustra la parte superior del ala de un caza a reacción.

- (a) Calcula el ángulo ϕ .
- (b) Si el fuselaje mide 4.80 pies de ancho, calcula la envergadura del ala CC' .
- (c) Calcula el área del triángulo ABC .

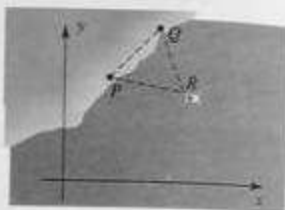
Ejercicio 30



- 31 Programa de computadora para agrimensores. Un programa emplea sistemas de coordenadas para ubicar posiciones

geográficas. Desde los puntos P y Q se observa una zona de perforación petrolera, situada frente a la costa en el punto R de la figura, y se encuentra que $\angle QPR$ y $\angle RQP$ miden $55^\circ 50'$ y $65^\circ 22'$, respectivamente. Si los puntos P y Q tienen coordenadas $(1487.7, 3452.8)$ y $(3145.8, 5127.5)$, respectivamente, calcula las coordenadas de R .

Ejercicio 31



8.2

Ley de los cosenos

En la sección anterior expresamos que la ley de los senos no se puede aplicar directamente para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuo cuando se da cualquiera de los dos casos siguientes:

- (1) Dos lados y el ángulo *entre* ellos (LAL).
- (2) Tres lados (LLL).

Para estos casos, aplicamos la *ley de los cosenos* que sigue:

Ley de los cosenos

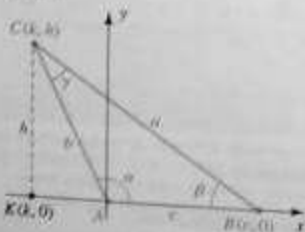
Si ABC es un triángulo marcado en la forma acostumbrada (figura 1), entonces

$$(1) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$(2) b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$(3) c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Figura 1



DEMOSTRACIÓN Demostremos la primera de las fórmulas. Dado el triángulo ABC , pongamos el ángulo α en posición estándar, conforme se ilustra en la figura 1. Hemos dibujado α como obtuso, pero el análisis también es válido si α es agudo. Considera la línea punteada que pasa por C , paralela al eje y y que corta al eje x en el punto $K(k, 0)$. Si hacemos $d(C, K) = h$, entonces C tiene coordenadas (k, h) . Por la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo,

$$\cos \alpha = \frac{k}{b} \quad \text{y} \quad \sin \alpha = \frac{h}{b}$$

Al despejar k y h se obtiene

$$k = b \cos \alpha \quad \text{y} \quad h = b \sin \alpha$$

Como el segmento AB tiene longitud c , las coordenadas de B son $(c, 0)$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= [d(B, C)]^2 = (k - c)^2 + (h - 0)^2 && \text{fórmula de la distancia} \\ &= (b \cos \alpha - c)^2 + (b \sin \alpha)^2 && \text{sustituir } k \text{ y } h \\ &= b^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha + c^2 + b^2 \sin^2 \alpha && \text{elevar al cuadrado} \\ &= b^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha && \text{factorizar primero y último términos} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha && \text{identidad de Pitágoras} \end{aligned}$$

El resultado es la primera fórmula expresada en la ley de los cosenos. Las fórmulas segunda y tercera se pueden obtener al poner β y γ , respectivamente, en posición estándar en un sistema coordenado.

Advierte que si $\alpha = 90^\circ$ en la figura 1, entonces $\cos \alpha = 0$ y la ley de los cosenos se reduce a $a^2 = b^2 + c^2$. Esto demuestra que el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos.

En lugar de aprender de memoria las tres fórmulas de la ley de los cosenos, es más conveniente recordar el siguiente enunciado, que toma en cuenta a todas.

Ley de los cosenos (Forma general)

El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de los mismos lados por el coseno del ángulo entre ellos.

Dados dos lados y el ángulo incluido de un triángulo, podemos usar la ley de los cosenos para hallar el tercer lado. Luego recurrimos a la ley de los senos para encontrar los otros ángulos del triángulo. Siempre que se siga este procedimiento, es mejor determinar el ángulo opuesto al lado más corto, ya que siempre es agudo. De este modo evitamos la posibilidad de obtener dos soluciones cuando se resuelve una ecuación trigonométrica que comprende ese ángulo, como se ilustra en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 1 Uso de la ley de los cosenos (LAL)

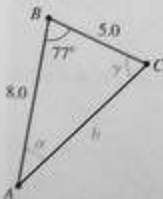
Calcula las partes restantes del $\triangle ABC$, si $a = 5.0$, $c = 8.0$ y $\beta = 77^\circ$.

SOLUCIÓN El triángulo aparece en la figura 2. Como β es el ángulo entre los lados a y c , comenzamos por calcular b (lado opuesto a β), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta && \text{ley de los cosenos} \\ &= (5.0)^2 + (8.0)^2 - 2(5.0)(8.0) \cos 77^\circ && \text{sustituir } a, c \text{ y } \beta \\ &= 89 - 80 \cos 77^\circ \approx 71.0 && \text{simplificar y calcular} \\ b &= \sqrt{71.0} \approx 8.4 && \text{tomar la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

(continúa)

Figura 2



Encontremos otro ángulo del triángulo mediante la ley de los senos. Según las observaciones que preceden este ejemplo, aplicaremos la ley de los senos y hallaremos α , puesto que es el ángulo opuesto al lado más corto, el cual es a .

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} \quad \text{ley de los senos}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{a \text{ sen } \beta}{b} \quad \text{despejar sen } \alpha$$

$$= \frac{5.0 \text{ sen } 77^\circ}{\sqrt{71.0}} \approx 0.5782 \quad \text{sustituir y aproximar}$$

Como α es agudo,

$$\alpha = \text{sen}^{-1}(0.5782) \approx 35.3^\circ \approx 35^\circ.$$

Finalmente, como $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, tenemos

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 35^\circ - 77^\circ = 68^\circ.$$

Dados los tres lados de un triángulo, podemos usar la ley de los cosenos para hallar *cualquiera* de los tres ángulos. Siempre encontraremos primero el ángulo más grande; es decir, el ángulo opuesto al lado más largo, ya que esta práctica garantizará que los ángulos restantes sean agudos. Luego podemos encontrar otro ángulo del triángulo aplicando la ley de los senos o la de los cosenos. Observemos que cuando se determina un ángulo por medio de la ley de los cosenos no hay caso ambiguo, ya que siempre se obtiene un ángulo único entre 0° y 180° .

EJEMPLO 2 Uso de la Ley de los cosenos (LLL)

Si el triángulo ABC tiene lados $a = 90$, $b = 70$ y $c = 40$, calcula los ángulos α , β y γ al grado más cercano.

SOLUCIÓN Según la observación previa, primero se encuentra el ángulo opuesto al lado más largo a ; por lo tanto, se escoge la forma de la ley de los cosenos donde aparece α y se procede como sigue:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \text{ley de los cosenos}$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{despejar cos } \alpha$$

$$= \frac{70^2 + 40^2 - 90^2}{2(70)(40)} = -\frac{2}{7} \quad \text{sustituir y simplificar}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{7}\right) \approx 106.6^\circ \approx 107^\circ \quad \text{calcular } \alpha$$

En estas condiciones se puede usar la ley de los senos o la de los cosenos para hallar β . Usamos la ley de los cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad \text{ley de los cosenos}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{despejar cos } \beta$$

$$= \frac{90^2 + 40^2 - 70^2}{2(90)(40)} = \frac{2}{3} \quad \text{sustituir y simplificar}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48.2^\circ \approx 48^\circ \quad \text{calcular } \beta$$

En este punto de la solución podemos encontrar γ usando la relación $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Pero si α o β se calculó erróneamente, entonces γ estará incorrecto. También podemos calcular γ y luego comprobar que la suma de los tres ángulos sea 180° . Así,

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \text{por lo que} \quad \gamma = \cos^{-1} \frac{90^2 + 70^2 - 40^2}{2(90)(70)} \approx 25^\circ$$

Observemos que $\alpha + \beta + \gamma = 107^\circ + 48^\circ + 25^\circ = 180^\circ$.

EJEMPLO 3 Calcular las diagonales de un paralelogramo

Un paralelogramo tiene lados de longitud de 30 cm y 70 cm y uno de los ángulos mide 65° . Calcula la longitud de cada diagonal al centímetro más cercano.

SOLUCIÓN En la figura 3 se ilustra el paralelogramo $ABCD$ con sus diagonales AC y BD . Al usar el triángulo ABC con $\angle ABC = 65^\circ$, podemos calcular AC como sigue:

$$\begin{aligned}(AC)^2 &= 30^2 + 70^2 - 2(30)(70) \cos 65^\circ && \text{ley de los cosenos} \\ &\approx 900 + 4900 - 1775 = 4025 && \text{calcular} \\ AC &= \sqrt{4025} \approx 63 \text{ cm} && \text{tomar la raíz cuadrada}\end{aligned}$$

Análogamente, si usamos el triángulo BAD y $\angle BAD = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$, podemos calcular BD como sigue:

$$\begin{aligned}(BD)^2 &= 30^2 + 70^2 - 2(30)(70) \cos 115^\circ \approx 7575 && \text{ley de los cosenos} \\ BD &= \sqrt{7575} \approx 87 \text{ cm} && \text{tomar la raíz cuadrada}\end{aligned}$$

Figura 3

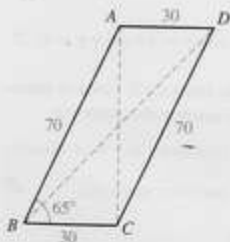
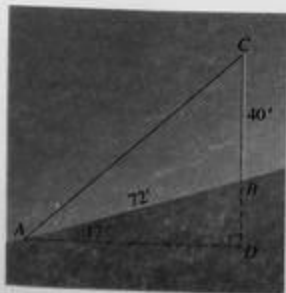


Figura 4



EJEMPLO 4 Hallar la longitud de un cable

Un poste vertical de 40 pies de altura está en una cuesta que forma un ángulo de 17° con la horizontal. Calcula la longitud mínima de cable que llegará de la parte superior del poste a un punto a 72 pies cuesta abajo medido desde la base del poste.

SOLUCIÓN El trazo de la figura 4 representa los datos dados. Deseamos encontrar AC . Refiriéndonos a la figura vemos que

$$\angle ABD = 90^\circ - 17^\circ = 73^\circ \quad \text{y} \quad \angle ABC = 180^\circ - 73^\circ = 107^\circ$$

Si utilizamos el triángulo ABC , podemos calcular AC como sigue:

$$\begin{aligned}(AC)^2 &= 72^2 + 40^2 - 2(72)(40) \cos 107^\circ \approx 8468 && \text{ley de los cosenos} \\ AC &= \sqrt{8468} \approx 92 \text{ pies} && \text{sacar la raíz cuadrada}\end{aligned}$$

Con la ley de los cosenos podemos derivar una fórmula para encontrar el área de un triángulo. Demostremos primero un resultado preliminar.

Dado el triángulo ABC , pongamos el ángulo α en una posición estándar (figura 1). Según se ve en la demostración de la ley de los cosenos, la altura h desde el vértice C es $h = b \operatorname{sen} \alpha$. Como el área del triángulo está dado por $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ch$ se ve que

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha.$$

Nuestro argumento es independiente del ángulo específico que se ponga en posición estándar. Al tomar β y γ en posición estándar se obtienen las fórmulas

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} \beta \quad \text{y} \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma.$$

Las tres fórmulas están cubiertas en el enunciado siguiente.

Área de un triángulo

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos lados cualesquiera y del seno del ángulo entre ellos.

Los dos ejemplos que siguen ilustran algunos usos de este enunciado.

EJEMPLO 5 Calcular el área de un triángulo

Calcula el área del triángulo ABC con $a = 2.20$ cm, $b = 3.0$ cm y $\gamma = 43.2^\circ$.

SOLUCIÓN Dado que γ es el ángulo entre los lados a y b , como se muestra en la figura 5, podemos utilizar el resultado anterior directamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma && \text{fórmula del área de un triángulo} \\ &= \frac{1}{2}(2.20)(3.0) \operatorname{sen} 43.2^\circ \approx 0.98 \text{ cm}^2 && \text{evaluar y aproximar} \end{aligned}$$

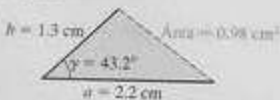
EJEMPLO 6 Calcular el área de un triángulo

Calcula el área del triángulo ABC si $a = 5.0$ cm, $b = 3.0$ cm y $\alpha = 37^\circ$.

SOLUCIÓN Para aplicar la fórmula del área de un triángulo, se debe hallar el ángulo γ que está entre los lados conocidos a y b . Como nos dan α , b y a , primero se determina β .

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} && \text{ley de los senos} \\ \operatorname{sen} \beta &= \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a} && \text{despejar } \operatorname{sen} \beta \\ &= \frac{3.0 \operatorname{sen} 37^\circ}{5.0} && \text{sustituir } b, a \text{ y } \alpha \\ \beta &= \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{3.0 \operatorname{sen} 37^\circ}{5.0} \right) \approx 21^\circ && \text{ángulo de referencia para } \beta \\ \beta &\approx 21^\circ \quad \text{o} \quad \beta \approx 159^\circ && \beta_2 \text{ o } 180^\circ - \beta_1 \end{aligned}$$

Figura 5



Se rechaza $\beta \approx 159^\circ$, porque $\alpha + \beta = 196^\circ \geq 180^\circ$; por lo que, $\beta = 21^\circ$ y
 $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 37^\circ - 21^\circ = 122^\circ$.

Finalmente se calcula el área del triángulo como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2}ab \sin \gamma && \text{fórmula del área de un triángulo} \\ &= \frac{1}{2}(5.0)(3.0) \sin 122^\circ \approx 6.4 \text{ cm}^2 && \text{sustituir y aproximar} \end{aligned}$$

Usaremos el resultado anterior para el área de un triángulo con objeto de derivar la *fórmula de Herón*, que expresa el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados.

Fórmula de Herón

El área \mathcal{A} de un triángulo con lados a , b y c está dada por

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde s es el semiperímetro, es decir, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

DEMOSTRACIÓN Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2}bc \sin \alpha \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2(1 - \cos^2 \alpha)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}bc(1 + \cos \alpha) \cdot \frac{1}{2}bc(1 - \cos \alpha)} \end{aligned}$$

Obtendremos la fórmula de Herón sustituyendo las expresiones bajo el signo del radical final con otras donde sólo aparezcan a , b y c . Despejamos $\cos \alpha$ de (1) de la ley de los cosenos y sustituimos como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}bc(1 + \cos \alpha) &= \frac{1}{2}bc \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\ &= \frac{1}{2}bc \left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\ &= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4} \\ &= \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4} \end{aligned}$$

(continúa)

Utilizamos el mismo tipo de manipulación en la segunda expresión bajo el signo del radical:

$$\frac{1}{2}bc(1 - \cos \alpha) = \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}$$

Si ahora sustituimos por las expresiones bajo el signo del radical, obtenemos

$$\Delta = \sqrt{\frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

Al hacer $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, se ve que

$$s-a = \frac{b+c-a}{2}, \quad s-b = \frac{a-b+c}{2}, \quad s-c = \frac{a+b-c}{2}$$

La sustitución de Δ en la ecuación anterior proporciona la fórmula de Herón.



EJEMPLO 7 Uso de la fórmula de Herón

Un campo triangular tiene lados de longitudes 125, 160 y 225 yardas. Calcula el número de acres en el campo (un acre equivale a 4840 yardas cuadradas).

SOLUCIÓN Encontraremos primero el semiperímetro del campo con $a = 125$, $b = 160$ y $c = 255$, así como los valores de $s-a$, $s-b$ y $s-c$.

$$s = \frac{1}{2}(125 + 160 + 225) = \frac{1}{2}(510) = 255$$

$$s-a = 255 - 125 = 130$$

$$s-b = 255 - 160 = 95$$

$$s-c = 255 - 225 = 30$$

Al sustituir en la fórmula de Herón se obtiene

$$\Delta = \sqrt{(255)(130)(95)(30)} = 9720 \text{ yardas}^2.$$

Puesto que hay 4840 yardas cuadradas en un acre, el número de acres es de $\frac{9720}{4840}$, o sea, alrededor de 2.

8.2 Ejercicios

Ejercicios 1 y 2: aplica el sentido común para relacionar las variables y los valores que se presentan. (Los triángulos están dibujados a escala y los ángulos están medidos en radianes.)



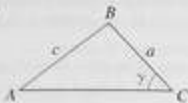
- | | |
|--------------|-----------|
| (a) α | (A) 12.60 |
| (b) β | (B) 1.10 |
| (c) γ | (C) 10 |
| (d) x | (D) 0.79 |
| (e) y | (E) 13.45 |
| (f) z | (F) 1.26 |



- | | |
|--------------|----------|
| (a) α | (A) 3 |
| (b) β | (B) 0.87 |
| (c) γ | (C) 8.24 |
| (d) x | (D) 1.92 |
| (e) y | (E) 6.72 |
| (f) z | (F) 0.35 |

Ejercicios 3 y 4: dadas las partes que se indican del $\triangle ABC$, ¿qué ángulo (α , β , o γ) o qué lado (a , b o c) hallarías a continuación y qué utilizarías para encontrarlo?

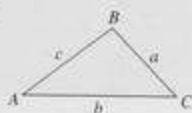
3 (a)



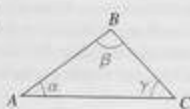
(b)



(c)



(d)



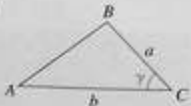
(e)



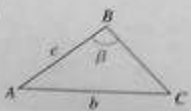
(f)



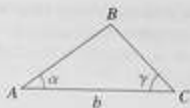
4 (a)



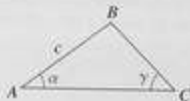
(b)



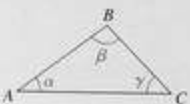
(c)



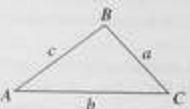
(d)



(e)



(f)



Ejercicios 5 al 14: resuelve el $\triangle ABC$.

5 $\alpha = 60^\circ$, $b = 20$, $c = 30$

6 $\gamma = 45^\circ$, $b = 10.0$, $a = 15.0$

7 $\beta = 150^\circ$, $a = 150$, $c = 30$

8 $\beta = 73^\circ 50'$, $c = 14.0$, $a = 87.0$

9 $\gamma = 115^\circ 10'$, $a = 1.10$, $b = 2.10$

10 $\alpha = 23^\circ 40'$, $c = 4.30$, $b = 70.0$

11 $a = 2.0$, $b = 3.0$, $c = 4.0$

12 $a = 10$, $b = 15$

13 $a = 25.0$, $b = 80.0$

14 $\alpha = 20.0$, $b = 20.0$, $c = 10.0$

- 15 Dimensiones de un terreno triangular. El ángulo de una esquina de un terreno triangular mide $73^\circ 40'$ y los lados que se unen en esa esquina miden 175 y 150 pies de largo. Calcula la longitud del tercer lado.

16. **Agrimensura** Para hallar la distancia entre los puntos A y B , un agrimensor escoge un punto C que está a 420 yardas de A y a 540 yardas de B . Si el ángulo ACB mide $63^\circ 10'$, calcula la distancia entre A y B .

17. **Distancia entre vehículos** Dos automóviles salen de una ciudad al mismo tiempo y circulan en carreteras rectas que difieren 84° en dirección. Si viajan a 60 y 45 millas por hora, respectivamente, ¿a qué distancia aproximada se hallarán uno de otro al cabo de 20 minutos?

18. **Ángulos de un terreno triangular** Un terreno triangular tiene lados de 420, 350 y 180 pies de longitud. Calcula el ángulo más pequeño entre los lados.

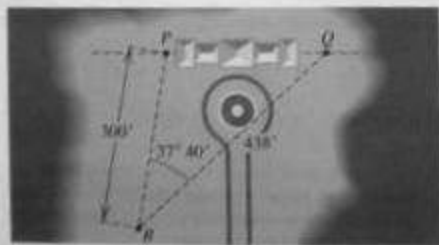
19. **Distancia entre naves** Una embarcación sale del puerto a la 1:00 P.M. y navega al $S35^\circ E$ a una velocidad de 24 millas por hora. Otra sale del mismo puerto a la 1:30 P.M. y navega al $S20^\circ O$ a 18 millas por hora. ¿Aproximadamente a qué distancia se encuentran una de otra a las 3:00 P.M.?

20. **Distancia de vuelo** Un avión vuela 165 millas desde el punto A en dirección 130° y luego 80 millas en dirección 245° . ¿A qué distancia aproximada se encontrará del punto A ?

21. **Ruta de un trotador** Un trotador corre a una velocidad constante de una milla cada 8 minutos en dirección $S40^\circ E$ durante 20 minutos y luego en dirección $N20^\circ E$ durante los siguientes 16 minutos. Calcula, al décimo de milla más cercano, la distancia desde el punto final al punto de partida de la pista.

22. **Agrimensura** Los puntos P y Q ubicados a nivel del suelo están en lados opuestos de un edificio. Para hallar la distancia entre los puntos, un agrimensor escoge un punto R que está a 300 pies del punto P y a 438 pies del Q y luego determina que el ángulo PRQ mide $37^\circ 40'$ (ve la figura). Calcula la distancia entre P y Q .

Ejercicio 22



23. **Rumbo de una lancha de motor** Una lancha de motor navegó a lo largo de una ruta triangular con lados de 2 km, 4 km y 3 km, respectivamente. Recorrió el primer lado en dirección $N20^\circ O$ y el segundo en dirección $S0^\circ O$, donde 0° es la medida en grados de un ángulo agudo. Calcula, al minuto más cercano, la dirección en que recorrió el tercer lado.

24. **Ángulo de una caja** La caja rectangular de la figura tiene dimensiones de $8'' \times 6'' \times 4''$. Calcula el ángulo θ formado por una diagonal de la base y una diagonal del lado de $6'' \times 4''$.

Ejercicio 24

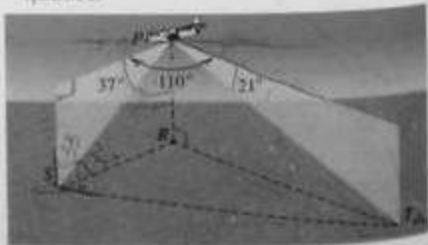


25. **Distancias en un parque de béisbol** Un parque de béisbol (también llamado diamante) tiene cuatro bases que forman un cuadrado y están a 90 pies una de la otra; el montículo del lanzador se halla a 60.5 pies del plato. Calcula la distancia del montículo del lanzador a cada uno de las otras tres bases.

26. **Un rombo** tiene lados de 100 centímetros de longitud y el ángulo en uno de los vértices es de 70° . Calcula las longitudes de las diagonales al décimo de centímetro más cercano.

27. **Reconocimiento** Un avión P de reconocimiento, que vuela a 10 000 pies por arriba de un punto R sobre la superficie del agua, localiza un submarino S a un ángulo de depresión de 37° y un buque tanque T a un ángulo de depresión de 21° , como se muestra en la figura. Además, el $\angle SPT$ resulta ser de 110° . Calcula la distancia entre el submarino y el buque tanque.

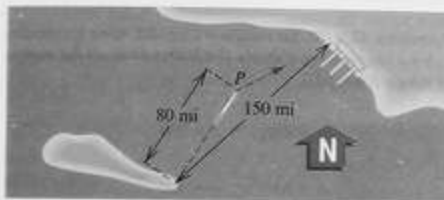
Ejercicio 27



- 28 **Corrección del rumbo de un buque** Un crucero zarpa con rumbo N47°E desde una isla a un puerto en tierra firme, que está a 150 millas. Después de navegar por aguas de fuertes corrientes, la nave está fuera de curso en una posición P ubicada a N33°E y a 80 millas de la isla, como se ilustra en la figura.

- (a) ¿A qué distancia aproximada estará del puerto de destino?
(b) ¿Qué dirección debe tomar para corregir su curso?

Ejercicio 28

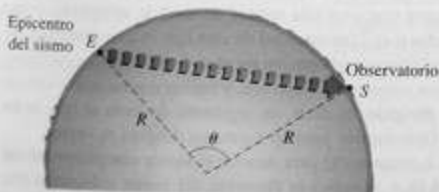


- 29 **Sismología** Los sismólogos investigan la estructura del interior de la Tierra analizando las ondas sísmicas ocasionadas por los terremotos. Si se supone que el interior del globo terráqueo es homogéneo, entonces estas ondas viajarán en línea recta a una velocidad constante v . En la figura se exhibe una sección transversal del planeta, con el epicentro en E y un observatorio en S . Utiliza la ley de los cosenos para demostrar que el tiempo t para que una onda viaje por el interior de la Tierra de E a S está dado por

$$t = \frac{2R}{v} \sec \frac{\theta}{2},$$

donde R es el radio de la Tierra y θ es el ángulo indicado por el vértice en el centro del planeta.

Ejercicio 29

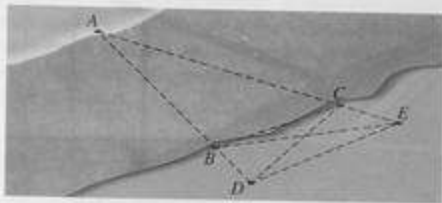


- 30 **Cálculo de distancias** La distancia de una margen a otra del río que se ve en la figura se puede encontrar sin medir ángulos. Se seleccionan los puntos B y C de la orilla opuesta y se prolongan los segmentos de recta AB y AC , como se observa. Se escogen los puntos D y E como se indica y se miden las distancias BC , BD , BE , CD y CE . Su-

pón que $BC = 184$ pies, $BD = 102$ pies, $BE = 218$ pies, $CD = 236$ pies y $CE = 80$ pies.

- (a) Calcula las distancias AB y AC .
(b) Calcula la distancia más corta a la otra orilla desde el punto A .

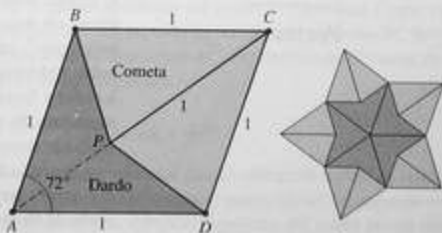
Ejercicio 30



- 31 **Tejas en estrella** Las tejas en estrella se forman a partir de un rombo $ABCD$ con lados de longitud 1 y un ángulo interior de 72° . Primero se ubica un punto P de la diagonal AC , que está a una distancia 1 del vértice C y luego se dibujan los segmentos PB y PD a los otros vértices de la diagonal, como se muestra en la figura. Las dos tejas formadas reciben el nombre de dardo y cometa. En química molecular se han aplicado figuras tridimensionales similares a estas tejas.

- (a) Halla la medida en grados de $\angle BPC$, $\angle APB$, y $\angle ABP$.
(b) Calcula, al 0.01 más cercano, la longitud del segmento BP .
(c) Calcula, al 0.01 más cercano, el área de una cometa y el área de un dardo.

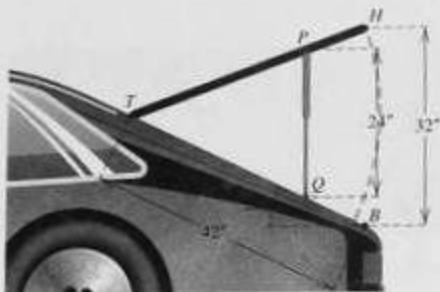
Ejercicio 31



- 32 **Diseño de automóviles** La portezuela trasera de un auto mide 42 pulgadas de largo. Hay que fijar un soporte, que mide 24 pulgadas cuando está extendido por completo, tanto a la portezuela como a la carrocería, de modo que cuando

la portezuela se abra del todo, el soporte quede en posición vertical y haya un espacio libre de 32 pulgadas, como se muestra en la figura. Calcula las longitudes de los segmentos TQ y TP .

Ejercicio 32



Ejercicios 33 al 40: calcula el área del triángulo ABC .

33 $\alpha = 60^\circ$, $b = 20$, $c = 30$

34 $\gamma = 45^\circ$, $b = 10.0$, $a = 15.0$

35 $\alpha = 40.3^\circ$, $\beta = 62.9^\circ$, $b = 5.63$

36 $\alpha = 35.7^\circ$, $\gamma = 105.2^\circ$, $b = 17.2$

37 $\alpha = 80.1^\circ$, $a = 8.0$, $b = 3.4$

38 $\gamma = 32.1^\circ$, $a = 14.6$, $c = 15.8$

39 $a = 25.0$, $b = 80.0$, $c = 60.0$

40 $a = 20.0$, $b = 20.0$, $c = 10.0$

Ejercicios 41 y 42: un campo triangular tiene longitudes a , b y c (en yardas). Calcula el número de acres del campo (1 acre = 4840 yd²).

41 $a = 115$, $b = 140$, $c = 200$

42 $a = 320$, $b = 350$, $c = 500$

Ejercicios 43 y 44: calcula el área de un paralelogramo que tiene lados de longitud a y b (en pies) si el ángulo de un vértice mide θ .

43 $a = 12.0$, $b = 16.0$, $\theta = 40^\circ$

44 $a = 40.3$, $b = 52.6$, $\theta = 100^\circ$

8.3

Vectores

Las cantidades tales como el área, el volumen, la longitud, la temperatura y el tiempo sólo tienen magnitud y se pueden caracterizar por completo mediante un único número real (con una unidad de medida apropiada, como pulg², pies³, cm, grados o s). Una cantidad de este tipo es una **cantidad escalar** y el número real correspondiente, un **escalar**. Los conceptos como velocidad y fuerza tienen magnitud y dirección, y suelen representarse con un **segmento de recta dirigido**, es decir, un segmento de recta al que se ha asignado dirección. Otro nombre para un segmento dirigido es **vector**.

Según la figura 1, usamos PQ para denotar el vector con **punto inicial** P y **punto terminal** Q , y se indica la dirección del vector colocando una punta de flecha en Q . La **magnitud** de PQ es la longitud del segmento PQ y se denota con $\|PQ\|$. Al igual que en la figura se usan letras negritas como \mathbf{u} y \mathbf{v} para denotar vectores cuyos puntos extremos no están especificados. En manuscritos, con frecuencia se usa la notación \vec{u} o \vec{v} .

Se dice que los vectores que tienen la misma magnitud y dirección son **equivalentes**. En matemáticas, un vector está determinado sólo por su

Figura 1
Vectores equivalentes.



magnitud y dirección, no por su ubicación; por tanto, se consideran **iguales** los vectores equivalentes, como los de la figura 1, y se anota

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

En consecuencia, *un vector se puede trasladar de una ubicación a otra siempre que no cambien su magnitud ni su dirección.*

Muchos conceptos físicos se representan mediante vectores. Para ilustrar lo anterior, imaginemos que un avión desciende a una velocidad constante de 100 millas por hora y que la línea de vuelo hace un ángulo de 20° con la horizontal. El vector \mathbf{v} de magnitud 100 representa ambos datos (figura 2). El vector \mathbf{v} es un **vector velocidad**.

Figura 2 Vector velocidad

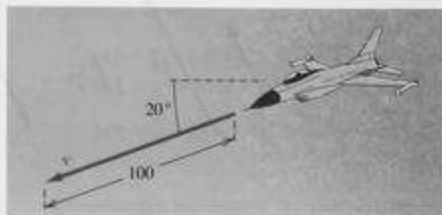


Figura 3
Vector fuerza



Un vector que representa un empuje o tracción de algún tipo es un **vector fuerza**. El vector \mathbf{F} de magnitud 5 ilustra la fuerza ejercida cuando una persona sostiene un peso de 5 libras (figura 3). Esta fuerza tiene la misma magnitud que la fuerza ejercida por la gravedad sobre el peso, pero actúa en dirección opuesta. Como resultado de esto, no hay movimiento hacia arriba o abajo.

A veces usamos \overrightarrow{AB} para representar la trayectoria de un punto (o partícula) a medida que se mueve a lo largo del segmento de A a B . Entonces \overrightarrow{AB} recibe el nombre de **desplazamiento** del punto (o partícula). Como en la figura 4, un desplazamiento \overrightarrow{AB} seguido de otro desplazamiento \overrightarrow{BC} lleva al mismo punto que el solo desplazamiento \overrightarrow{AC} . Por definición, el vector \overrightarrow{AC} es la **suma** de \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC} , y escribimos

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Dado que los vectores se pueden trasladar de una ubicación a otra, es viable sumar *cualesquiera* dos vectores si se coloca el punto inicial del segundo en el punto terminal del primero y se dibuja el segmento del punto inicial del primero al punto terminal del segundo (figura 4). Cuando se usa este método de suma vectorial se dice que se está aplicando la **ley del triángulo**.

Otra forma de hallar la suma es escoger los vectores \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} , que son iguales a \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC} , respectivamente, y que tengan el mismo punto inicial P (figura 5). Si construimos el paralelogramo $RPQS$, entonces, como

Figura 4
Suma de vectores

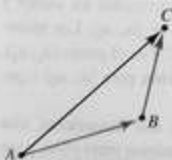


Figura 5
Fuerza resultante.



$\vec{PR} = \vec{QS}$, se deduce que $\vec{PS} = \vec{PQ} + \vec{PR}$ son dos fuerzas que actúan en P , entonces \vec{PS} es la **fuerza resultante**, es decir, la fuerza única que produce el mismo efecto que las dos fuerzas combinadas. Cuando se usa este método de suma vectorial se dice que se está aplicando la **ley del paralelogramo**.

Cuando m es un escalar y \mathbf{v} es un vector, $m\mathbf{v}$ se define como un vector cuya magnitud es $|m|$ por la magnitud $\|\mathbf{v}\|$ de \mathbf{v} , cuya dirección puede ser la misma de \mathbf{v} (si $m > 0$) o opuesta a la de \mathbf{v} (si $m < 0$). En la figura 6 aparecen ejemplos de estos casos. A $m\mathbf{v}$ se le conoce como **múltiplo escalar** de \mathbf{v} .

Figura 6 Múltiplos escalares.



Figura 7

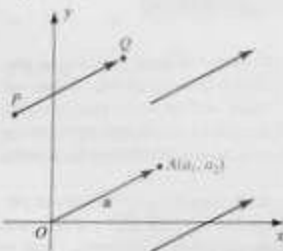
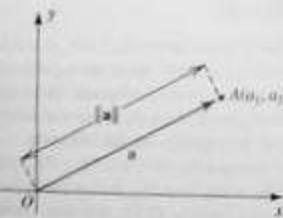


Figura 8
Magnitud $\|\mathbf{a}\|$



En el resto de esta sección restringiremos nuestro estudio a los vectores que se encuentran en un plano xy . Si \vec{PQ} es uno de dichos vectores, entonces, como se indica en la figura 7, existen muchos vectores equivalentes a \vec{PQ} . Sin embargo, hay exactamente un vector $\mathbf{a} = \vec{OA}$ equivalente con punto inicial en el origen. En este sentido, *cada vector determina un par ordenado único de números reales*, que son las coordenadas (a_1, a_2) del punto terminal A . Recíprocamente, todo par ordenado (a_1, a_2) determina el vector \vec{OA} , donde A tiene coordenadas (a_1, a_2) . En consecuencia, *hay una correspondencia biunívoca entre vectores de un plano xy y pares ordenados de números reales*. Esta correspondencia nos permite interpretar un vector como un segmento de recta dirigido y además, como un par ordenado de números reales. Para evitar confusiones con la notación de intervalos abiertos o puntos, se usa el símbolo $\langle a_1, a_2 \rangle$ para un par ordenado que represente un vector y lo denotamos con una letra en negritas, por ejemplo $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$. Los números a_1 y a_2 son los **componentes** del vector $\langle a_1, a_2 \rangle$. Si A es el punto (a_1, a_2) , como en la figura 7, a \vec{OA} se le llama **vector de posición** para (a_1, a_2) o para el punto A .

Este análisis demuestra que los vectores tienen dos naturalezas, una geométrica y otra algebraica. Muchas veces no distinguimos entre ellas, pero a partir de nuestro estudio debe quedar claro cuándo se refiere a pares ordenados o a segmentos de recta dirigidos.

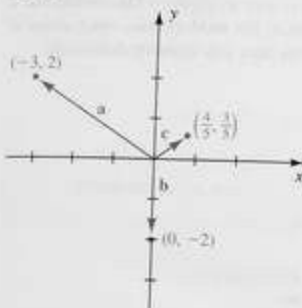
La **magnitud** del vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es, por definición, la longitud de su vector de posición \vec{OA} (figura 8).

Definición de la magnitud de un vector

La magnitud del vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ denotada por $\|\mathbf{a}\|$, está dada por

$$\|\mathbf{a}\| = \|\langle a_1, a_2 \rangle\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Figura 9



EJEMPLO 1 Hallar la magnitud de un vector

Traza los vectores para

$$\mathbf{a} = \langle -3, 2 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 0, -2 \rangle, \quad \mathbf{c} = \left\langle \frac{4}{3}, \frac{3}{5} \right\rangle$$

en un plano coordenado y encuentra la magnitud de cada vector.

SOLUCIÓN Los vectores están trazados en la figura 9. Por definición de la magnitud de un vector,

$$\|\mathbf{a}\| = \|\langle -3, 2 \rangle\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

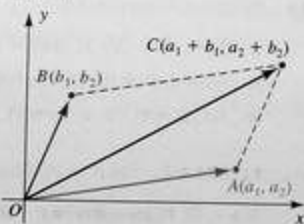
$$\|\mathbf{b}\| = \|\langle 0, -2 \rangle\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{c}\| = \left\| \left\langle \frac{4}{3}, \frac{3}{5} \right\rangle \right\| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1.$$

Consideremos los vectores \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{OB} correspondientes a $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, respectivamente (figura 10). Si \overrightarrow{OC} corresponde a $\mathbf{c} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$, se puede demostrar, usando pendientes, que los puntos O, A, C y B son vértices de un paralelogramo, es decir,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.$$

Figura 10



Al expresar esta ecuación en términos de pares ordenados se llega a lo siguiente:

Definición de suma de vectores

$$\langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

Notarás que, para sumar dos vectores, se suman los componentes correspondientes.

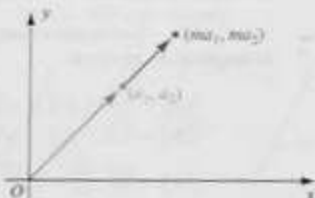
ILUSTRACIÓN Suma de vectores

$$\blacksquare (3, -4) + (2, 7) = (3 + 2, -4 + 7) = (5, 3)$$

$$\blacksquare (5, 1) + (-5, 1) = (5 + (-5), 1 + 1) = (0, 2)$$

También se puede demostrar que si m es un escalar y \vec{OA} corresponde a $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, el par ordenado determinado por $m\vec{OA}$ es $\langle ma_1, ma_2 \rangle$, como se ilustra en la figura 11 para $m > 1$. Esto lleva a la siguiente definición:

Figura 11



Definición de un múltiplo escalar de un vector

$$m\langle a_1, a_2 \rangle = \langle ma_1, ma_2 \rangle$$

Por tanto, para hallar un múltiplo escalar de un vector cada componente se multiplica por el escalar.

ILUSTRACIÓN Múltiplo escalar de un vector

$$\blacksquare 2\langle -3, 4 \rangle = \langle 2(-3), 2(4) \rangle = \langle -6, 8 \rangle$$

$$\blacksquare -2\langle -3, 4 \rangle = \langle (-2)(-3), (-2)(4) \rangle = \langle 6, -8 \rangle$$

$$\blacksquare 1\langle 5, 2 \rangle = \langle 1 \cdot 5, 1 \cdot 2 \rangle = \langle 5, 2 \rangle$$

EJEMPLO 2 Hallar un múltiplo escalar de un vector

Si $\mathbf{a} = \langle 2, 1 \rangle$, encuentra $3\mathbf{a}$ y $-2\mathbf{a}$, y traza los tres vectores en un plano coordenado.

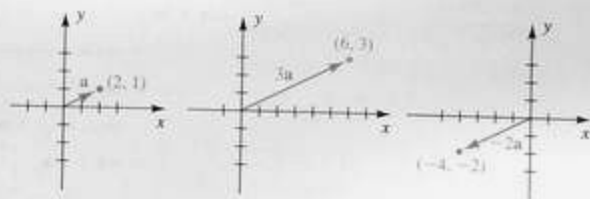
SOLUCIÓN Al utilizar la definición de múltiplos escalares de vectores encontramos

$$3\mathbf{a} = 3\langle 2, 1 \rangle = \langle 3 \cdot 2, 3 \cdot 1 \rangle = \langle 6, 3 \rangle$$

$$-2\mathbf{a} = -2\langle 2, 1 \rangle = \langle (-2) \cdot 2, (-2) \cdot 1 \rangle = \langle -4, -2 \rangle$$

Los vectores están trazados en la figura 12.

Figura 12



El vector cero $\mathbf{0}$ y el negativo $-\mathbf{a}$ de un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ se definen como sigue.

Definición de $\mathbf{0}$ y $-\mathbf{a}$

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle \quad \text{y} \quad -\mathbf{a} = -\langle a_1, a_2 \rangle = \langle -a_1, -a_2 \rangle$$

ILUSTRACIÓN El vector cero y el negativo de un vector

- $\langle 3, 5 \rangle + \mathbf{0} = \langle 3, 5 \rangle + \langle 0, 0 \rangle = \langle 3 + 0, 5 + 0 \rangle = \langle 3, 5 \rangle$
- $-\langle 3, -5 \rangle = \langle -3, -(-5) \rangle = \langle -3, 5 \rangle$
- $\langle 3, -5 \rangle + \langle -3, 5 \rangle = \langle 3 + (-3), -5 + 5 \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$
- $0\langle 2, 3 \rangle = \langle 0 \cdot 2, 0 \cdot 3 \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$
- $5 \cdot \mathbf{0} = 5\langle 0, 0 \rangle = \langle 5 \cdot 0, 5 \cdot 0 \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$

A continuación expresamos las propiedades de suma y múltiplos escalares de vectores, para cualesquiera vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} y escalares m , n . Tendrás poca dificultad para recordar estas propiedades, ya que son semejantes a las que ya conoces de los números reales.

Propiedades de suma y múltiplos escalares de vectores

- | | |
|---|--|
| (1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ | (5) $m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}$ |
| (2) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ | (6) $(m + n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}$ |
| (3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ | (7) $(mn)\mathbf{a} = m(n\mathbf{a}) = n(m\mathbf{a})$ |
| (4) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ | (8) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ |
| | (9) $0\mathbf{a} = \mathbf{0} = m\mathbf{0}$ |

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$. Para demostrar la propiedad (1), observemos que

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle = \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

(continúa)

La demostración de (5) es:

$$\begin{aligned}
 m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= m(a_1 + b_1, a_2 + b_2) && \text{definición de suma} \\
 &= (m(a_1 + b_1), m(a_2 + b_2)) && \text{definición de múltiplo escalar} \\
 &= (ma_1 + mb_1, ma_2 + mb_2) && \text{propiedad distributiva} \\
 &= (ma_1, ma_2) + (mb_1, mb_2) && \text{definición de suma} \\
 &= m\mathbf{a} + m\mathbf{b} && \text{definición de múltiplo escalar}
 \end{aligned}$$

Las demostraciones de las propiedades restantes son similares y se dejan como ejercicios.

La **sustracción de vectores** (denotada por $-$) está definida por $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. Si se usa la notación de par ordenado para \mathbf{a} y \mathbf{b} , entonces $-\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2 \rangle$, y se obtiene:

Definición de sustracción de vectores

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1, a_2 \rangle - \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

Por tanto, para hallar $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, basta restar los componentes de \mathbf{b} de los componentes correspondientes de \mathbf{a} .

ILUSTRACIÓN Sustracción de vectores si $\mathbf{a} = \langle 5, -4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -3, 2 \rangle$

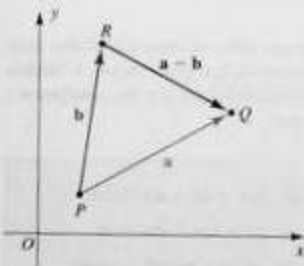
$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} &= \langle 5, -4 \rangle - \langle -3, 2 \rangle \\
 &= \langle 5 - (-3), -4 - 2 \rangle = \langle 8, -6 \rangle \\
 \blacksquare \quad 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} &= 2\langle 5, -4 \rangle - 3\langle -3, 2 \rangle \\
 &= \langle 10, -8 \rangle - \langle -9, 6 \rangle = \langle 10 - (-9), -8 - 6 \rangle = \langle 19, -14 \rangle
 \end{aligned}$$

Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores arbitrarios, entonces

$$\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a};$$

Es decir, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ es el vector que, cuando se suma a \mathbf{b} , dará \mathbf{a} . Si se representan \mathbf{a} y \mathbf{b} con los vectores PQ y PR con el mismo punto inicial, como en la figura 13, entonces RQ representa $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Figura 13



Consideremos algunas de las operaciones con vectores en una calculadora graficadora.

TI-83 Plus

La TI-83 Plus no cuenta con un modo vectorial específico, aunque *lists* nos es de utilidad. Visualmente, basta sustituir la notación de cuñas utilizada en este texto por corchetes.

TI-86

La TI-86 cuenta con un modo vectorial específico, donde para denotar un vector se usan corchetes en vez de cuñas.

Suma de vectores

2nd [1] 3 + -2 2nd [1] +
 2nd [1] -4 + 6 2nd [1] ENTER

Resta de vectores

2nd ENTRY < (7 times) - ENTER

Múltiplo escalar
de un vector

4 2nd [1] 2 * -3 2nd [1] ENTER

(3, -2) + (-4, 6)
 (-1, 4)
 (3, -2) - (-4, 6)
 (7, -8)
 4(2, -3)
 (8, -12)

2nd [1] 3 + -2 2nd [1] +

2nd [1] -4 + 6 2nd [1] ENTER

2nd ENTRY < (7 times) - ENTER

4 2nd [1] 2 * -3 2nd [1] ENTER

(3, -2) + (-4, 6)
 (-1, 4)
 (3, -2) - (-4, 6)
 (7, -8)
 4(2, -3)
 (8, -12)

Magnitud de un vector

El "cuadrado de una lista" regresa un listado que consta de los cuadrados de los elementos de la lista original. Como la magnitud es

La TI-86 utiliza una función especial denominada "norma" para calcular la magnitud de un vector.

"la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados",

podemos calcular la magnitud de un vector como se muestra en la siguiente pantalla. El último elemento es justamente una composición de los tres primeros elementos.

2nd [1] 3 + -4 2nd [1] x²

ENTER

2nd LIST < 5 2nd ANS)

ENTER

2nd √ 2nd ANS) ENTER

(3, -4)²
 (9 16)
 sum(Ans)
 25
 √(Ans)
 5
 √(sum((3, -4)²))
 5

2nd VECTR MATH(F3) norm(F3)

2nd [1] 3 + -4 2nd [1] ENTER

norm (3, -4)
 5
 NAMES EDIT TEST OPS C/LI
 GOTO INIT I/O DEL

Los vectores especiales \mathbf{i} y \mathbf{j} se definen de este modo:

Definición de \mathbf{i} y \mathbf{j}

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Un **vector unitario** es un vector de magnitud 1. Los vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} son vectores unitarios, como lo es el vector $\mathbf{c} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ en el ejemplo 1.

Los vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} sirven para obtener una manera alternativa de representar vectores. Específicamente, si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} = \langle a_1, 0 \rangle + \langle 0, a_2 \rangle = a_1 \langle 1, 0 \rangle + a_2 \langle 0, 1 \rangle$$

Este resultado dará:

Forma \mathbf{i}, \mathbf{j} para vectores

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$$

ILUSTRACIÓN Forma \mathbf{i}, \mathbf{j}

- $\langle 5, 2 \rangle = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
- $\langle -3, 4 \rangle = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
- $\langle 0, -6 \rangle = 0\mathbf{i} + (-6)\mathbf{j} = -6\mathbf{j}$

En la figura 14 se ilustran los vectores correspondientes a \mathbf{i} , \mathbf{j} y un vector arbitrario \mathbf{a} . Como \mathbf{i} y \mathbf{j} son vectores unitarios, $a_1\mathbf{i}$ y $a_2\mathbf{j}$ pueden representarse con vectores horizontales y verticales de magnitudes $|a_1|$ y $|a_2|$ respectivamente (figura 15). Por esta razón a_1 se llama **componente horizontal** y a_2 **componente vertical** del vector \mathbf{a} .

Figura 14 $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$

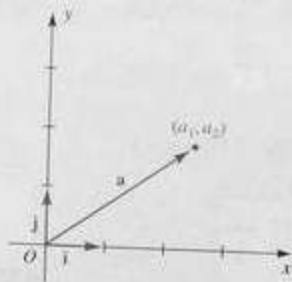
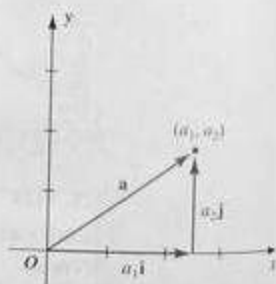


Figura 15 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$



El vector suma $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ es una **combinación lineal** de \mathbf{i} y \mathbf{j} . Las reglas para suma, resta y multiplicación por un escalar m se pueden escribir como sigue, con $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$:

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$$

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) - (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$$

$$m(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) = (ma_1)\mathbf{i} + (ma_2)\mathbf{j}$$

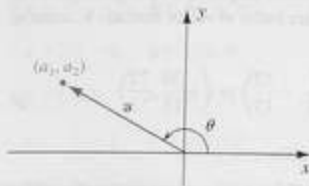
Estas fórmulas demuestran que es posible considerar las combinaciones lineales de \mathbf{i} y \mathbf{j} como sumas algebraicas.

EJEMPLO 3 Expresar un vector como combinación lineal de \mathbf{i} y \mathbf{j} Si $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, expresa $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ como una combinación lineal de \mathbf{i} y \mathbf{j} .

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= 3(5\mathbf{i} + \mathbf{j}) - 2(4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) \\ &= (15\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (8\mathbf{i} - 14\mathbf{j}) \\ &= 7\mathbf{i} + 17\mathbf{j} \end{aligned}$$

Figura 16

Sea θ un ángulo en posición estándar, medido desde el eje positivo de las x al vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, como se ve en la figura 16. Dado que

$$\cos \theta = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|},$$

se obtienen las siguientes fórmulas.

**Fórmulas para
componentes horizontales
verticales de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$**

Si el vector \mathbf{a} y el ángulo θ se definen como se hizo arriba, entonces

$$a_1 = \|\mathbf{a}\| \cos \theta \quad \text{y} \quad a_2 = \|\mathbf{a}\| \sin \theta.$$

Al aplicar estas fórmulas tendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle &= \langle \|\mathbf{a}\| \cos \theta, \|\mathbf{a}\| \sin \theta \rangle \\ &= \|\mathbf{a}\| \cos \theta \mathbf{i} + \|\mathbf{a}\| \sin \theta \mathbf{j} \\ &= \|\mathbf{a}\|(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}). \end{aligned}$$

**EJEMPLO 4** Expresar la velocidad del viento como vectorSi el viento sopla a 12 millas por hora en dirección $N40^\circ W$, expresa su velocidad como vector \mathbf{v} .**SOLUCIÓN** El vector \mathbf{v} se ilustra en la figura 17, donde $\theta = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ$. Con las fórmulas para componentes horizontal y vertical con $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ tendremos

$$v_1 = \|\mathbf{v}\| \cos \theta = 12 \cos 130^\circ, \quad v_2 = \|\mathbf{v}\| \sin \theta = 12 \sin 130^\circ.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} \\ &= (12 \cos 130^\circ)\mathbf{i} + (12 \sin 130^\circ)\mathbf{j} \\ &\approx (-7.7)\mathbf{i} + (9.2)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Figura 17

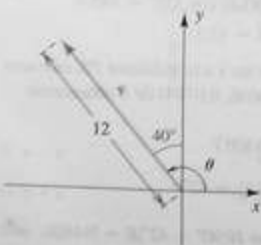
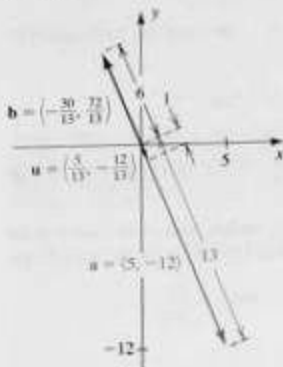
**EJEMPLO 5** Hallar un vector de dirección y magnitud específicasHallar un vector \mathbf{b} en dirección opuesta a $\mathbf{a} = \langle 5, -12 \rangle$ cuya magnitud sea 6.

Figura 18



SOLUCIÓN La magnitud de \mathbf{a} está dada por

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

Un vector unitario \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{a} puede encontrarse multiplicando \mathbf{a} por $1/\|\mathbf{a}\|$. Así,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} = \frac{1}{13} (5, -12) = \left\langle \frac{5}{13}, -\frac{12}{13} \right\rangle.$$

Al multiplicar \mathbf{u} por 6 se obtiene un vector magnitud 6 en la dirección de \mathbf{a} , por lo que multiplicamos \mathbf{u} por -6 para hallar el vector buscado \mathbf{b} , como se muestra en la figura 18:

$$\mathbf{b} = -6\mathbf{u} = -6 \left\langle \frac{5}{13}, -\frac{12}{13} \right\rangle = \left\langle -\frac{30}{13}, \frac{72}{13} \right\rangle.$$

EJEMPLO 6 Hallar un vector resultante

Dos fuerzas \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} de magnitudes 5.0 y 8.0 kg, respectivamente, actúan en un punto P . La dirección de \overrightarrow{PQ} es $N20^\circ E$, y la dirección de \overrightarrow{PR} es $N65^\circ E$. Calcula la magnitud y dirección del vector resultante \overrightarrow{PS} .



SOLUCIÓN En la figura 19 las fuerzas están representadas en forma geométrica. Observamos que los ángulos desde el eje positivo de las x a \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} miden 70° y 25° , respectivamente. Con las fórmulas para componentes horizontal y vertical se obtiene:

$$\overrightarrow{PQ} = (5 \cos 70^\circ)\mathbf{i} + (5 \sin 70^\circ)\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{PR} = (8 \cos 25^\circ)\mathbf{i} + (8 \sin 25^\circ)\mathbf{j}$$

Porque $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PS} &= (5 \cos 70^\circ + 8 \cos 25^\circ)\mathbf{i} + (5 \sin 70^\circ + 8 \sin 25^\circ)\mathbf{j} \\ &\approx 8.9606\mathbf{i} + 8.0794\mathbf{j} \approx (9.0)\mathbf{i} + (8.1)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|\overrightarrow{PS}\| \approx \sqrt{(9.0)^2 + (8.1)^2} \approx 12.1.$$

También se puede encontrar $\|\overrightarrow{PS}\|$ usando la ley de los cosenos (véase el ejemplo 3, sección 8.2). Como $\angle QPR = 45^\circ$, se deduce que $\angle PRS = 135^\circ$ y, por tanto,

$$\|\overrightarrow{PS}\|^2 = (8.0)^2 + (5.0)^2 - 2(8.0)(5.0) \cos 135^\circ \approx 145.6$$

$$\text{y} \quad \|\overrightarrow{PS}\| \approx \sqrt{145.6} \approx 12.1.$$

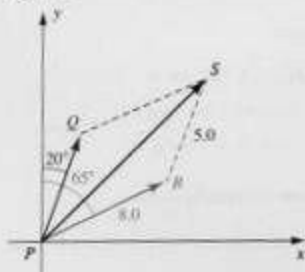
Si θ es el ángulo desde el eje positivo de las x a la resultante \overrightarrow{PS} , entonces al usar las coordenadas (aproximadas) $(8.9606, 8.0794)$ de S obtenemos:

$$\tan \theta \approx \frac{8.0794}{8.9606} \approx 0.9017$$

$$\theta \approx \tan^{-1}(0.9017) \approx 42^\circ$$

Por tanto, la dirección aproximada de \overrightarrow{PS} es $N(90^\circ - 42^\circ)E = N48^\circ E$.

Figura 19



8.3 Ejercicios

Ejercicios 1 al 6: encuentra $a + b$, $a - b$, $4a + 5b$, $4a - 5b$, y $\|a\|$.

1 $a = (2, -3)$, $b = (1, 4)$

2 $a = (-2, 6)$, $b = (2, 3)$

3 $a = (-7, -2)$, $b = 4(-2, 1)$

4 $a = 2(5, -4)$, $b = -(6, 0)$

5 $a = i + 2j$, $b = 3i - 5j$

6 $a = -3i + j$, $b = -3i + j$

Ejercicios 7 al 10: traza los vectores correspondientes a a , b , $a + b$, $2a$ y $-3b$.

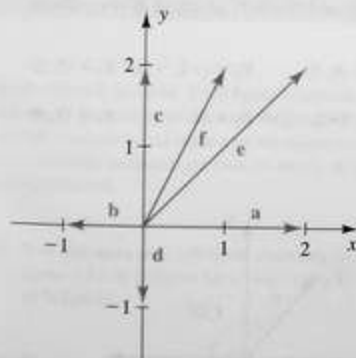
7 $a = 3i + 2j$, $b = -i + 5j$

8 $a = -5i + 2j$, $b = i - 3j$

9 $a = (-4, 6)$, $b = (-2, 3)$

10 $a = (2, 0)$, $b = (-2, 0)$

Ejercicios 11 al 16: utiliza componentes para expresar la suma o diferencia como un múltiplo escalar de uno de los vectores a , b , c , d , e o f que se muestran en la figura.



11 $a + b$

12 $c - d$

13 $b + e$

14 $f - b$

15 $b + d$

16 $e + c$

Ejercicios 17 al 26: si $a = \langle a_1, a_2 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2 \rangle$, $c = \langle c_1, c_2 \rangle$ y m y n son números reales; demuestra la propiedad expresada.

17 $a + (b + c) = (a + b) + c$

18 $a + 0 = a$

19 $a + (-a) = 0$

20 $(m + n)a = ma + na$

21 $(mr)a = m(na) = n(ma)$

22 $1a = a$

23 $0a = 0 = m0$

24 $(-m)a = -ma$

25 $-(a + b) = -a - b$

26 $m(a - b) = ma - mb$

27 Si $v = \langle a, b \rangle$, demuestra que la magnitud de $2v$ es el doble de la magnitud de v .

28 Si $v = \langle a, b \rangle$ y k es cualquier número real, demuestra que la magnitud de kv es $|k|$ por la magnitud de v .

Ejercicios 29 al 36: encuentra la magnitud de a y el mínimo ángulo positivo θ desde el eje positivo de las x al vector OP que corresponde al de a .

29 $a = (3, -3)$

30 $a = \langle -2, -2\sqrt{3} \rangle$

31 $a = (-5, 0)$

32 $a = (0, 10)$

33 $a = -4i + 5j$

34 $a = 10i - 10j$

35 $a = -18j$

36 $a = 2i - 3j$

Ejercicios 37 al 40: los vectores a y b representan dos fuerzas que actúan en el mismo punto y θ es el mínimo ángulo positivo entre a y b . Calcula la magnitud de la fuerza resultante.

37 $\|a\| = 40$ lb, $\|b\| = 70$ lb, $\theta = 45^\circ$

38 $\|a\| = 5.5$ lb, $\|b\| = 6.2$ lb, $\theta = 60^\circ$

39 $\|a\| = 2.0$ lb, $\|b\| = 8.0$ lb, $\theta = 120^\circ$

40 $\|a\| = 30$ lb, $\|b\| = 50$ lb, $\theta = 150^\circ$

Ejercicios 41 al 44: las magnitudes y direcciones de dos fuerzas que actúan en un punto P están dadas en (a) y (b). Calcula la magnitud y dirección del vector resultante.

41. (a) 90 lb, $N75^\circ W$ (b) 60 lb, $S5^\circ E$
 42. (a) 20 lb, $S17^\circ W$ (b) 50 lb, $N82^\circ W$
 43. (a) 6.0 lb, 110° (b) 2.0 lb, 215°
 44. (a) 20 lb, 320° (b) 40 lb, 30°

Ejercicios 45 al 48: calcula los componentes horizontal y vertical del vector descrito.

45. **Lanzamiento de un balón.** Un mariscal de campo de fútbol lanza el balón con una velocidad de 50 pies por segundo a un ángulo de 35° con la horizontal.
 46. **Arrastre de un trineo.** Un niño arrastra un trineo por la nieve y ejerce una fuerza de 20 libras a un ángulo de 40° con la horizontal.
 47. **Músculo bíceps.** El músculo bíceps, al sostener el antebrazo y un peso en la mano, ejerce una fuerza de 20 libras. Como se ve en la figura, el músculo forma un ángulo de 108° con el antebrazo.

Ejercicio 47



48. **Aterrizaje de un avión.** Un avión de propulsión se aproxima a una pista con un ángulo de 7.5° con la horizontal, volando a una velocidad de 160 millas por hora.

Ejercicios 49 al 52: halla un vector unitario que tenga (a) la misma dirección del vector \mathbf{a} y (b) la dirección opuesta al vector \mathbf{a} .

49. $\mathbf{a} = -8\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$
 50. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
 51. $\mathbf{a} = (2, -5)$
 52. $\mathbf{a} = (0, 6)$

53. Halla un vector con la misma dirección que $(6, 3)$ y que tenga:
 (a) El doble de la magnitud de éste.
 (b) La mitad de la magnitud de éste.
 54. Halla un vector con dirección opuesta a $9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ y que tenga:
 (a) Tres veces la magnitud de éste.
 (b) La tercera parte de la magnitud de éste.

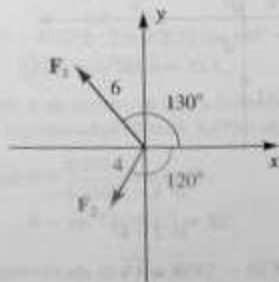
55. Halla un vector de magnitud 6 cuya dirección sea opuesta a la de $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$.
 56. Halla un vector de magnitud 4 cuya dirección sea opuesta a la de $\mathbf{a} = (2, -5)$.

Ejercicios 57 al 60: si las fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n actúan sobre el punto P , la fuerza neta \mathbf{F} (o resultante) es la suma $F_1 + F_2 + \dots + F_n$. Si $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, se dice que las fuerzas están en equilibrio. Las fuerzas dadas actúan en el origen O de un plano xy .

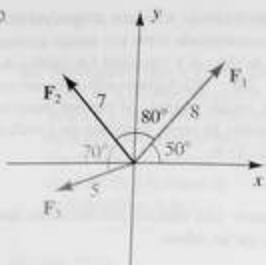
- (a) Encuentra la fuerza neta \mathbf{F} .
 (b) Halla otra fuerza \mathbf{G} tal que se dé el equilibrio.

57. $F_1 = (4, 3)$, $F_2 = (-2, -3)$, $F_3 = (5, 2)$
 58. $F_1 = (-3, -1)$, $F_2 = (0, -3)$, $F_3 = (3, 4)$

59.

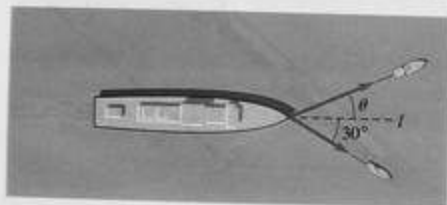


60



61. **Fuerza de un remolcador** Dos remolcadores tiran de un gran barco hacia un puerto, como se muestra en la figura; el remolcador más grande ejerce una fuerza de 4000 libras sobre su cable y el menor, de 3200 libras. Si el barco ha de navegar en línea recta, sobre l , calcula el ángulo θ que el remolcador más grande debe formar con l .

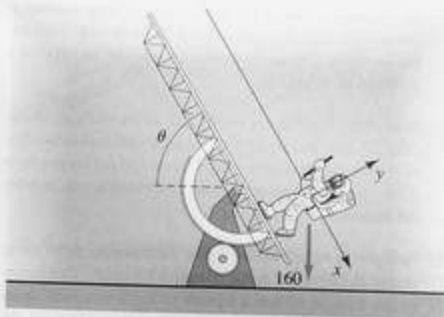
Ejercicio 61



62. **Simulación de la gravedad** En la figura se presenta un aparato simple que simula condiciones de gravedad en otros planetas. Una cuerda está sujeta a un astronauta que manobra en un plano inclinado que hace un ángulo de θ grados con la horizontal.

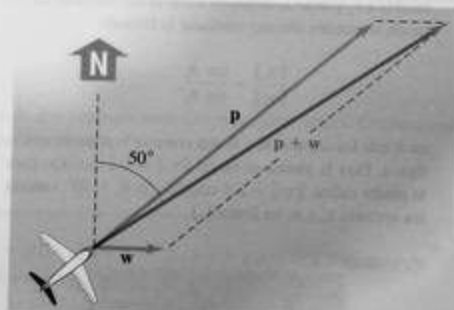
- (a) Si el astronauta pesa 160 libras, encuentra las componentes x y y de la fuerza hacia abajo (observa los ejes en la figura).
- (b) El componente y del inciso (a) es el peso del astronauta con respecto al plano inclinado. El sujeto debe pesar 27 libras en la Luna y 60 libras en Marte. Calcula los ángulos θ (al 0.01° más cercano), de modo que el aparato del plano inclinado simule una caminata en estas superficies.

Ejercicio 62



63. **Rumbo de un avión y velocidad en tierra** Un aeroplano con rapidez de 200 millas por hora vuela en dirección 50° y un viento de 40 millas por hora sopla desde el oeste. Como se muestra en la figura, estos datos se pueden representar con vectores \mathbf{p} y \mathbf{w} de magnitudes 200 y 40, respectivamente. La dirección de la resultante $\mathbf{p} + \mathbf{w}$ dará el rumbo verdadero del avión en relación con tierra, y la magnitud $\|\mathbf{p} + \mathbf{w}\|$ es la rapidez en tierra del avión. Calcula el rumbo verdadero y la rapidez en tierra.

Ejercicio 63



64. **Rumbo de un avión y rapidez en tierra** Consulta el ejercicio 63. Un avión vuela en dirección 140° a una rapidez en aire de 500 millas por hora, con un viento de 30 millas por hora que sopla en dirección 65° . Calcula el rumbo y la rapidez en tierra del avión.

65. **Rumbo de un avión y rapidez en tierra** El piloto de una aeronave desea mantener un rumbo en dirección 250° , con una rapidez en tierra de 400 millas por hora cuando el viento está soplando directamente hacia el norte a 50 millas por hora. Calcula la rapidez en aire que se requiere y el rumbo de la brújula.
66. **Dirección y rapidez del viento** Un avión vuela en dirección 20° con una rapidez del aire de 300 millas por hora. Su rapidez en tierra y rumbo son 350 millas por hora y 30° , respectivamente. Estima la dirección y la rapidez del viento.
67. **Navegación en un bote de remos** La corriente de un río se mueve directamente desde el oeste a 1.5 pies/s. Una persona que rema en un bote a 4 pies/s en aguas tranquilas desea remar directamente hacia el norte hasta el otro lado del río. Calcula, al grado más cercano, la dirección hacia la que debe remar.

68. **Navegación en un bote de motor** Para que un bote de motor que se mueve a una rapidez de 30 millas por hora navegue directamente al norte hasta la otra ribera, ha de dirigirse a un punto que tiene un rumbo de $N15^\circ E$. Si la corriente se mueve directamente al oeste, calcula la rapidez con que circula.
69. **Circulación de aguas freáticas** Los contaminantes de las aguas subterráneas pueden incorporarse al agua potable de una comunidad atravesando la roca porosa del manto acuífero. Si las aguas freáticas fluyen a una rapidez v_1 por una zona de contacto entre dos tipos de rocas, su velocidad cambia a v_2 y tanto la dirección como la velocidad de circulación se pueden obtener mediante la fórmula

$$\frac{\|v_1\|}{\|v_2\|} = \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2}$$

en donde los ángulos θ_1 y θ_2 son como se representan en la figura. Para la piedra arenisca, $\|v_1\| = 8.2$ cm/día; para la piedra caliza, $\|v_2\| = 3.8$ cm/día. Si $\theta_1 = 30^\circ$, calcula los vectores v_1 y v_2 en forma \mathbf{i} , \mathbf{j} .

Ejercicio 69

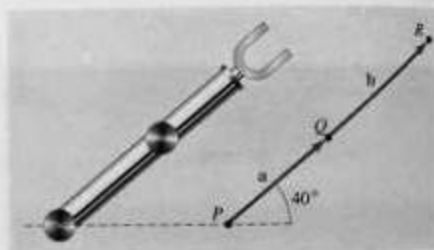


70. **Circulación de aguas freáticas** Consulta el ejercicio 69. Si agua subterránea contaminada corre por arenas arcillosas con una dirección de flujo θ_1 y velocidad (en cm/día) dada por el vector $v_1 = 20\mathbf{i} - 82\mathbf{j}$. Cuando esta corriente entra en una región de arenas limpias, su rapidez aumenta a 725 cm/día. Encuentra la nueva dirección de circulación mediante el cálculo de θ_2 .

71. **Movimiento de robots** Los vectores son útiles para describir el movimiento de los robots.

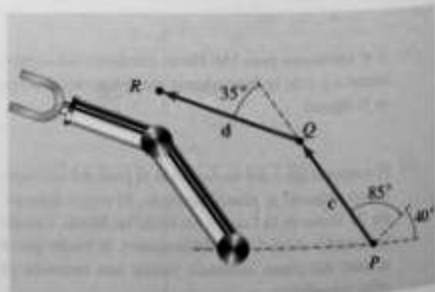
- (a) El brazo de la máquina que se ilustra en la primera figura se puede hacer girar en las articulaciones P y Q . El brazo superior, representado por \mathbf{a} , mide 15 pulgadas de largo, y el antebrazo (incluyendo la mano), representado por \mathbf{b} , 17. Calcula las coordenadas del punto R de la mano usando $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Ejercicio 71(a)



- (b) Si el brazo superior gira 85° y el antebrazo gira otra 35° , como se ilustra en la segunda figura, calcula las nuevas coordenadas de R usando $\mathbf{c} + \mathbf{d}$.

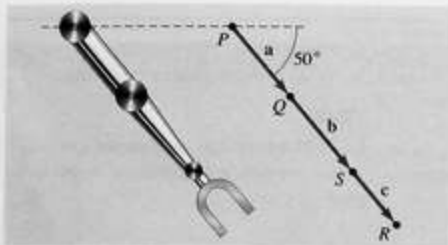
Ejercicio 71(b)



72 Movimiento de robots Consulta el ejercicio 71.

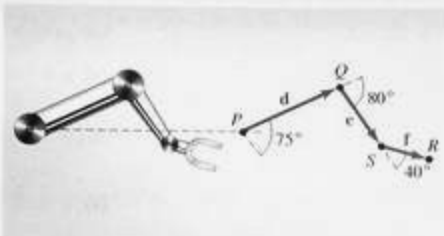
- (a) Supongamos que a la articulación de la muñeca del robot se le permite un giro en la articulación que enlaza a S y que el brazo está ubicado como se muestra en la primera figura. El brazo superior mide 15 pulgadas de largo; el antebrazo, sin la mano, tiene una longitud de 10 y la mano de 7. Calcula las coordenadas de R usando $a + b + c$.

Ejercicio 72(a)



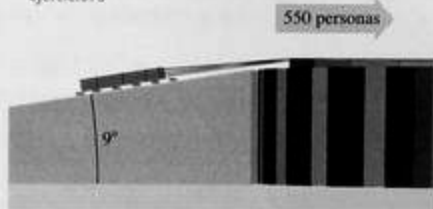
- (b) Supón que el brazo superior del robot gira 75° , el antebrazo -80° y la mano 40° , como se muestra en la segunda figura. Calcula las nuevas coordenadas de R usando $d + e + f$.

Ejercicio 72(b)



- 73 Fuerzas en Stonehenge En el ejercicio 25 de la sección 6.2 vimos que, en la construcción de Stonehenge, intervinieron grupos de 550 personas para empujar los bloques de piedra de 99 000 libras cuesta arriba de una rampa con una inclinación de 9° . Sin tener en cuenta la fricción, determina la fuerza que debió ejercer cada persona para poder subir los bloques por la rampa

Ejercicio 73



8.4

Producto punto

El producto punto de dos vectores tiene muchas aplicaciones. Comencemos con una definición algebraica.

Definición del producto punto

Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. El producto punto de \mathbf{a} y \mathbf{b} , denotado por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1b_1 + a_2b_2.$$

El símbolo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se lee "a punto b". El producto punto también se conoce como **producto escalar** o **producto interior**. Observemos que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es un número real y no un vector, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

**EJEMPLO 1** Hallar el producto punto de dos vectoresEncuentra $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

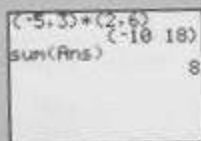
$$(a) \mathbf{a} = (-5, 3), \quad \mathbf{b} = (2, 6) \qquad (b) \mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$$

SOLUCIÓN

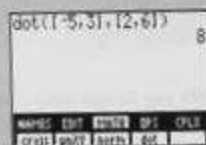
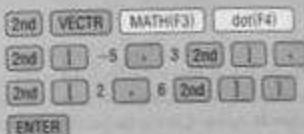
$$(a) (-5, 3) \cdot (2, 6) = (-5)(2) + (3)(6) = -10 + 18 = 8$$

$$(b) (-4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) = (-4)(3) + (6)(-7) = 12 - 42 = -30 \quad \checkmark$$

Encontremos el producto punto del ejemplo 1(a) en una calculadora graficadora.

TI-83 PlusEl producto de las listas $\{a_i, a_i\}$ y $\{b_i, b_i\}$ es la lista $\{a_i b_i, a_i b_i\}$. Al sumar estos elementos se obtiene el producto punto.**TI-86**

La TI-86 cuenta con una función que acepta dos vectores y proporciona su producto punto.

**Propiedades del producto punto**Si \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son vectores y m un número real, entonces

(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$

(2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(3) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

(4) $(m\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (m\mathbf{b})$

(5) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

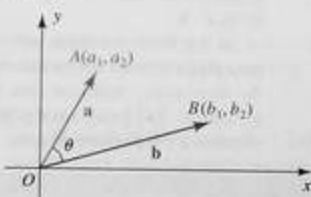
DEMOSTRACIÓN La demostración de cada propiedad se deduce de la definición del producto punto y de las propiedades de los números reales; por tanto, si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2 \rangle && \text{definición de suma} \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) && \text{definición de producto punto} \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1c_1 + a_2c_2) && \text{propiedades de los números reales} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} && \text{definición de producto punto}\end{aligned}$$

lo que demuestra la propiedad (3). Las demostraciones de las propiedades restantes se dejan como ejercicios.

Dos vectores cualesquiera diferentes de cero $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ se pueden representar en un plano coordenado por segmentos de recta dirigidos desde el origen O a los puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, respectivamente. El ángulo θ entre \mathbf{a} y \mathbf{b} es, por definición, $\angle AOB$ (figura 1). Observamos que $0 \leq \theta \leq \pi$ y que $\theta = 0$ si \mathbf{a} y \mathbf{b} tienen la misma dirección o $\theta = \pi$ si \mathbf{a} y \mathbf{b} tienen dirección opuesta.

Figura 1



Definición de vectores paralelos y ortogonales

Sea θ el ángulo entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} diferentes de cero.

(1) \mathbf{a} y \mathbf{b} son **paralelos** si $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

(2) \mathbf{a} y \mathbf{b} son **ortogonales** si $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} de la figura 1 son paralelos si y sólo si se encuentran en la misma línea que pasa por el origen. En este caso, $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$ para algún número real m . Los vectores son ortogonales si y sólo si están en líneas mutuamente perpendiculares que pasan por el origen. Suponemos que el vector cero $\mathbf{0}$ es paralelo y ortogonal a *todo* vector \mathbf{a} .

El siguiente teorema demuestra la cercana relación que hay entre el ángulo situado entre dos vectores y el producto punto de ambos.

Teorema sobre el producto puntoSi θ es el ángulo entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} diferentes de cero, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

DEMOSTRACIÓN Si \mathbf{a} y \mathbf{b} no son paralelos, tenemos una situación similar a la ilustrada en la figura 1. Podemos aplicar entonces la ley de los cosenos al triángulo AOB . Como las longitudes de los tres lados del triángulo son $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y $d(A, B)$,

$$[d(A, B)]^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

Usamos la fórmula de la distancia y la definición de la magnitud de un vector para obtener que

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta,$$

lo cual se reduce a

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

Al dividir ambos lados de la última ecuación entre -2 resulta

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta,$$

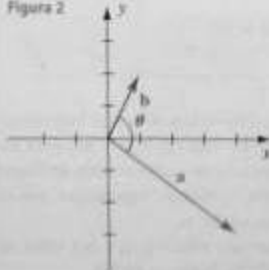
lo que es equivalente a lo que se deseaba demostrar, ya que el lado izquierdo es $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son paralelos, entonces $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ y, por tanto, $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$ para algún número real m con $m > 0$ si $\theta = 0$ y $m < 0$ si $\theta = \pi$. Se puede demostrar, mediante las propiedades del producto punto, que $\mathbf{a} \cdot (m\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\| \|m\mathbf{a}\| \cos \theta$ y, por tanto, el teorema es cierto para todos los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} distintos de cero. \square

Teorema sobre el coseno del ángulo entre vectoresSi θ es el ángulo entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} distintos de cero, entonces

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.$$

Figura 2

**EJEMPLO 2** Hallar el ángulo entre dos vectoresEncuentra el ángulo entre $\mathbf{a} = (4, -3)$ y $\mathbf{b} = (1, 2)$.

SOLUCIÓN Los vectores están dibujados en la figura 2. Aplicamos el teorema anterior:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{(4)(1) + (-3)(2)}{\sqrt{16 + 9} \sqrt{1 + 4}} = \frac{-2}{5\sqrt{5}}, \quad \text{o} \quad \frac{-2\sqrt{5}}{25}$$

Por tanto,

$$\theta = \arccos\left(\frac{-2\sqrt{5}}{25}\right) \approx 100.3^\circ. \quad \square$$

EJEMPLO 3 Demostrar que dos vectores son paralelos

Sea $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.

- (a) Demuestra que \mathbf{a} y \mathbf{b} son paralelos.
 (b) Encuentra el escalar m tal que $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$.

SOLUCIÓN

(a) Por definición, los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son paralelos si y sólo si el ángulo θ entre ellos es 0 o π . Dado que

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{(\frac{1}{2})(-2) + (-3)(12)}{\sqrt{\frac{1}{4} + 9} \sqrt{4 + 144}} = \frac{-37}{37} = -1,$$

vemos que

$$\theta = \arccos(-1) = \pi.$$

(b) Dado que \mathbf{a} y \mathbf{b} son paralelos, hay un escalar m tal que $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$; es decir,

$$-2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} = m(\frac{1}{2}\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = \frac{1}{2}m\mathbf{i} - 3m\mathbf{j}.$$

Al igualar los coeficientes de \mathbf{i} y \mathbf{j} tendremos

$$-2 = \frac{1}{2}m \quad \text{y} \quad 12 = -3m.$$

Por tanto, $m = -4$; esto es, $\mathbf{b} = -4\mathbf{a}$. Tomemos nota de que \mathbf{a} y \mathbf{b} tienen direcciones opuestas, ya que $m < 0$.

El uso de la fórmula $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$, junto con el hecho de que dos vectores son ortogonales si y sólo si el ángulo entre ellos es $\pi/2$ (o uno de los vectores es $\mathbf{0}$), nos dará este resultado.

**Teorema sobre
vectores ortogonales**

Dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

EJEMPLO 4 Demostrar que dos vectores son ortogonales

Demuestra que el par de vectores es ortogonal:

- (a) \mathbf{i}, \mathbf{j} (b) $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

SOLUCIÓN Se puede usar el teorema sobre vectores ortogonales para probar la ortogonalidad demostrando que el producto punto de cada par es cero:

(a) $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1, 0) \cdot (0, 1) = (1)(0) + (0)(1) = 0 + 0 = 0$

(b) $(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot (6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = (2)(6) + (3)(-4) = 12 - 12 = 0$

Definición de $\text{comp}_b \mathbf{a}$

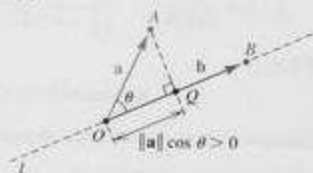
Sea θ el ángulo entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} diferentes de cero. El **componente de \mathbf{a} proyectado a lo largo de \mathbf{b}** , denotado por $\text{comp}_b \mathbf{a}$, está dado por:

$$\text{comp}_b \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \cos \theta.$$

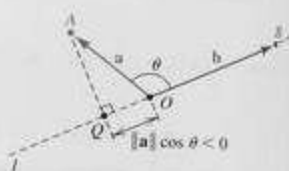
El significado geométrico de esta definición con θ agudo u obtuso se ilustra en la figura 3, donde no se registran los ejes x y y .

Figura 3 $\text{comp}_b \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \cos \theta$

(a)



(b)



Si el ángulo θ es agudo, entonces, como en la figura 3(a), se puede formar un triángulo rectángulo trazando un segmento de recta AQ perpendicular a la línea l , que pase por O y B . Observemos que OQ tiene la misma dirección que OB . Al referirnos al inciso (a) de la figura, vemos que

$$\cos \theta = \frac{d(O, Q)}{\|\mathbf{a}\|} \quad \text{lo que equivale a} \quad \|\mathbf{a}\| \cos \theta = d(O, Q).$$

Si θ es obtuso, entonces como en la figura 3(b), se traza otra vez AQ perpendicular a l . En este caso, la dirección de OQ es opuesta a la de OB , como $\cos \theta$ es negativo.

$$\cos \theta = \frac{-d(O, Q)}{\|\mathbf{a}\|} \quad \text{lo que equivale a} \quad \|\mathbf{a}\| \cos \theta = -d(O, Q).$$

Casos especiales
para el compo-
nente de \mathbf{a} a
lo largo de \mathbf{b}

- (1) Si $\theta = \pi/2$, entonces \mathbf{a} es ortogonal a \mathbf{b} y $\text{comp}_b \mathbf{a} = 0$.
- (2) Si $\theta = 0$, entonces \mathbf{a} tiene la misma dirección que \mathbf{b} y $\text{comp}_b \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|$.
- (3) Si $\theta = \pi$, entonces \mathbf{a} y \mathbf{b} tienen dirección opuesta y $\text{comp}_b \mathbf{a} = -\|\mathbf{a}\|$.

El análisis precedente demuestra que el componente de \mathbf{a} a lo largo de \mathbf{b} se puede encontrar *proyectando* el punto extremo de \mathbf{a} sobre la línea l que contiene \mathbf{b} . Por esta razón, $\|\mathbf{a}\| \cos \theta$ a veces se llama **proyección de \mathbf{a} sobre \mathbf{b}** y se denota con $\text{proj}_b \mathbf{a}$. La fórmula siguiente muestra cómo calcular esta proyección *sin* conocer el ángulo θ .

Fórmula para $\text{comp}_b a$ Si a y b son vectores distintos de cero, entonces

$$\text{comp}_b a = \frac{a \cdot b}{\|b\|}$$

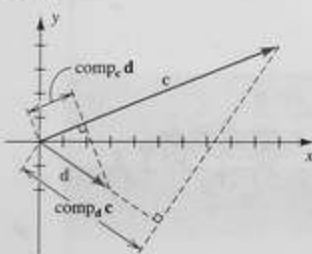
DEMOSTRACIÓN Si θ es el ángulo entre a y b , entonces con base en el teorema sobre el producto punto, tenemos que

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \theta$$

Al dividir ambos lados de esta ecuación entre $\|b\|$ resulta

$$\frac{a \cdot b}{\|b\|} = \|a\| \cos \theta = \text{comp}_b a.$$

Figura 4

**EJEMPLO 5** Hallar los componentes de un vector a lo largo de otroSi $c = 10i + 4j$ y $d = 3i - 2j$, encuentra $\text{comp}_d c$ y $\text{comp}_c d$, e ilustra estas cifras en forma gráfica.

SOLUCIÓN Los vectores c , d y los componentes deseados aparecen en la figura 4. Usamos la fórmula para $\text{comp}_b a$, como sigue:

$$\text{comp}_d c = \frac{c \cdot d}{\|d\|} = \frac{(10)(3) + (4)(-2)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{22}{\sqrt{13}} \approx 6.10$$

$$\text{comp}_c d = \frac{d \cdot c}{\|c\|} = \frac{(3)(10) + (-2)(4)}{\sqrt{10^2 + 4^2}} = \frac{22}{\sqrt{116}} \approx 2.04$$

Concluiremos esta sección con una aplicación física del producto punto. Primero analizaremos brevemente el concepto científico de **trabajo**.

Es posible concebir a una **fuerza** como la entidad física que se usa para describir un empuje o tracción sobre un objeto; por ejemplo, se requiere una fuerza para empujar o tirar de un objeto a lo largo de un plano horizontal, para levantarlo por encima del suelo o para mover una partícula cargada en un campo electromagnético. Con frecuencia las fuerzas se miden en libras; si un objeto pesa 10 libras, entonces por definición, la fuerza requerida para levantarlo (o sostenerlo sobre el suelo) es de 10 libras. Una fuerza de este tipo es una **fuerza constante**, ya que su magnitud no cambia mientras se aplica al objeto dado.

Si se aplica una fuerza constante F a un objeto, desplazándolo una distancia d en la dirección de la fuerza, entonces, por definición, el **trabajo** W realizado es

$$W = Fd.$$

Si F se mide en libras y d en pies, las unidades para W son pies-libras (pies-lb). En el sistema cgs (centímetro-gramo-segundo) se usa la **dina**, como unidad de fuerza. Si F se expresa en dinas y d en centímetros, la unidad

para W es la dina-centímetro, o **erg**; en el sistema mks (metro-kilogramo-segundo), el **newton** se usa como unidad de fuerza. Si F está en newtons y d en metros, la unidad para W es el newton-metro, o **joule**.

EJEMPLO 6 Determinación del trabajo realizado por una fuerza constante

Encuentra el trabajo realizado al empujar un automóvil a lo largo de un camino nivelado, desde un punto A a otro punto B situado a 40 pies, si se ejerce una fuerza constante de 90 libras.

SOLUCIÓN El problema se ilustra en la figura 5, donde hemos representado la carretera como parte de una línea l . Dado que la fuerza constante es $F = 90$ lb y la distancia que el automóvil se mueve es $d = 40$ pies, el trabajo realizado es

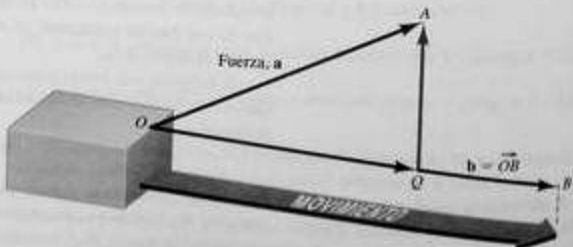
$$W = (90)(40) = 3600 \text{ pies-lb.}$$

Figura 5



La fórmula $W = Fd$ es muy restrictiva, ya que se puede usar sólo si la fuerza se aplica a lo largo de la línea de movimiento. En forma más general, considera que un vector \mathbf{a} representa una fuerza y que su punto de aplicación se mueve a lo largo del vector \mathbf{b} . Esto se ilustra en la figura 6, donde la fuerza \mathbf{a} se usa para tirar de un objeto a lo largo de una trayectoria a nivel desde O hasta B , y $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$.

Figura 6



El vector \mathbf{a} es la suma de los vectores \overrightarrow{OQ} y \overrightarrow{QA} , donde \overrightarrow{QA} es ortogonal a \mathbf{b} . Como \overrightarrow{QA} no contribuye al movimiento horizontal, se puede suponer que el movimiento de O a B se debe sólo a \overrightarrow{OQ} . Aplicando $W = Fd$, sabemos que el trabajo es el producto de $\|\overrightarrow{OQ}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$. Como $\|\overrightarrow{OQ}\| = \text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$, se obtiene

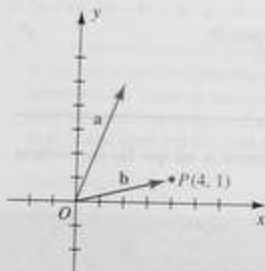
$$W = (\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}) \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cos \theta \|\mathbf{b}\| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

donde θ representa $\angle AOQ$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición de trabajo

El trabajo W realizado por una fuerza constante \mathbf{a} conforme su punto de aplicación se mueve a lo largo del vector \mathbf{b} es $W = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Figura 7



EJEMPLO 7 Determinación del trabajo realizado por una fuerza constante

La magnitud y la dirección de una fuerza constante están dadas por $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Halla el trabajo realizado si el punto de aplicación de la fuerza se mueve del origen al punto $P(4, 1)$.

SOLUCIÓN La fuerza \mathbf{a} y el vector $\mathbf{b} = \overrightarrow{OP}$ aparecen en la figura 7. Como $\mathbf{b} = (4, 1) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y a partir de la definición precedente, tenemos que

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \cdot (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ &= (2)(4) + (5)(1) = 13. \end{aligned}$$

Sí, por ejemplo, la unidad de longitud está en pies y la magnitud de la fuerza se mide en libras, el trabajo realizado es 13 pies-lb.



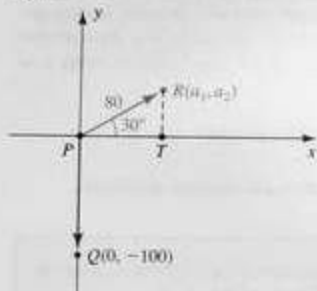
EJEMPLO 8 Determinación del trabajo realizado contra la gravedad

Un pequeño carro de 100 libras de peso es empujado hacia arriba sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal (figura 8). Determina el trabajo realizado contra la gravedad al empujar el carro una distancia de 80 pies.

Figura 8



Figura 9



SOLUCIÓN Introduzcamos un sistema coordenado xy (figura 9). El vector PQ representa la fuerza de gravedad que actúa verticalmente hacia abajo con una magnitud de 100 libras. El vector \mathbf{F} correspondiente es $0\mathbf{i} - 100\mathbf{j}$. El punto de aplicación de esta fuerza se mueve a lo largo del vector PR de magnitud 80. Si \overrightarrow{PR} corresponde a $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, entonces, con referencia al triángulo PTR , vemos que

$$a_1 = 80 \cos 30^\circ = 40\sqrt{3}$$

$$a_2 = 80 \sin 30^\circ = 40,$$

y, por tanto

$$\mathbf{a} = 40\sqrt{3}\mathbf{i} + 40\mathbf{j}.$$

Al aplicar la definición, encontramos que el trabajo realizado por la gravedad es

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = (0\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) \cdot (40\sqrt{3}\mathbf{i} + 40\mathbf{j}) = 0 - 4000 = -4000 \text{ pies}\cdot\text{lb}.$$

El trabajo realizado *contra* la gravedad es

$$-\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = 4000 \text{ pies}\cdot\text{lb}.$$

8.4 Ejercicios

Ejercicios 1 al 8: encuentra (a) el producto punto de los dos vectores y (b) el ángulo entre los dos vectores.

- | | |
|--|---|
| 1 $\langle -2, 5 \rangle$, $\langle 3, 6 \rangle$ | 2 $\langle 4, -7 \rangle$, $\langle -2, 3 \rangle$ |
| 3 $4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ | 4 $8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ |
| 5 $9\mathbf{i}$, $5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ | 6 $6\mathbf{j}$, $-4\mathbf{i}$ |
| 7 $\langle 10, 7 \rangle$, $\langle -2, -\frac{3}{2} \rangle$ | 8 $\langle -3, 6 \rangle$, $\langle -1, 2 \rangle$ |

Ejercicios 9 al 12: demuestra que los vectores son ortogonales.

- 9 $\langle 4, -1 \rangle$, $\langle 2, 8 \rangle$
 10 $\langle 3, 6 \rangle$, $\langle 4, -2 \rangle$
 11 $-4\mathbf{j}$, $-7\mathbf{i}$
 12 $8\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $-6\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$

Ejercicio 13 al 16: demuestra que los vectores son paralelos y determina si tienen la misma dirección o si ésta es opuesta.

- 13 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{5}{5}\mathbf{j}$
 14 $\mathbf{a} = -\frac{3}{2}\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -10\mathbf{i} + 24\mathbf{j}$
 15 $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 8, 6 \rangle$
 16 $\mathbf{a} = \langle 6, 18 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, -12 \rangle$

Ejercicios 17 al 20: determina m tal que los dos vectores sean ortogonales.

- 17 $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $4\mathbf{i} + 5m\mathbf{j}$ 18 $4m\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $9m\mathbf{i} - 25\mathbf{j}$
 19 $9\mathbf{i} - 16m\mathbf{j}$, $\mathbf{i} + 4m\mathbf{j}$ 20 $5m\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

Ejercicios 21 al 28: si $\mathbf{a} = \langle 2, -3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 4 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle -1, 5 \rangle$, encuentra el número.

- | | |
|---|---|
| 21 (a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ | (b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ |
| 22 (a) $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$ | (b) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ |
| 23 $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{c})$ | 24 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ |
| 25 $\text{comp } \mathbf{b}$ | 26 $\text{comp } \mathbf{c}$ |
| 27 $\text{comp } (\mathbf{a} + \mathbf{c})$ | 28 $\text{comp } \mathbf{c}$ |

Ejercicios 29 al 32: si \mathbf{c} representa una fuerza constante, halla el trabajo realizado si el punto de aplicación de \mathbf{c} se mueve a lo largo del segmento de recta de P a Q .

- 29 $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $P(0, 0)$, $Q(5, -2)$
 30 $\mathbf{c} = -10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$; $P(0, 0)$, $Q(4, 7)$
 31 $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $P(2, -1)$, $Q(4, 3)$
 (Sugerencia: determina el vector $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ tal que $\mathbf{b} = \overrightarrow{PQ}$.)

32 $c = -1 + 7j$; $P(-2, 5)$, $Q(6, 1)$

33 Una fuerza constante de magnitud 4 tiene la misma dirección que j . Halla el trabajo realizado si su punto de aplicación se mueve de $P(0, 0)$ a $Q(8, 3)$.

34 Una fuerza constante de magnitud 10 tiene la misma dirección que $-i$. Halla el trabajo realizado si su punto de aplicación se mueve de $P(0, 1)$ a $Q(1, 0)$.

Ejercicios 35 al 40: demuestra la propiedad si a y b son vectores y m es un número real.

35 $a \cdot a = \|a\|^2$

36 $a \cdot b = b \cdot a$

37 $(ma) \cdot b = m(a \cdot b)$

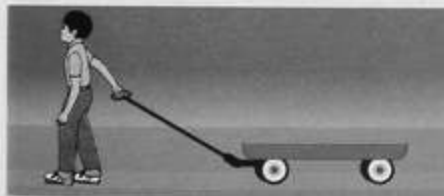
38 $m(a \cdot b) = a \cdot (mb)$

39 $0 \cdot a = 0$

40 $(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a - b \cdot b$

41 Tirar de un carro pequeño. Un niño jala un carro pequeño al nivel del suelo ejerciendo una fuerza de 20 libras en una agarradera que forma un ángulo de 30° con la horizontal, como se muestra en la figura. Encuentra el trabajo realizado al jalar el carro una distancia de 100 pies.

Ejercicio 41



42 Tirar de un carro pequeño. Regresa al ejercicio 41. Determina el trabajo realizado si el carro es jalado, con la misma fuerza, 100 pies hacia arriba en un plano inclinado, que hace un ángulo de 30° con la horizontal, según se muestra en la figura.

Ejercicio 42

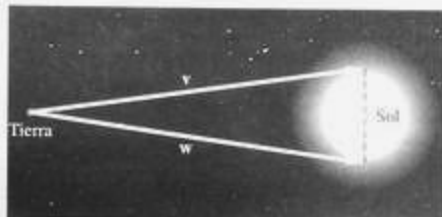


43 Rayos solares. El Sol tiene un radio de 432 000 millas, y su centro está a 93 000 000 de millas del centro de la Tierra. Sean v y w los vectores ilustrados en la figura.

(a) Expresa v y w en forma i, j .

(b) Calcula el ángulo aproximado entre v y w .

Ejercicio 43



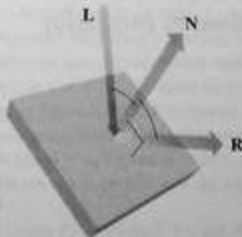
44 Luz solar en julio. La intensidad I de la luz solar (en watts/m^2) se puede calcular mediante la fórmula $I = k e^{-c/\phi}$, donde k y c son constantes positivas y ϕ es el ángulo entre los rayos solares y el horizonte. La cantidad de luz solar que incide sobre una pared vertical orientada al Sol es igual al componente de los rayos solares a lo largo de la horizontal. Si, durante julio, $\phi = 30^\circ$, $k = 978$ y $c = 0.136$, calcula la cantidad total de luz solar que incide sobre una pared vertical que tiene una superficie de 160 m^2 .

Ejercicios 45 y 46: en las gráficas de computadora se usan mucho los vectores para los sombreados. Cuando la luz llega a una superficie plana se refleja y esa área no debe tener sombreado. Supongamos que un rayo de luz que llega se representa con un vector L y que N es un vector ortogonal a la superficie plana, como se ve en la figura. El rayo de luz reflejada se puede representar con el vector R y se calcula con la fórmula $R = 2(N \cdot L)N - L$. Calcula R para los vectores L y N de cada caso.

45 Luz reflejada $L = \langle -\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \rangle$, $N = \langle 0, 1 \rangle$

46 Luz reflejada $L = \langle \frac{11}{13}, -\frac{5}{13} \rangle$, $N = \langle \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2} \rangle$

Ejercicios 45-46

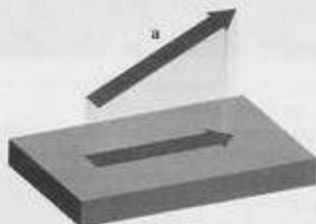


Ejercicios 47 y 48: en las gráficas de computadora se usan los vectores para calcular la longitud de las sombras en superficies planas. En ocasiones, las longitudes de objetos se pueden representar mediante un vector \mathbf{a} . Si hay una sola fuente luminosa que brilla sobre un objeto, la longitud de su sombra en el piso será igual al valor absoluto del componente del vector \mathbf{a} en la dirección del piso, como se ve en la figura. Calcula la longitud de la sombra para el vector \mathbf{a} que se ha especificado estando horizontal el piso.

47. Sombra sobre piso a nivel $\mathbf{a} = (2.6, 4.5)$

48. Sombra sobre piso a nivel $\mathbf{a} = (-3.1, 7.9)$

Ejercicios 47 y 48

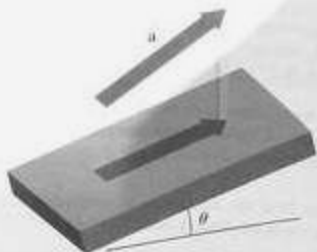


Ejercicios 49 y 50: consulta los ejercicios 47 y 48. Un objeto representado por el vector \mathbf{a} , se mantiene sobre una superficie plana que forma un ángulo θ , como se ve en la figura. Si una luz brilla directamente de arriba a abajo, calcula la longitud de la sombra, con dos cifras decimales, para los valores del vector \mathbf{a} y de θ que se especifican.

49. Sombra sobre un plano inclinado
 $\mathbf{a} = (25.7, -3.9)$, $\theta = 12^\circ$

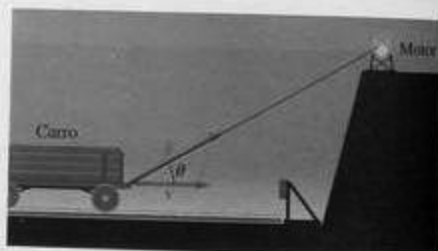
50. Sombra sobre un plano inclinado
 $\mathbf{a} = (-13.8, 19.4)$, $\theta = -17^\circ$

Ejercicios 49 y 50



51. Determinación de la potencia La cantidad de potencia P producida por un motor se determina mediante la fórmula $P = \frac{1}{550}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})$, donde \mathbf{F} es la fuerza (en libras) ejercida por el motor y \mathbf{v} es la velocidad (en pies/s) de un objeto movido por él. Un motor tira de un cable con una fuerza de 2200 libras cuando el cable hace un ángulo θ con la horizontal y mueve el carro horizontalmente como se muestra en la figura. Determina la potencia del motor si la velocidad del carro es de 8 pies/s cuando $\theta = 30^\circ$.

Ejercicio 51



8.5

Forma trigonométrica para números complejos

En la sección 1.1 representamos números reales en forma geométrica mediante puntos sobre una línea coordenada. Se pueden obtener representaciones geométricas para números complejos si se usan puntos en un plano coordenado. Específicamente, cada número complejo $a + bi$ determina un par ordenado único (a, b) . El punto correspondiente $P(a, b)$ en un plano coordenado es la **representación geométrica** de $a + bi$. Para destacar el hecho de que asignamos números complejos a los puntos de un plano, podemos marcar el punto $P(a, b)$ como $a + bi$. Un plano coordenado con un número complejo asignado a cada punto se conoce como **plano complejo** (o de Argand), en lugar del plano xy . El eje x es el **eje real** y el eje y es el **eje imaginario**. En la figura 1 hemos representado en forma geométrica varios números complejos. Observemos que para obtener el punto correspondiente al conjugado $a - bi$ de cualquier número complejo $a + bi$, basta reflejarlo en el eje real.

Figura 1



El valor absoluto $|a|$ de un número real a es la distancia entre el origen y el punto sobre el eje de las x que corresponde a a . Por lo tanto, es natural interpretar el valor absoluto de un número complejo como la distancia entre el origen de un plano complejo y el punto (a, b) , que corresponde a $a + bi$.

Definición del valor absoluto de un número complejo

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces su **valor absoluto**, denotado por $|a + bi|$, es

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$



EJEMPLO 1 Encontrar el valor absoluto de un número complejo

Halla

- (a) $|2 - 6i|$ (b) $|3i|$

SOLUCIÓN Usamos la definición previa:

$$(a) |2 - 6i| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6.3$$

$$(b) |3i| = |0 + 3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$$

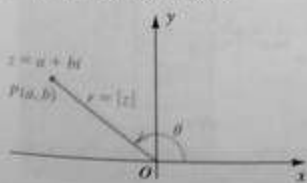
Los puntos correspondientes de todos los números complejos que tienen un valor absoluto fijo k están en una circunferencia de radio k con centro en el origen en el plano complejo. Por ejemplo, los puntos correspondientes a los números complejos z con $|z| = 1$ están en una circunferencia unitaria.

Consideremos un número complejo $z = a + bi$ distinto de cero y su representación geométrica $P(a, b)$ en la figura 2. Sea θ cualquier ángulo en posición estándar, cuyo lado terminal se encuentra sobre el segmento OP , y sea $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dado que $\cos \theta = a/r$ y $\sin \theta = b/r$, vemos que $a = r \cos \theta$ y $b = r \sin \theta$. Se sustituyen a y b en $z = a + bi$, para obtener

$$z = a + bi = (r \cos \theta) + (r \sin \theta)i = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Figura 2

$$z = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$



Esta expresión se llama **forma trigonométrica** (o **forma polar**) para el número complejo $a + bi$. Una abreviatura común es

$$r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r \operatorname{cis} \theta.$$

La forma trigonométrica para $z = a + bi$ no es única, ya que hay un número ilimitado de opciones diferentes para el ángulo θ . Cuando se usa la forma trigonométrica, el valor absoluto r de z se conoce a veces como el **módulo** de z y un ángulo θ relacionado con z es un **argumento** (o **amplitud**) de z .

Este análisis se resume en la forma siguiente:

Forma trigonométrica (o polar) para un número complejo

Sea $z = a + bi$. Si $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y si θ es un argumento de z , entonces

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r \operatorname{cis} \theta.$$

La fórmula de Euler.

$$\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = e^{i\theta},$$

constituye otra forma del número complejo $z = a + bi$, a la que por lo común se le denomina la **forma exponencial**, es decir,

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = re^{i\theta}.$$

Consulta el ejercicio 6 de los ejercicios de análisis al final del capítulo para conocer algunos problemas relacionados.



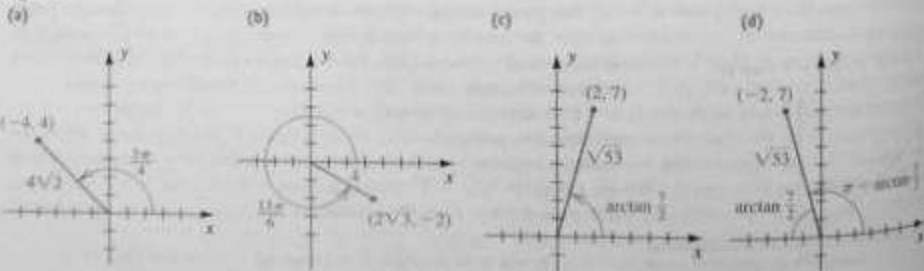
EJEMPLO 2 Expresión de un número complejo en forma trigonométrica

Expresa el número complejo en forma trigonométrica con $0 \leq \theta < 2\pi$

- (a) $-4 + 4i$ (b) $2\sqrt{3} - 2i$ (c) $2 + 7i$ (d) $-2 + 7i$

SOLUCIÓN Comenzamos por representar geoméricamente cada número complejo e identificar su módulo r y su argumento θ , igual que en la figura 3.

Figura 3



En seguida sustituimos r y θ en la forma trigonométrica:

$$(a) -4 + 4i = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$$

$$(b) 2\sqrt{3} - 2i = 4 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 4 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6}$$

$$(c) 2 + 7i = \sqrt{53} [\cos(\arctan 3.5) + i \sin(\arctan 3.5)] = \sqrt{53} \operatorname{cis}(\arctan 3.5)$$

$$(d) -2 + 7i = \sqrt{53} [\cos(\pi - \arctan 3.5) + i \sin(\pi - \arctan 3.5)] \\ = \sqrt{53} \operatorname{cis}(\pi - \arctan 3.5)$$

Consideremos cómo encontrar el valor absoluto y el argumento del número complejo del ejemplo 2(b) en una calculadora graficadora.

TI-83 Plus

Asigna $2\sqrt{3} - 2i$ a A.

2 $\sqrt{\square}$ 3 \square - 2 $\sqrt{\square}$ i
STO > ALPHA A ENTER

Halla el valor absoluto r .

MATH > > 5
ALPHA A \square ENTER

Halla el argumento θ (en el modo grados).

MATH > > 4
ALPHA A \square ENTER

```
2√(3)-2i→A
3.464101615-2i
abs(A)      4
angle(A)    -30
```

TI-86

2 $\sqrt{\square}$ 3 \square - 2 $\sqrt{\square}$ i
STO > A ENTER

2nd CPLX abs(F4)
ALPHA A ENTER

angle(F5) ALPHA A ENTER

```
(2√3,-2)→A
(3.464101615,-2)
abs A      4
angle A    -30
cos regt imag abs 100%
```

Ahora cambiaremos a la forma $2\sqrt{3} - 2i$ usando la característica polar. La TI-83 Plus proporciona la forma exponencial $re^{i\theta}$, y la TI-86 proporciona la forma (magnitud/ángulo). Notarás que -30° es equivalente a $11\pi/6$ (el ángulo del ejemplo 2(b) para $0 \leq \theta < 2\pi$).

ALPHA A MATH > > 7
ENTER

R→Polar
 $4e^{i(-30)}$

ALPHA A MORE > Pol(F2) ENTER

R→Pol
(4,-30)

Misc F4

Operaciones con
números complejos

Si se permiten valores arbitrarios para θ , hay otras formas trigonométricas para los números complejos del ejemplo 2; por tanto, para $-4 + 4i$ en el inciso (a) podemos usar

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{para cualquier entero } n.$$

Si, por ejemplo, se hace $n = 1$ y $n = -1$, obtenemos

$$4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{4} \quad \text{y} \quad 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{4}\right),$$

respectivamente. En general, los argumentos para el mismo número complejo siempre difieren por un múltiplo de 2π .

Cuando los números complejos se expresan en forma trigonométrica, la multiplicación y la división se pueden efectuar como se indica en el siguiente teorema.

Teorema sobre productos y cocientes de números complejos

Si las formas trigonométricas para dos números complejos z_1 y z_2 son

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2),$$

entonces

$$(1) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$(2) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0$$

DEMOSTRACIÓN Demostraremos (1) como sigue:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) \\ &\quad + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)] \end{aligned}$$

La aplicación de las fórmulas de la suma para $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ y $\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)$ nos da (1). Dejaremos la demostración de (2) como ejercicio. \checkmark

El inciso (1) del teorema anterior afirma que *el módulo de un producto de dos números complejos es el producto de sus módulos, y el argumento es la suma de sus argumentos*. Se puede elaborar una expresión análoga para (2).

EJEMPLO 3 Uso de formas trigonométricas para hallar productos y cocientes

Si $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ y $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, utiliza formas trigonométricas para encontrar (a) $z_1 z_2$ y (b) z_1/z_2 . Comprueba por métodos algebraicos.

SOLUCIÓN El número complejo $2\sqrt{3} - 2i$ está representado geométricamente en la figura 3(b). Si utilizamos $\theta = -\pi/6$ en la forma trigonométrica, entonces

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i = 4 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right].$$

El número complejo $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ está representado geométricamente en la figura 4. Una forma trigonométrica es

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

(a) Aplicamos la parte (1) del teorema a los productos y cocientes de los números complejos:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 4 \cdot 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 8(0 + i) = 8i \end{aligned}$$

Al usar métodos algebraicos para comprobar nuestro resultado, tendremos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2\sqrt{3} - 2i)(-1 + \sqrt{3}i) \\ &= (-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}i) + (-2 + 6i) = 0 + 8i = 8i. \end{aligned}$$

En la figura 5 podemos ver la interpretación geométrica del producto $z_1 z_2$.

(b) Aplicamos la parte (2) del teorema:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= 2 \left[\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right] \\ &= 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = -\sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Al utilizar métodos algebraicos, multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador para obtener

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2\sqrt{3} - 2i}{-1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}i}{-1 - \sqrt{3}i} \\ &= \frac{(-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}i) + (-2 - 6i)}{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{-4\sqrt{3} - 4i}{4} = -\sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

En la figura 6 encontramos la interpretación geométrica del cociente z_1/z_2 .

Figura 4

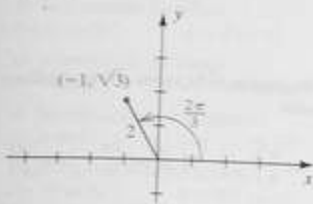


Figura 5

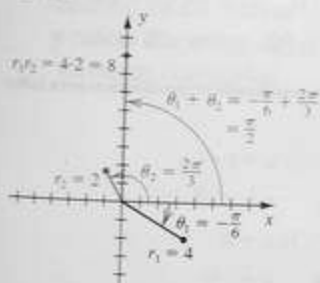
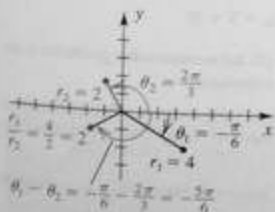


Figura 6



8.5 Ejercicios

Ejercicios 1 al 10: encuentra el valor absoluto.

1 $|3 - 4i|$

2 $|5 + 8i|$

3 $|-6 - 7i|$

4 $|1 - i|$

5 $|8i|$

6 $|i^2|$

7 $|i^{100}|$

8 $|-15i|$

9 $|0|$

10 $|-15|$

Ejercicios 11 al 20: representa geoméricamente el número complejo.

11 $4 + 2i$

12 $-5 + 3i$

13 $3 - 5i$

14 $-2 - 6i$

15 $-(3 - 6i)$

16 $(1 + 2i)^2$

17 $2i(2 + 3i)$

18 $(-3i)(2 - i)$

19 $(1 + i)^2$

20 $4(-1 + 2i)$

Ejercicios 21 al 46: expresa en forma trigonométrica el número complejo con $0 \leq \theta < 2\pi$.

21 $1 - i$

22 $\sqrt{3} + i$

23 $-4\sqrt{3} + 4i$

24 $-2 - 2i$

25 $2\sqrt{3} + 2i$

26 $3 - 3\sqrt{3}i$

27 $-4 - 4i$

28 $-10 + 10i$

29 $-20i$

30 $-6i$

31 12

32 15

33 -7

34 -5

35 $6i$

36 $4i$

37 $-5 - 5\sqrt{3}i$

38 $\sqrt{3} - i$

39 $2 + i$

40 $3 + 2i$

41 $-3 + i$

42 $-4 + 2i$

43 $-5 - 3i$

44 $-2 - 7i$

45 $4 - 3i$

46 $1 - 3i$

Ejercicios 47 al 56: expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

47 $4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

48 $8\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$

49 $6\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

50 $12\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$

51 $5(\cos \pi + i \sin \pi)$

52 $3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$

53 $\sqrt{34} \operatorname{cis}\left(\tan^{-1} \frac{2}{3}\right)$

54 $\sqrt{33} \operatorname{cis}\left[\tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$

55 $\sqrt{5} \operatorname{cis}\left[\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

56 $\sqrt{10} \operatorname{cis}(\tan^{-1} 3)$

Ejercicios 57 al 64: usa formas trigonométricas para hallar $z_1 z_2$ y z_1/z_2 .

57 $z_1 = -1 + i, \quad z_2 = 1 + i$

58 $z_1 = \sqrt{3} - i, \quad z_2 = -\sqrt{3} - i$

59 $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}i, \quad z_2 = 5i$

60 $z_1 = -5 + 5i, \quad z_2 = -3i$

61 $z_1 = -10, \quad z_2 = -4$

62 $z_1 = 2i, \quad z_2 = -3i$

63 $z_1 = 4, \quad z_2 = 2 - i$

64 $z_1 = -3, \quad z_2 = 5 + 2i$

65 Demuestra la parte (2) del teorema sobre productos y cocientes de números complejos.

66 (a) Aplica la parte (1) del teorema sobre productos y cocientes de números complejos a tres números complejos.

(b) Generaliza la parte (1) del teorema a n números complejos.

Ejercicios 67 al 70: los ingenieros electricistas utilizan con frecuencia la forma trigonométrica de los números complejos para describir la corriente I , el voltaje V y la impedancia Z de circuitos eléctricos con corriente alterna. La impedancia es la oposición al paso de la corriente en un circuito. Los aparatos eléctricos más comunes trabajan con corriente alterna de 115 volts. La relación entre esas tres cantidades es $I = V/Z$. Calcula la cantidad desconocida y expresa la respuesta en forma rectangular, con dos decimales de aproximación.

67. Determinación del voltaje

$$I = 10 \text{ cis } 35^\circ, \quad Z = 3 \text{ cis } 20^\circ$$

68. Determinación del voltaje

$$I = 12 \text{ cis } 5^\circ, \quad Z = 100 \text{ cis } 90^\circ$$

69. Determinación de la impedancia

$$I = 8 \text{ cis } 5^\circ, \quad V = 115 \text{ cis } 45^\circ$$

70. Determinación de la corriente

$$Z = 78 \text{ cis } 61^\circ, \quad V = 163 \text{ cis } 17^\circ$$

71. Módulo de la impedancia. El módulo de la impedancia Z representa la oposición total al flujo de corriente en un circuito, y se mide en ohms. Calcula $|Z|$ si $Z = 14 - 13i$.

72. Resistencia y reactancia. El valor absoluto de la parte real de Z representa la resistencia en un circuito eléctrico; el valor absoluto de la parte compleja representa la reactancia. Ambas cantidades se miden en ohms. Si $V = 220 \text{ cis } 34^\circ$ e $I = 5 \text{ cis } 90^\circ$, calcula la resistencia y la reactancia.

73. Voltaje real. La parte real de V representa el voltaje real entregado a un aparato eléctrico, en volts. Aproxima ese voltaje cuando $I = 4 \text{ cis } 90^\circ$ y $Z = 18 \text{ cis } (-78^\circ)$.

74. Corriente real. La parte real de I representa la corriente real entregada a un aparato eléctrico, en amperes. Determina esa corriente cuando $V = 163 \text{ cis } 43^\circ$ y $Z = 100 \text{ cis } 17^\circ$.

8.6

Teorema de De Moivre y raíces enésimas de números complejos

Si z es un número complejo y n es un entero positivo, entonces un número complejo w es una **raíz enésima** de z si $w^n = z$. Demostraremos que todo número complejo diferente de cero tiene n raíces enésimas diferentes. Como \mathbb{R} está contenido en \mathbb{C} , también se deduce que todo número real diferente de cero tiene n raíces enésimas distintas (complejas). Cuando a es un número real positivo y $n = 2$, sabemos que las raíces son \sqrt{a} y $-\sqrt{a}$.

Si en el teorema sobre productos y cocientes de números complejos hacemos que z_1 y z_2 sean iguales al número complejo $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, obtenemos

$$\begin{aligned} z^2 &= r \cdot r[\cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta)] \\ &= r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta). \end{aligned}$$

Si aplicamos el mismo teorema a z^2 y z resultará que

$$z^3 \cdot z = (r^2 \cdot r)[\cos(2\theta + \theta) + i \sin(2\theta + \theta)],$$

o bien

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta).$$

Si aplicamos el teorema a z^3 y z , llegaremos a

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta).$$

En general, tenemos el resultado siguiente, al que se ha llamado teorema de De Moivre en honor del matemático francés Abraham De Moivre (1667-1754).

Teorema de De Moivre

Para cualquier entero n ,

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

En los ejemplos y ejercicios que requieran el teorema de De Moivre, usaremos enteros positivos para n . Sin embargo, para una exposición completa de este concepto, el teorema es válido para $n = 0$ y n negativo; utilizamos las definiciones respectivas de los exponentes de números reales, es decir, $z^0 = 1$ y $z^{-n} = 1/z^n$, donde z es un número complejo diferente de cero y n es un entero positivo.

EJEMPLO 1 Uso del teorema de De Moivre

Usa el teorema de De Moivre para cambiar $(1 + i)^{20}$ a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

SOLUCIÓN Sería tedioso calcular $(1 + i)^{20}$ mediante métodos algebraicos; por tanto, recurramos a una forma trigonométrica para $1 + i$. Al referirnos a la figura 1, advertimos que

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Ahora aplicamos el teorema de De Moivre:

$$\begin{aligned} (1 + i)^{20} &= (2^{1/2})^{20} \left[\cos \left(20 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(20 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= 2^{10} (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = 2^{10} (-1 + 0i) = -1024 \end{aligned}$$

El número -1024 es de la forma $a + bi$ con $a = -1024$ y $b = 0$. \blacksquare

Si un número complejo z diferente de cero tiene una raíz n ésima w , entonces $w^n = z$. Si las formas trigonométricas para w y z son

$$w = s(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad \text{y} \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (*)$$

al aplicar el teorema de De Moivre a $w^n = z$ se obtiene

$$s^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Cuando dos números complejos son iguales, también lo son sus valores absolutos. En consecuencia, $s^n = r$, y como s y r son no negativos, $s = \sqrt[n]{r}$. Al sustituir s^n con r en la última ecuación mostrada y dividir ambos lados entre s^n , resulta

$$\cos n\alpha + i \sin n\alpha = \cos \theta + i \sin \theta.$$

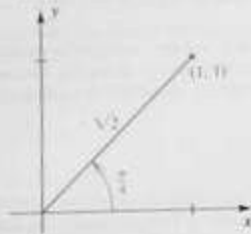
Como los argumentos de números complejos iguales difieren en un múltiplo de 2π , hay un entero k tal que $n\alpha = \theta + 2\pi k$. Si dividimos entre n ambos lados de la última ecuación, vemos que

$$\alpha = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \quad \text{para algún entero } k.$$

Al sustituir w en la forma trigonométrica (ve $(*)$) llegamos a la fórmula siguiente:

$$w = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right]$$

Figura 1



Si sustituimos $k = 0, 1, \dots, n-1$, etc., obtenemos n diferentes raíces enésimas de z . Ningún otro valor de k producirá una nueva raíz enésima. Por ejemplo, si $k = n$, obtenemos el ángulo $(\theta + 2\pi n)/n$ o $(\theta/n) + 2\pi$, lo que dará la misma raíz enésima que $k = 0$. Del mismo modo, $k = n+1$ produce la misma raíz enésima que $k = 1$, y así sucesivamente. Lo mismo es cierto para valores negativos de k . Hemos demostrado el teorema siguiente.

Teorema sobre raíces enésimas

Si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ es cualquier número complejo diferente de cero y si n es cualquier entero positivo, entonces z tiene exactamente n raíces enésimas diferentes $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$. Estas raíces, para θ en radianes, son

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right]$$

o bien, lo que es equivalente, para θ en grados,

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) \right],$$

donde $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Todas las raíces enésimas de z de este teorema tienen valor absoluto $\sqrt[n]{r}$, de aquí que sus representaciones geométricas se encuentren en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$, con centro en O . Además, están igualmente espaciadas en esta circunferencia, ya que la diferencia en los argumentos de raíces enésimas sucesivas es de $2\pi/n$ (o $360^\circ/n$).



EJEMPLO 2 Hallar las raíces cuartas de un número complejo

- (a) Encuentra las cuatro raíces cuartas de $-8 - 8\sqrt{3}i$.
 (b) Representa geoméricamente las raíces.

SOLUCIÓN

- (a) La representación geométrica de $-8 - 8\sqrt{3}i$ se muestra en la figura 2. Al introducir la forma trigonométrica, tendremos

$$-8 - 8\sqrt{3}i = 16(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ).$$

Si se usa el teorema de raíces enésimas con $n = 4$, y se observa que $\sqrt[4]{16} = 2$, se encuentra que las raíces cuartas son

$$w_k = 2 \left[\cos \left(\frac{240^\circ + 360^\circ k}{4} \right) + i \sin \left(\frac{240^\circ + 360^\circ k}{4} \right) \right]$$

(continúa)

Figura 2

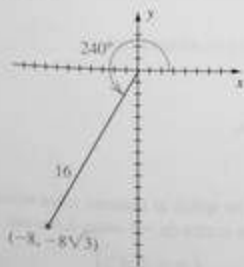
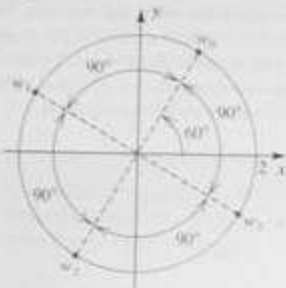


Figura 3



para $k = 0, 1, 2, 3$. Esta fórmula se puede escribir como

$$w_k = 2[\cos(60^\circ + 90^\circ k) + i \sin(60^\circ + 90^\circ k)]$$

La sustitución de 0, 1, 2 y 3 para k en $(60^\circ + 90^\circ k)$, da las cuatro raíces cuartas:

$$w_0 = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$w_1 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -\sqrt{3} + i$$

$$w_2 = 2(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$w_3 = 2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = \sqrt{3} - i$$

(b) Por los comentarios anteriores a este ejemplo, todas las raíces caen en una circunferencia de radio $\sqrt[4]{16} = 2$ con centro en O . La primera raíz, w_0 , tiene un argumento de 60° , y las raíces sucesivas están separadas $360^\circ/4 = 90^\circ$, como se muestra en la figura 3.

Las calculadoras TI-83 Plus y TI-86 pueden extraer la raíz de un número complejo. A continuación se encuentra una raíz cuarta de $-8 - 8\sqrt{3}i$, como en el ejemplo 2(a). La TI-86 también puede encontrar las otras tres raíces (consulta el ejemplo 5).

TI-83 Plus

Halla una raíz de un número complejo

-8 [2nd] [√] 3 [2nd] [i]
 STD ▸ ALPHA C ENTER
 4 MATH 5 ALPHA C ENTER

-8-8i(3)+C
 -8-13.85640646i
 4√C
 1.732050808-i

TI-86

(-8 -8 [2nd] [√] 3 [2nd] [i]
 STO ▸ C ENTER
 ALPHA C [Δ] (1 + 4)
 ENTER

(-8-8i(3)+C
 (-8-13.85640646i)
 C^(1/4)
 (1.732050808757,-1)

EJEMPLO 3 Encontrar las raíces sextas de un número real

- (a) Halla las seis raíces sextas de -1 .
 (b) Representa geométricamente las raíces.

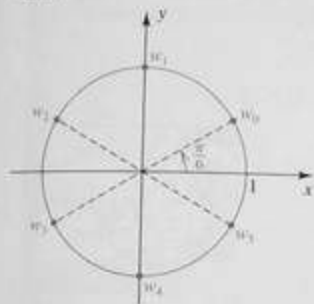
SOLUCIÓN

(a) Se escribe $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$, se aplica el teorema sobre raíces enésimas con $n = 6$ y resulta que las raíces sextas de -1 están dadas por

$$w_k = 1 \left[\cos \left(\frac{\pi + 2\pi k}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2\pi k}{6} \right) \right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5 . Al sustituir $0, 1, 2, 3, 4$ y 5 para k , se obtienen las seis raíces sextas de -1 :

Figura 4



$$w_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$w_2 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_3 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$w_4 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

$$w_5 = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

(b) Como $\sqrt[6]{-1} = 1$, todos los puntos que representan las raíces de -1 están sobre la circunferencia unitaria de la figura 4. Además, son equidistantes en esta circunferencia $\pi/3$ radianes, o 60° .

El caso en que $z = 1$ es de interés especial. Las n distintas raíces enésimas de 1 se llaman **raíces enésimas de la unidad**. En particular, si $n = 3$, se llaman **raíces cúbicas de la unidad**.



EJEMPLO 4 Hallar las raíces cúbicas de la unidad

Determina las tres raíces cúbicas de la unidad.

SOLUCIÓN Al escribir $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$ y usar el teorema sobre raíces enésimas con $n = 3$, se obtiene

$$w_k = 1 \left[\cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3} \right]$$

para $k = 0, 1$ y 2 . Las tres raíces se obtienen sustituyendo k :

$$w_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$w_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Observemos que encontrar las raíces enésimas de un número complejo c , como en los ejemplos 2, 3 y 4 equivale a hallar todas las soluciones de la ecuación

$$x^n = c, \quad \text{o} \quad x^n - c = 0.$$

Aplicaremos este concepto en el ejemplo que sigue y en los ejercicios 23 al 30.

EJEMPLO 5 Hallar raíces resolviendo una ecuación polinomialHalla las cuatro raíces cuartas de $-8 - 8\sqrt{3}i$.

SOLUCIÓN Sea $c = -8 - 8\sqrt{3}i$. Si x es cualquier raíz cuarta de c , entonces $x^4 = c$ así $x^4 - c = 0$. El lado izquierdo de la última ecuación es un polinomio de cuarto grado con coeficientes 1, 0, 0, 0, $-c$. Usaremos la característica para resolver polinomios a fin de encontrar las raíces cuartas de c .

Uso de la característica Poly de la TI-86

Fija el número de cifras decimales en 3.

2nd MODE V D=14 times ENTER 2nd QUIT

Normal Sci Eng
Float 012345678901
Angle Degree
Rect Pol Rect
Func Pol Param DfE
Ded Bin Oct Hex
Rectl Cyl Spherl
d/Derl d/dDer

Almacena $-8 - 8\sqrt{3}i$ en C.

(-) 8 . - 8 2nd √ 3 I STO C ENTER

(-8, -8.133)C
(-8.000, -13.856)

Declara el orden del polinomio.

2nd POLY 4 ENTER

POLY
order=4

Teclea los coeficientes.

1 V 0 V 0 V 0 V (-) ALPHA C

$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$
a4=1
a3=0
a2=0
a1=0
a0=C

Encuentra las soluciones.

SOLVE(F5)

Quit Quit

Al comparar estas soluciones con las que se hallaron en el ejemplo 2(a), tenemos

$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$
X1=(-1.732, 1.000)
X2=(-1.000, -1.732)
X3=(1.000, 1.732)
X4=(1.732, -1.000)

$$x_1 = w_1 = -\sqrt{3} + i$$

$$x_2 = w_2 = -1 - \sqrt{3}i$$

$$x_3 = w_3 = 1 + \sqrt{3}i$$

$$x_4 = w_4 = \sqrt{3} - i$$

Quit Quit

8.6 Ejercicios

Ejercicios 1 al 12: usa el teorema de De Moivre para cambiar el número complejo dado a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

1 $(3 + 3i)^4$

2 $(1 + i)^{12}$

3 $(1 - i)^{10}$

4 $(-1 + i)^8$

5 $(1 - \sqrt{3}i)^3$

6 $(1 - \sqrt{3}i)^3$

7 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}$

8 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{20}$

9 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{20}$

10 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{80}$

11 $(\sqrt{3} + i)^7$

12 $(-2 - 2i)^{10}$

13 Encuentra las dos raíces cuadradas de $1 + \sqrt{3}i$.

14 Halla las dos raíces cuadradas de $-9i$.

15 Determina las cuatro raíces cuartas de $-1 - \sqrt{3}i$.

16 Encuentra las cuatro raíces cuartas de $-8 + 8\sqrt{3}i$.

17 Halla las tres raíces cúbicas de $-27i$.

18 Determina las tres raíces cúbicas de $64i$.

Ejercicios 19 al 22: encuentra las raíces indicadas y representálas geométricamente.

19 Las seis raíces sextas de la unidad

20 Las ocho raíces octavas de la unidad

21 Las cinco raíces quintas de $1 + i$

22 Las cinco raíces quintas de $-\sqrt{3} - i$

Ejercicios 23 al 30: halla las soluciones de la ecuación.

23 $x^2 - 16 = 0$

24 $x^2 - 64 = 0$

25 $x^2 + 64 = 0$

26 $x^2 + 1 = 0$

27 $x^2 + 8i = 0$

28 $x^2 - 64i = 0$

29 $x^2 - 243 = 0$

30 $x^2 + 81 = 0$

31 Aplica la fórmula de Euler para demostrar el teorema de De Moivre.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 8

Ejercicios 1 al 4: encuentra los valores exactos de las partes restantes del triángulo ABC .

1 $\alpha = 60^\circ$, $b = 6$, $c = 7$

2 $\gamma = 30^\circ$, $a = 2\sqrt{3}$, $c = 2$

3 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $b = 100$

4 $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$

Ejercicios 5 al 8: calcula las partes restantes del triángulo ABC .

5 $\beta = 67^\circ$, $\gamma = 75^\circ$, $b = 12$

6 $\alpha = 23^\circ 30'$, $c = 125$, $a = 152$

7 $\beta = 115^\circ$, $a = 4.6$, $c = 7.3$

8 $a = 37$, $b = 55$, $c = 43$

Ejercicios 9 y 10: calcula el área del triángulo ABC al 0.1 de unidad cuadrada más cercana.

9 $\alpha = 75^\circ$, $b = 20$, $c = 30$

10 $a = 4$, $b = 7$, $c = 10$

11 Si $\mathbf{a} = \langle -4, 5 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, -8 \rangle$, traza los vectores correspondientes a

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (c) $2\mathbf{a}$ (d) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$

12 Si $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, encuentra el vector o número que corresponda a

(a) $4\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$

(c) $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ (d) $\|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\|$

13 Rumbo de un barco. Un barco navega a una rapidez de 14 millas por hora en dirección S50°E. Expresa su velocidad \mathbf{v} como vector.

14 Las magnitudes y direcciones de dos fuerzas son 72 lb, S60°E y 46 lb, N47°E, respectivamente. Calcula la magnitud y dirección de la fuerza resultante.

15 Halla un vector con dirección opuesta a $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ y que tenga el doble de la magnitud de éste.

16 Halla un vector de magnitud 4 cuya dirección sea la misma que la de $\mathbf{a} = \langle -3, 7 \rangle$.

17 Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$ y $c > 0$, describe el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ tales que $\|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| = c$.

18 Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores con el mismo punto inicial y ángulo θ entre ellos, demuestra que

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

19 Rapidez y dirección del viento. Un avión vuela en dirección 80° con una rapidez de 400 millas por hora. Su rapidez con respecto a tierra y rumbo son 390 millas por hora y 90°, respectivamente. Estima la dirección y la rapidez del viento.

20 Si $\mathbf{a} = \langle 2, -3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1, -4 \rangle$, encuentra lo siguiente:

(a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (b) el ángulo entre \mathbf{a} y \mathbf{b}

(c) $\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$

21 Si $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, encuentra lo siguiente:

(a) $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$

(b) El ángulo entre \mathbf{a} y $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

(c) $\text{comp}_{\mathbf{a}} (\mathbf{a} + \mathbf{b})$

22 Una fuerza constante tiene la magnitud y la dirección del vector $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Determina el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de \mathbf{a} se mueve a lo largo del eje x de $P(-5, 0)$ a $Q(3, 0)$.

Ejercicios 23 al 28: expresa el número complejo en forma trigonométrica con $0 \leq \theta < 2\pi$.

23 $-10 + 10i$ 24 $2 - 2\sqrt{3}i$

25 -17 26 $-12i$

27 $-5\sqrt{3} - 5i$ 28 $4 + 5i$

Ejercicios 29 y 30: expresa en forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

29 $20\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$ 30 $13 \text{ cis } \left(\tan^{-1} \frac{1}{2}\right)$

Ejercicios 31 y 32: usa formas trigonométricas para hallar $z_1 z_2$ y z_1/z_2 .

31 $z_1 = -3\sqrt{3} - 3i$, $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$

32 $z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$, $z_2 = -1 - i$

Ejercicios 33 al 36: usa el teorema de De Moivre para cambiar el número complejo dado a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

33 $(-\sqrt{3} + i)^6$ 34 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$

35 $(3 - 3i)^4$ 36 $(2 + 2\sqrt{3}i)^{10}$

37 Encuentra las tres raíces cúbicas de -27 .

38 Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$.

(a) Encuentra z^{24} . (b) Halla las tres raíces cúbicas de z .

39 Encuentra las soluciones de la ecuación $x^3 - 32 = 0$.

40 Pista para patinetas. En una pista para carreras de patinetas hay una cuesta descendente de 200 metros y una parte de 150 metros a nivel del piso. El ángulo de elevación del punto de salida de la carrera, desde la línea de meta, es de 27.4° . ¿Qué ángulo forma la cuesta descendente con la horizontal?

41. *Distancia a los planetas.* Las distancias de la Tierra a los planetas cercanos se pueden aproximar mediante el ángulo de fase α , como se ve en la figura siguiente. Supongamos que la distancia de la Tierra al Sol es de 93 000 000 millas, y la de Venus al Sol es de 67 000 000 millas. Aproxima la distancia de la Tierra a Venus, al millón de millas más cercano, cuando $\alpha = 34^\circ$.

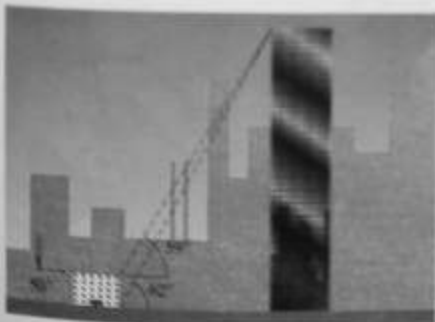
Ejercicio 41



42. *Altura de un rascacielos.* Si se observa un rascacielos desde la cima de un edificio de 50 pies, el ángulo de elevación es de 79° . Si se ve desde el nivel de la calle, el ángulo de elevación es de 62° (consulta la figura).

- (A) Usa la ley de los senos para aproximar la distancia más corta entre las partes más altas de los dos edificios.
(B) Calcula la altura del rascacielos.

Ejercicio 42



43. *Distancias entre ciudades.* Las comunidades vecinales de San Clemente y Long Beach están a 41 millas una de otra, a lo largo de una línea relativamente recta en la costa. En la figura se muestra el triángulo formado por las dos ciudades y la población de Anaheim, en la parte interior de la isla de Santa Catalina. Los ángulos $\angle L$ y $\angle S$ miden 60.4° y 41.2° , respectivamente.

- (A) Aproxima la distancia de Anaheim a cada una de las dos ciudades.
(B) Aproxima la distancia más corta de Anaheim a la costa.

Ejercicio 43



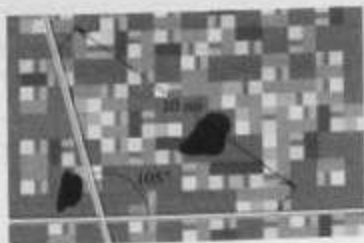
44. *Aproximación.* Un aproximador de áreas encuentra la distancia entre dos puntos inaccesibles A y B. Según se muestra en la figura, se seleccionan los puntos C y D desde los que es posible ver A y B. Luego se miden la distancia CD y los ángulos $\angle ACD$, $\angle ACE$, $\angle BDC$ y $\angle BDE$. Si $CD = 120$ pies, $\angle ACD = 115^\circ$, $\angle ACB = 92^\circ$, $\angle BDC = 123^\circ$ y $\angle BDE = 100^\circ$, aproxima la distancia AB.

Ejercicio 44



45. *Contacto por radio.* Dos muchachos que llevan radios están en la intersección de dos caminos rurales que se cruzan a un ángulo de 105° (ve la figura). Una comienza a caminar en dirección norte por un camino a 5 millas por hora; al mismo tiempo, la otra camina al este por el otro camino con la misma velocidad. Si cada radio tiene un alcance de 10 millas, ¿durante cuánto tiempo se mantendrán en comunicación los muchachos?

Ejercicio 45



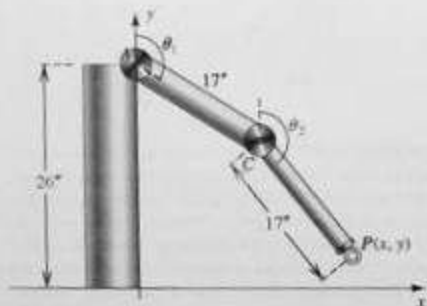
45. **Diseño de robots.** En la figura se muestra un diseño para el brazo de un robot con dos partes móviles. Las dimensiones se seleccionan para simular un brazo humano. El brazo superior AC y el inferior CP giran en ángulos θ_1 y θ_2 , respectivamente, para tomar un objeto en el punto $P(x, y)$.

- (a) Demuestra que $\angle ACP = 180^\circ - (\theta_1 - \theta_2)$.
- (b) Encuentra $d(A, P)$, y luego usa la parte (a) y la ley de los cosenos para demostrar que

$$1 + \cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{x^2 + (y - 26)^2}{578}$$

- (c) Si $x = 25$, $y = 4$ y $\theta_1 = 135^\circ$, calcula θ_2 .

Ejercicio 46



47. **Esfuerzos de rescate.** Un niño está atrapado a 45 pies bajo el nivel del suelo en el tiro de una mina abandonada inclinada a un ángulo de 78° con la horizontal. Ha de excavarse un túnel a 50 pies de la abertura del tiro (ve la figura).

- (a) ¿A qué ángulo debe excavarse el túnel?
- (b) Si el túnel se puede excavar a razón de 3 pies/hora, ¿cuántas horas se tardará en llegar a donde está el niño?

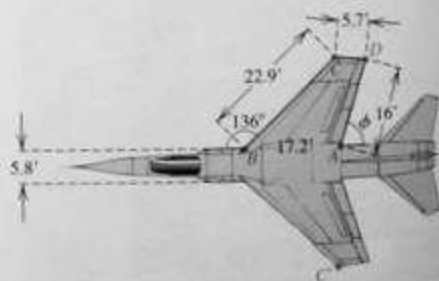
Ejercicio 47



48. **Diseño de un avión caza a reacción.** En la figura se muestran los planos del ala de un caza a reacción.

- (a) Calcula el ángulo ϕ .
- (b) Calcula el área del cuadrilátero $ABCD$.
- (c) Si el fuselaje mide 5.8 pies de ancho, calcula la empujadura de las alas CC' .

Ejercicio 48



EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 8

- 1 **Fórmula de Mollweide** La siguiente ecuación, llamada *fórmula de Mollweide*, se usa a veces para comprobar soluciones de triángulos, porque en ella intervienen todos los ángulos y los lados:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$$

- (a) Aplica la ley de los senos para demostrar que

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \gamma}$$

- (b) Aplica una fórmula de suma a producto y una de ángulo doble para comprobar la fórmula de Mollweide.

- 2 Emplea la forma trigonométrica de un número complejo para demostrar que $z^{-n} = 1/z^n$, donde n es un entero positivo.

- 3 Describe las semejanzas algebraicas y geométricas de las raíces cúbicas de cualquier número real positivo a .

- 4 Si dos vectores, \mathbf{v} y \mathbf{w} , tienen el mismo punto inicial y el ángulo que forman es θ , y si además $\mathbf{v} \neq m\mathbf{w}$ (m es un número real):

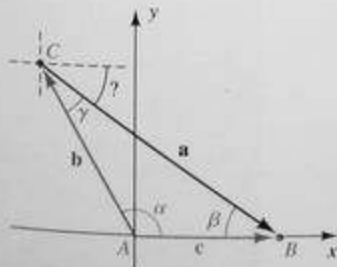
- (a) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\mathbf{v} - \mathbf{w}$?

- (b) ¿Cómo puedes determinar $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$?

- 5 **Método vectorial para deducir las leyes de senos y cosenos**

- (a) Vemos en la figura siguiente que $\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. Usa los componentes horizontal y vertical para expresar \mathbf{a} en términos de \mathbf{i} y \mathbf{j} .

Ejercicio 5



- (b) Ahora determina la magnitud de \mathbf{c} , con la respuesta de la parte (a), y simplifica lo que obtengas hasta demostrar la ley de los cosenos.

- (c) Si \mathbf{c} está en el eje x , su componente \mathbf{j} es cero. Aprovecha esto para demostrar la ley de los senos.

- 6 **Fórmula de Euler y otros resultados** A continuación veremos algunos resultados interesantes e inesperados, donde intervienen números complejos y temas que ya hablamos descrito.

- (a) Leonhard Euler (1707-1783) nos legó la siguiente fórmula:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Si hacemos $\theta = \pi$, obtenemos $e^{i\pi} = -1$ o lo que es lo mismo,

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

ecuación que relaciona cinco de los números más importantes en matemáticas. Determina $e^{i\pi n}$.

- (b) El logaritmo de un número complejo $z \neq 0$ se define como sigue:

$$\text{LN } z = \ln |z| + i(\theta + 2\pi n),$$

donde \ln es la función logaritmo natural, θ es un argumento de z y n es un entero. El **valor principal** de $\text{LN } z$ es el que corresponde a $n = 0$ y cuando $-\pi < \theta \leq \pi$. Determina los valores principales de $\text{LN}(-1)$ y $\text{LN } i$.

- (c) La potencia compleja w de un número complejo $z \neq 0$, se define como sigue:

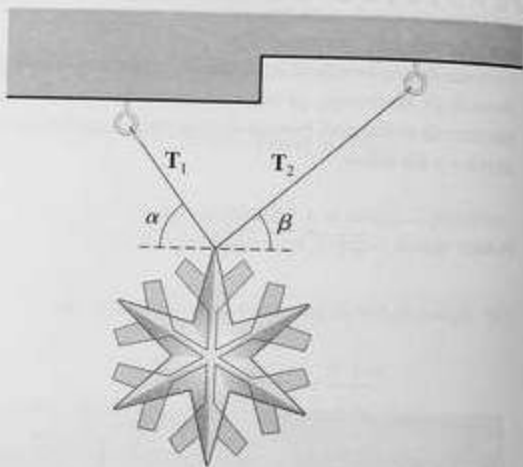
$$z^w = e^{w \text{LN } z}$$

Para determinar los valores principales de z^w , se usan los valores principales de $\text{LN } z$. Determina los valores principales de \sqrt{i} y de i^i .

7. *¿Una identidad interesante?* Supongamos que α , β , y γ son los ángulos de un triángulo oblicuo. Demuestra la veracidad o la falsedad del siguiente enunciado: la suma de las tangentes de α , β , y γ es igual al producto de las tangentes de α , β y γ .
8. *Fuerzas de alambres colgantes* Un adorno de 5 libras cuelga de dos alambres como se aprecia en la figura. Demuestra que las magnitudes de las tensiones (fuerzas) en los alambres están dadas por

$$\|T_1\| = \frac{5 \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{y} \quad \|T_2\| = \frac{5 \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Ejemplo 8



Sistemas de ecuaciones y desigualdades

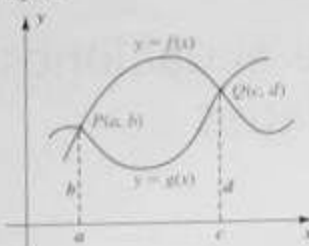
- 9.1 Sistemas de ecuaciones
- 9.2 Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables
- 9.3 Sistemas de desigualdades
- 9.4 Programación lineal
- 9.5 Sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables
- 9.6 Álgebra de matrices
- 9.7 Inversa de una matriz
- 9.8 Determinantes
- 9.9 Propiedades de los determinantes
- 9.10 Fracciones parciales

En la práctica de las matemáticas, a veces se requiere trabajar en forma simultánea con más de una ecuación donde aparecen variables diversas; es decir, con un sistema de ecuaciones. En este capítulo desarrollamos métodos para hallar soluciones comunes a todas las ecuaciones de un sistema. De particular importancia son las técnicas relacionadas con matrices, porque son adecuadas para programas de computadoras y se pueden aplicar con facilidad a sistemas con ecuaciones lineales y variables. También analizaremos los sistemas de desigualdades y la programación lineal, temas de significativa importancia en los negocios y en estadística. La última parte del capítulo contiene una introducción al álgebra de matrices y determinantes.

9.1

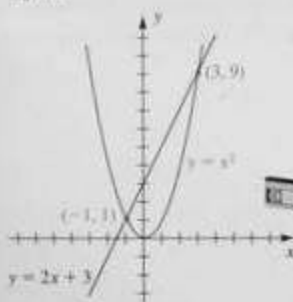
Sistemas de ecuaciones

Figura 1



En capítulos anteriores estimamos soluciones de sistemas utilizando la característica intersect de una calculadora graficadora. Ahora nos centramos en la determinación de soluciones exactas.

Figura 2



Considera las gráficas de las dos funciones f y g de la figura 1. En la práctica, en ocasiones hay que encontrar puntos tales como $P(a, b)$ y $Q(c, d)$, donde las gráficas se intersectan. Como $P(a, b)$ está en cada gráfica, el par (a, b) es una **solución** de ambas ecuaciones, $y = f(x)$ y $y = g(x)$; esto es,

$$b = f(a) \quad y \quad b = g(a).$$

Decimos que (a, b) es una solución del **sistema de ecuaciones** (o simplemente **sistema**)

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

donde la llave se usa para indicar que las ecuaciones deben tratarse en forma simultánea. Del mismo modo, el par (c, d) es una solución del sistema.

Resolver un sistema de ecuaciones significa hallar todas las soluciones.

Como un caso especial, consideremos el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

Las gráficas de las ecuaciones son la parábola y la recta de la figura 2. En la tabla siguiente se muestra que los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 9)$ están en ambas gráficas.

(x, y)	$y = x^2$	$y = 2x + 3$
$(-1, 1)$	$1 = (-1)^2$, o $1 = 1$	$1 = 2(-1) + 3$, o $1 = 1$
$(3, 9)$	$9 = 3^2$, o $9 = 9$	$9 = 2(3) + 3$, o $9 = 9$

Por lo tanto, $(-1, 1)$ y $(3, 9)$ son soluciones del sistema.

El análisis anterior no proporciona una estrategia que nos permita encontrar las soluciones. Los dos ejemplos siguientes ilustran la manera de hallar las soluciones del sistema sólo mediante métodos algebraicos.



EJEMPLO 1 Solución de un sistema de dos ecuaciones

Resuelve el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si (x, y) es una solución del sistema, entonces la variable y de la ecuación $y = 2x + 3$ debe satisfacer la condición $y = x^2$. En consecuencia, **sustituimos** x^2 por y en $y = 2x + 3$:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x + 3 && \text{sustituir } y = x^2 \text{ en } y = 2x + 3 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 && \text{restar } 2x + 3 \\ (x + 1)(x - 3) &= 0 && \text{factorizar} \\ x + 1 = 0, & \quad x - 3 = 0 && \text{teorema del factor cero} \\ x = -1, & \quad x = 3 && \text{despejar } x \end{aligned}$$

Esto da los valores x de las soluciones (x, y) del sistema. A fin de determinar los valores correspondientes de y , podemos usar $y = x^2$ o $y = 2x + 3$. Con $y = x^2$, resulta que

$$\text{si } x = -1, \text{ entonces } y = (-1)^2 = 1$$

y

$$\text{si } x = 3, \text{ entonces } y = 3^2 = 9.$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son $(-1, 1)$ y $(3, 9)$.

También podemos hallar las soluciones sustituyendo $y = 2x + 3$ en la primera ecuación, $y = x^2$, con lo cual

$$2x + 3 = x^2.$$

El resto de la solución es el mismo.

Dado el sistema del ejemplo 1, podríamos despejar x de una de las ecuaciones en términos de y y luego sustituir en la otra ecuación, con lo que llegaríamos a una ecuación sólo en y . Al resolver la última ecuación, obtenemos los valores de y para las soluciones del sistema. Luego, los valores de x se podrían determinar con una de las ecuaciones dadas. En general, podemos usar las siguientes guías, donde u y v denotan dos variables cualesquiera (quizá x y y). Esta técnica se llama **método de sustitución**.

Guías para el método de sustitución para dos ecuaciones con dos variables

- 1 Despeja una variable u de una de las ecuaciones en términos de la otra variable v .
- 2 Sustituye en la otra ecuación la expresión u encontrada en la guía 1, para obtener una ecuación sólo en v .
- 3 Encuentra las soluciones de la ecuación en v que se obtuvo en la guía 2.
- 4 Reemplaza los valores v encontrados en la guía 3, en la ecuación de la guía 1, para hallar los valores correspondientes de u .
- 5 Comprueba cada par (u, v) encontrado en la guía 4 con el sistema dado.

EJEMPLO 2 Uso del método de sustitución

Resuelve el sistema que sigue y traza la gráfica de cada ecuación, mostrando los puntos de intersección:

$$\begin{cases} x + y^2 = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Debemos decidir cuál ecuación resolver y qué variable despejar. Analicemos las posibilidades.

$$\text{Despejar } y \text{ en la primera ecuación: } y = \pm\sqrt{6-x}$$

$$\text{Despejar } x \text{ en la primera ecuación: } x = 6 - y^2$$

$$\text{Despejar } y \text{ en la segunda ecuación: } y = (3-x)/2$$

$$\text{Despejar } x \text{ en la segunda ecuación: } x = 3 - 2y$$

(continúa)

Guía 1 Antes de pasar a la guía 2, notamos que despejar x en cualquier ecuación resulta en una simple sustitución. Así, usamos $x = 3 - 2y$ y seguimos las guías con $u = x$ y $v = y$.

Guía 2 Sustituir la expresión de x encontrada en la guía 1 en la primera ecuación del sistema:

$$\begin{aligned}(3 - 2y) + y^2 &= 6 && \text{sustituir } x = 3 - 2y \text{ en } x + y^2 = 6 \\ y^2 - 2y - 3 &= 0 && \text{simplificar}\end{aligned}$$

Guía 3 Despejar y de la ecuación de la guía 2:

$$\begin{aligned}(y - 3)(y + 1) &= 0 && \text{factorizar } y^2 - 2y - 3 \\ y - 3 = 0, \quad y + 1 = 0 &&& \text{teorema del factor cero} \\ y = 3, \quad y = -1 &&& \text{despejar } y\end{aligned}$$

Éstos son los únicos valores posibles de y para las soluciones del sistema.

Guía 4 Utilizar la ecuación $x = 3 - 2y$ de la guía 1, a fin de hallar los valores correspondientes de x :

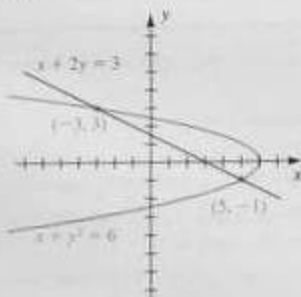
$$\begin{aligned}\text{si } y = 3, \quad \text{entonces } x &= 3 - 2(3) = 3 - 6 = -3 \\ \text{si } y = -1, \quad \text{entonces } x &= 3 - 2(-1) = 3 + 2 = 5\end{aligned}$$

Por lo tanto, las soluciones posibles son $(-3, 3)$ y $(5, -1)$.

Guía 5 Al sustituir $x = -3$ y $y = 3$ en $x + y^2 = 6$, la primera ecuación del sistema, se produce $-3 + 9 = 6$, una expresión verdadera. Al reemplazar $x = -3$ y $y = 3$ en $x + 2y = 3$, que es la segunda ecuación del sistema, llegamos a $-3 + 6 = 3$, otra expresión verdadera. Por lo tanto, $(-3, 3)$ es una solución del sistema. De un modo semejante, podemos confirmar que $(5, -1)$ también es una solución.

Las gráficas de las ecuaciones (una parábola y una recta) aparecen en la figura 3, donde se observan los dos puntos de intersección.

Figura 3



En ejemplos futuros no detallaremos las guías específicas que se utilizan en la solución de sistemas.

Al resolver ciertos sistemas de ecuaciones con el método de sustitución, es conveniente permitir que u o v en las guías denoten una expresión con otra variable. Esta técnica se expone en el próximo ejemplo con $u = x^2$.

EJEMPLO 3 Uso del método de sustitución

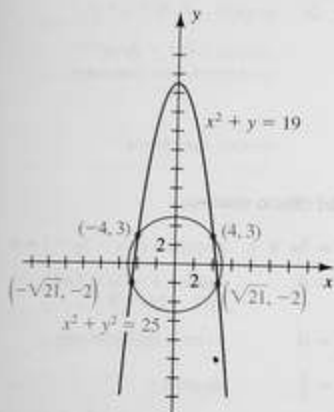
Resuelve este sistema y luego traza la gráfica de cada ecuación, mostrando los puntos de intersección:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y = 19 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Procedemos de esta manera:

$$\begin{array}{ll}
 x^2 = 19 - y & \text{despejar } x^2 + y = 19 \text{ para } x^2 \\
 (19 - y) + y^2 = 25 & \text{sustituir } x^2 = 19 - y \text{ en } x^2 + y^2 = 25 \\
 y^2 - y - 6 = 0 & \text{simplificar} \\
 (y - 3)(y + 2) = 0 & \text{factorizar} \\
 y - 3 = 0, \quad y + 2 = 0 & \text{teorema del factor cero} \\
 y = 3, \quad y = -2 & \text{despejar } y
 \end{array}$$

Figura 4



Éstos son los únicos valores posibles de y para las soluciones del sistema. Usamos $x^2 = 19 - y$ con objeto de hallar los valores correspondientes de x :

Si $y = 3$, entonces $x^2 = 19 - 3 = 16$ y $x = \pm 4$

Si $y = -2$, entonces $x^2 = 19 - (-2) = 21$ y $x = \pm\sqrt{21}$

De esta manera, las únicas soluciones posibles del sistema son

$$(4, 3), (-4, 3), (\sqrt{21}, -2), \text{ y } (-\sqrt{21}, -2).$$

Es posible comprobar por sustitución, en las ecuaciones dadas, que los cuatro pares son soluciones.

La gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es un círculo de radio 5 con centro en el origen, y la gráfica de $y = 19 - x^2$ una parábola con eje vertical. Las gráficas aparecen en la figura 4. Los puntos de intersección corresponden a las soluciones del sistema.

Por supuesto, hay otras formas de encontrar las soluciones. Podríamos despejar x^2 de la primera ecuación, $x^2 = 25 - y^2$ y luego sustituir en la segunda, con lo cual se obtiene $25 - y^2 + y = 19$. Otro método es despejar y de la segunda ecuación, $y = 19 - x^2$, y sustituir en la primera.

También podemos considerar ecuaciones con tres variables x, y y z , del tipo

$$x^2y + xz + 3z = 4z^3.$$

Dicha ecuación tiene una **solución** (a, b, c) si la sustitución de a, b y c , por x, y y z , respectivamente, da una expresión verdadera. Nos referimos a (a, b, c) como una **triada ordenada** de números reales. Dos sistemas de ecuaciones son **sistemas equivalentes**, siempre que tengan las mismas soluciones. Un sistema de ecuaciones con tres variables y sus soluciones se definen igual que en el caso de dos variables. Del mismo modo, podemos considerar sistemas de cualquier número de ecuaciones con cualquier número de variables.

Es factible extrapolar el método de sustitución a estos sistemas, que son más complicados. Por ejemplo, dadas tres ecuaciones con tres variables, supongamos que es posible despejar una variable en términos de las otras dos variables. Al sustituir esa expresión en cada una de las otras ecuaciones, llegamos a un sistema de dos ecuaciones con dos variables. Entonces, las soluciones del sistema de dos variables nos servirán para hallar las soluciones del sistema original.

**EJEMPLO 4** Solución de un sistema de tres ecuaciones

Resuelve el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ xyz = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Procederemos como sigue:

$$z = 1 - 2y \quad \text{despejar } z \text{ de } 2y + z = 1$$

$$\begin{cases} x - y + (1 - 2y) = 2 \\ xy(1 - 2y) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sustituir } z = 1 - 2y \text{ en} \\ \text{las dos primeras ecuaciones} \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ xy(1 - 2y) = 0 \end{cases} \quad \text{sistema equivalente}$$

Ahora encontramos las soluciones del último sistema:

$$x = 3y + 1 \quad \text{despejar } x \text{ de } x - 3y - 1 = 0$$

$$(3y + 1)y(1 - 2y) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{sustituir } x = 3y + 1 \text{ en} \\ xy(1 - 2y) = 0 \end{array}$$

$$3y + 1 = 0, \quad y = 0, \quad 1 - 2y = 0 \quad \text{teorema del factor cero}$$

$$y = -\frac{1}{3}, \quad y = 0, \quad y = \frac{1}{2} \quad \text{despejar } y$$

Éstos son los únicos valores posibles de y para las soluciones del sistema.Para obtener los valores correspondientes de x , sustituimos y en la ecuación $x = 3y + 1$ y obtenemos

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y \quad x = \frac{5}{2}.$$

Con $z = 1 - 2y$ resultan los valores z correspondientes

$$z = \frac{5}{3}, \quad z = 1, \quad y \quad z = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones (x, y, z) del sistema original deben estar entre las triadas ordenadas

$$(0, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}), \quad (1, 0, 1), \quad y \quad (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0).$$

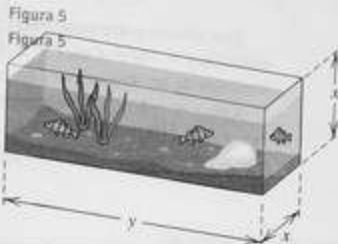
Al comprobar cada una vemos que las tres triadas ordenadas son soluciones del sistema.

EJEMPLO 5 Aplicación de un sistema de ecuaciones

¿Es posible construir un acuario con tapa de vidrio y dos extremos cuadrados, que contenga 16 pies cúbicos de agua y requiera 40 pies cuadrados de vidrio? (Desprecia el grueso del vidrio.)

SOLUCIÓN Comenzamos por dibujar un acuario y poner etiquetas, con x y y en pies, como en la figura 5. Estudiamos la figura, usamos fórmulas para el volumen y área y encontramos que

$$\begin{aligned}\text{volumen del acuario} &= x^2y && \text{longitud} \times \text{ancho} \times \text{altura} \\ \text{pies cuadrados de vidrio necesarios} &= 2x^2 + 4xy, && \text{2 extremos, 2 lados, tapa y fondo}\end{aligned}$$



Como el volumen debe ser 16 pies cúbicos y el área del vidrio necesario es de 40 pies cuadrados, obtenemos este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2y = 16 \\ 2x^2 + 4xy = 40 \end{cases}$$

Encontramos las soluciones como sigue:

$$y = \frac{16}{x^2} \quad \text{despejar } x^2y = 16 \text{ por } y$$

$$2x^2 + 4x\left(\frac{16}{x^2}\right) = 40 \quad \text{sustituir } y = \frac{16}{x^2} \text{ en } 2x^2 + 4xy = 40$$

$$x^2 + \frac{32}{x} = 20 \quad \text{cancelar } x; \text{ y dividir por 2}$$

$$x^3 + 32 = 20x \quad \text{multiplicar por } x \ (x \neq 0)$$

$$x^3 - 20x + 32 = 0 \quad \text{restar } 20x$$

La gráfica de $y = x^3 - 20x + 32$ muestra dos ceros positivos. Uno parece ser 2 y el otro ligeramente mayor que 3.

Luego buscamos soluciones racionales de la última ecuación. Al dividir el polinomio $x^3 - 20x + 32$ sintéticamente entre $x - 2$ tenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -20 & 32 \\ & & 2 & 4 & -32 \\ \hline & 1 & 2 & -16 & 0 \end{array}$$

De este modo, una solución de $x^3 - 20x + 32 = 0$ es 2, y las dos soluciones restantes son ceros del cociente $x^2 + 2x - 16$; es decir, raíces de la ecuación reducida

$$x^2 + 2x - 16 = 0.$$

(continúa)

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{17}}{2} = -1 \pm \sqrt{17}.$$

Como x es positiva, podemos desechar $x = -1 - \sqrt{17}$. En consecuencia, los únicos valores posibles de x son

$$x = 2 \quad y \quad x = -1 + \sqrt{17} = 3.12.$$

Los valores correspondientes para y se encuentran sustituyendo x en la ecuación $y = 16/x^2$. Con $x = 2$ resulta que $y = \frac{16}{4} = 4$. El uso de estos valores nos da las dimensiones del acuario: 2 por 2 por 4 pies.

Con $x = -1 + \sqrt{17}$ obtenemos $y = 16/(-1 + \sqrt{17})^2$, que se simplifica a $y = \frac{1}{4}(9 + \sqrt{17}) = 1.64$. Así, las dimensiones aproximadas para otro acuario son 3.12 por 3.12 por 1.64 pies.

9.1 Ejercicios

Ejercicios 1 al 30: usa el método de sustitución para resolver el sistema.

$$1 \begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} y^2 = 1 - x \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} y^2 = x \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} 2y = x^2 \\ y = 4x^3 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} x - y^3 = 1 \\ 2x = 9y^2 + 2 \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} 3x - 4y + 20 = 0 \\ 3x + 2y + 8 = 0 \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -6x + 9y = 4 \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 8x - 10y = -5 \end{cases}$$

$$11 \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$12 \begin{cases} 3x - 4y = 25 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$13 \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y - x = 4 \end{cases}$$

$$14 \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = -25 \end{cases}$$

$$15 \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y - 3x = 2 \end{cases}$$

$$16 \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y + 2x = -1 \end{cases}$$

$$17 \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$$

$$18 \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + 2x = -3 \end{cases}$$

$$19 \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 10 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$20 \begin{cases} xy = 2 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$21 \begin{cases} y = 20/x^2 \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$$

$$22 \begin{cases} x = y^2 - 4y + 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$23 \begin{cases} y^2 - 4x^2 = 4 \\ 9y^2 + 16x^2 = 140 \end{cases}$$

$$24 \begin{cases} 25y^2 - 16x^2 = 400 \\ 9y^2 - 4x^2 = 36 \end{cases}$$

$$25 \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$$

$$26 \begin{cases} 6x^2 - y^2 = 1 \\ 3x^2 + 4y^2 = 5 \end{cases}$$

$$27 \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + z = 9 \\ x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$$

$$28 \begin{cases} 2x - 3y - z^2 = 0 \\ x - y - z^2 = -1 \\ x^2 - xy = 0 \end{cases}$$

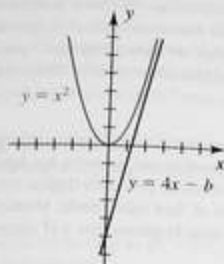
$$29 \begin{cases} x^2 + z^2 = 5 \\ 2x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$30 \begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2y - z = 4 \\ xyz = 0 \end{cases}$$

31 Encuentra los valores de b con los cuales el sistema que está representado en la gráfica siguiente tenga

(a) una solución (b) dos soluciones (c) ninguna solución

Ejercicio 31



Interpreta gráficamente (a)–(c).

- 32 Halla los valores de
- b
- tales que el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + b \end{cases}$$

tenga

(a) Una solución (b) Dos soluciones

(c) Ninguna solución

Interpreta (a)–(c) gráficamente.

- 33 ¿Hay un número real
- x
- tal que
- $x = 2^{-x}$
- ? Decídelo al graficar el sistema

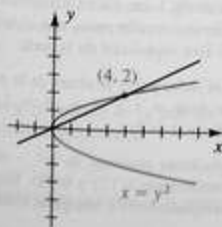
$$\begin{cases} y = x \\ y = 2^{-x} \end{cases}$$

- 34 ¿Hay un número real
- x
- tal que
- $x = \log x$
- ? Decídelo al mostrar gráficamente el sistema

$$\begin{cases} y = x \\ y = \log x \end{cases}$$

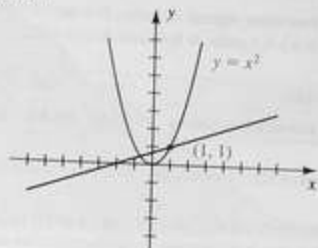
- 35 En la figura aparecen la gráfica de
- $x = y^2$
- y una recta de pendiente
- m
- que pasa por el punto
- $(4, 2)$
- . Halla el valor de
- m
- de manera que la recta sólo cruce la gráfica en
- $(4, 2)$
- e interpreta el resultado gráficamente.

Ejercicio 35

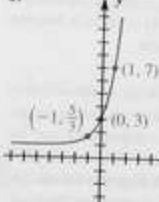


- 36 En la figura se muestra la gráfica de
- $y = x^2$
- y una recta con pendiente
- m
- que pasa por el punto
- $(1, 1)$
- . Encuentra el valor de
- m
- tal que la recta corte la gráfica sólo en
- $(1, 1)$
- , e interprétalo gráficamente.

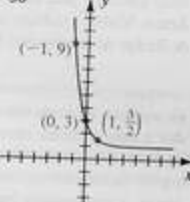
Ejercicio 36

Ejercicios 37 y 38: encuentra una función exponencial de la forma $f(x) = ba^x + c$ para la gráfica.

37



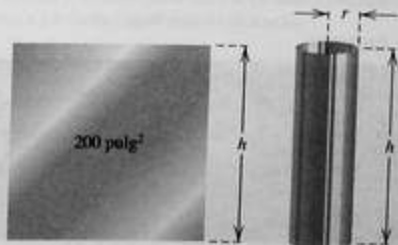
38



- 39 El perímetro de un rectángulo es de 40 pulg y su área es de 96 pulg
- ²
- . Encuentra su longitud y ancho.

- 40 Construcción de tubos Se van a fabricar tubos cilíndricos a partir de láminas rectangulares delgadas que tienen un área de 200 pulg
- ²
- (ve la figura). ¿Es posible construir un tubo con un volumen de 200 pulg
- ³
- ? Si es así, encuentra
- r
- y
- h
- de la lámina rectangular.

Ejercicio 40



42. Población de peces. En piscicultura, las funciones de recolección de productoras se usan para pronosticar el número de peces adultos R de la población, en reproducción, del año siguiente, a partir de una estimación S de la cantidad de ejemplares actualmente en desove.

(a) Para cierta especie de peces, $R = aS/(S + b)$. Calcula a y b a partir de los datos de esta tabla:

Año	1998	1999	2000
Cantidad en desove	40 000	60 000	72 000

(b) Pronostica la población en reproducción para 2001.

43. Población de peces. Consulta el ejercicio 41. La función de Ricker para la recolección de productoras está dada por

$$R = aSe^{-b}$$

para las constantes positivas a y b . Esta relación pronostica baja recolección en poblaciones muy altas y se ha encontrado adecuada para muchas especies, como el bacalao del Ártico. Vuelve a trabajar el ejercicio 41 usando la función de Ricker de recolección de productoras.

44. Competencia por alimentos. Un modelo de competencia es un conjunto de ecuaciones que especifica la forma en que dos o más especies interactúan en competencia por los recursos alimentarios de un ecosistema. Denotemos por x y y las cantidades (en cientos) de dos especies en competencia, y supongamos que las tasas respectivas de crecimiento R_1 y R_2 están dadas por

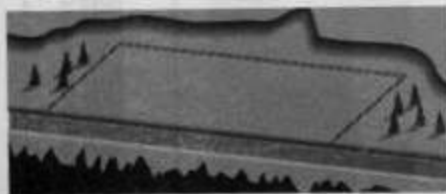
$$R_1 = 0.01x(50 - x - y),$$

$$R_2 = 0.02y(100 - y - 0.5x).$$

Determina los niveles de población (x, y) a los cuales ambas tasas de crecimiento son cero. (Tales niveles de población reciben el nombre de puntos estacionarios.)

45. Cercar una región. Un agricultor tiene 2420 pies de alambrado para cercar una región rectangular que se localiza a lo largo de la ribera recta de un río. Si no se utiliza el alambrado a lo largo del río (ve la figura), ¿es posible cercar 10 acres de terreno? Recuerda que 1 acre = 43 560 pies².

Ejercicio 44



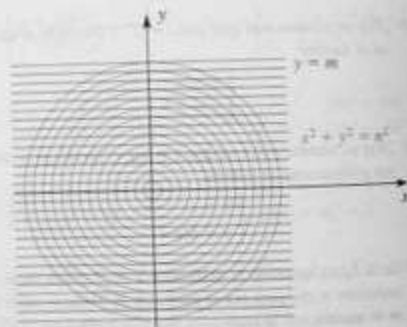
46. Problema isoperimétrico. El problema isoperimétrico consiste en demostrar que de todas las figuras geométricas planas con el mismo perímetro (figuras isoperimétricas), el círculo tiene el área más grande. Demuestra que un triángulo rectángulo tiene la misma área y el mismo perímetro que el círculo.

47. Figura de Moutre. La figura de Moutre resulta cuando se superponen dos figuras geométricamente regulares. A continuación se exhibe una figura obtenida de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = n^2$ y la familia de rectas horizontales $y = m$ para enteros m y n .

(a) Demuestra que los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = n^2$ y la recta $y = n - 1$ están en una parábola.

(b) Trabaja el inciso (a) con la recta $y = n - 2$.

Ejercicio 47



48. Dimensiones de una perla. Una perla (píldora esférica) tiene un diámetro de 1 cm. Se va a producir otra píldora en forma de cilindro circular recto, con el mismo volumen y dos veces el área superficial de la perla.

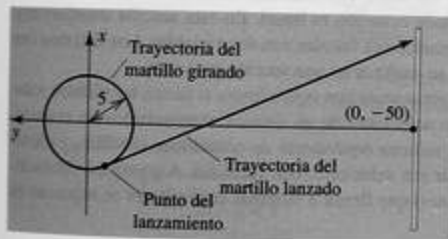
(a) Si r es el radio y h es la altura de la píldora, demuestra que $6r^2h = 1$ y $r^2 + rh = 1$. Concluye que $6r^3 - 6r + 1 = 0$.

(b) Las soluciones positivas de $6r^3 - 6r + 1 = 0$ son aproximadamente 0.172 y 0.903. Encuentra las alturas correspondientes e interpreta estos resultados.

49 Lanzamiento de martillo Un atleta lanzador de martillo está entrenando en una pequeña superficie de prácticas. El martillo gira y genera un círculo con radio de 5 pies y, cuando se suelta, hace contacto en una cerca alta de alambre a 50 pies del centro del área de lanzamiento. Introduzcamos ejes coordenados como en la figura (no a escala).

- (a) Si el martillo se suelta en $(-4, -3)$ y se mueve en una dirección tangente, ¿dónde tocará la cerca?
- (b) Si el martillo ha de tocar en $(0, -50)$, ¿en qué parte del círculo debe soltarse?

Ejercicio 49

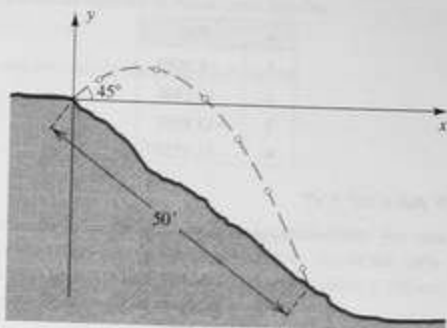


50 Trayectoria de una pelota lanzada Una persona lanza una pelota desde el borde de un cerro, en un ángulo de 45° con la horizontal, según se ve en la figura. La pelota toca tierra 50 pies cerro abajo, mismo que tiene una pendiente de $-\frac{1}{2}$. En cálculo, es posible demostrar que la trayectoria de la pelota está dada por $y = ax^2 + x + c$ para algunas constantes a y c .

- (a) Desprecia la estatura de la persona y encuentra una ecuación de la trayectoria.

- (b) ¿Cuál es la altura máxima de la pelota desde el suelo?

Ejercicio 50



Ejercicios 51 y 52: resuelve gráfica y algebraicamente el sistema de ecuaciones. Compara tus respuestas.

51 $x^2 + y^2 = 4$; $x + y = 1$

52 $x^2y^2 = 9$; $2x + y = 0$

Ejercicios 53 al 56: grafica las dos ecuaciones en el mismo plano coordenado y calcula las coordenadas de los puntos de intersección.

53 $y = 5x^3 - 5x$; $x^2 + y^2 = 4$

54 $9x^2 + y^2 = 9$; $y = e^x$

55 $|x + \ln|x|| - y^2 = 0$; $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2.25} = 1$

56 $y^3 - e^{x^2} = x$; $y + 0.85x^2 = 2.1$

Ejercicios 57 al 60: los datos de la tabla son generados por la función f . Gráficamente calcula las constantes desconocidas a y b hasta cuatro lugares decimales.

57 $f(x) = ae^{-bx}$

x	$f(x)$
1	0.80487
2	0.53930
3	0.36136
4	0.24213

58 $f(x) = a \ln bx$

x	$f(x)$
1	-8.2080
2	-11.7400
3	-13.8061
4	-15.2720

60 $f(x) = \sqrt{ax + b}$

x	$f(x)$
2	3.8859
4	5.1284
6	6.1238

59 $f(x) = ax^2 + e^{bx}$

x	$f(x)$
2	17.2597
3	40.1058
4	81.4579

9.2

Sistemas de ecuaciones
lineales con dos
variables

Una ecuación $ax + by = c$ (o bien, su equivalente, $ax + by - c = 0$), con a y b diferentes de cero, es una ecuación lineal con dos variables x y y . Del mismo modo, $ax + by + cz = d$ es una ecuación lineal con tres variables x , y y z . También podemos considerar ecuaciones lineales con cuatro, cinco, o cualquier número de variables. Los sistemas de ecuaciones más comunes son aquellos en que toda ecuación es lineal. En esta sección estudiaremos sólo sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Los sistemas con más de dos variables se analizan en una sección posterior.

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Para hallar las soluciones de un sistema, manipulamos las ecuaciones hasta obtener un sistema equivalente de ecuaciones sencillas, para las cuales podemos hallar sus soluciones con facilidad. Algunas manipulaciones (o transformaciones) que llevan a sistemas equivalentes se expresan en este teorema.

Teorema de sistemas
equivalentes

Dado un sistema de ecuaciones, resulta un sistema equivalente si

- (1) se intercambian dos ecuaciones.
- (2) una ecuación se multiplica o divide por una constante diferente de cero.
- (3) un múltiplo constante de una ecuación se suma a otra ecuación.

Se obtiene un *múltiplo constante* de una ecuación al multiplicar cada término de la ecuación por la misma constante k distinta de cero. Cuando aplicamos el inciso (3) del teorema, a menudo usamos la frase *sumar a una ecuación k veces cualquiera otra ecuación*. Sumar dos ecuaciones significa añadir lados correspondientes de las ecuaciones.

En el ejemplo siguiente se ilustra cómo usar el teorema de sistemas equivalentes para resolver un sistema de ecuaciones lineales.



EJEMPLO 1 Uso del teorema de sistemas equivalentes

Resuelve el sistema

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN A menudo multiplicamos una de las ecuaciones por una constante que nos da el inverso aditivo del coeficiente de una de las variables en la otra ecuación. Esto permite sumar ambas ecuaciones y obtener una tercera con una sola variable, como sigue:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 6x - 3y = 15 \end{cases} \quad \text{multiplicar por 3 la segunda ecuación}$$

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 7x = 14 \end{cases} \quad \text{sumar la primera ecuación a la segunda}$$

A partir del último sistema vemos que $7x = 14$, y por lo tanto, $x = \frac{14}{7} = 2$. Para hallar el valor correspondiente de y , sustituimos x por 2 en $x + 3y = -1$, con lo cual $y = -1$. En consecuencia, $(2, -1)$ es la única solución del sistema.

Hay otros modos de emplear el teorema de sistemas equivalentes para hallar la solución. Otro enfoque es proceder de la manera siguiente:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \quad \text{dado}$$

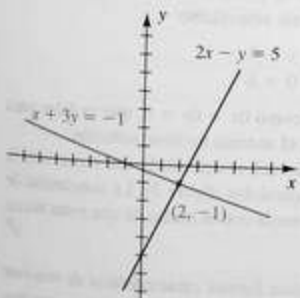
$$\begin{cases} -2x - 6y = 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \quad \text{multiplicar por } -2 \text{ la primera ecuación}$$

$$\begin{cases} -2x - 6y = 2 \\ -7y = 7 \end{cases} \quad \text{sumar la primera ecuación a la segunda}$$

A partir del último sistema vemos que $-7y = 7$, o sea que $y = -1$. Para hallar el valor correspondiente de x , podemos sustituir y con -1 en $x + 3y = -1$ y obtenemos $x = 2$. En consecuencia, $(2, -1)$ es la solución.

Las gráficas de las dos ecuaciones son rectas que se cortan en el punto $(2, -1)$ (figura 1).

Figura 1



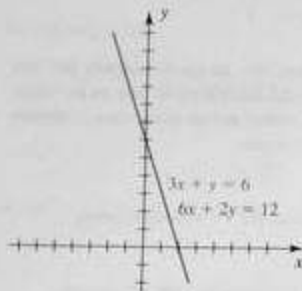
La técnica que se emplea en el ejemplo 1 se llama **método de eliminación**, porque se elimina una variable de una de las ecuaciones. El método de eliminación suele conducir a soluciones con menos pasos que el método de sustitución analizado en la sección anterior.

EJEMPLO 2 Sistema de ecuaciones lineales con un número infinito de soluciones

Resuelve el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 12 \end{cases}$$

Figura 2

**SOLUCIÓN** Al multiplicar la segunda ecuación por $\frac{1}{2}$ resulta

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

Por lo tanto, (a, b) es una solución si y sólo si $3a + b = 6$; es decir, $b = 6 - 3a$. Se deduce que las soluciones están formadas por pares ordenados de la forma $(a, 6 - 3a)$, donde a es cualquier número real. Si deseamos encontrar soluciones particulares, podemos sustituir diversos valores para a . Unas soluciones son $(0, 6)$, $(1, 3)$, $(3, -3)$, $(-2, 12)$ y $(\sqrt{2}, 6 - 3\sqrt{2})$.

Es incorrecto decir que la solución es "todos los números reales". Es correcto decir que la solución es el conjunto de todos los pares ordenados tales que $3x + y = 6$, lo cual se puede escribir como

$$\{(x, y) | 3x + y = 6\}.$$

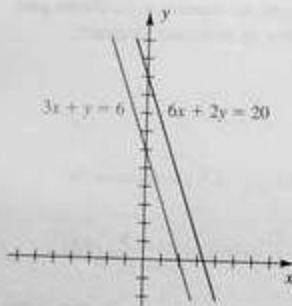
La gráfica de cada ecuación es la misma recta (figura 2).

EJEMPLO 3 Un sistema de ecuaciones lineales sin soluciones

Resuelve el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 20 \end{cases}$$

Figura 3



SOLUCIÓN Si sumamos -2 veces la primera ecuación, $-6x - 2y = -12$, a la segunda, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 0 = 8 \end{cases}$$

La última ecuación se puede escribir como $0x + 0y = 8$, que es falsa para todo par ordenado (x, y) ; por lo tanto, el sistema no tiene solución.

Las gráficas de las dos ecuaciones del sistema dado son rectas con la misma pendiente y, por lo tanto, son paralelas (figura 3). La conclusión de que el sistema no tiene solución concuerda con el hecho de que estas rectas no se cortan.

Los tres ejemplos anteriores ilustran formas características de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables: hay exactamente una solución, una infinidad de soluciones o no existe solución. Un sistema es **consistente** si tiene por lo menos una solución; **dependiente y consistente** si tiene una infinidad de soluciones, e **inconsistente** si carece de solución.

También se le llama **consistente indeterminado** cuando el sistema tiene una infinidad de soluciones y **consistente determinado** cuando tiene una única solución.

Puesto que la gráfica de cualquier ecuación lineal $ax + by = c$ es una recta, se cumple *exactamente uno* de los tres casos enumerados en la tabla que sigue para cualquier sistema de dos de estas ecuaciones.

Características de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

Gráficas	Cantidad de soluciones	Clasificación
Rectas no paralelas	Una solución	Sistema consistente
Rectas idénticas	Infinidad de soluciones	Sistema dependiente y consistente
Rectas paralelas	No hay solución	Sistema inconsistente

En la práctica debe haber poca dificultad para establecer cuál caso se presenta. El caso de la solución única se hará evidente cuando se apliquen transformaciones adecuadas al sistema (ejemplo 1). El caso de una infinidad de soluciones es similar al del ejemplo 2, en donde una de las ecuaciones se puede transformar en otra. El caso sin solución está indicado por una contradicción, igual que la expresión $0 = 8$ del ejemplo 3.

En el proceso de resolver un sistema, supongamos que obtenemos para x un número racional como $-\frac{41}{29}$. Es engorroso hallar el valor de y sustituyendo $-\frac{41}{29}$ por x . Es más fácil elegir un multiplicador diferente para cada una de las ecuaciones originales, que nos permita eliminar x y despejar y . Esta técnica se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4 Resolución de un sistema

Resuelve el sistema

$$\begin{cases} 4x + 7y = 11 \\ 3x - 2y = -9 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Seleccionamos múltiplos para eliminar y (el mínimo común múltiplo de 7 y 2 es 14).

$$\begin{cases} 8x + 14y = 22 & \text{multiplicar por 2 la primera ecuación} \\ 21x - 14y = -63 & \text{multiplicar por 7 la segunda ecuación} \end{cases}$$

Se suma la primera ecuación a la segunda para obtener

$$29x = -41, \text{ así } x = -\frac{41}{29}.$$

Luego, regresamos al sistema original y seleccionamos múltiplos para eliminar x (el mínimo común múltiplo de 4 y 3 es 12).

$$\begin{cases} 4x + 7y = 11 \\ 3x - 2y = -9 \end{cases} \quad \text{sistema original}$$

$$\begin{cases} 12x + 21y = 33 & \text{multiplicar por 3 la primera ecuación} \\ -12x + 8y = 36 & \text{multiplicar por -4 la segunda ecuación} \end{cases}$$

(continúa)

Al sumar las ecuaciones resulta

$$29y = 69, \text{ así } y = \frac{69}{29}.$$

✓ Comprobación $(x, y) = (-\frac{41}{29}, \frac{69}{29})$

Sustituimos los valores de x y de y en las ecuaciones originales.

$$4x + 7y = 4\left(-\frac{41}{29}\right) + 7\left(\frac{69}{29}\right) = -\frac{164}{29} + \frac{483}{29} = \frac{319}{29} = 11 \quad \text{comprobada la primera ecuación}$$

$$3x - 2y = 3\left(-\frac{41}{29}\right) - 2\left(\frac{69}{29}\right) = -\frac{123}{29} - \frac{138}{29} = -\frac{261}{29} = -9 \quad \text{comprobada la segunda ecuación}$$

En la figura 4 se muestra una comprobación de la solución en la calculadora $(-\frac{41}{29}, \frac{69}{29})$.

Ciertos problemas aplicados se resuelven introduciendo sistemas de dos ecuaciones lineales, según se expone en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Aplicación de un sistema de ecuaciones lineales

Una compañía agrícola tiene una granja de 100 acres en que produce lechugas y repollos. Cada acre de repollo requiere 600 horas de mano de obra y cada acre de lechuga 400 horas de mano de obra. Si se dispone de 45 000 horas y si se van a utilizar todos los recursos humanos y el terreno, encuentra el número de acres de cada grupo que deben plantarse.

SOLUCIÓN Introduzcamos variables para denotar las cantidades desconocidas:

x = número de acres de repollo

y = número de acres de lechuga

De esta forma, el número de horas de mano de obra requeridas para cada cosecha se puede expresar así:

$600x$ = número de horas requeridas para repollo

$400y$ = número de horas requeridas para lechuga

El hecho de que la cantidad total de acres es 100 y que la cantidad total de horas disponibles es 45 000, conduce al sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 600x + 400y = 45\,000 \end{cases}$$

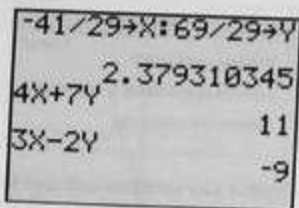
A continuación, usamos el método de eliminación:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 6x + 4y = 450 \end{cases} \quad \text{dividir la segunda ecuación entre 100}$$

$$\begin{cases} -6x - 6y = -600 \\ 6x + 4y = 450 \end{cases} \quad \text{multiplicar la primera ecuación por } -6$$

$$\begin{cases} -6x - 6y = -600 \\ -2y = -150 \end{cases} \quad \text{sumar la primera ecuación a la segunda}$$

Figura 4



A partir de la última ecuación vemos que $-2y = -150$ o $y = 75$. Al sustituir y por 75 en $x + y = 100$ resulta que $x = 25$. Por lo tanto, la compañía debe plantar 25 acres de repollo y 75 de lechuga.

Demostración Plantar 25 acres de repollo y 75 de lechuga requiere $(25)(600) + (75)(400) = 45\,000$ horas de mano de obra. De esta forma, se aprovecha la totalidad de los 100 acres de tierra y de las 45 000 horas de mano de obra.



EJEMPLO 6 Búsqueda de la velocidad de la corriente de un río

Una lancha de motor, operando a toda su velocidad, hizo un viaje de 4 millas aguas arriba (a contracorriente) en 15 minutos. El viaje de regreso (a favor de la corriente y a toda velocidad) tomó 12 minutos. Encuentra la velocidad de la corriente y la velocidad equivalente de la lancha en aguas tranquilas.

SOLUCIÓN Comenzamos por introducir variables para denotar las cantidades desconocidas. Sean

x = velocidad de la lancha (en millas por hora: mi/h)

y = velocidad de la corriente (en mi/h).

Planeamos usar la fórmula $d = vt$, donde d denota la distancia recorrida, v es la rapidez o velocidad y t el tiempo. Puesto que la corriente retrasa la marcha de la lancha cuando avanza río arriba (a contracorriente), pero se suma a su velocidad durante el regreso (a favor de la corriente), obtenemos

Velocidad río arriba = $x - y$ (en mi/h)

Velocidad río abajo = $x + y$ (en mi/h).

El tiempo (en h) empleado en cada dirección es

$$\text{tiempo a contracorriente} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \text{ h}$$

$$\text{tiempo a favor de la corriente} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \text{ h}$$

La distancia es 4 millas para cada viaje. Sustituimos en $d = vt$ y llegamos al sistema

$$\begin{cases} 4 = (x - y)\left(\frac{1}{4}\right) \\ 4 = (x + y)\left(\frac{1}{5}\right) \end{cases}$$

Al aplicar el teorema sobre sistemas equivalentes resulta

$$\begin{cases} x - y = 16 \\ x + y = 20 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{multiplicar por 4 la primera ecuación y por 5 la segunda} \\ \text{sumar la primera ecuación a la segunda} \end{array}$$

$$\begin{cases} x - y = 16 \\ 2x = 36 \end{cases}$$

A partir de la última ecuación vemos que $2x = 36$, o sea que $x = 18$. Sustituimos x en $x + y = 20$ y obtenemos $y = 2$; así, la velocidad de la lancha en aguas tranquilas es 18 mi/h, y la velocidad de la corriente es de 2 mi/h.

Demostración La velocidad río arriba (a contracorriente) es $18 - 2 = 16$ mi/h, y río abajo, $18 + 2 = 20$ mi/h. Un viaje de 4 millas río arriba tomaría $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ hr = 15 minutos, y río abajo requeriría $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ hr = 12 minutos.

9.2 Ejercicios

Ejercicios 1 al 20: resuelve el sistema.

1
$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x - 7y = 24 \end{cases}$$

4
$$\begin{cases} 7x - 8y = 9 \\ 4x + 3y = -10 \end{cases}$$

5
$$\begin{cases} 3x + 4x = 3 \\ x - 2x = -4 \end{cases}$$

6
$$\begin{cases} 9u + 2v = 0 \\ 3u - 5v = 17 \end{cases}$$

7
$$\begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$$

8
$$\begin{cases} 2x + 8y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

9
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 5 \\ x - \frac{1}{4}y = -1 \end{cases}$$

10
$$\begin{cases} \frac{1}{3}t - \frac{1}{4}v = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}v = \frac{1}{4} \end{cases}$$

11
$$\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases}$$

12
$$\begin{cases} 0.11x - 0.03y = 0.25 \\ 0.12x + 0.05y = 0.70 \end{cases}$$

13
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = 12 \end{cases}$$

14
$$\begin{cases} 3p - q = 7 \\ -12p + 4q = 3 \end{cases}$$

15
$$\begin{cases} 3m - 4n = 2 \\ -6m + 8n = -4 \end{cases}$$

16
$$\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 3x - 15y = 6 \end{cases}$$

17
$$\begin{cases} 2y - 5x = 0 \\ 3y + 4x = 0 \end{cases}$$

18
$$\begin{cases} 3x + 7y = 9 \\ y = 5 \end{cases}$$

19
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -2 \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 1 \end{cases} \quad \left(\text{Sugerencia: Sea } u = \frac{1}{x} \text{ y } v = \frac{1}{y} \right)$$

20
$$\begin{cases} \frac{3}{x-1} + \frac{4}{y+2} = 2 \\ \frac{6}{x-1} - \frac{7}{y+2} = -3 \end{cases}$$

21. Venta de boletos. El precio de admisión a una obra de teatro de secundaria fue de \$3.00 para estudiantes y \$4.50 para el público en general. Si se vendieron 450 boletos para un total de \$1,555.50, ¿cuántos de cada clase se vendieron?

22. Viaje en avión. Una línea aérea que vuela de Los Ángeles a Albuquerque, con una escala en Phoenix, cobra una tarifa de \$45 a Phoenix y de \$60 de Los Ángeles a Albuquerque. Un total de 185 pasajeros abordó el avión en Los Ángeles y la venta de boletos hizo un total de \$10,500. ¿Cuántos bajaron en Phoenix?

23. Dimensiones de una crayola. Se fabricará una crayola de 1 cm de largo y 1 cm de diámetro con 5 cm³ de cera de colores. Debe tener la forma de un cilindro con una pequeña punta cónica (ve la figura). Encuentra la longitud x del cilindro y la altura y del cono.

Ejercicio 23



24. Remar en un bote. Un hombre rema y recorre 500 pies en 10 min en una corriente constante y luego rema 300 pies río abajo (con la misma corriente) en 5 min. Encuentra la velocidad de la corriente y la velocidad equivalente a la que puede remar en aguas tranquilas.

25. Dimensiones de una mesa. Se va a construir una mesa grande en forma de rectángulo con dos semicírculos en los extremos (ve la figura) para una sala de conferencias. Debe tener un perímetro de 40 pies y el área de la porción rectangular tiene que ser el doble de la suma de las áreas de los dos extremos. Encuentra la longitud l y el ancho w de la porción rectangular.

Ejercicio 25

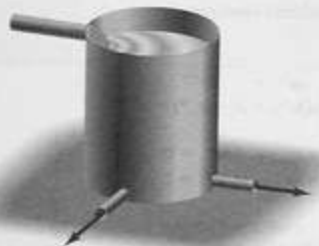


26. Ingresos por inversión. Una mujer tiene \$15,000 para invertir en dos fondos que pagan interés simple a tasas de 6% y 8% anual. Los intereses del fondo de 6% son sin

puestos, no así los de 8%. Dado que está en un grupo de impuestos altos, la mujer no desea invertir toda la suma en la cuenta de más rendimiento. ¿Hay forma de invertir el dinero, de modo que reciba \$ 1000 de intereses al término de un año?

27. **Población de gatos monteses** Una población de gatos monteses está clasificada por edad en cachorros (de menos de un año) y adultos (por lo menos de un año). Todas las hembras adultas, incluyendo las nacidas el año anterior, tienen una camada cada mes de junio, con un promedio de tres cachorros por camada. La población en primavera de cierta región se estima en 6000 y la proporción de machos y hembras es uno a uno. Calcula el número de adultos y de cachorros en la población.
28. **Medida de flujo** Un tanque de agua de 300 gal de capacidad se llena desde una sola línea, pero se pueden usar dos tubos de salida idénticos para alimentar de agua dos campos circundantes (ve la figura). Se emplean cinco horas para llenar un tanque vacío cuando ambos tubos de salida están abiertos; al cerrar uno de los tubos, se precisan tres horas. Encuentra el flujo (en galones por hora: gal/h) que entra y sale por los tubos.

Ejercicio 28



29. **Mezcla de una aleación de plata** Un platero tiene dos aleaciones, una de las cuales contiene 35% de plata y la otra 60%. ¿Cuánto de cada una debe fundir y combinar para obtener 100 g de una aleación con 50% de plata?
30. **Mezcla de cacahuates** Un comerciante desea mezclar cacahuates que cuestan \$3 por libra con nueces de la India que valen \$8 la libra, para obtener 60 lb de una mezcla con valor de \$5 por libra. ¿Cuántas libras de cada variedad debe mezclar?
31. **Viaje en avión** Una aeronave, que vuela con viento de cola, recorre 1200 mi en 2 h; el viaje de regreso, contra el viento, toma $2\frac{1}{2}$ h. Encuentra la velocidad de crucero del aeroplano y la velocidad del viento (suponiendo que ambas son constantes).

32. **Despachar pedidos** Una compañía papelería vende dos tipos de cuadernos a librerías de escuelas, el primero a un precio de mayoreo de \$50 y el segundo, en \$70. La compañía recibe un pedido de 500 cuadernos, junto con un cheque de \$286. Si el pedido no especifica el número de cada tipo, ¿cómo se debe despachar el pedido?
33. **Aceleración** A medida que una pelota rueda hacia abajo en un plano inclinado, su velocidad $v(t)$ (en centímetros por segundo: cm/s) en el tiempo t (en segundos) está dada por $v(t) = v_0 + at$ para una velocidad inicial v_0 y aceleración a (en cm/s²). Si $v(2) = 16$ y $v(5) = 25$, encuentra v_0 y a .
34. **Lanzamiento vertical** Si un objeto es proyectado verticalmente hacia arriba desde una altitud de s_0 pies con una velocidad inicial v_0 pies/s, entonces su distancia $s(t)$ sobre el suelo, después de t segundos es

$$s(t) = -16t^2 + v_0t + s_0$$

Si $s(1) = 84$ y $s(2) = 116$, ¿cuánto valen v_0 y s_0 ?

35. **Planeación de producción** Una pequeña compañía mueblera fabrica sofás y sillones. Cada sofá requiere 8 h de mano de obra y \$60 en materiales, en tanto que un sillón se puede construir por \$35 en 6 h. La compañía dispone de 340 h de mano de obra por semana y puede comprar \$2 250 en materiales. ¿Cuántos sillones y sofás puede producir si debe utilizar todos los recursos materiales y humanos?
36. **Dieta de ganado** Un ganadero está preparando una mezcla de avena y harina de maíz para ganado. Cada onza de avena proporciona cuatro gramos de proteína y 18 g de carbohidratos, y 1 onza de harina de maíz, 3 g de proteína y 24 g de carbohidratos. ¿Cuántas onzas de avena y harina de maíz se requieren para satisfacer las metas nutricionales de 200 g de proteína y 1320 g de carbohidratos por ración?
37. **Trueque de servicios** Un plomero y un electricista efectúan reparaciones en sus talleres y acuerdan hacer trueque de servicios. El número de horas empleadas en cada proyecto se muestra en esta tabla:

	Taller del plomero	Taller del electricista
Horas del plomero	6	4
Horas del electricista	5	6

Debido a que todo trabajo causa impuestos —aunque el ingreso sea en especie—, conviene en seleccionar tarifas por hora, de modo que la cuenta por proyecto sea igual al ingreso que cada persona recibirá por un trabajo comparable.

(continúa)

- (a) Si x y y denotan los ingresos por hora del plomero y del electricista, respectivamente, demuestra que

$$6x + 5y = 10x \quad \text{y} \quad 4x + 6y = 11y.$$

Describe las soluciones para este sistema.

- (b) Si el plomero gana generalmente \$20 por hora, ¿cuánto debe cobrar el electricista?

38. Encuentra ecuaciones para determinar las alturas del triángulo con vértices $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$ y $C(3, -8)$, además del punto en que las alturas se cortan.

39. Tendencia al calentamiento en París. Como resultado de la urbanización, las temperaturas en París han aumentado. En 1891 el promedio de temperaturas mínimas y máximas diarias era de 5.8°C y 15.1°C , respectivamente. Entre 1891 y 1968, estos promedios se elevaron 0.019°C por año y 0.011°C por año, respectivamente. Si se supone que los aumentos son lineales, encuentra el año en el que la diferencia entre las temperaturas mínima y máxima fue 9°C , y determina la temperatura máxima promedio correspondiente.

40. Tarifas telefónicas de larga distancia. Una compañía de teléfonos cobra a sus clientes determinada cantidad por el primer minuto de una llamada de larga distancia y otra cantidad por minuto adicional. Un cliente efectúa dos llamadas a la misma ciudad, una de 36 min por \$2.93 y otra de 13 min por \$1.09.

- (a) Determina el costo del primer minuto y el costo de cada minuto adicional de ambas llamadas.
- (b) Si hay una tarifa de impuesto federal de 3.2% y una tarifa estatal de 7.2% sobre todas las llamadas de larga distancia, encuentra, al minuto más cercano, la llamada más larga a la misma ciudad cuyo costo no exceda de \$5.00.

41. Filmación en casete para video. Una aficionada al tenis desea filmar 6 horas de un torneo importante en una sola cinta.

Su cinta tiene una capacidad de 5 horas y 20 minutos a la velocidad LP y de 8 horas en la velocidad más lenta de SLP. La velocidad LP produce una película de mejor calidad, así que la aficionada desea maximizar el tiempo de grabación a la velocidad LP. Encuentra la cantidad de tiempo que se grabaría a cada velocidad.

42. Precio y demanda. Supongamos que unos consumidores comprarían 1 000 000 de playeras de \$10 la pieza, pero por cada dólar de aumento adquirirían 100 000 playeras menos. Es más, asumamos que los vendedores solicitarían 2 000 000 de playeras si el precio de venta es de \$15 y, por cada dólar de aumento, pedirían otras 150 000.

- (a) Expresa el número Q de playeras que consumirán los compradores si el precio de venta es p dólares.
- (b) Expresa el número K de playeras que los vendedores solicitarán si el precio de venta es p dólares.
- (c) Determina el precio de mercado, es decir, el precio cuando $Q = K$.

Ejercicios 43 al 46: despeja a y b del sistema. (Sugerencia: intenta con los términos del tipo e^{bx} , con x y $\sin x$ como "coeficientes constantes".)

$$43. \begin{cases} ae^{3x} + be^{-3x} = 0 \\ a(3e^{6x}) + b(-3e^{-6x}) = e^{3x} \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} ae^{-x} + be^{3x} = 0 \\ -ae^{-x} + b(4e^{6x}) = 2 \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} a \cos x + b \sin x = 0 \\ -a \sin x + b \cos x = \tan x \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} a \cos x + b \sin x = 0 \\ -a \sin x + b \cos x = \sin x \end{cases}$$

9.3

Sistemas de desigualdades

En el capítulo 2 restringimos nuestro análisis a las desigualdades con una variable. Ahora, consideraremos desigualdades con dos variables x y y , como las que aparecen en la ilustración siguiente.

ILUSTRACIÓN Desigualdades en x y y

$$\blacksquare \quad y^2 < x + 4 \quad \blacksquare \quad 3x - 4y > 12 \quad \blacksquare \quad x^2 + y^2 \leq 16$$

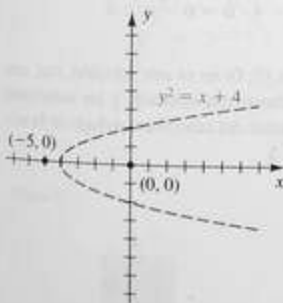
Una **solución** de una desigualdad en x y y es un par ordenado (a, b) que conduce a una expresión verdadera si a y b sustituyen a x y a y , respectivamente. **Resolver** una desigualdad para x y para y significa hallar todas las soluciones. La **gráfica** de esa desigualdad es el conjunto de todos los puntos (a, b) de un plano xy que corresponden a las soluciones. Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Dada una desigualdad en x y y , si sustituimos el símbolo de desigualdad por uno de igualdad, obtenemos una ecuación cuya gráfica suele separar el plano xy en dos regiones. Consideraremos sólo ecuaciones que posean la propiedad de que si R es una de tales regiones, y si un **punto de prueba** (p, q) de R lleva a una solución de la desigualdad, entonces **todo** punto de R produce una solución. Las siguientes guías son útiles para trazar la gráfica de la desigualdad.

Guías para trazar la gráfica de una desigualdad en x y y

- 1 Reemplaza el símbolo de desigualdad por uno de igualdad y grafica la ecuación resultante. Utiliza una línea punteada si el símbolo de desigualdad es $<$ o $>$ para indicar que ningún punto de la gráfica produce una solución. Usa una línea o curva continua para \leq o \geq para indicar que las soluciones de la ecuación también son soluciones de la desigualdad.
- 2 Si R es una región del plano xy determinada por la gráfica de la guía 1, y si un punto de prueba (p, q) de R produce una solución de la desigualdad, entonces todo punto de R genera una solución. Sombrea R para indicar este hecho. Si (p, q) no es una solución, entonces **ningún** punto de R produce una solución y R se deja sin sombrear.

Figura 1



El uso de estas guías se muestra en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 1 Trazado de la gráfica de una desigualdad

Encuentra las soluciones y traza la gráfica de la desigualdad $y^2 < x + 4$.

SOLUCIÓN

Guía 1 Sustituimos $<$ con $=$, con lo cual $y^2 = x + 4$. La gráfica de esta ecuación es una parábola simétrica con respecto al eje x , con intersección en $x - 4$ e intersecciones en y de ± 2 . Puesto que el símbolo de la desigualdad es $<$, trazamos la parábola usando una línea punteada (figura 1).

Guía 2 La gráfica de la guía 1 separa el plano xy en dos regiones, una a la izquierda de la parábola y la otra a la derecha. Escogamos los puntos de prueba $(-5, 0)$ y $(0, 0)$ de las regiones (figura 1) y sustituyamos x y y en $y^2 < x + 4$:

$$\begin{aligned} \text{Punto de prueba } (-5, 0) \quad \text{LS: } 0^2 &= 0 \\ \text{RS: } -5 + 4 &= -1 \end{aligned}$$

Dado que $0 < -1$ es una expresión falsa, $(-5, 0)$ no es una solución de la desigualdad; por lo tanto, **ningún** punto a la izquierda de la parábola es una solución y dejamos esa región sin sombrear.

(continúa)

Figura 2

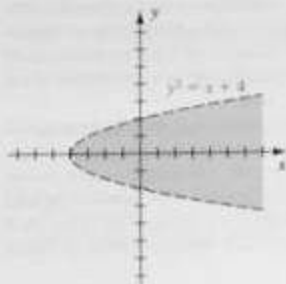


Figura 3

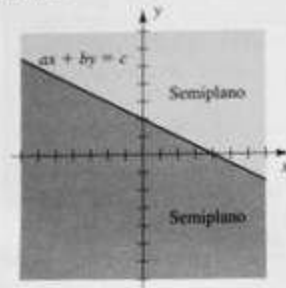
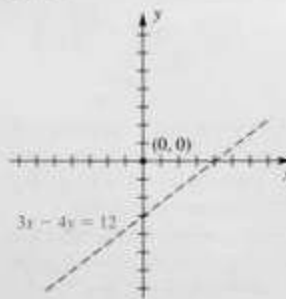


Figura 4



Punto de prueba $(0, 0)$ LS: $0^2 = 0$
RS: $0 + 4 = 4$

Puesto que $0 < 4$ es una expresión verdadera, $(0, 0)$ es una solución de la desigualdad; así, todos los puntos a la derecha de la parábola producen soluciones, y por ello se sombrea esta región (figura 2).

Una **desigualdad lineal** se puede escribir en una de estas formas, donde a , b y c son números reales:

$$ax + by < c, \quad ax + by > c, \quad ax + by \leq c, \quad ax + by \geq c$$

La recta $ax + by = c$ separa al plano xy en dos **semiplanos** (figura 3). Las soluciones de la desigualdad consisten de todos los puntos de uno de estos semiplanos, donde la recta está incluida en \leq o \geq y no en $<$ o $>$. Para una desigualdad lineal, sólo se requiere un punto de prueba (p, q) , porque si (p, q) es una solución, entonces el semiplano con (p, q) contiene todas las soluciones; ahora bien, si (p, q) no es una solución, el otro semiplano contiene las soluciones.

EJEMPLO 2 Trazo de la gráfica de una desigualdad lineal

Traza la gráfica de la desigualdad $3x - 4y > 12$.

SOLUCIÓN Sustituir $>$ por $=$ nos dará la línea $3x - 4y = 12$ (punteada en la figura 4). Esta recta separa el plano xy en dos semiplanos, uno arriba de la recta y el otro debajo de la misma. Es conveniente escoger el punto de prueba $(0, 0)$ arriba de la recta y reemplazarlo en $3x - 4y > 12$, como se muestra a continuación:

Punto de prueba $(0, 0)$ LS: $3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$
RS: 12

Dado que $0 > 12$ es una expresión falsa, $(0, 0)$ no es una solución. Así, ningún punto por encima de la recta constituye una solución, y las soluciones de $3x - 4y > 12$ están dadas por los puntos del semiplano debajo de la recta. La gráfica se ha trazado en la figura 5.

Figura 5

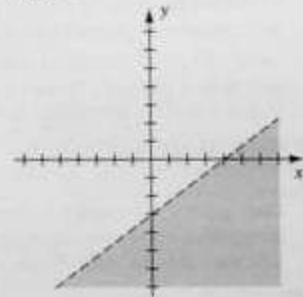
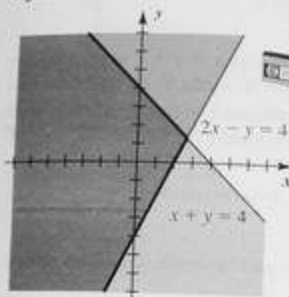


Figura 6



Al igual que con las ecuaciones, a veces trabajamos al mismo tiempo con varias desigualdades de dos variables; es decir, con un **sistema de desigualdades**. Las **soluciones** de un sistema de desigualdades son las soluciones comunes a todas las desigualdades del sistema. La **gráfica** de un sistema de desigualdades está constituida por los puntos correspondientes a las soluciones. En los ejemplos que siguen se expone un método para resolver sistemas de desigualdades.

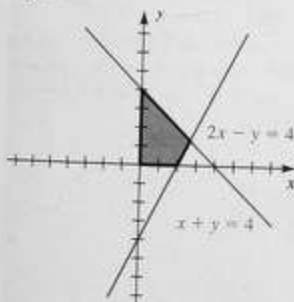
EJEMPLO 3 Solución de un sistema de desigualdades lineales

Traza la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Sustituimos cada \leq con $=$ y luego trazamos las rectas resultantes (figura 6). Usamos el punto de prueba $(0, 0)$ y vemos que las soluciones del sistema corresponden a los puntos *abajo* de (y en) la recta $x + y = 4$ y *arriba* de (y en) la recta $2x - y = 4$. Al sombrear estos semiplanos con colores diferentes (figura 6), obtenemos como gráfica del sistema los puntos que están en *ambas* regiones, las cuales se identifican en la porción morada de la figura.

Figura 7



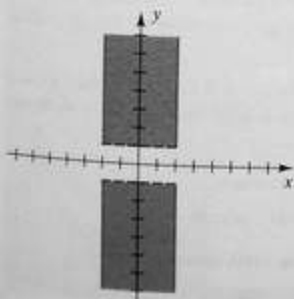
EJEMPLO 4 Solución de un sistema de desigualdades lineales

Traza la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Las primeras dos desigualdades son las mismas que las que se consideran en el ejemplo 3; en consecuencia, los puntos de la gráfica del sistema deben estar dentro de la región morada de la figura 6. Además, las desigualdades tercera y cuarta del sistema nos dicen que los puntos tienen que estar en el primer cuadrante o en sus fronteras. Esto nos da la región que se muestra en la figura 7.

Figura 8



EJEMPLO 5 Solución de un sistema de desigualdades con valores absolutos

Traza la gráfica del sistema

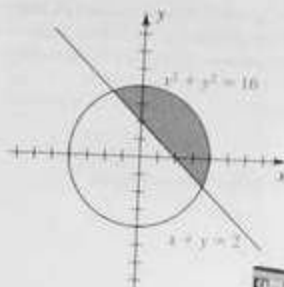
$$\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| > 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Usamos propiedades del valor absoluto expresadas en la página 118 y vemos que (x, y) es una solución del sistema si y sólo si son ciertas las dos condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} (1) & -2 \leq x \leq 2 \\ (2) & y < -1 \quad \text{o} \quad y > 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, un punto (x, y) de la gráfica del sistema debe estar entre (o en) las rectas verticales $x = \pm 2$, así como debajo de la recta horizontal $y = -1$ o arriba de la recta $y = 1$ (figura 8).

Figura 9

**EJEMPLO 6** Solución de un sistema de desigualdades

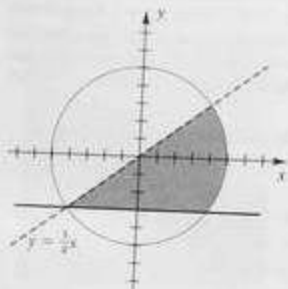
Traza la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Las gráficas de $x^2 + y^2 = 16$ y $x + y = 2$ son la circunferencia y la recta de la figura 9. Con el punto de prueba $(0, 0)$, los puntos solución del sistema deben estar dentro del círculo o en éste y arriba de (o en) la recta. Esto nos da la región que se ha trazado en la figura 9.

**EJEMPLO 7** Búsqueda de un sistema de desigualdades a partir de una gráfica

Encuentra un sistema de desigualdades para la región sombreada de la figura 10.



SOLUCIÓN Una ecuación para la circunferencia es $x^2 + y^2 = 25$. Dado que el interior de la circunferencia está sombreado, la región sombreada (incluida la circunferencia) está contenida en $x^2 + y^2 \leq 25$. El exterior del círculo podría expresarse con $x^2 + y^2 > 25$.

Como la región sombreada se encuentra debajo de la línea punteada con la ecuación $y = \frac{3}{4}x$ se puede expresar con la desigualdad $y < \frac{3}{4}x$. Finalmente, dado que la región sombreada está arriba de la recta horizontal $y = -3$, utilizamos $y \geq -3$. Por lo tanto, un sistema es

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ y < \frac{3}{4}x \\ y \geq -3 \end{cases}$$

EJEMPLO 8 Aplicación de un sistema de desigualdades

El gerente de un equipo de béisbol desea comprar bats y pelotas que cuesten \$12 y \$3 cada uno, respectivamente. Por lo menos se requieren cinco bats y diez pelotas, y el costo total no debe pasar de \$180. Encuentra un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades, y traza la gráfica.

SOLUCIÓN Comenzamos por denotar con x la cantidad de bats y con y la cantidad de pelotas. Puesto que el costo de un bat es de \$12 y el de una pelota es de \$3, vemos que

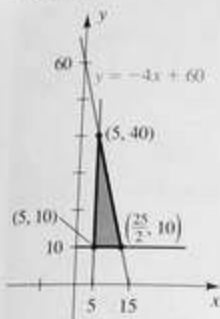
$$12x = \text{costo de } x \text{ bats}$$

$$3y = \text{costo de } y \text{ pelotas.}$$

Dado que el costo total no debe pasar de \$180, debemos tener

$$12x + 3y \leq 180$$

Figura 11



o bien, en forma equivalente,

$$y \leq -4x + 60.$$

En vista de que se requieren por lo menos cinco bats y diez pelotas, también tenemos

$$x \geq 5 \quad y \quad y \geq 10.$$

La gráfica de $y \leq -4x + 60$ es el semiplano que está *abajo* (o *sobre*) la recta $y = -4x + 60$ (figura 11).

La gráfica de $x \geq 5$ es la región situada a la derecha de (o en) la recta vertical $x = 5$, y la gráfica de $y \geq 10$ es la región arriba (o en) la recta horizontal $y = 10$.

La gráfica del sistema —es decir, los puntos comunes a los tres semiplanos— es la región triangular de la figura 11.

EJEMPLO 9 Graficado de una desigualdad

Grafica la desigualdad $27y^3 \leq 8 + x^3$.

SOLUCIÓN Primero debemos despejar y en la *igualdad* asociada:

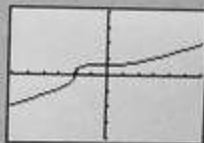
$$27y^3 = 8 + x^3 \quad \text{igualdad}$$

$$y^3 = \frac{1}{27}(8 + x^3) \quad \text{dividir entre 27}$$

$$y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{8 + x^3} \quad \text{tomar la raíz cúbica de ambos lados}$$

Asignamos $\frac{1}{3}\sqrt[3]{8 + x^3}$ a Y_1 y graficamos Y_1 en la pantalla de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$, como se observa en la figura 12. El punto de prueba $(0, 0)$ está en la región de la solución (ya que $0 \leq 8$ es verdadero), así que queremos sombrear la región debajo de la gráfica de Y_1 . Se muestran los comandos para la TI-83 Plus y la TI-86.

Figura 12



TI-83 Plus

2nd DRAW 7 -4 VARS
 > 1 1 -6 6
 1 3)

Shade(-4,Y1,-6,6
 ,1,3)

TI-86

GRAPH MORE DRAW(F2)
 Shade(F1) -4 -6 2nd alpha
 Y 1 -6 6 4 4)

Shade(-4,y1,-6,6,4,4)

(continúa)

Los parámetros para el comando Shade son como sigue:

-4 es la función inferior para la región sombreada; en este caso, simplemente usamos el valor de Y_{\min} .

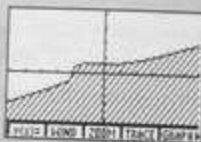
Y_1 es la función superior para la región sombreada.

-6 y 6 son X_{\min} y X_{\max} .

1 (o 4) es el patrón de sombreado; hay cuatro de éstos.

3 (o 4) sombrea cada tercer (o cuarto) píxel; puedes especificar un entero de 1 a 8.

Al oprimir **ENTER** se obtienen las gráficas siguientes.



Método alternativo: En cada calculadora hay disponible otro método para sombreado. Puede ejecutarse seleccionando un estilo de graficado desde la pantalla $Y=$ o $Y(X)=(F1)$.

Usando las teclas del cursor, mueve éste a la izquierda de " Y_1 ". Oprime sucesivamente **ENTER** para efectuar un ciclo a través de los siete estilos de graficado. Elige el estilo "shade below" como se muestra en la figura. Al oprimir **GRAPH** se obtiene una figura sombreada como antes.



Con el cursor en la misma línea que " Y_1 ", oprime **MORE**. Oprime sucesivamente **STYLE(F3)** para efectuar un ciclo a través de los siete estilos de graficado. Elige el estilo "shade below" como se muestra en la figura. Al oprimir **2nd GRAPH(M5)** se obtiene una figura sombreada.



9.3 Ejercicios

Ejercicios 1 al 10: traza la gráfica de la desigualdad.

1. $3x - 2y < 6$

2. $4x + 3y < 12$

3. $2x + 3y \geq 2y + 1$

4. $2x - y > 3$

5. $y + 2 < x^2$

6. $y^2 - x \leq 0$

7. $x^2 + 1 \leq y$

8. $y - x^2 < 1$

9. $xy^2 \geq 1$

10. $x^2 + 4 \geq y$

Ejercicios 11 al 26: traza la gráfica del sistema de desigualdades.

11. $\begin{cases} 3x + y < 3 \\ 4 - y < 2x \end{cases}$

12. $\begin{cases} y + 2 < 2x \\ y - x > 4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} y - x < 0 \\ 2x + 5y < 10 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2y - x \leq 4 \\ 3y + 2x < 6 \end{cases}$

$$15 \begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ y - 2x \geq 1 \\ x \geq -2 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

$$16 \begin{cases} 3x - 4y \geq 12 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 9 \\ y \leq 5 \end{cases}$$

$$17 \begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

$$18 \begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$19 \begin{cases} |x| \geq 2 \\ |y| < 3 \end{cases}$$

$$20 \begin{cases} |x| \geq 4 \\ |y| \geq 3 \end{cases}$$

$$21 \begin{cases} |x + 2| \leq 1 \\ |y - 3| < 5 \end{cases}$$

$$22 \begin{cases} |x - 2| \leq 5 \\ |y - 4| > 2 \end{cases}$$

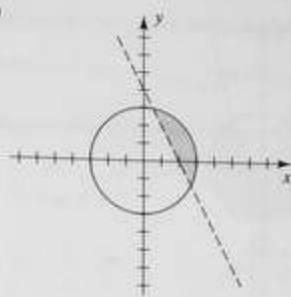
$$23 \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

$$24 \begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$$

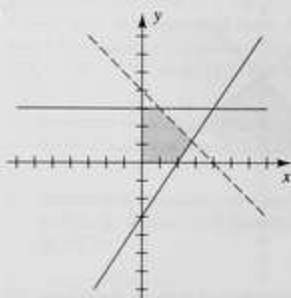
$$25 \begin{cases} x^2 \leq 1 - y \\ x \geq 1 + y \end{cases}$$

$$26 \begin{cases} x - y^2 < 0 \\ x + y^2 > 0 \end{cases}$$

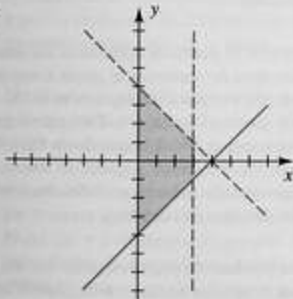
29



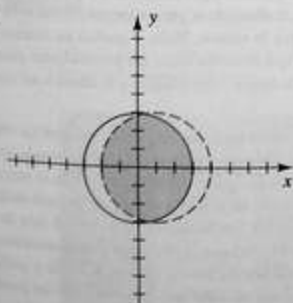
30



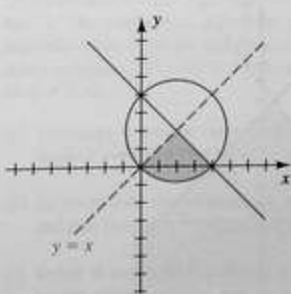
27



28

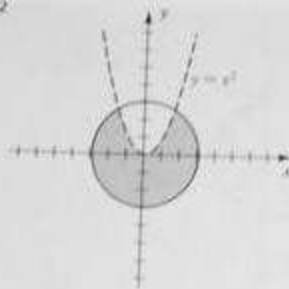


31

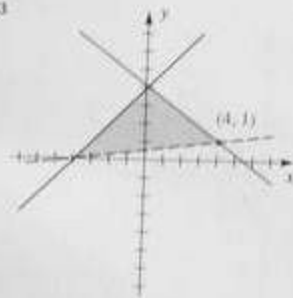


Ejercicios 27 al 34: encuentra el sistema de desigualdades cuya gráfica se incluye.

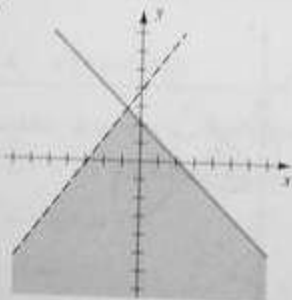
32



33



34



35. **Niveles de inventario** Una tienda vende dos marcas de televisores. La demanda de clientes indica que es necesario tener en existencia por lo menos el doble de aparatos de la marca A que de la B. También es necesario contar con por lo menos 10 aparatos de la marca B. Hay espacio para no más de 100 aparatos en la tienda. Encuentra y grafica un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para tener en existencia las dos marcas.

36. **Precios de boletos** Un auditorio tiene una capacidad de 600 asientos. En un evento próximo, los boletos tendrán un precio de \$8 para algunos asientos y \$5 para otros. Por lo menos 225 boletos han de tener un precio de \$5, y se desea una venta total de por lo menos \$3000. Encuentra y grafica un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para fijar el precio de los dos tipos de boletos.

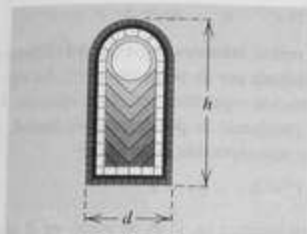
37. **Estrategia de inversión** Una mujer que tiene \$15 000 para invertir decide colocar al menos \$2000 en una inversión de alto rendimiento, pero de alto riesgo, y por lo menos el triple de esa cantidad en una inversión de bajo rendimiento y bajo riesgo. Halla y grafica un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para poner el dinero en las dos inversiones.

38. **Niveles de inventario** El gerente de la librería de una universidad maneja dos tipos de cuadernos; el precio al mayorista del primero es de 55¢ y el precio del segundo es de 85¢. La cantidad máxima que puede gastar es de \$600 y desea tener en inventario por lo menos 300 de la variedad de 85¢ y 400 de la variedad de 55¢. Encuentra y grafica un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades de tener en inventario los dos tipos de cuadernos.

39. **Dimensiones de una lata** Se piensa construir una lata de aerosol en forma de cilindro circular con un pequeño cono en la parte superior. La altura total de la lata, incluida la parte superior cónica, no debe ser mayor de 9 pulgadas y el cilindro deberá contener por lo menos el 75% del volumen total. Además, la altura de la parte superior cónica debe ser de 1 pulgada por lo menos. Halla y grafica un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para la relación entre la altura y del cilindro y la altura x del cono.

40. **Dimensiones de una ventana** Se piensa construir un vitral en forma de rectángulo con una semicircunferencia en la parte superior (ve la figura). La altura total h de la ventana no puede ser mayor de 6 pies y el área de la parte rectangular tendrá que ser por lo menos el doble del área de la semicircunferencia. Además, el diámetro d de la semicircunferencia debe ser por lo menos de 2 pies. Halla y grafica un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para la base y la altura de la parte rectangular.

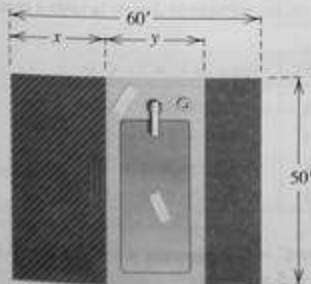
Ejercicio 40



41. Ubicación de una planta electrogeneradora. Se va a construir una planta de energía nuclear para atender las necesidades de electricidad de las ciudades A y B. La ciudad B está 100 millas al este de A. El estado ha prometido que la planta estará por lo menos a 60 millas de cada ciudad. Sin embargo, no es posible ubicar la planta al sur de ninguna de dichas ciudades a causa de lo accidentado del terreno y tendrá que ser construida a menos de 100 millas tanto de A como de B. Si suponemos que A esté en el origen, halla y grafica un sistema de desigualdades que describa todas las posibles ubicaciones de la planta.

42. Distribución de espacio. Un hombre tiene un patio rectangular que mide 50 pies de ancho y 60 pies de fondo, y piensa construir una alberca y una zona de juegos, como se aprecia en la figura, donde $y \geq 10$; puede gastar \$10 500 como máximo en el proyecto. La zona de juegos ha de ser por lo menos igual que la piscina; ésta tendrá un costo de \$5 por pie² y la de juegos, \$3 por pie². Encuentra y grafica un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para determinar el ancho de la piscina y de la zona de juegos.

Ejercicio 42



Ejercicios 43 y 44: grafica la desigualdad.

43. $64y^3 - x^3 \leq e^{1/2}$

44. $e^{3y} - e^{-2} \geq x^4$

Ejercicios 45 al 48: grafica el sistema de desigualdades.

45.
$$\begin{cases} 5^{x+y} \geq x^4 + x^2 + 1 \\ x + 3y \geq x^{3/2} \end{cases}$$

46.
$$\begin{cases} x^4 + y^4 < 2^x \\ \ln(x^2 + 1) < y^3 \end{cases}$$

47.
$$\begin{cases} x^4 - 2x < 3y \\ x + 2y < x^3 - 5 \end{cases}$$

48.
$$\begin{cases} e^x + x^2 \leq 2^{x+2} \\ 2^{x+2} \leq x^3 2^y \\ x > 0 \end{cases}$$

49. Crecimiento del bosque. La temperatura y la lluvia tienen un efecto importante en la vida de las plantas. Si el promedio de la temperatura anual o de la cantidad de lluvia son demasiado bajos, ni árboles ni bosques crecerán; sólo habrá pastizales y desiertos. La relación entre el promedio de temperatura anual T (en °F) y el promedio anual de lluvia P (en pulg) es una desigualdad lineal. Para que en una región haya bosques, T y P deben satisfacer la desigualdad $29T - 39P < 450$, donde $33 \leq T \leq 80$ y $13 \leq P \leq 45$.

(a) Determina si pueden crecer bosques en Winnipeg, donde $T = 37$ °F y $P = 21.2$ pulg.

(b) Grafica la desigualdad, con T en el eje horizontal y P en el eje vertical, en la pantalla de $[33, 80, 5]$ por $[0, 50, 5]$.

(c) Identifica la región de la gráfica que representa dónde pueden crecer bosques.

50. Crecimiento de pastizales. Consulta el ejercicio 49. Si el promedio de precipitación anual P (en pulg) es demasiado bajo, o el promedio de temperatura anual T (en °F) es demasiado alto, bosques y pastizales se convierten en desiertos. Las condiciones necesarias para que crezcan pastizales están dadas por una desigualdad lineal. T y P deben satisfacer $22P - 3T > 33$, donde $33 \leq T \leq 80$ y $13 \leq P \leq 45$.

(a) Determina si pueden crecer pastizales en Phoenix, donde $T = 70$ °F y $P = 7.8$ pulg.

(b) En los mismos ejes coordenados, grafica la desigualdad para bosques y la desigualdad para pastizales.

(c) Define la región de la gráfica que representa dónde pueden existir pastizales, pero no bosques.

9.4

Programación lineal

Si un sistema de desigualdades contiene sólo desigualdades lineales de la forma

$$ax + by \leq c \quad \text{o} \quad ax + by \geq c,$$

donde a , b y c son números reales, entonces la gráfica del sistema puede ser una región R del plano xy limitada por un polígono, quizá del tipo ilustrado en la figura 1 (para una ilustración específica, estudia el ejemplo 4 y la figura 7, de la sección 9.3). En problemas de **programación lineal**, consideramos tales sistemas junto con una expresión de la forma

$$C = Ax + By + K,$$

donde A , B y K son números reales y (x, y) es un punto en R (esto es, una solución del sistema). Puesto que para cada (x, y) obtenemos un valor específico de C , a C la llamamos *función de dos variables* x y y . En programación lineal, se le denomina **función objetivo**, y las desigualdades del sistema se conocen como **restricciones** sobre C . Las soluciones del sistema, es decir, los pares (x, y) correspondientes a los puntos de R , son las **soluciones factibles** del problema.

En aplicaciones prácticas de negocios, el valor de C puede representar costo, utilidad, pérdida o un recurso físico, y la meta es hallar un punto específico (x, y) de R en que C tome su valor máximo o mínimo. Los métodos de programación lineal simplifican en gran medida la localización de este punto. En particular, es posible demostrar que **los valores máximos y mínimos de C se presentan en un vértice de R** . Esto se usa en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Búsqueda de valores máximo y mínimo de una función objetivo

Encuentra los valores máximo y mínimo de la función objetivo dada por $C = 7x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - 2y \geq -10 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN La gráfica del sistema de desigualdades determinada por las restricciones es la región R acotada por el cuadrilátero de la figura 2. Del análisis anterior, los valores máximo y mínimo de C deben presentarse en un vértice de R . Los valores en los vértices se dan en la tabla a continuación.

Vértice	Valor de $C = 7x + 3y$
$(0, 0)$	$7(0) + 3(0) = 0$
$(0, 5)$	$7(0) + 3(5) = 15$
$(5, 0)$	$7(5) + 3(0) = 35$
$(2, 6)$	$7(2) + 3(6) = 32$

Por lo tanto, el valor mínimo $C = 0$ se presenta si $x = 0$ y $y = 0$, y el valor máximo $C = 35$, se da si $x = 5$ y $y = 0$.

Figura 1

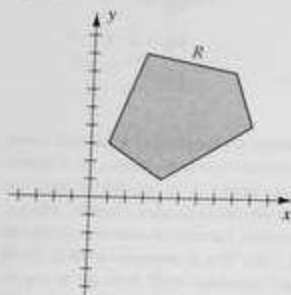


Figura 2

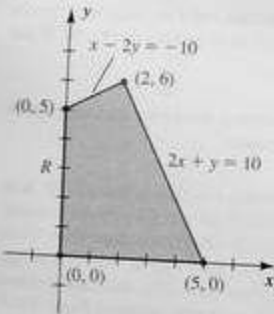
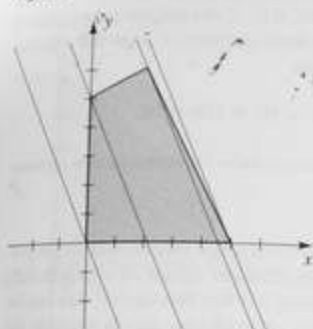


figura 3



En el ejemplo anterior, se dice que el valor máximo de C en R se presenta en el vértice $(5, 0)$. Para verificar esto, despeja y de la ecuación $C = 7x + 3y$, para obtener

$$y = -\frac{7}{3}x + \frac{C}{3}.$$

Para cada C , la gráfica de esta ecuación es una recta con pendiente $-\frac{7}{3}$ e intersección y de $C/3$ (figura 3). A fin de hallar el valor máximo de C , basta establecer cuál de las rectas que corta la región posee la máxima intersección en y de $C/3$. Según la figura 3, la recta requerida pasa por $(5, 0)$. Del mismo modo, para el mínimo valor de C , hallamos la recta $y = (-7/3)x + (C/3)$ que corta la región y tiene la mínima intersección en y . Ésta es la recta que pasa por $(0, 0)$.

Un problema que se puede expresar como en el ejemplo 1 se llama **problema de programación lineal**. Para resolver problemas de este tipo podemos usar estas guías.

Guías para resolver un problema de programación lineal

- 1 Trazar la región R determinada por el sistema de restricciones.
- 2 Encontrar los vértices de R .
- 3 Calcular el valor de la función objetivo C en cada vértice de R .
- 4 Seleccionar los valores máximo o mínimo de C en la guía 3.

En el ejemplo que viene encontramos un problema de programación lineal en que el valor mínimo de la función objetivo se presenta en más de un punto.

EJEMPLO 2 Solución de un problema de programación lineal

Encuentra el valor mínimo de la función objetivo $C = 2x + 6y$ sujeta a estas restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 12 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Seguiremos las guías.

Guía 1 La gráfica del sistema de desigualdades determinada por las restricciones es la región R no acotada de la figura 4.

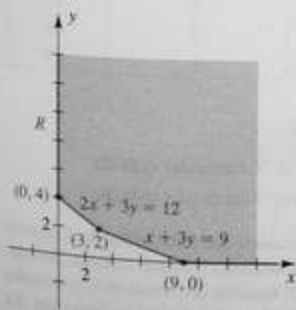
Guía 2 Los vértices de R son $(0, 4)$, $(3, 2)$ y $(9, 0)$, según se exhibe en la figura.

Guía 3 El valor de C de cada vértice de R aparece en la siguiente tabla.

Vértice	Valor de $C = 2x + 6y$
$(0, 4)$	$2(0) + 6(4) = 24$
$(3, 2)$	$2(3) + 6(2) = 18$
$(9, 0)$	$2(9) + 6(0) = 18$

(continúa)

Figura 4



Guía 4 La tabla de la guía 3 muestra que el valor mínimo de C , 18, se da en dos vértices, $(3, 2)$ y $(9, 0)$. Además, si (x, y) es cualquier punto sobre el segmento de recta que enlaza estos puntos, entonces (x, y) es una solución de la ecuación $x + 3y = 9$, por lo tanto

$$C = 2x + 6y = 2(x + 3y) = 2(9) = 18.$$

Así, el valor mínimo $C = 18$ se presenta en todos los puntos de este segmento de recta.

En los próximos dos ejemplos consideramos aplicaciones de programación lineal. En estos problemas es necesario utilizar información dada para formular el sistema de restricciones y la función objetivo. Una vez logrado esto, podemos aplicar las guías como hicimos para la solución del ejemplo 2.



EJEMPLO 3 Aumento al máximo de las utilidades

Una compañía fabrica dos productos, X y Y. Para cada producto, es necesario usar tres máquinas diferentes, A, B y C. En la fabricación de una unidad del producto X, hay que usar tres horas la máquina A, una la B y una la C. Para fabricar una unidad del producto Y se requieren dos horas en la A, dos horas en la B y una en la C. La utilidad unitaria del producto X es de \$500 y del producto Y, \$350. Podemos disponer de la máquina A las 24 horas del día, pero sólo 16 de la B y 9 de la C. Supón que las máquinas están disponibles cuando se necesitan (sujetas a las restricciones de horario total indicado), e indica la cantidad de unidades de cada producto que deben fabricarse cada día, para aumentar al máximo las utilidades.

SOLUCIÓN La tabla resume los datos dados en el enunciado del problema.

Máquina	Horas requeridas para una unidad de X	Horas requeridas para una unidad de Y	Horas disponibles
A	3	2	24
B	1	2	16
C	1	1	9

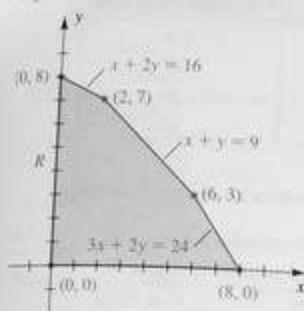
Introduzcamos las variables siguientes:

x = cantidad de unidades de X fabricadas cada día

y = cantidad de unidades de Y fabricadas cada día

Con el primer renglón de la tabla, observamos que cada unidad de X requiere tres horas en la máquina A, por lo que x unidades precisan $3x$ horas. Del mismo modo, puesto que cada unidad de Y necesita dos horas en A, y unidades requieren $2y$ horas. En consecuencia, la cantidad total de horas por día

Figura 5



que la máquina A debe utilizarse es $3x + 2y$. Esto, además de que A se puede usar durante 24 horas al día, nos da la primera restricción del sistema de desigualdades: $3x + 2y \leq 24$. La segunda y tercera restricciones se obtienen con el mismo tipo de razonamiento para los renglones 2 y 3 de la tabla. Las últimas dos, $x \geq 0$ y $y \geq 0$, son ciertas porque x y y no pueden ser negativas.

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 24 \\ x + 2y \leq 16 \\ x + y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La gráfica de este sistema es la región R de la figura 5.

Puesto que la producción de cada unidad del producto X rinde una utilidad de \$500 y cada unidad del producto Y, \$350, la utilidad P que se obtiene al producir x unidades de X junto con y unidades de Y es

$$P = 500x + 350y.$$

Esta es la función objetivo del problema. El valor máximo de P se debe presentar en uno de los vértices de R de la figura 5. Los valores de P en estos vértices aparecen en la tabla que sigue.

Vértice	Valor de $P = 500x + 350y$
(0, 0)	$500(0) + 350(0) = 0$
(0, 8)	$500(0) + 350(8) = 2800$
(8, 0)	$500(8) + 350(0) = 4000$
(2, 7)	$500(2) + 350(7) = 3450$
(6, 3)	$500(6) + 350(3) = 4050$

En la tabla vemos que habrá una utilidad máxima de \$4050 para una producción diaria de seis unidades del producto X y tres del producto Y.

En el ejemplo 3 se ilustra la maximización de las utilidades; el que sigue demuestra la forma de usar la programación lineal para reducir al mínimo el costo en una situación determinada.



EJEMPLO 4 Reducción del costo al mínimo

Un distribuidor de reproductores de discos compactos tiene dos almacenes, W_1 y W_2 . Hay 80 unidades almacenadas en W_1 y 70 en W_2 . Dos clientes, A y B, solicitan 35 y 60 unidades, respectivamente. El costo de envío desde cada almacén a A y B está determinado por la tabla a continuación. ¿Cómo se puede despachar el pedido para reducir al mínimo el costo total de embarque?

(continúa)

Almacén	Cliente	Costo unitario de envío
W_1	A	\$ 8
W_1	B	12
W_2	A	10
W_2	B	13

SOLUCIÓN Comencemos por introducir las siguientes variables:

x = cantidad de unidades enviadas a A desde W_1

y = cantidad de unidades enviadas a B desde W_1

Dado que A solicitó 35 unidades y B pidió 60, debemos tener

$35 - x$ = número de unidades enviadas a A desde W_2

$60 - y$ = número de unidades enviadas a B desde W_2

Nuestro objetivo es hallar los valores de x y y que minimicen el costo total de embarque.

La cantidad de unidades que se envíe desde W_1 no puede ser mayor que 80, y el embarque desde W_2 no puede rebasar las 70. Expresamos estos datos en términos de desigualdades y resulta

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ (35 - x) + (60 - y) \leq 70 \end{cases}$$

Al simplificar, obtenemos las primeras dos restricciones del próximo sistema. Las últimas dos restricciones son verdaderas porque los máximos valores de x y y son 35 y 60, respectivamente.

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ x + y \geq 25 \\ 0 \leq x \leq 35 \\ 0 \leq y \leq 60 \end{cases}$$

La gráfica de este sistema es la región R (figura 6).

Denotamos con C el costo total (en dólares) de enviar los reproductores de CD a los clientes A y B. Según la tabla de costos de envío, vemos que esto es cierto:

Costo de enviar 35 unidades a A = $8x + 10(35 - x)$

Costo de enviar 60 unidades a B = $12y + 13(60 - y)$

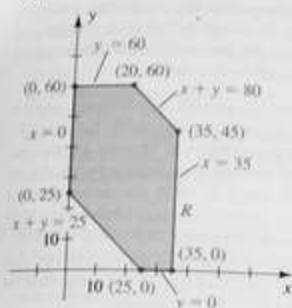
Por lo tanto, el costo total es

$$C = 8x + 10(35 - x) + 12y + 13(60 - y).$$

Al simplificar, resulta la siguiente función objetivo:

$$C = 1130 - 2x - y$$

Figura 6



Para hallar el valor mínimo de C en R , necesitamos comprobar sólo los vértices mostrados en la figura 6, igual que en esta tabla.

Vértice	Valor de $C = 1130 - 2x - y$
(0, 25)	$1130 - 2(0) - 25 = 1105$
(0, 60)	$1130 - 2(0) - 60 = 1070$
(20, 60)	$1130 - 2(20) - 60 = 1030$
(35, 45)	$1130 - 2(35) - 45 = 1015$
(35, 0)	$1130 - 2(35) - 0 = 1060$
(25, 0)	$1130 - 2(25) - 0 = 1080$

Según la tabla, el costo mínimo de embarque, \$1015, se da si $x = 35$ y $y = 45$. Esto significa que el distribuidor ha de enviar todos los reproductores de CD a A desde W_1 y ninguno de W_2 . Además, debe enviar 45 unidades a B desde W_1 y 15 unidades desde W_2 . (Advertirás que el máximo costo de envío se presenta si $x = 0$ y $y = 25$; es decir, si las 35 unidades se envían a A desde W_2 y si B recibe 25 unidades desde W_1 y 35 unidades desde W_2 .)

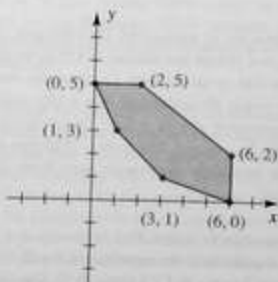
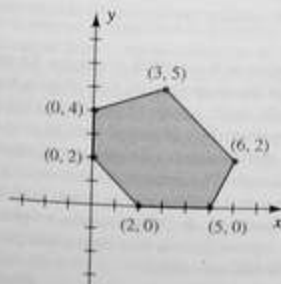
Los ejemplos de esta sección son problemas elementales de programación lineal con dos variables, que se pueden resolver por métodos básicos. Los problemas más complicados con muchas variables, que se presentan en la práctica, requieren técnicas de matrices que se estudiarán después, adaptadas para su solución por computadora.

9.4 Ejercicios

Ejercicios 1 y 2: encuentra los valores máximo y mínimo de la función objetivo C en la región de la figura.

1. $C = 3x + 2y + 5$

2. $C = 2x + 7y + 3$



Ejercicios 3 y 4: traza la región R definida por las restricciones dadas y marca sus vértices. Encuentra el valor máximo de C en R .

$$3. \begin{aligned} C &= 3x + y, & x &\geq 0, y \geq 0, \\ 3x - 4y &\geq -12, & 3x + 2y &\leq 24, & 3x - y &\leq 15. \end{aligned}$$

$$4. \begin{aligned} C &= 4x - 2y, \\ x - 2y &\geq -8, & 7x - 2y &\leq 28, & x + y &\leq 4. \end{aligned}$$

Ejercicios 5 y 6: traza la región R definida por las restricciones dadas y marca sus vértices. Halla el valor mínimo de C en R .

$$5. \begin{aligned} C &= 3x + 6y, & x &\geq 0, y \geq 0, \\ 2x + 3y &\geq 12, & 2x + 5y &\leq 16. \end{aligned}$$

$$6. \begin{aligned} C &= 6x + y, & y &\geq 0, \\ 3x + y &\geq 3, & x + 5y &\leq 15, & 2x + y &\leq 12. \end{aligned}$$

Ejercicios 7 y 8: traza la región R determinada por las restricciones dadas y marca sus vértices. Describe el conjunto de puntos para los cuales C es un máximo en R .

$$7. \begin{aligned} C &= 2x + 4y, & x &\geq 0, y \geq 0, \\ x - 2y &\geq -8, & x + y &\leq 6, & 3x + 2y &\leq 24. \end{aligned}$$

$$8. \begin{aligned} C &= 6x + 3y, & x &\geq 2, y \geq 1, \\ 2x + 3y &\leq 19, & x + 0.5y &\leq 6.5. \end{aligned}$$

9 Programación de producción: Un fabricante de raquetas de tenis obtiene una utilidad de \$15 por cada raqueta de tamaño extra y \$8 por una estándar. Para satisfacer la demanda de distribuidores, la producción diaria del modelo estándar debe ser entre 30 y 80, y entre 10 y 30 para el modelo extra. A fin de conservar la máxima calidad, el total de raquetas producidas no debe ser mayor que 80 docenas. ¿Cuántas de cada tipo deben fabricarse cada día para llevar al máximo la utilidad?

10 Programación de producción: Un fabricante de radios de banda civil obtiene una utilidad de \$25 en un modelo de lujo y de \$30 en un estándar. La compañía desea producir por lo menos 80 modelos de lujo y 100 estándar por día. Para conservar alta la calidad, la producción diaria no debe ser mayor que 200 radios. ¿Cuántos de cada tipo han de producirse diariamente para llevar al máximo la utilidad?

11 Minimización de costos: Dos sustancias, S y T , contienen cada una dos tipos de ingredientes, I y G . Una libra de S contiene 2 onzas de I y 4 onzas de G . Una libra de T con-

tiene 2 onzas de I y 6 onzas de G . Un fabricante quiere combinarlos y obtener una mezcla con al menos 9 onzas de I y 20 onzas de G . Si el costo de S es de \$3 por libra y el costo de T es de \$4 por libra, ¿cuánto de cada sustancia debe usar para minimizar el costo?

12 Maximización de la utilidad bruta: Una compañía papetera elabora dos tipos de cuaderno: uno de lujo con separadores por materia, que se vende en \$1.25, y uno estándar, que se vende en \$0.90. El costo de producción es de \$1.00 por cada cuaderno de lujo y de \$0.75 por uno estándar. La compañía tiene las instalaciones para fabricar entre 2000 y 3000 cuadernos de lujo y entre 3000 y 6000 estándares, pero no más de 7000 en total. ¿Cuántos cuadernos de cada tipo debe fabricar para maximizar la diferencia entre los precios de venta y el costo de producción?

13 Minimización de los costos de embarque: Consulta el ejemplo 4 de esta sección. Si los costos de embarque son \$12 por unidad desde W_1 a A , \$10 por unidad desde W_1 a B , \$16 por unidad desde W_2 a A y \$12 por unidad desde W_2 a B , determina cómo despachar el pedido para minimizar los costos de envío.

14 Minimización de costos: Una compañía vendedora de café compra lotes de grano de café mezclados y luego los clasifica en café de primera calidad, estándar y sin uso. La compañía necesita por lo menos 280 ton de café de primera calidad y 200 de café estándar. Puede comprar granos de café sin clasificar (en cualquier cantidad) a dos proveedores, cuyas muestras presentan los siguientes porcentajes de grano de primera, estándar y sin uso:

Proveedor	De primera	Estándar	Sin uso
A	20%	50%	30%
B	40%	20%	40%

Si el proveedor A vende a \$125 la tonelada y el B a \$200 la tonelada, ¿cuánto debe comprar la compañía a cada uno a fin de satisfacer sus necesidades al costo mínimo?

15 Planeación de la superficie de cosecha: Un agricultor que produce forraje para ganado, tiene 90 acres disponibles para plantar alfalfa y maíz. El costo de la semilla por acre es de \$4 para alfalfa y \$6 para el maíz. El costo total de mano de obra ascenderá a \$20 por acre de alfalfa y \$10 por acre de maíz. El ingreso esperado es de \$110 por acre de alfalfa y de \$150 por acre de maíz. Si el agricultor no desea gastar más de \$480 en semillas y \$1400 de mano de obra, ¿cuántos acres de cada especie debe plantar para obtener la máxima utilidad?

16. Programación de maquinaria Una pequeña empresa fabrica estantes y escritorios para microcomputadoras. Por cada producto es necesario usar una sierra y una canteadora eléctrica. Para fabricar cada estante, la sierra debe usarse media hora y la canteadora una hora. Un escritorio requiere el uso de cada máquina durante dos horas. Las utilidades son \$20 por estante y de \$50 por escritorio. Si la sierra se puede usar durante 8 h diarias y la canteadora durante 12, ¿cuántos estantes y escritorios deben fabricarse diariamente para aumentar al máximo la utilidad?

17. Reducir al mínimo el costo de una mezcla Tres sustancias, X, Y y Z, contienen cuatro ingredientes, A, B, C y D. El porcentaje de cada ingrediente y el costo en centavos por onza de cada sustancia se incluyen en la tabla a continuación.

Sustancia	Ingredientes				Costo por onza
	A	B	C	D	
X	20%	10%	25%	45%	25¢
Y	20%	40%	15%	25%	35¢
Z	10%	20%	25%	45%	50¢

Si el costo debe ser mínimo, ¿cuántas onzas de cada sustancia hay que combinar para obtener una mezcla de 20 onzas con al menos 14% de A, 16% de B y 20% de C? ¿Cuál combinación maximizaría el costo?

18. Maximización de la utilidad Un hombre planea abrir un puesto en una feria que dura sólo un día y vender bolsas de cacahuates y de dulces. Tiene \$400 disponibles para comprar su existencia, que costará \$40 por bolsa de cacahuates y \$80 por bolsa de dulces. Piensa vender los cacahuates en \$1 y los dulces en \$1.60 por bolsa. Su puesto puede contener hasta 500 bolsas de cacahuates y 400 de dulces. Por su experiencia, sabe que no venderá más de 700 bolsas. Encuentra el número respectivo de bolsas que el vendedor debe tener disponibles para maximizar su utilidad. ¿Cuál es la utilidad máxima?

19. Aumentar al máximo la capacidad de pasajeros Una pequeña comunidad desea comprar camionetas de reparto y autobuses usados para su sistema de transporte público. La comunidad no puede gastar más de \$100 000 en los vehículos ni más de \$500 al mes por mantenimiento. Las camionetas de reparto se venden en \$10 000 cada una y tienen un costo de mantenimiento promedio de \$100 al mes. Los cálculos de costo correspondientes por autobús son de \$20 000 y de \$75 por mes. Si cada camioneta puede llevar 15 pasajeros y cada autobús tiene cupo para 25, determina la cantidad de camionetas y autobuses que hay que comprar para aumentar al máximo la capacidad de pasajeros del sistema.

20. Reducción al mínimo del costo de combustible Consulta el ejercicio 19. El costo mensual del combustible (con base en 5000 millas de servicio) es de \$550 por camioneta y \$850 por autobús. Encuentra la cantidad de camionetas y autobuses que deben comprarse a fin de minimizar los costos mensuales de combustible, si la capacidad de pasajeros del sistema debe ser al menos 75.

21. Poblar una granja piscícola Un piscicultor desea comprar no más de 5000 truchas y lobinas jóvenes de un criadero de peces y alimentarlos con una dieta especial para el año siguiente. El costo de alimento será de \$0.50 por trucha y \$0.75 por lobina, y el costo total no debe pasar de \$3000. Al término del año, una trucha normal pesará 3 lb y una lobina 4 lb. ¿Cuántos peces de cada tipo debe llevar al estanque para aumentar al máximo el número total de libras de pescado al cabo del año?

22. Planeación de dietas El dietista de un hospital desea preparar un platillo de maíz y calabacitas que proporcionarán por lo menos 3 g de proteínas y no costará más de 36 centavos cada porción. Una onza de maíz con crema contiene $\frac{1}{2}$ g de proteínas y cuesta \$4. Una onza de calabacitas contiene $\frac{1}{4}$ g de proteínas y cuesta \$3. Para tener más sabor, debe haber al menos 2 onzas de maíz y como mínimo la misma cantidad de calabacitas que de maíz. Es importante mantener el número total de onzas de una porción tan bajo como sea posible. Encuentra la combinación de maíz y calabacitas que reduzcan al mínimo la cantidad de ingredientes usados por cada porción.

23. Planeación de unidades de almacenamiento Una contratista tiene un edificio grande, que desea convertir en una serie de bodegas para renta. Ella construirá unidades básicas de 8 × 10 pies y unidades de lujo de 12 × 10 pies con estantes extra y un armario para ropa. Las consideraciones de mercado dictan que debe haber al menos el doble de unidades básicas que de lujo, y que las unidades básicas se renten en \$40 al mes y las de lujo en \$75. Se dispone de un máximo de 7200 pies² de espacio para bodegas, y no es posible gastar más de \$30 000 en la construcción. Si cada unidad básica tendrá un costo de \$300 y las de lujo llegarán a \$600, ¿cuántas unidades de cada tipo deberá construir para aumentar al máximo su ingreso mensual?

24. Dieta de un alce Un alce que se alimenta básicamente de hojas de árboles y plantas acuáticas puede digerir no más de 33 kg al día. Aun cuando las plantas acuáticas tienen un contenido energético más bajo, el animal tiene que comer por lo menos 17 kg para satisfacer sus necesidades de sodio. Un kilogramo de hojas contiene cuatro veces más energía que uno de plantas acuáticas. Encuentra la combinación de alimentos para aumentar al máximo la ingesta diaria de energía.

9.5

Sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables

Para sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables, podemos usar el método de sustitución de la sección 9.1 o el método de eliminación que se analizó en la sección 9.2. Este último es la técnica más breve y fácil para hallar soluciones. Además, lleva a las matrices, que se estudian en esta sección.

EJEMPLO 1 Uso del método de eliminación para resolver un sistema de ecuaciones lineales

Resuelve el sistema.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 5y - 10z = -5 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{suma } -2 \text{ veces la primera} \\ \text{ecuación a la segunda} \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 5y - 10z = -5 \\ -2y + 8z = 10 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{suma } 3 \text{ veces la primera ecuación} \\ \text{a la tercera} \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ y - 4z = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{multiplica por } \frac{1}{5} \text{ la segunda ecuación} \\ \text{y la tercera ecuación por } -\frac{1}{5} \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ -2z = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{suma } -1 \text{ vez la segunda ecuación} \\ \text{a la tercera} \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{multiplica por } -\frac{1}{2} \text{ la tercera ecuación} \end{array}$$

Las soluciones del último sistema son fáciles de determinar por **sustitución hacia atrás**. A partir de la tercera ecuación vemos que $z = 2$. Al sustituir z con 2 en la segunda ecuación, $y - 2z = -1$, obtenemos $y = 3$. Por último, encontramos el valor de x al sustituir $y = 3$ y $z = 2$ en la primera ecuación $x - 2y + 3z = 4$, con lo cual $x = 4$. Así, hay una solución, $(4, 3, 2)$.

Cualquier sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables tiene una *solución única*, una *infinitud de soluciones* o *no tiene solución*. En el caso de dos ecuaciones con dos variables, la terminología que se utiliza para

describir estos sistemas es *consistente*, *dependiente* y *consistente o inconsistente*, respectivamente.

Si analizamos el método de solución del ejemplo 1, vemos que los símbolos usados para las variables carecen de importancia. Debemos tomar en cuenta los *coeficientes* de las variables. Así pues, si utilizamos símbolos distintos en las variables (por ejemplo r , s y t), obtenemos el sistema

$$\begin{cases} r - 2s + 3t = 4 \\ 2r + s - 4t = 3 \\ -3r + 4s - t = -2 \end{cases}$$

Luego, el método de eliminación puede continuar su curso igual que en el ejemplo. Puesto que esto es verdadero, es posible simplificar el proceso. En particular, introducimos un esquema para seguir los coeficientes en forma tal que no haya necesidad de escribir las variables. Con referencia al sistema anterior, primero comprobamos que las variables aparezcan en el mismo orden en cada ecuación y que los términos sin variables estén a la derecha de los signos de igualdad. Después, anotamos los números que intervienen en las ecuaciones de esta forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Un arreglo de números de este tipo se llama **matriz**. Los **renglones** de la matriz son los números que aparecen uno a continuación del otro *en sentido horizontal*:

$$\begin{array}{cccccl} 1 & -2 & 3 & 4 & \text{primer renglón, } R_1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 & \text{segundo renglón, } R_2 \\ -3 & 4 & -1 & -2 & \text{tercer renglón, } R_3 \end{array}$$

Las **columnas** de la matriz son los números que aparecen uno junto del otro *en sentido vertical*:

primera columna, C_1 ; segunda columna, C_2 ; tercera columna, C_3 ; cuarta columna, C_4

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}$$

La matriz que se obtiene a partir del sistema de ecuaciones lineales, del modo anterior, es la **matriz del sistema**. Si borramos la última columna, la ordenación restante es la **matriz de coeficientes**. En vista de que podemos obtener la matriz del sistema a partir de la matriz de coeficientes agregando una columna, le decimos **matriz de coeficientes aumentada** o simplemente **matriz aumentada**. Después, cuando usemos matrices para hallar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, introduciremos un segmento de línea vertical en la matriz aumentada, a fin de indicar dónde aparecerán los signos de igualdad en el sistema de ecuaciones correspondiente, igual que en la siguiente ilustración:

ILUSTRACIÓN Matriz de coeficientes y matriz aumentada

$$\begin{array}{c} \text{Sistema} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Matriz de} \\ \text{coeficientes} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Matriz} \\ \text{aumentada} \end{array}$$

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{array} \right. \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

Antes de estudiar un método de matrices para resolver un sistema de ecuaciones lineales, daremos una definición general de matriz. Usaremos una **notación de doble subíndice**; denotando por a_{ij} el número que aparece en el renglón i y la columna j . El **subíndice de renglón** de a_{ij} es i , y el **subíndice de la columna** es j .

Definición de matriz

Sean m y n enteros positivos. Una **matriz $m \times n$** es un arreglo de la forma siguiente, donde cada a_{ij} es un número real.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La notación $m \times n$ de la definición se lee “ m por n ”. A menudo decimos que la matriz es $m \times n$ y a esta expresión la llamamos **tamaño** de la matriz. Es posible considerar matrices en que los símbolos a_{ij} representen números complejos, polinomios u otros objetos matemáticos. Los renglones y columnas de una matriz se definen como antes; por lo tanto, la matriz de la definición tiene m renglones y n columnas. Observemos que a_{23} está en el renglón 2 y la columna 3 y a_{32} en el renglón 3 y la columna 2. Cada a_{ij} es un **elemento de la matriz**. Si $m = n$, la matriz es una **matriz cuadrada de orden n** y los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ son los **elementos de la diagonal principal**.

ILUSTRACIÓN $m \times n$ Matrices

$$\begin{array}{c} 2 \times 3 \\ \equiv \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \times 2 \\ \equiv \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \times 3 \\ \equiv [3 \quad 1 \quad -2] \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \times 2 \\ \equiv \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \times 1 \\ \equiv \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Con objeto de hallar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, comenzamos con la matriz aumentada. Si una variable no aparece en una ecuación, suponemos que el coeficiente es cero. Luego trabajamos con los renglones de la matriz *como si se tratara de ecuaciones*. Los únicos elementos que faltan son los símbolos para las variables, los signos de suma o resta que se utilizan entre términos y los signos de igualdad. Basta recordar

que los números de la primera columna son los coeficientes de la primera variable; los de la segunda columna, los coeficientes de la segunda variable, etc. Las reglas para transformar una matriz se formulan de modo que siempre produzcan una matriz de un sistema de ecuaciones equivalente.

El teorema que sigue es otra forma de expresar, en términos de matrices, el teorema sobre sistemas equivalentes de la sección 9.2. En el inciso (2) del teorema, la frase *un renglón se multiplica por una constante diferente de cero* significa que cada elemento del renglón se multiplica por la constante. Para sumar dos renglones de una matriz, como en el inciso (3), sumamos elementos correspondientes de cada renglón.

Teorema sobre transformaciones de renglones de matrices

Dada una matriz de un sistema de ecuaciones lineales, resulta una matriz de un sistema equivalente si:

- (1) Se intercambian dos renglones.
- (2) Se multiplica o divide un renglón por una constante diferente de cero.
- (3) Un múltiplo constante de un renglón se suma a otro renglón.

Los incisos (1), (2) y (3) del teorema son las **transformaciones elementales de renglón** de una matriz. Si se obtiene una matriz de otra por una o más transformaciones elementales de renglón, se dice que las dos matrices son **equivalentes**, o bien, con más precisión, **equivalentes por renglón**. Usaremos los símbolos de la tabla siguiente para denotar transformaciones elementales de renglón de una matriz, donde la flecha \rightarrow se lee "sustituye"; por lo tanto, para la transformación $kR_i \rightarrow R_i$, el múltiplo constante kR_i *sustituye a* R_i . Del mismo modo, para $kR_i + R_j \rightarrow R_j$, la suma $kR_i + R_j$ *sustituye a* R_j . Por conveniencia, escribiremos $(-1)R_i$ como $-R_i$.

Transformaciones elementales de renglón de una matriz

Símbolo	Significado
$R_i \leftrightarrow R_j$	Intercambiar renglones i y j
$kR_i \rightarrow R_i$	Multiplicar renglón i por k
$kR_i + R_j \rightarrow R_j$	Sumar k veces el renglón i al renglón j

En seguida trabajaremos el ejemplo 1 usando matrices. Debes comparar las dos soluciones, en vista de que se usan pasos análogos en cada caso.

EJEMPLO 2 Uso de matrices para resolver un sistema de ecuaciones lineales

Resuelve el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Comenzamos con la matriz del sistema; es decir, con la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

Luego, aplicamos transformaciones elementales de renglón a fin de obtener otra matriz (más sencilla) de un sistema de ecuaciones equivalente. Estas transformaciones corresponden a las manipulaciones usadas para las ecuaciones del ejemplo 1. Pondremos símbolos adecuados entre matrices equivalentes.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ 3R_1 + R_3 \rightarrow R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{sumar } -2R_1 \text{ a } R_2 \\ \text{sumar } 3R_1 \text{ a } R_3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{5}R_2 \rightarrow R_2 \\ -\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{multiplicar } R_2 \text{ por } \frac{1}{5} \\ \text{multiplicar } R_3 \text{ por } -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\xrightarrow{-R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right] \text{sumar } -R_2 \text{ a } R_3$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \text{multiplicar } R_3 \text{ por } -\frac{1}{2}$$

Con la matriz final regresamos al sistema de ecuaciones

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

que es equivalente al sistema original. La solución $x = 4$, $y = 3$ y $z = 2$ puede encontrar ahora por sustitución, igual que en el ejemplo 1.

La matriz final de la solución del ejemplo 2 está en **forma escalonada**. En general, una matriz está en forma escalonada si satisface estas condiciones.

**Forma escalonada
de una matriz**

- (1) El primer número diferente de cero de cada renglón, leyendo de izquierda a derecha, es 1.
- (2) La columna que contenga el primer número diferente de cero en cualquier renglón está a la izquierda de la columna con el primer número distinto de cero del renglón de abajo.
- (3) Los renglones formados enteramente de ceros pueden aparecer en la parte inferior de la matriz.

La siguiente es una ilustración de matrices en forma escalonada. Los símbolos a_{ij} representan números reales.

ILUSTRACIÓN Forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las guías siguientes sirven para hallar formas escalonadas.

Guías para hallar la forma escalonada de una matriz

- 1 Localiza la *primera* columna que contenga elementos diferentes de cero y aplica transformaciones elementales de renglón, a fin de obtener 1 en el primer renglón de esa columna.
- 2 Aplica transformaciones elementales de renglón del tipo $kR_i + R_j \rightarrow R_j$ para $j > 1$ y obtén 0 bajo el número 1 obtenido en la guía 1, en cada uno de los renglones restantes.
- 3 Haz caso omiso del *primer* renglón. Localiza la columna próxima que contenga elementos diferentes de cero y aplica transformaciones elementales de renglón con objeto de obtener el número 1 en el *segundo* renglón de esa columna.
- 4 Aplica transformaciones elementales del tipo $kR_i + R_j \rightarrow R_j$ para $j > 2$ y obtén 0 bajo el número 1 obtenido en la guía 3, en cada uno de los renglones restantes.
- 5 Haz caso omiso del *primero y segundo* renglones. Localiza la siguiente columna que contenga elementos diferentes de cero y repite el procedimiento.
- 6 Continúa el proceso hasta alcanzar la forma escalonada.

No todas las formas escalonadas contienen renglones formados sólo por ceros (observa el ejemplo 2).

Podemos usar operaciones elementales de renglón para transformar la matriz de cualquier sistema de ecuaciones lineales a forma escalonada. Después, ésta se puede usar para obtener un sistema de ecuaciones equivalente al sistema original. Las soluciones del sistema dado se encuentran por sustitución hacia atrás. En el ejemplo siguiente se ilustra esta técnica para un sistema de cuatro ecuaciones lineales.

EJEMPLO 3 Uso de la forma escalonada para resolver un sistema de ecuaciones lineales

Resuelve el sistema

$$\begin{cases} -2x + 3y + 4z &= -1 \\ x &- 2z + 2w &= 1 \\ y + z - w &= 0 \\ 3x + y - 2z - w &= 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Hemos dispuesto las ecuaciones de modo que aparezcan las mismas variables en columnas verticales. Comenzamos con la matriz aumentada y luego obtenemos una forma escalonada, según se describe en las guías.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} 2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -3R_1 + R_4 \rightarrow R_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \end{array} \right]$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} -3R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \\ -R_2 + R_4 \rightarrow R_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \end{array} \right]$$

$$R_3 + R_4 \rightarrow R_4 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$-\frac{1}{3}R_3 \rightarrow R_3 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

La matriz final está en forma escalonada y corresponde a este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2z + 2w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ z - \frac{7}{3}w = -\frac{1}{3} \\ w = 1 \end{cases}$$

Ahora usamos la sustitución hacia atrás para hallar la solución. A partir de la última ecuación vemos que $w = 1$. Sustituimos en la tercera ecuación $z - \frac{7}{3}w = -\frac{1}{3}$, y obtenemos


$$z - \frac{7}{3}(1) = -\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad z = \frac{6}{3} = 2.$$

Sustituimos $w = 1$ y $z = 2$ en la segunda ecuación, $y + z - w = 0$, con lo cual obtenemos

$$y + 2 - 1 = 0, \quad \text{o} \quad y = -1.$$

Por último, de la primera ecuación, $x - 2z + 2w = 1$, tenemos

$$x - 2(2) + 2(1) = 1 \quad \text{o} \quad x = 3.$$

Por lo tanto, el sistema tiene una solución, $x = 3$, $y = -1$, $z = 2$ y $w = 1$. 

Después de obtener una forma escalonada, a menudo conviene aplicar otras operaciones elementales de renglón del tipo $kR_i + R_j \rightarrow R_j$ de modo que también aparezca 0 *arriba* del primer 1 de cada renglón. La matriz resultante se conoce como **forma escalonada reducida**. A continuación, presentamos una ilustración de matrices en forma escalonada reducida. (Compáralas con las formas escalonadas de la página 677.)

ILUSTRACIÓN Forma escalonada reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} & 0 & a_{17} \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & a_{25} & 0 & a_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} & 0 & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 4 Uso de una forma escalonada reducida para resolver un sistema de ecuaciones lineales

Resuelve el sistema del ejemplo 3 mediante la forma escalonada reducida.

SOLUCIÓN Empezamos con la forma escalonada que obtuvimos en el ejemplo 3 y aplicamos otras operaciones de renglón.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -2R_4 + R_1 \rightarrow R_1 \\ R_4 + R_2 \rightarrow R_2 \\ \frac{7}{3}R_4 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 2R_3 + R_1 \rightarrow R_1 \\ -R_3 + R_2 \rightarrow R_2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones correspondiente a la forma escalonada reducida nos da la solución *sin* usar sustitución hacia atrás:

$$x = 3, \quad y = -1, \quad z = 2, \quad w = 1 \quad \text{img alt="pencil icon" data-bbox="865 900 885 915" style="float: right;"/>$$

La mayor parte de las calculadoras cuentan con una característica que proporciona la forma escalonada reducida de la matriz. Introduzcamos la matriz aumentada del sistema del ejemplo 3:

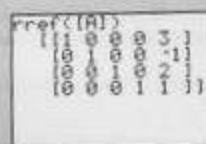
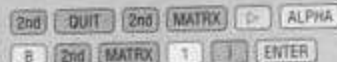
$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

TI-83 Plus

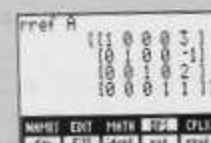
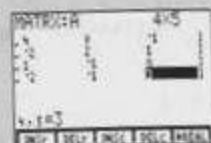
Teclas el tamaño y los elementos de la matriz A.



Encuentra la forma escalonada reducida por regiones.



TI-86



Observa que los resultados de la pantalla coinciden con la matriz final del ejemplo 4.

En ocasiones es necesario considerar sistemas en que el número de ecuaciones no sea el mismo que el número de variables. Son aplicables las mismas técnicas de matrices, como se expone en este ejemplo.



EJEMPLO 5 Solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables

Resuelve el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Principiamos con la matriz aumentada y luego hallamos una forma escalonada reducida. Hay diversas maneras de obtener el número 1 en

la primera posición del primer renglón. Por ejemplo, la transformación elemental de renglón $\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1$ o bien $-\frac{1}{2}R_2 + R_1 \rightarrow R_1$ lo lograría en un paso. Otra forma, donde no hay fracciones, se demuestra en los pasos siguientes:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{array} \right] R_1 \leftrightarrow R_2 & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right] \\ -R_2 + R_1 \rightarrow R_1 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right] \\ -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right] \\ -R_2 + R_1 \rightarrow R_1 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

La forma escalonada reducida es la matriz del sistema

$$\begin{cases} x - z = 5 \\ y + 2z = -3 \end{cases}$$

o bien, en forma equivalente,

$$\begin{cases} x = z + 5 \\ y = -2z - 3 \end{cases}$$

Hay una infinidad de soluciones a este sistema. Éstas se pueden encontrar asignando cualquier valor c a z y luego usando las últimas dos ecuaciones para expresar x y y en términos de c . Esto nos dará

$$x = c + 5, \quad y = -2c - 3, \quad z = c.$$

De este modo, las soluciones del sistema están formadas por todas las triadas ordenadas del tipo

$$(c + 5, -2c - 3, c),$$

para cualquier número real c . Las soluciones pueden comprobarse al sustituir $c + 5$ por x , $-2c - 3$ por y y c por z en las dos ecuaciones originales.

Podemos obtener cualquier número de soluciones para el sistema al reemplazar números reales específicos por c . Por ejemplo, si $c = 0$, obtenemos $(5, -3, 0)$; si $c = 2$, tenemos $(7, -7, 2)$; etcétera.

Hay otras formas de especificar la solución general. Por ejemplo, comenzando con $x = z + 5$ y $y = -2z - 3$, podemos hacer $z = d - 5$, para cualquier número real d . En este caso

$$\begin{aligned} x &= z + 5 = (d - 5) + 5 = d \\ y &= -2z - 3 = -2(d - 5) - 3 = -2d + 7, \end{aligned}$$

y las soluciones del sistema son de la forma

$$(d, -2d + 7, d - 5).$$

Estas triadas producen los mismos resultados que $(c + 5, -2c - 3, c)$. Por ejemplo, si $d = 5$, obtenemos $(5, -3, 0)$; si $d = 7$, tenemos $(7, -7, 2)$; etcétera.

Un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todos sus términos que no contienen variables, es decir, sus *términos constantes*, son iguales a cero. Un sistema de ecuaciones homogéneas siempre tiene la **solución trivial** que se obtiene al sustituir cero por cada variable. A veces existen soluciones que no son triviales. El procedimiento para hallar soluciones es el mismo que el utilizado en sistemas no homogéneos.

EJEMPLO 6 Solución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales

Resuelve el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Comenzamos con la matriz aumentada y encontramos una forma escalonada reducida:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ R_1 + R_3 \rightarrow R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2 \\ -\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\substack{R_2 + R_1 \rightarrow R_1 \\ -R_2 + R_3 \rightarrow R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

La forma escalonada reducida corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

o bien, lo que es equivalente,

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 3z \end{cases}$$

Al asignar cualquier valor c a z , obtenemos $x = -c$ y $y = 3c$. Las soluciones consisten en todas las triadas ordenadas del tipo $(-c, 3c, c)$ para cualquier número real c .

EJEMPLO 7 Un sistema homogéneo con sólo la solución trivial

Resuelve el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Comenzamos con la matriz aumentada y encontramos una forma escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -R_1 + R_3 \rightarrow R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2 \\ -\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{-R_2 + R_1 \rightarrow R_1 \\ -R_2 + R_3 \rightarrow R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-R_3 + R_1 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

La forma escalonada reducida es la matriz del sistema

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Así, la única solución para el sistema dado es la trivial (0, 0, 0).

En los dos ejemplos que siguen se incluyen aplicaciones.



EJEMPLO 8 Uso de un sistema de ecuaciones para hallar la utilidad máxima

Un fabricante de equipo eléctrico tiene la siguiente información acerca de la utilidad semanal por la producción y venta de un tipo de motor eléctrico:

Nivel x de producción	25	50	100
Utilidad $P(x)$ (dólares)	5250	7500	4500

(a) Determina a , b y c de modo que la gráfica de $P(x) = ax^2 + bx + c$ se ajuste a esta información.

(b) Según la función cuadrática P del inciso (a), ¿cuántos motores deben producirse por semana para obtener la máxima utilidad? ¿Cuál es la máxima utilidad por semana?

SOLUCIÓN

(a) De la tabla vemos que la gráfica de $P(x) = ax^2 + bx + c$ contiene los puntos (25, 5250), (50, 7500) y (100, 4500). Esto nos da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5250 = 625a + 25b + c \\ 7500 = 2500a + 50b + c \\ 4500 = 10\,000a + 100b + c \end{cases}$$

Es fácil despejar c en cualquiera de las ecuaciones, por lo cual empezaremos a resolver el sistema despejando c en la primera ecuación.

$$c = 5250 - 625a - 25b,$$

y sustituyendo después c por esa expresión en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 7500 = 2500a + 50b + (5250 - 625a - 25b) \\ 4500 = 10\,000a + 100b + (5250 - 625a - 25b) \end{cases}$$

Observa que hemos reducido el sistema de tres ecuaciones y tres variables a dos ecuaciones y dos variables. Al simplificar el sistema obtenemos

$$\begin{cases} 1875a + 25b = 2250 \\ 9375a + 75b = -750 \end{cases}$$

En este punto podríamos dividir las ecuaciones entre 25, pero vemos que 75 es simplemente 3 por 25, por lo cual aplicamos el método de eliminación para eliminar b :

$$\begin{cases} -5625a - 75b = -6750 & \text{multiplicar la primera} \\ 9375a + 75b = -750 & \text{ecuación por } -3 \end{cases}$$

Al sumar las ecuaciones obtenemos $3750a = -7500$, por lo cual $a = -2$. Podemos verificar que la solución es $a = -2$, $b = 240$ y $c = 500$.

(b) Del inciso (a),

$$P(x) = -2x^2 + 240x + 500.$$

Puesto que $a = -2 < 0$, la gráfica de la función cuadrática P es una parábola que abre hacia abajo. Por la fórmula de la página 217, la coordenada x del vértice (el punto más alto de la parábola) es

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-240}{2(-2)} = \frac{-240}{-4} = 60.$$

Por lo tanto, para obtener la máxima utilidad, el fabricante debe producir y vender 60 motores por semana. La máxima utilidad por semana es

$$P(60) = -2(60)^2 + 240(60) + 500 = \$7700.$$

EJEMPLO 9 Solución de un problema de mezcla

Un comerciante desea mezclar dos calidades de cacahuates que cuestan \$3 y \$4 por libra, respectivamente, con nueces de la India que cuestan \$8 por

Observa que hemos empleado ambos métodos, el de sustitución y el de eliminación, para resolver este sistema de ecuaciones.

libra, con objeto de tener 140 libras de una mezcla que cueste \$6 por libra. Si el comerciante también desea que la cantidad de cacahuates de menor precio sea el doble de la de cacahuete de mejor calidad, ¿cuántas libras de cada variedad debe mezclar?

SOLUCIÓN Introduzcamos tres variables:

x = número de libras de cacahuates de \$3 por libra.

y = número de libras de cacahuates de \$4 por libra.

z = número de libras de nueces de la India de \$8 por libra.

Consultamos el enunciado del problema y obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 140 \\ 3x + 4y + 8z = 6(140) \\ x = 2y \end{cases}$$

Puedes comprobar que la solución de este sistema es $x = 40$, $y = 20$ y $z = 80$. Así, el comerciante debe usar 40 libras de los cacahuates de \$3/lb, 20 libras de los cacahuates de \$4/lb y 80 libras de nueces de la India.

A veces podemos combinar transformaciones de renglones para simplificar el proceso. Por ejemplo, consideramos la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc} 11 & 3 & 8 & 9 \\ 7 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 87 & 80 & 94 \end{array} \right]$$

Para obtener un 1 en la primera columna, podríamos multiplicar el renglón 1 por $\frac{1}{11}$ o el 2 por $\frac{1}{7}$. Sin embargo, podemos multiplicar el renglón 1 por 2 y el 2 por -3 y luego sumar los dos renglones para obtener

$$2(11) + (-3)(7) = 22 + (-21) = 1$$

en la columna 1, como se muestra en la matriz siguiente:

$$2R_1 - 3R_2 \rightarrow R_1 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 12 & 10 & 15 \\ 7 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 87 & 80 & 94 \end{array} \right]$$

Luego, podemos buscar la forma escalonada reducida sin la necesidad de usar fracciones. Este método se denomina **combinación lineal de renglones**.

9.5 Ejercicios

Ejercicios 1 al 22: utiliza matrices en la solución del sistema.

$$1. \begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 13 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 3y - z = -3 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x + 2y - z = -7 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 3y + z = 17 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4x - y + 3z = 6 \\ -8x + 3y - 5z = -6 \\ 5x - 4y = -9 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x + 6y - 4z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + y - 3z = -7 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x + 3y - 3z = -5 \\ 2x - y + z = -3 \\ -6x + 3y - 3z = 4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x - 3y + 2z = -3 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ 4x + y - 3z = 4 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = -5 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \quad 10. \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad 12. \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y - 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7 \\ x + 4y - z = -2 \end{cases} \quad 14. \begin{cases} 2x - y + 4z = 8 \\ -3x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 4x - 2y + z = 5 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases} \quad 16. \begin{cases} 5x + 2y - z = 10 \\ y + z = -3 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 5x + 2z = 1 \\ y - 3z = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad 18. \begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3y + z = -2 \\ 5x - 3z = 3 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 2x + y = -7 \\ -x + y = -1 \end{cases} \quad 20. \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ x + y = 1 \\ x - 2y = 13 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 3y = 4 \\ x + y = -2 \end{cases} \quad 22. \begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$

23. Mezcla de soluciones ácidas Tres soluciones contienen determinado ácido en diversos porcentajes: 10, 30 y 50. Un químico desea usar las tres para producir una mezcla de 50 litros que contenga 32% de ácido. Si quiere utilizar el doble de la solución al 50%, respecto a la de 30%, ¿cuántos litros de cada solución debe usar?

24. Llenado de una piscina Una alberca se puede llenar mediante tres tubos, A, B y C. El tubo A sólo la llena en 3 h, si los tubos A y C se usan juntos, bastan 6 h, en cambio, los tubos B y C requieren 10 h. ¿Cuánto tarda en llenarse la piscina si se usan los tres tubos?

25. Capacidad de producción Una compañía tiene tres máquinas, A, B y C, cada una de las cuales puede producir una pieza determinada. Sin embargo, debido a la falta de operadores calificados, sólo es posible trabajar dos al mismo tiempo. En la tabla que sigue se muestra la producción a lo largo de un periodo de tres días, usando varias combinaciones de máquinas. ¿Cuánto tardará cada máquina, si se emplea sola, en producir 1000 piezas?

Máquinas usadas	Horas usadas	Piezas producidas
A y B	6	4,500
A y C	8	3,600
B y C	7	4,900

26. Resistencia eléctrica En circuitos eléctricos, se utiliza la fórmula $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$ para determinar la resistencia total R si dos resistores R_1 y R_2 se conectan en paralelo. Dados tres resistores A, B y C, supongamos que la resistencia total es de 48 ohms si A y B se conectan en paralelo, de 80 ohms si B y C se conectan en paralelo, y de 60 ohms si A y C se conectan en paralelo. Encuentra las resistencias de A, B y C.
27. Mezcla de fertilizantes Un proveedor de productos para jardinería cuenta con tres tipos de fertilizante para pasto, G_1 , G_2 y G_3 , que tienen un contenido de nitrógeno de 30%, 20% y 15 %, respectivamente. El proveedor piensa mezclarlos y obtener 600 lb de fertilizante con un contenido de nitrógeno de 25%. La mezcla debe contener 100 lb más del tipo G_1 que del tipo G_2 . ¿Cuánto de cada tipo debe usar?
28. Aceleración de partículas Si una partícula se mueve a lo largo de una línea coordinada con una aceleración constante a (en cm/s^2), entonces, en el tiempo t (en s) su distancia $s(t)$ (en cm) desde el origen es

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

para una velocidad v_0 y distancia s_0 del origen en $t = 0$. Si las distancias de la partícula desde el origen en $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ y $t = \frac{3}{2}$ son 7, 11 y 17, respectivamente, encuentra a , v_0 y s_0 .

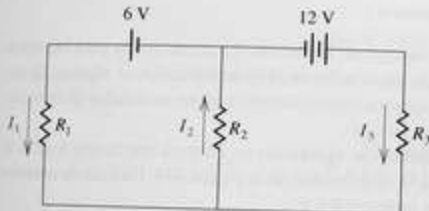
- 29 **Corrientes eléctricas** La figura es un esquema de un circuito eléctrico formado por tres resistores, una batería de 6 V y una batería de 12 V. Con las leyes de Kirchhoff podemos demostrar que las tres corrientes I_1 , I_2 e I_3 son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 = 6 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = 12 \end{cases}$$

Encuentra las tres corrientes si

- (a) $R_1 = R_2 = R_3 = 3$ ohms
(b) $R_1 = 4$ ohms, $R_2 = 1$ ohm y $R_3 = 4$ ohms

Ejercicio 29

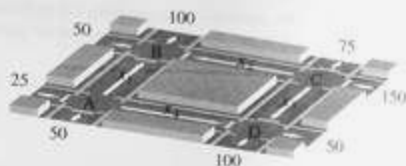


- 30 **Población de aves** Una población estable de 35 000 aves vive en tres islas. Cada año, el 10% de la población de la isla A emigra a la isla B; el 20% de la población de la isla B, a la isla C, y el 5% de la isla C, a la isla A. Encuentra la cantidad de aves de cada isla si el conteo de la población de cada isla no varía de año en año.
- 31 **Mezcla de café** Una tienda se especializa en mezclas de café para paladares exigentes (gourmets). El dueño desea preparar bolsas de una libra que se vendan en \$8.50 combinando granos de Colombia, Brasil y Kenia. El costo por libra de estos cafés es de \$10, \$6 y \$8, respectivamente. El café de Colombia debe triplicar al de Brasil. Encuentra la cantidad de cada tipo de café en la mezcla.

- 32 **Pesos de cadenas** Hay tres cadenas que pesan 450, 610 y 950 onzas, cada una de las cuales está formada por eslabones de tres tamaños diferentes. Cada cadena tiene 10 eslabones pequeños. Las cadenas tienen también 20, 30 y 40 eslabones medianos y 30, 40 y 70 eslabones grandes, respectivamente. Encuentra los pesos de los eslabones pequeños, los medianos y los grandes.

- 33 **Cantidad de tránsito** En la figura se muestra un sistema de cuatro calles cuya circulación es en un solo sentido y que conducen al centro de la ciudad. Las cifras de la figura denotan la cantidad promedio de vehículos por hora que avanzan en las direcciones mostradas. Cada hora, un total de 300 vehículos entra en la zona y 300 salen de la misma. Se han coordinado los semáforos en las intersecciones A, B, C y D para evitar congestionamiento y esta sincronización determinará las cantidades de tránsito x_1 , x_2 , x_3 y x_4 .

Ejercicio 33



- (a) Si la cantidad de vehículos que entran en una intersección por hora debe ser igual a la cantidad que sale de la intersección, por hora, describe las cantidades de tránsito en cada intersección con un sistema de ecuaciones.
- (b) Si el semáforo en la intersección C está sincronizado, de modo que x_3 sea igual a 100, encuentra x_1 , x_2 y x_4 .
- (c) Utiliza el sistema del inciso (a) para explicar por qué $75 \leq x_1 \leq 150$.
- 34 Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, determina a , b y c tales que la gráfica de f pasa por los puntos $P(-3, -12)$, $Q(-1, 22)$ y $R(2, 13)$.
- 35 **Contaminación del aire** Entre 1850 y 1985, se agregaron a la atmósfera terrestre alrededor de 155 mil millones de toneladas métricas de carbono y la temperatura ascendió a casi 0.5°C , lo que es indicador del efecto invernadero. Se calcula que al duplicarse el bióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera, la temperatura promedio en todo el mundo subirá de 4 a 5°C . En ocasiones, la cantidad futura A de CO_2 en la atmósfera en partes por millón se calcula con la fórmula $A = a + ct + ke^r$, en donde a , c y k son constantes, r es el porcentaje de aumento en la emisión de CO_2 y t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiente a 1990. Supongamos que se calcula que en el 2070 A será 800 si $r = 2.5\%$ y A será 560 si $r = 1.5\%$. Si en 1990, $A = 340$ y $r = 1\%$, encuentra el año en que la cantidad de CO_2 en la atmósfera se duplicará.
- 36 **Contaminación del aire** Consulta el ejercicio 35. Supongamos que se calcula que para el 2030 A será 455 si $r = 2.0\%$ o 430 si $r = 1.5\%$. Si, en 1990, $A = 340$ y $r = 2.5\%$, indica

en qué año se duplicará la cantidad de CO_2 en la atmósfera.

$$40 \quad P(0, 4), \quad Q(1, 3), \quad R(-1, 10), \quad S(2, -2)$$

Ejercicios 37 y 38: encuentra una ecuación del círculo de la forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ que pase por los puntos dados.

$$37 \quad P(2, 1), \quad Q(-1, -4), \quad R(3, 0)$$

$$38 \quad P(-5, 5), \quad Q(-2, -4), \quad R(2, 4)$$

Ejercicios 39 y 40: encuentra una ecuación del polinomio cúbico $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que pase por los puntos dados.

$$39 \quad P(0, -6), \quad Q(1, -11), \quad R(-1, -5), \quad S(2, -14)$$

41 Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, halla a, b, c y d si la gráfica de f debe pasar por $(-1, 2), (0, 5, 2), (1, 3)$ y $(2, 4.5)$.

42 Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, encuentra a, b, c y d si la gráfica de f debe pasar por $(-2, 1.5), (-1, -2), (1, -3), (2, -3.5)$ y $(3, -4.8)$.

9.6

Álgebra de matrices

Las matrices se introdujeron en la sección 9.5 como ayuda para encontrar soluciones de sistemas de ecuaciones. Ahora analizaremos algunas de sus propiedades, mismas que son importantes en campos avanzados de matemáticas y en aplicaciones diversas.

En la siguiente definición, el símbolo (a_{ij}) denota una matriz A de $m \times n$ del tipo que aparece en la definición de la página 674. Utilizamos notaciones similares para las matrices B y C .

Definición de igualdad y suma de matrices

Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ matrices $m \times n$.

(1) $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i y j .

(2) $C = A + B$ si y sólo si $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para toda i y j .

Observa que dos matrices son iguales si y sólo si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.

ILUSTRACIÓN Igualdad de matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ \sqrt{8} & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 & \sqrt{25} \\ 2 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

Con la notación de paréntesis para matrices, podemos escribir la definición de la suma de dos matrices $m \times n$ como

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Así, para sumar dos matrices, sumamos los elementos de las posiciones correspondientes de cada matriz. *Dos matrices se pueden sumar sólo si tienen el mismo tamaño.*

ILUSTRACIÓN Suma de matrices

$$\blacksquare \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & -5+2 \\ 0+7 & 4+(-4) \\ -6+(-2) & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 7 & 0 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

La **matriz nula** (o **matriz cero**) $m \times n$, denotada por O , es la matriz con m renglones (o filas) y n columnas, en que cada elemento es 0.

ILUSTRACIÓN Matrices nulas

$$\blacksquare \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacksquare \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacksquare \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El **inverso aditivo** $-A$ de la matriz $A = (a_{ij})$ es la matriz $(-a_{ij})$ obtenida al cambiar el signo de cada elemento de A diferente de cero.

ILUSTRACIÓN Inverso aditivo

$$\blacksquare -\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

La prueba del teorema siguiente se deduce de la definición de la suma de matrices.

Teorema sobre propiedades de matrices

Si A , B y C son matrices $m \times n$ y si O es la matriz nula $m \times n$, entonces

- (1) $A + B = B + A$
- (2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
- (3) $A + O = A$
- (4) $A + (-A) = O$

La **sustracción** o **resta** de dos matrices $m \times n$ está definida por

$$A - B = A + (-B).$$

Con la notación de paréntesis, tenemos

$$\begin{aligned}(a_j) - (b_j) &= (a_j) + (-b_j) \\ &= (a_j - b_j).\end{aligned}$$

Así, para restar dos matrices, sustraemos los elementos de las posiciones correspondientes.

ILUSTRACIÓN Sustracción de matrices

$$\equiv \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & -5-2 \\ 0-7 & 4-(-4) \\ -6-(-2) & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Definición del producto de un número real y una matriz

El **producto** de un número real c y una matriz $A = (a_{ij})$ de $m \times n$ es

$$cA = (ca_{ij})$$

Observa que para hallar cA , multiplicamos cada elemento de A por c .

ILUSTRACIÓN Producto de un número real y una matriz

$$\equiv 3 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Podemos probar lo siguiente

Teorema sobre propiedades de matrices

Si A y B son matrices $m \times n$ y si c y d son números reales, entonces

$$(1) \quad c(A + B) = cA + cB$$

$$(2) \quad (c + d)A = cA + dA$$

$$(3) \quad (cd)A = c(dA)$$

La definición del producto AB de dos matrices que sigue puede parecer poco común, pero tiene muchos usos en matemáticas y en aplicaciones prácticas. En la multiplicación, al contrario que en la suma, A y B pueden ser de tamaños diferentes, pero el número de columnas de A ha de ser el mismo que el número de renglones (filas) de B . Por lo tanto, si A es $m \times n$, entonces B debe ser $n \times p$ para alguna p . Según veremos, el tamaño de AB es entonces $m \times p$. Si $C = AB$, entonces tenemos un método para hallar el elemento c_{ij} del renglón (fila) i columna j de C en las guías siguientes.

Guías para hallar c_{ij} en el producto $C = AB$ si A es $m \times n$ y B es $n \times p$

- 1 Separa el i -ésimo renglón, R_i , de A y la j -ésima columna, C_j , de B :

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{in1} & a_{in2} & \cdots & a_{inn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{2j} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{nj} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

- 2 Avanza *simultáneamente* a la derecha a lo largo de R_i y hacia abajo C_j , multiplicando pares de elementos, para obtener

$$a_{i1}b_{1j}, a_{i2}b_{2j}, a_{i3}b_{3j}, \dots, a_{in}b_{nj}$$

- 3 Suma los productos de los pares de la guía 2 para obtener c_{ij} :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Con la aplicación de las guías vemos que el elemento c_{11} del primer renglón y la primera columna de $C = AB$ es

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

El elemento c_{mp} del último renglón y la última columna de $C = AB$ es

$$c_{mp} = a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + a_{m3}b_{3p} + \cdots + a_{mn}b_{np}$$

El análisis se resume en esta definición.

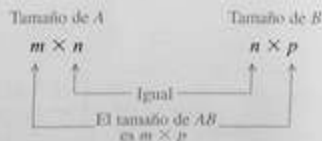
Definición del producto de dos matrices

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$ y sea $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times p$. El **producto** AB es la matriz $C = (c_{ij})$ $m \times p$ tal que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, m$ y $j = 1, 2, 3, \dots, p$.

El diagrama que sigue puede ayudar a recordar la relación entre tamaños de matrices al trabajar con un producto AB .



En la ilustración que sigue se muestran algunos casos especiales.

ILUSTRACIÓN

Tamaños de matrices en productos

	Tamaño de A	Tamaño de B	Tamaño de AB
■	2×3	3×5	2×5
■	4×2	2×3	4×3
■	3×1	1×3	3×3
■	1×3	3×1	1×1
■	5×3	3×5	5×5
■	5×3	5×3	AB no está definida

En el próximo ejemplo encontramos el producto de dos matrices específicas.



EJEMPLO 1 Cálculo del producto de dos matrices

Encuentra el producto AB si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN La matriz A es 2×3 y la matriz B es 3×4 ; por lo tanto, el producto $C = AB$ está definido y es 2×4 . A continuación usamos las guías para hallar los elementos $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{24}$ del producto. Por ejemplo, para encontrar el elemento c_{23} separamos el segundo renglón, R_2 , de A y la tercera columna, C_3 , de B , según se ilustra en seguida y luego usamos las guías 2 y 3, con lo cual

$$c_{23} = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 = -2.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} \\ \text{■} & \text{■} & -2 & \text{■} \end{bmatrix}$$

Del mismo modo, para hallar el elemento c_{12} del renglón 1 y la columna 2 del producto, procedemos de esta forma:

$$c_{12} = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 0 = 8$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{■} & 8 & \text{■} & \text{■} \\ \text{■} & \text{■} & -2 & \text{■} \end{bmatrix}$$

Los elementos restantes del producto se calculan como sigue, donde hemos indicado el renglón de A y la columna de B que se usan cuando se aplica la guía 1.

Renglón de A	Columna de B	Elemento de C
R_1	C_1	$c_{11} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 7 = -18$
R_1	C_2	$c_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 5 = -7$
R_1	C_3	$c_{13} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 8 = -22$
R_2	C_1	$c_{21} = 4 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 7 = 6$
R_2	C_2	$c_{22} = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 = -16$
R_2	C_3	$c_{23} = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 8 = -16$

Por tanto,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 8 & -7 & -22 \\ 6 & -16 & -2 & -16 \end{bmatrix}$$

La multiplicación de matrices en una calculadora es bastante directa. Comprobemos el resultado del ejemplo 1. Teclée las matrices A (2×3) y B (3×4):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Ahora introduce la operación en la pantalla de origen.

TI-83 Plus

2nd [MATRX] 1 [×]
2nd [MATRX] 2 [ENTER]

[A] * [B]
[[[-18 8 -7 -22]
[6 -16 -2 -16]]

TI-86

ALPHA A [×] ALPHA B [ENTER]

A*B
[[[-18 8 -7 -22]
[6 -16 -2 -16]]

Para ver los elementos de la cuarta columna, oprime la tecla \triangleright .

Una matriz es una **matriz renglón** si tiene sólo un renglón. Una **matriz columna** nada más tiene una columna. La ilustración que sigue presenta algunos productos con matrices renglón y columna. Debes comprobar cada número en los productos.

ILUSTRACIÓN Productos con matrices renglón y columna

$$\begin{aligned} \blacksquare \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix} & \blacksquare [3 \quad -1 \quad 2] \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} &= [4 \quad 19] \\ \blacksquare \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} [1 \quad 5] &= \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 3 & 15 \end{bmatrix} & \blacksquare [1 \quad 5] \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} &= [13] \end{aligned}$$

La operación del producto para matrices no es conmutativa. Por ejemplo, si A es 2×3 y B es 3×4 , entonces puedes encontrar AB , puesto que el número de columnas de A es el mismo que la cantidad de renglones de B . Sin embargo, BA no está definida porque el número de columnas de B es diferente de la cantidad de renglones de A . Incluso si AB y BA están definidas, a menudo estos productos son diferentes. Esto se ilustra en el ejemplo que sigue, junto con el hecho de que el producto de dos matrices diferentes de cero puede ser igual a una matriz cero.

EJEMPLO 2 La multiplicación de matrices no es conmutativa

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, demuestra que $AB \neq BA$.

SOLUCIÓN Con la definición del producto de dos matrices, obtenemos

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $AB \neq BA$. Observa que la última igualdad muestra que el producto de dos matrices diferentes de cero puede ser igual a una matriz nula. \blacksquare

Aun cuando la multiplicación de matrices no es conmutativa, sí es asociativa. Así, si A es $m \times n$, B es $n \times p$ y C es $p \times q$, entonces

$$A(BC) = (AB)C.$$

Las propiedades distributivas también se cumplen si las matrices que intervienen tienen la cantidad apropiada de renglones y columnas. Si A_1 y A_2 son matrices de $m \times n$ y si B_1 y B_2 son matrices de $n \times p$, entonces

$$A_1(B_1 + B_2) = A_1B_1 + A_1B_2$$

$$(A_1 + A_2)B_1 = A_1B_1 + A_2B_1.$$

Como caso especial, si todas las matrices son cuadradas, de orden n , entonces se cumplen las propiedades asociativa y distributiva.

Concluimos esta sección con una aplicación del producto de dos matrices.



EJEMPLO 3 Aplicación de un producto de matrices

(a) Tres inversionistas, I_1 , I_2 e I_3 poseen individualmente determinado número de porciones de cuatro acciones S_1 , S_2 , S_3 y S_4 según la matriz A . La matriz B contiene el valor actual V de cada porción de acción. Encuentra AB e interpreta el significado de sus elementos.

$$\begin{array}{c} \text{Inversionistas} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{Número de porciones de acciones} \\ \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 50 & 100 & 30 & 25 \\ 100 & 150 & 10 & 30 \\ 100 & 50 & 40 & 100 \end{bmatrix} \end{array} = A, \quad \begin{array}{c} \text{Acciones} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{Valor de la acción} \\ \begin{matrix} V \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 20.37 \\ 16.21 \\ 90.80 \\ 42.75 \end{bmatrix} \end{array} = B$$

(b) La matriz C contiene el cambio en el valor de cada acción durante la semana anterior. Encuentra AC e interpreta el significado de sus elementos.

$$\begin{bmatrix} +1.03 \\ -0.22 \\ -1.35 \\ +0.15 \end{bmatrix} = C$$

SOLUCIÓN

(a) Puesto que A es una matriz de 3×4 y B es una matriz de 4×1 , el producto AB es una matriz de 3×1 :

$$AB = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 30 & 25 \\ 100 & 150 & 10 & 30 \\ 100 & 50 & 40 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.37 \\ 16.21 \\ 90.80 \\ 42.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6432.25 \\ 6659.00 \\ 10754.50 \end{bmatrix}$$

Obtuvimos el primer elemento del producto AB , 6432.25, del cálculo,

$$50(20.37) + 100(16.21) + 30(90.80) + 25(42.75),$$

el cual representa el valor total que el inversionista I_1 posee en las cuatro acciones. Del mismo modo, el segundo y tercer elementos representan el valor para los inversionistas I_2 e I_3 , respectivamente.

(continúa)

(b)

$$AC = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 30 & 25 \\ 100 & 150 & 10 & 30 \\ 100 & 50 & 40 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1.03 \\ -0.22 \\ -1.35 \\ +0.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.25 \\ 61.00 \\ 53.00 \end{bmatrix}$$

El primer elemento del producto AC , -7.25 , indica que el valor total que el inversionista I_1 tiene en las cuatro acciones bajó \$7.25 la semana pasada. El segundo y tercer elementos señalan que el valor total que los inversionistas I_2 e I_3 poseen en las cuatro acciones subió \$61.00 y \$53.00, respectivamente.

9.6 Ejercicios

Ejercicios 1 al 8: encuentra, si es posible, $A + B$, $A - B$, $2A$ y $-3B$.

$$1. A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5. A = [4 \ -3 \ 2], \quad B = [7 \ 0 \ -5]$$

$$6. A = \begin{bmatrix} 7 \\ -16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$8. A = [2 \ 1], \quad B = [3 \ -1 \ 5]$$

Ejercicios 9 y 10: halla el elemento dado de la matriz producto $C = AB$ del ejercicio indicado.

9. c_{21} ; ejercicio 15

10. c_{21} ; ejercicio 16

Ejercicios 11 al 22: encuentra, si es posible, AB y BA .

$$11. A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$12. A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$13. A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$14. A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$15. A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$16. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$17. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$18. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$19. A = [-3 \ 7 \ 2], \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$20. A = [4 \ 8], \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$23 \ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$22 \ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 23 al 26: halla AB .

$$23 \ A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$24 \ A = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$25 \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -7 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$26 \ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 27 al 30: sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprueba el enunciado.

$$27 \ (A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2, \text{ donde } A^2 = AA \text{ y } B^2 = BB.$$

$$28 \ (A+B)(A+B) \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$29 \ A(B+C) = AB + AC$$

$$30 \ A(BC) = (AB)C$$

Ejercicios 31 al 34: confirma la identidad para

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix},$$

y los números reales m y n .

$$31 \ m(A+B) = mA + mB$$

$$32 \ (m+n)A = mA + nA$$

$$33 \ A(B+C) = AB + AC$$

$$34 \ A(BC) = (AB)C$$

Ejercicios 35 al 38: sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -9 & 5 & -8 \\ 3 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Evalúa la expresión matricial.

$$35 \ A^2 + B^2 \quad 36 \ 3A - BA$$

$$37 \ A^2 - 5B \quad 38 \ A + A^2 + B + B^2$$

39 Valor de inventario. Una tienda tiene en existencia varios tamaños de toallas, cada una en 5 diferentes colores: pequeña, con un precio de \$1.39 cada una; mediana, a \$2.99, y grande a \$4.99 cada una. El inventario actual de la tienda es el siguiente:

Tipo de toalla	Colores				
	Blanco	Tostado	Beige	Rosa	Amarillo
Pequeña	400	400	300	250	100
Mediana	550	450	500	200	100
Grande	500	500	600	300	200

(a) Organiza estos datos en una matriz de inventario A y una matriz de precios B , de modo que el producto $C = AB$ esté definido.

(b) Encuentra C .

(c) Interpreta el significado del elemento c_{31} de C .

40 Costos de construcción. Un contratista tiene pedidos para cuatro unidades de una recámara, 10 unidades de dos recámaras y seis de tres recámaras. Los costos de mano de obra y materiales (en miles de dólares) son:

	1 recámara	2 recámaras	3 recámaras
Mano de obra	34	40	43
Materiales	50	60	67

(a) Organiza estos datos en una matriz A de pedidos y una matriz B de costos, de modo que el producto $C = AB$ esté definido.

(b) Encuentra C .

(c) Interpreta el significado de cada elemento de C .

9.7

Inversa de una matriz

En esta sección y en las dos que vienen limitaremos nuestro estudio a matrices cuadradas. El símbolo I_n denotará la matriz cuadrada de orden n y que tiene 1 en cada posición en la diagonal principal y 0 en todas las demás posiciones. Llamamos **matriz identidad de orden n** a la matriz I_n .

ILUSTRACIÓN Matrices de identidad

$$\blacksquare \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \blacksquare \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos demostrar que si A es cualquier matriz cuadrada de orden n , entonces

$$AI_n = A = I_n A.$$

ILUSTRACIÓN $AI_2 = A = I_2 A$

$$\blacksquare \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Cuando trabajamos con un número real b diferente de cero, el número particular b^{-1} (el inverso multiplicativo de b) se puede multiplicar por b para obtener la identidad multiplicativa (el número 1); es decir,

$$b \cdot b^{-1} = 1.$$

Tenemos una situación semejante con matrices.

Definición de la inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n . Si existe una matriz B tal que

$$AB = I_n = BA,$$

entonces B se llama **inversa** de A y se denota con A^{-1} (se lee "A inversa").

Si una matriz cuadrada A tiene una inversa, decimos que A es **invertible**. Si una matriz no es cuadrada, resulta imposible tener una inversa. Para matrices (a diferencia de los números reales), el símbolo $1/A$ no representa la inversa A^{-1} .

Si A es invertible, podemos calcular A^{-1} mediante operaciones elementales de renglones. Si $A = (a_{ij})$ es $n \times n$, comenzamos con la matriz $n \times 2n$ formada al unir I_n a A :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]$$

Luego, aplicamos una sucesión de transformaciones elementales de renglón, como en la sección 9.5, para hallar formas escalonadas reducidas, hasta que llegamos a una matriz de la forma

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right]$$

en que la matriz identidad I_n aparece a la izquierda de la línea vertical. Se puede demostrar que la matriz (b_{ij}) de $n \times n$ es la inversa de A , esto es, $B = A^{-1}$.



EJEMPLO 1 Encontrar la inversa de una matriz 2×2

Encuentra A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Comenzamos con la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

A continuación efectuamos transformaciones elementales de renglón hasta que la matriz identidad I_2 aparezca en el lado izquierdo de la línea vertical:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-3R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-4R_2 + R_1 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Por el análisis previo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Comprobemos que $AA^{-1} = I_2 = A^{-1}A$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$



EJEMPLO 2 Búsqueda de la inversa de una matriz 3×3

Encuentra A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_1 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{\begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -3R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 11 & 2 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 10 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{-R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{\begin{array}{l} 3R_2 + R_1 \rightarrow R_1 \\ -10R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 13 & -10 & 14 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{-\frac{1}{9}R_3 \rightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{14}{9} \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{\begin{array}{l} -2R_3 + R_1 \rightarrow R_1 \\ -R_3 + R_2 \rightarrow R_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{14}{9} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{14}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -10 & 7 & -5 \\ -4 & 1 & -2 \\ -13 & 10 & -14 \end{bmatrix}$$

Puedes comprobar que $AA^{-1} = I_3 = A^{-1}A$.

No todas las matrices cuadradas son invertibles. Si el procedimiento usado en los ejemplos 1 y 2 no lleva a una matriz identidad a la izquierda de la línea vertical, la matriz A no tiene inversa; esto es, A no es invertible.

Encontrar la inversa de una matriz cuadrada en una calculadora graficadora es relativamente sencillo. Teclea la matriz A del ejemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora, anota la inversa de A en la pantalla.

TI-83 Plus

2nd MATRX 1 x^{-1} ENTER CLEAR

```

[A]⁻¹
[[ -1.111111111 1.111111111
 [ .444444444444444
 [ -1.444444444444444
  
```

TI-86

ALPHA A 2nd x^{-1} ENTER CLEAR

```

A⁻¹
[[ -1.111111111 1.111111111 .77
 [ .444444444444444 .77
 [ -1.444444444444444 1.11
  
```

Convierte los enteros en fracciones de la manera siguiente:

MATH 1 ENTER

```

Ans>Frac
[[ -10/9 7/9 -5
 [ 4/9 -1/9 2/9
 [ -13/9 10/9 -1
  
```

2nd MATH MISC(F5) MORE
Frac(F1) ENTER

```

Ans>Frac
[[ -10/9 7/9 -5/9
 [ 4/9 -1/9 2/9
 [ -13/9 10/9 -11/9
  
```

Observa que debes usar x^{-1} en lugar de A^{-1} . Si la matriz no es invertible, cualquier calculadora devuelve un mensaje de error SINGULAR MAT.

Podemos aplicar inversas de matrices a soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. Considera el caso de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$$

Este sistema se puede expresar en términos de matrices como

$$\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Si hacemos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix},$$

entonces una forma matricial para el sistema es

$$AX = B.$$

Si existe A^{-1} , multiplicar ambos lados de la última ecuación por A^{-1} nos da $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Puesto que $A^{-1}A = I_2$ e $I_2X = X$, esto lleva a

$$X = A^{-1}B.$$

a partir de lo cual se puede encontrar la solución (x, y) . Esta técnica (denominada *método de la inversa*) se puede extender a sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

EJEMPLO 3 Solución de un sistema de ecuaciones lineales con el método de la inversa

Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y = 3 \\ 3x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si hacemos

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

entonces $AX = B$. Esto significa que $X = A^{-1}B$. La matriz A^{-1} se encontró en el ejemplo 2; por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -10 & 7 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ -13 & 10 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 21 \\ -3 \\ 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{13}{3} \end{bmatrix}$$

Como se esperaba, la solución con la calculadora del ejemplo 3 es sencilla; sólo anota $A^{-1} \times B$ para obtener la solución.

Así, $x = \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{13}{3}$ y la triada ordenada $(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{13}{3})$ es la solución del sistema dado.

Si estás resolviendo un sistema de ecuaciones lineales sin ayuda de algún equipo de cómputo, el método de la inversa de solución del ejemplo 3 funciona sólo si conocemos A^{-1} (o la podemos calcular con facilidad) o si vamos a considerar muchos sistemas con la misma matriz de coeficientes.

Si usamos un equipo de cómputo y la matriz de coeficientes no es invertible, el método de la inversa es inútil y hay que recurrir al método matricial que se estudió en la sección 9.5. Hay otros usos importantes para la inversa de una matriz que aparecen en campos más avanzados de matemáticas y en aplicaciones de dichos campos.

9.7 Ejercicios

Ejercicios 1 y 2: muestra que B es la inversa de A .

$$1. A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 3 al 12: encuentra la inversa de la matriz, si existe.

$$3. \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$5. \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$6. \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$7 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$8 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$9 \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$10 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$11 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$12 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(a) \begin{bmatrix} e \\ d \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$20 \begin{cases} x + 2y + 3z = c \\ -2x + y = d \\ 3x - y + z = e \end{cases}$$

$$(a) \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 13 Establece las condiciones en a y b que garanticen que la matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ tiene una inversa, y encuentra una fórmula para la inversa, si existe.



Ejercicios 21 al 24: para cada matriz A , aproxima su inversa A^{-1} a cinco lugares decimales.

14 Si $abc \neq 0$, halla la inversa de $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.

$$21 A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 3 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

15 Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, demuestra que $AI_3 = A = I_3A$.

$$22 A = \begin{bmatrix} 0 & 1.2 & 4.1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 5.9 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- 16 Prueba que $AI_4 = A = I_4A$ para toda matriz cuadrada A de orden 4.

$$23 A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 7 & 1.2 & -8 & 0 \\ 2.5 & 0 & 1.9 & 7.9 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 17 al 20: resuelve el sistema usando el método de la inversa. Consulta los ejercicios 3-4 y 9-10.

$$17 \begin{cases} 2x - 4y = c \\ x + 3y = d \end{cases}$$

$$24 A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 5.5 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -11 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(a) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$18 \begin{cases} 3x + 2y = c \\ 4x + 5y = d \end{cases}$$

$$(a) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$19 \begin{cases} -2x + 2y + 3z = c \\ x - y = d \\ y + 4z = e \end{cases}$$



Ejercicios 25 al 28: (a) expresa el sistema en la forma matricial $AX = B$; (b) calcula A^{-1} , usando una precisión de cuatro lugares decimales para sus elementos, y (c) con $X = A^{-1}B$ calcula la solución del sistema con una precisión de cuatro lugares decimales.

$$25 \begin{cases} 4.0x + 7.1y = 6.2 \\ 2.2x - 4.9y = 2.9 \end{cases}$$

$$26 \begin{cases} 5.1x + 8.7y + 2.5z = 1.1 \\ 9.9x + 15y + 12z = 3.8 \\ -4.3x - 2.2y - z = -7.1 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 3.1x + 6.7y - 8.7z = 1.5 \\ 4.1x - 5.1y + 0.2z = 2.1 \\ 0.6x + 1.1y - 7.4z = 3.9 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 5.6x + 8.4y - 7.2z + 4.2w = 8.1 \\ 8.4x + 9.2y - 6.1z - 6.2w = 5.3 \\ -7.2x - 6.1y + 9.2z + 4.5w = 0.4 \\ 4.2x - 6.2y - 4.5z + 5.8w = 2.7 \end{cases}$$

- 29 Promedio de temperaturas mínimas. En la tabla aparecen tres promedios de temperaturas mínimas mensuales para Detroit.

Mes	Temperatura
Feb.	19 °F
Ago.	59 °F
Nov.	26 °F

- (a) Haz que $x = 1$ corresponda a enero, $x = 2$ a febrero, ..., $x = 12$ a diciembre. Halla una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ que interpole los datos; es decir,

9.8

Determinantes

A cada matriz cuadrada A se le asocia un número llamado el **determinante** de A , que se denota con $|A|$. No confundas esta notación con el símbolo de valor absoluto de un número real. Para evitar confusiones, la expresión "del A " se usa a veces en lugar de $|A|$. Definiremos $|A|$ comenzando con el caso en que A tiene orden 1 y luego aumentaremos el orden de uno en uno. Como veremos en la sección 9.9, estas definiciones surgen de modo natural al resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Si A es una matriz cuadrada de primer orden, entonces A tiene solo un elemento. Así, $A = [a_{11}]$ definimos $|A| = a_{11}$. Si A es una matriz cuadrada de segundo orden, entonces

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

y el determinante de A está definido por

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Otra notación de $|A|$ se obtiene al sustituir los corchetes usados para A con barras verticales.

Definición del determinante de una matriz A de 2×2

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

que determine las constantes a , b y c tales que $f(2) = 19$, $f(8) = 59$ y $f(11) = 26$.

- (b) Grafica f en la pantalla [1], [2] por $[-15, 70, 5]$.
- (c) Usa f para calcular el promedio mensual de temperaturas mínimas en junio y octubre. Compara tus pronósticos con las temperaturas reales de 58 °F y 41 °F, respectivamente.

- 30 Promedio de temperaturas mínimas. Trabaja el ejercicio 29 para Hurón, Dakota del Sur. Los promedios reales de temperatura para junio y octubre son 58 °F y 38 °F, respectivamente.

Mes	Temperatura
Feb.	9 °F
Jul.	60 °F
Nov.	21 °F

EJEMPLO 1 Cálculo del determinante de una matriz 2×2

Encuentra $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Por definición,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (2)(-3) - (4)(-1) = -6 + 4 = -2.$$

Para ayudar a encontrar determinantes de matrices cuadradas de orden $n > 1$, introducimos la siguiente terminología.

Definición de menores y cofactores

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden $n > 1$.

- (1) El **menor** M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz de orden $n - 1$ obtenida al eliminar el renglón i y la columna j .
- (2) El **cofactor** A_{ij} del elemento a_{ij} es $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Para hallar el menor de un elemento, borramos el renglón y columna en que aparece el elemento y luego encontramos el determinante de la matriz cuadrada resultante. Este proceso se muestra en la siguiente ilustración, donde la supresión de renglones y columnas de una matriz 3×3 está indicada por segmentos de recta horizontales y verticales, respectivamente.

Para obtener el cofactor de a_{ij} de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, encontramos el menor y lo multiplicamos por 1 o -1, dependiendo de si la suma de i y j es par o impar, respectivamente, como se muestra en la ilustración.

ILUSTRACIÓN Menores y cofactores

Matriz	Menor	Cofactor
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$	$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$	$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$	$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23}$

Para la matriz de la ilustración anterior, hay otros seis menores M_{12} , M_{21} , M_{23} , M_{31} , M_{32} y M_{33} , que se pueden obtener de manera similar.

Otra forma de recordar el signo $(-1)^{i+j}$ asociado con el cofactor A_{ij} es considerar la tabla siguiente de signos más y menos:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$



EJEMPLO 2 Encontrar menores y cofactores

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & 5 \end{bmatrix}$, encuentra M_{11} , M_{21} , M_{22} , A_{11} , A_{21} y A_{22} .

SOLUCIÓN Al borrar los renglones y columnas de A adecuados, obtenemos

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (-7)(0) = 10$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (-3)(5) - (-7)(3) = 6$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5) - (-2)(3) = 11.$$

Para encontrar los cofactores, les antepone los signos apropiados a los menores correspondientes. Así, usando la definición de cofactores, tenemos

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (1)(10) = 10$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)(6) = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = (1)(11) = 11.$$

También podemos utilizar la tabla de signos más y menos para determinar los signos apropiados.

El determinante $|A|$ de una matriz cuadrada de tercer orden se define así:

Definición del determinante de una matriz A de 3×3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Puesto que los cofactores $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$, $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$ y $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}$, la definición anterior también se puede escribir de esta manera

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Si expresamos M_{11} , M_{12} y M_{13} con elementos de A y reacomodamos términos, obtenemos esta fórmula para $|A|$:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

La definición de $|A|$ para una matriz cuadrada A de tercer orden muestra un patrón de multiplicar cada elemento del renglón 1 por su cofactor y luego sumar para hallar $|A|$. Este proceso se conoce como *expandir $|A|$ por el primer renglón*. Si efectuamos los cálculos, podemos demostrar que $|A|$ se puede expandir de modo semejante usando cualquier renglón o columna. A manera de ilustración, la expansión por la segunda columna es

$$\begin{aligned} |A| &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ &= a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicamos la definición a los determinantes dentro de los paréntesis, multiplicamos como se indica, reacomodamos los términos de la suma y llegamos a la fórmula para $|A|$ en términos de los elementos de A . De manera semejante, la expansión para el tercer renglón es

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

Una vez más podemos demostrar que este resultado coincide con las expansiones anteriores.

EJEMPLO 3 Encontrar el determinante de una matriz 3×3

$$\text{Encuentra } |A| \text{ si } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN Como el segundo renglón contiene un cero, expandiremos $|A|$ por ese renglón, porque entonces necesitamos evaluar sólo dos cofactores. Así,

$$|A| = (2)A_{21} + (5)A_{22} + (0)A_{23}.$$

Con la definición de cofactores, tenemos

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -[(3)(-2) - (1)(1)] = 7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = [(-1)(-2) - (3)(1)] = -1.$$

En consecuencia,

$$|A| = (2)(7) + (5)(-1) + (0)A_{23} = 14 - 5 + 0 = 9. \quad \checkmark$$

Encontrar el determinante de una matriz cuadrada con números reales es una tarea sencilla con una calculadora graficadora. Primero, introduce la matriz A del ejemplo 3:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora, representa A y encuentra el determinante de A .

TI-83 Plus

2nd [MATRX] 1 [ENTER]
2nd [MATRX] > 1
2nd [MATRX] 1 [)] [ENTER]

[A] $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
det([A]) 9

TI-86

ALPHA [A] [ENTER]
2nd [MATRX] MATH(F3) [Get(F1)]
ALPHA [A] [ENTER]

A $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
det A 9

La siguiente definición del determinante de una matriz de orden arbitrario n tiene la forma que se utiliza para el determinante de una matriz de tercer orden.

Definición del determinante de una matriz A de $n \times n$

El **determinante** $|A|$ de una matriz A de orden n es la expansión de cofactores por el primer renglón:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

En términos de menores,

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n}$$

El número $|A|$ se puede hallar usando *cualquier* renglón o columna, como se indica en el teorema que sigue.

Teorema sobre expansión de determinantes

Si A es una matriz cuadrada de orden $n > 1$, entonces el determinante $|A|$ se puede hallar multiplicando los elementos de cualquier renglón (o columna) por sus respectivos cofactores y sumando los productos resultantes.

Este teorema resulta útil si aparecen muchos ceros en un renglón o columna, según se ilustra en el ejemplo siguiente.


EJEMPLO 4 Encontrar el determinante de una matriz 4×4

Encuentra $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Observa que, con excepción de uno, todos los elementos del tercer renglón son iguales a cero. Por lo tanto, si expandimos $|A|$ por el tercer renglón habrá —cuando mucho— un término diferente de cero. Específicamente,

$$|A| = (0)A_{31} + (0)A_{32} + (-3)A_{33} + (0)A_{34} = -3A_{33}$$

con $A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Expandimos M_{33} por la columna 1:

$$\begin{aligned} M_{33} &= (1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1)(3) - (-2)(5) + (0)(-5) = 3 + 10 + 0 = 13 \end{aligned}$$

Por tanto, $|A| = -3A_{33} = (-3)(13) = -39$.

En general, si todos los elementos de algún renglón (o columna) de A son iguales a cero, con excepción de uno, y si el determinante $|A|$ se expande por ese renglón (o columna), todos los términos se cancelan, menos el producto de ese elemento con su cofactor. Si *todos* los elementos de un renglón (o columna) son iguales a cero, tenemos el siguiente teorema.

Teorema sobre un renglón de ceros

Si todo elemento de un renglón (o columna) de una matriz cuadrada A es igual a cero, entonces $|A| = 0$.

DEMOSTRACIÓN Si todo elemento de un renglón (o columna) de una matriz cuadrada A es igual a cero, entonces la expansión por ese renglón (o columna) es una suma de términos que son iguales a cero (porque cada término es cero por su respectivo cofactor). De ahí que esta suma sea igual a cero. Así, concluimos que $|A| = 0$.

En la sección anterior encontramos que si no podíamos obtener la matriz identidad en el lado izquierdo de la matriz asociada, la matriz original no era invertible. Si obtenemos un renglón de ceros en este proceso, ciertamente no podremos obtener la matriz identidad. La combinación de esto con el teorema anterior nos lleva al teorema siguiente.

Teorema sobre invertibilidad de matrices

Si A es una matriz cuadrada, entonces A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.

9.8 Ejercicios

Ejercicios 1 al 4: encuentra todos los menores y cofactores de los elementos de la matriz.

$$1 \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3 \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4 \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 5 al 8: halla el determinante de la matriz en el ejercicio dado.

5 Ejercicio 1

6 Ejercicio 2

7 Ejercicio 3

8 Ejercicio 4

Ejercicios 9 al 20: encuentra el determinante de la matriz.

$$9 \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$10 \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$11 \begin{bmatrix} a & -a \\ b & -b \end{bmatrix}$$

$$12 \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

$$13 \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$14 \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$15 \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$16 \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$17 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$18 \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$19 \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

$$20 \begin{bmatrix} a & u & v & w \\ 0 & b & x & y \\ 0 & 0 & c & z \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

Ejercicios 21 al 28: verifica la identidad al expandir cada determinante.

$$21 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$22 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

$$23 \begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$24 \begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$25 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ ka+c & kb+d \end{vmatrix}$$

$$26 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ka+b \\ c & kc+d \end{vmatrix}$$

$$27 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{vmatrix}$$

$$28 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+e & d+f \end{vmatrix}$$

29. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n tal que $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Demuestra que $|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

30. Si $A = (a_{ij})$ es cualquier matriz 2×2 tal que $|A| \neq 0$, prueba que A tiene una inversa y encuentra una fórmula general para A^{-1} .

Ejercicios 31 al 34: sea $I = I_2$ la matriz identidad de orden 2 y $f(x) = |A - xI|$. Encuentra (a) el polinomio $f(x)$ y (b) los ceros de $f(x)$. (En el estudio de matrices, $f(x)$ es el polinomio característico de A , y los ceros de $f(x)$ son los valores característicos (o eigenvalores) de A .)

$$31 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$32 A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$33 A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$34 A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 35 al 38: sea $I = I_3$ y sea $f(x) = |A - xI|$. Encuentra (a) el polinomio $f(x)$ y (b) los ceros de $f(x)$.

$$35 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$36 A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$37 A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$38 A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 39 al 42: expresa el determinante en la forma $ai + bj + ck$ para números reales a, b y c .

$$39 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$40 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$41 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -6 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$42 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -6 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$46 \begin{bmatrix} 4.2 & 1.7 & -2 & -4 \\ -7 & 0.1 & 4.6 & 2.7 \\ 4.1 & -7 & 12 & 6.8 \\ 4.6 & 2 & 3.2 & 1.2 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 47 y 48: sea $I = I_3$ y sea $f(x) = |A - xI|$. (a) Encuentra el polinomio $f(x)$, y (b) grafica f y calcula los valores característicos de A .

$$47 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$48 A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 43 al 46: encuentra el determinante de la matriz.

$$43 \begin{bmatrix} 29 & -17 & 90 \\ -34 & 91 & -34 \\ 48 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$44 \begin{bmatrix} -2 & 5.5 & 8 \\ -0.3 & 8.5 & 7 \\ 4.9 & 6.7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$45 \begin{bmatrix} 4 & -7 & -3 & 13 \\ -17 & -0.8 & 5 & 0.9 \\ 1.1 & 0.2 & 10 & -4 \\ 3 & -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

9.9

Propiedades de los determinantes

Evaluar un determinante usando el teorema de expansión que se explicó en la sección 9.8 es poco eficiente para matrices de orden alto. Por ejemplo, si el determinante de una matriz de orden 10 es expandido por cualquier renglón, se obtiene una suma de 10 términos, y cada término contiene el determinante de una matriz de orden 9, que es un cofactor de la matriz original. Si cualquiera de los últimos determinantes se expande por un renglón (o columna), se obtiene una suma de 9 términos, cada uno de los cuales contiene el determinante de una matriz de octavo orden. Por lo tanto, en esta etapa hay 90 determinantes de matrices de octavo orden por evaluar. El proceso podría continuar hasta que sólo quedarán determinantes de matrices de segundo orden. ¡Puedes verificar que hay 1 814 400 de tales matrices! A menos que muchos de los elementos de la matriz original sean iguales a cero, hacer todos los cálculos es un trabajo enorme.

En esta sección estudiaremos reglas que simplifican la evaluación de determinantes. El principal uso de estas reglas es introducir ceros en el determinante, aunque también sirven para cambiar el determinante a **forma escalonada**; es decir, a una forma en que los elementos debajo de los elementos de la diagonal principal son todos cero (ve la sección 9.5). Las transformaciones sobre renglones expresadas en el teorema a continuación son las mismas que las transformaciones elementales de renglón de una matriz que presentamos en la sección 9.5. Sin embargo, para los determinantes también podemos usar transformaciones similares en las columnas.

Teorema sobre transformaciones de renglón y columna de un determinante

Sea A una matriz cuadrada de orden n .

- (1) Si a partir de A se obtiene una matriz B al intercambiar dos renglones (o columnas), entonces $|B| = -|A|$.
- (2) Si a partir de A se obtiene B al multiplicar cada elemento de un renglón (o columna) de A por un número real k , entonces $|B| = k|A|$.
- (3) Si a partir de A se obtiene B al sumar k veces cualquier renglón (o columna) de A a otro renglón (o columna) para un número real k , entonces $|B| = |A|$; es decir, los determinantes de B y A son iguales.

Al utilizar el teorema, nos referimos a los renglones (o columnas) del determinante en la forma obvia. Por ejemplo, la propiedad 3 se puede expresar así: *sumar k veces cualquier renglón (o columna) a otro renglón (o columna) de un determinante no afecta el valor del determinante*.

Las transformaciones de renglón de los determinantes se especifican con los símbolos $R_i \leftrightarrow R_j$, $kR_i \rightarrow R_i$ y $kR_i + R_j \rightarrow R_j$, que se introdujeron en la sección 9.5. Se usan símbolos análogos en las transformaciones de columna. Por ejemplo, $kC_i + C_j \rightarrow C_j$ quiere decir "sumar k veces la i -ésima columna a la j -ésima columna".

La propiedad 2 del teorema sobre transformaciones de renglón y columna es útil para hallar factores de determinantes. A fin de ilustrar esto, para un determinante de una matriz de tercer orden, tenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Se cumplen fórmulas semejantes si k es un factor común de los elementos de cualquier otro renglón o columna. Al referirnos a esta manipulación, muchas veces usamos la frase: *k es un factor común del renglón (o columna)*.

Las próximas ilustraciones se refieren al teorema anterior, con la razón de cada igualdad indicada a la derecha.

ILUSTRACIÓN Transformación de determinantes

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$ (propiedad 1)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

2 es un factor común de la columna 1 (propiedad 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$2C_2 + C_1 \rightarrow C_2$ (propiedad 3)

(continúa)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 10 & -6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -3R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \\ \text{(propiedad 3 aplicada dos veces)} \end{array}$$

Teorema sobre renglones idénticos

Si dos renglones (o columnas) de una matriz cuadrada A son idénticos, entonces $|A| = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Si B es la matriz que se obtiene a partir de A al intercambiar los dos renglones (o columnas) idénticos, entonces B y A son las mismas y, consecuentemente, $|B| = |A|$. Sin embargo, por la propiedad 1 del teorema sobre transformaciones de renglón y columna de un determinante, $|B| = -|A|$ y, de ahí, $-|A| = |A|$. Así, $2|A| = 0$, por lo cual $|A| = 0$.

EJEMPLO 1 Uso de transformaciones de renglón y columna

Encuentra $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Pensamos usar la propiedad 3 del teorema sobre transformaciones de renglón y columna para introducir tres ceros en algún renglón o columna. Es conveniente trabajar con un elemento de la matriz que sea igual a 1, ya que esto permite evitar el uso de fracciones. Si 1 no es un elemento de la matriz original, siempre es posible introducir el número 1 usando la propiedad 2 o 3 del teorema. En este ejemplo, 1 aparece en el renglón 3 y procedemos como sigue, con la razón de cada igualdad indicada a la derecha.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} && -2R_1 + R_3 \rightarrow R_1 \\ &&& 3R_3 + R_4 \rightarrow R_4 \\ &= (1) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} && \text{expandir por la primera columna} \\ &= \begin{vmatrix} 23 & 4 & 22 \\ 0 & -1 & 0 \\ -28 & -6 & -32 \end{vmatrix} && 5C_1 + C_3 \rightarrow C_1 \\ &&& 6C_1 + C_2 \rightarrow C_2 \\ &= (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 23 & 22 \\ -28 & -32 \end{vmatrix} && \text{expandir por el segundo renglón} \\ &= (-1)[(23)(-32) - (-28)(22)] && \text{definición de determinante} \\ &= 120 \end{aligned}$$

En los dos ejemplos siguientes se expone el uso de la propiedad 2 del teorema sobre transformaciones de renglón y columna de un determinante.



EJEMPLO 2 Eliminación de factores comunes de renglones

Encuentra $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 14 & -6 & 4 \\ 4 & -5 & 12 \\ -21 & 9 & -6 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} |A| &= 2 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 12 \\ -21 & 9 & -6 \end{vmatrix} && 2 \text{ es un factor común del renglón 1} \\ &= (2)(-3) \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 12 \\ 7 & -3 & 2 \end{vmatrix} && -3 \text{ es un factor común del renglón 3;} \\ &= 0 && \text{dos renglones son idénticos} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Eliminación de un factor común de una columna

Sin expandir, demuestra que $a - b$ es un factor de $|A|$ si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-b & b & c \\ a^2-b^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} && -C_2 + C_1 \rightarrow C_2 \\ &= (a-b) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ a+b & b^2 & c^2 \end{vmatrix} && a-b \text{ es un factor} \\ &&& \text{común de la columna 1} \end{aligned}$$

En consecuencia, $|A|$ es igual a $a - b$ veces el último determinante, y así $a - b$ es un factor de $|A|$.

Los determinantes surgen en el estudio de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. Para ilustrar esto, consideremos dos ecuaciones lineales con dos variables x y y :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$$

donde por lo menos haya un coeficiente diferente de cero en cada ecuación. Podemos suponer que $a_{11} \neq 0$, porque, de otra forma, $a_{12} \neq 0$ y entonces

podríamos considerar a y como la primer variable, en lugar de x . Usaremos transformaciones elementales de renglón para obtener la matriz de un sistema equivalente con $a_{21} = 0$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{a_{21}}{a_{11}}R_1 + R_2} R_2 \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ 0 & a_{22} - \left(\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right) & k_2 - \left(\frac{a_{21}k_1}{a_{11}}\right) \end{array} \right]$$

$$a_{11}R_2 \rightarrow R_2 \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ 0 & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) & (a_{11}k_2 - a_{21}k_1) \end{array} \right]$$

Así, el sistema dado equivale a

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = a_{11}k_2 - a_{21}k_1 \end{cases}$$

que también se puede escribir

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, podemos despejar y de la segunda ecuación para obtener

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

La demostración de este enunciado se ha dejado como el ejercicio de análisis 7 al final del capítulo.

El valor correspondiente de x se encuentra sustituyendo y en la primera ecuación, lo que lleva a

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (*)$$

Esto demuestra que si el determinante de la matriz de coeficientes de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables no es cero, entonces el sistema tiene una solución única. Las dos últimas fórmulas para x y y como cocientes de determinantes constituyen la **regla de Cramer** para dos variables.

Hay una forma fácil de recordar la regla de Cramer. Sea

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

la matriz de coeficientes del sistema, y denotemos con D_x la matriz obtenida de D al sustituir los coeficientes a_{11}, a_{21} de x por los números k_1, k_2 , res-

pectivamente. Del mismo modo, denotemos con D_2 la matriz obtenida de D reemplazando los coeficientes a_{12} , a_{22} de y por los números k_1 , k_2 , respectivamente. Así,

$$D_1 = \begin{bmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{bmatrix}$$

Si $|D| \neq 0$, la solución (x, y) está dada por las siguientes fórmulas.

Regla de Cramer para dos variables

$$x = \frac{|D_1|}{|D|}, \quad y = \frac{|D_2|}{|D|}$$



EJEMPLO 4 Aplicación de la regla de Cramer en la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales

Usa la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN El determinante de la matriz de coeficientes es

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 29.$$

Con la notación introducida antes, tenemos

$$|D_1| = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -25, \quad |D_2| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 22.$$

Por tanto,
$$x = \frac{|D_1|}{|D|} = \frac{-25}{29}, \quad y = \frac{|D_2|}{|D|} = \frac{22}{29}.$$

Así, el sistema tiene la solución única $(-\frac{25}{29}, \frac{22}{29})$.

La regla de Cramer se puede extender a sistemas de n ecuaciones lineales con n variables x_1, x_2, \dots, x_n , donde la i -ésima ecuación tiene la forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = k_i.$$

Para resolver este sistema, denotemos con D la matriz de coeficientes y con D_{x_i} la matriz que se obtiene al sustituir los coeficientes de x_i en D por los números k_1, \dots, k_n que aparecen en la columna a la derecha de los signos igual en el sistema. Si $|D| \neq 0$, entonces el sistema tiene la solución única siguiente.

Regla de Cramer (forma general)

$$x_1 = \frac{|D_{x_1}|}{|D|}, \quad x_2 = \frac{|D_{x_2}|}{|D|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{|D_{x_n}|}{|D|}$$

EJEMPLO 5 Uso de la regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales

Con la regla de Cramer resuelve el sistema

$$\begin{cases} x - 2z = 3 \\ -y + 3z = 1 \\ 2x + 5z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Sólo enumeraremos los diversos determinantes. Comprueba los resultados.

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -9, \quad |D_x| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 27, \quad |D_z| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

Por la regla de Cramer, la solución es

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-15}{-9} = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{27}{-9} = -3, \quad z = \frac{|D_z|}{|D|} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$$

La regla de Cramer resulta ineficaz si se aplica a sistemas con un gran número de ecuaciones, ya que deben evaluarse muchos determinantes de matrices de orden alto. Observa también que la regla de Cramer no se puede usar directamente si $|D| = 0$ o si el número de ecuaciones no es el mismo que el número de variables. Para cálculos numéricos, los métodos inverso y de matrices son superiores a la regla de Cramer; sin embargo, la formulación de la regla de Cramer es teóricamente útil.

9.9 Ejercicios

Ejercicios 1 al 14: sin expandir, explica por qué es verdadero el enunciado.

$$1 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$4 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$5 \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$6 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$8. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$9. \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$10. \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad 12. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$13. \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$14. \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ejercicios 15 al 24: encuentra el determinante de la matriz después de introducir ceros, como en el ejemplo 1.

$$15. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \quad 16. \begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$17. \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix} \quad 18. \begin{vmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 5 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$19. \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} \quad 20. \begin{vmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \quad 22. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$23. \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$24. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

25. Demuestra que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

(Sugerencia: véase el ejemplo 3.)

26. Demuestra que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

27. Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix},$$

prueba que $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

28. Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{bmatrix},$$

demuestra que

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}.$$

29. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices cuadradas arbitrarias de segundo orden, demuestra que $|AB| = |A||B|$.

30. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n y k es cualquier número real, demuestra que $|kA| = k^n|A|$. (Sugerencia: usa la propiedad 2 del teorema sobre transformaciones de renglón o columna de un determinante.)

- 31 Con las propiedades de los determinantes, demuestra que la siguiente es una ecuación de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- 32 Usa las propiedades de los determinantes para demostrar que la siguiente es una ecuación de un círculo que pasa por tres puntos no colineales (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicios 33 al 42: utiliza la regla de Cramer, cuando sea aplicable, para resolver el sistema.

$$33 \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$$

$$34 \begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$$

$$35 \begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x - 7y = 24 \end{cases}$$

$$36 \begin{cases} 7x - 8y = 9 \\ 4x + 3y = -10 \end{cases}$$

$$37 \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = 12 \end{cases}$$

$$38 \begin{cases} 3p - q = 7 \\ -12p + 4q = 3 \end{cases}$$

$$39 \begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 13 \end{cases}$$

$$40 \begin{cases} x + 3y - z = -3 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$$

$$41 \begin{cases} 5x + 2y - z = -7 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 3y + z = 17 \end{cases}$$

$$42 \begin{cases} 4x - y + 3z = 6 \\ -8x + 3y - 5z = -6 \\ 5x - 4y = -9 \end{cases}$$

- 43 Usa la regla de Cramer para despejar x en el sistema.

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + \quad + fz = g \\ hx + iy = j \end{cases}$$

9.10

Fracciones parciales

En esta sección demostraremos la forma de usar sistemas de ecuaciones para descomponer expresiones racionales en sumas de expresiones más sencillas. Esta técnica es útil en cursos de matemáticas avanzadas.

Podemos comprobar que

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{-1}{x + 1},$$

al sumar las fracciones $1/(x - 1)$ y $-1/(x + 1)$ para obtener $2/(x^2 - 1)$. La expresión del lado derecho se llama *descomposición en fracciones parciales* de $2/(x^2 - 1)$.

En teoría, es posible escribir cualquier expresión racional como una suma de expresiones racionales cuyos denominadores tienen potencias de polinomios de grado no mayor que dos. En particular, si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios y el grado de $f(x)$ es menor que el grado de $g(x)$, es posible probar que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = F_1 + F_2 + \cdots + F_r,$$

tal que cada F_i tiene una de las formas

$$\frac{A}{(px + q)^m} \quad \text{o} \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

donde A y B son números reales, m y n son enteros no negativos y el polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ es irreducible sobre \mathbb{R} (es decir, carece de cero real). La suma $F_1 + F_2 + \cdots + F_r$ es la *descomposición en fracciones parciales* de $f(x)/g(x)$, y cada F_i es una *fracción parcial*.

Para encontrar la descomposición de fracción parcial de $f(x)/g(x)$, es esencial que $f(x)$ tenga menor grado que $g(x)$. Si no es el caso, es factible usar división larga para llegar a dicha expresión; por ejemplo, dado

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1},$$

obtenemos

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1} = x - 6 + \frac{6x - 9}{x^2 - 1}.$$

Entonces, encontramos la descomposición de fracción parcial de $(6x - 9)/(x^2 - 1)$.

Puedes usar estas guías para obtener descomposiciones.

Guías para hallar descomposiciones en fracciones parciales de $f(x)/g(x)$

- 1 Si el grado del numerador $f(x)$ no es menor que el grado del denominador $g(x)$, usa la división larga para obtener la forma adecuada.
- 2 Factoriza el denominador $g(x)$ en un producto de factores lineales $px + q$ o factores cuadráticos irreducibles $ax^2 + bx + c$, y agrupa los factores repetidos, de modo que $g(x)$ sea producto de factores *diferentes* de la forma $(px + q)^m$ o $(ax^2 + bx + c)^n$ para un entero no negativo m o n .

- 3 Aplica las siguientes reglas a los factores encontrados en la guía 2.
Regla A: para cada factor de la forma $(px + q)^m$ con $m \geq 1$, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de m fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1}{px + q} + \frac{A_2}{(px + q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px + q)^m},$$

donde cada numerador A_i es un número real.

Regla B: para cada factor de la forma $(ax^2 + bx + c)^n$ con $n \geq 1$ y $ax^2 + bx + c$ irreducible, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de n fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

donde cada A_i y cada B_i es un número real.

- 4 Encuentra los números A_i y B_i de la guía 3.

Aplicaremos las guías anteriores en los próximos ejemplos. Por conveniencia usaremos las variables A , B , C , etc., en lugar de las variables con subíndices, como A_i y B_i dadas en las guías.



EJEMPLO 1 Descomposición en fracciones parciales
en que cada denominador es lineal

Encuentra la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

SOLUCIÓN

Guía 1 El grado del numerador, 2, es menor que el grado del denominador, 3, por lo que no se requiere una división larga.

Guía 2 Factorizamos el denominador:

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x + 3)(x - 1)$$

Guía 3 Cada factor del denominador tiene la forma indicada en la regla A con $m = 1$. Así, al factor x corresponde una fracción parcial de la forma A/x . Del mismo modo, a los factores $x + 3$ y $x - 1$ corresponden fracciones parciales de la forma $B/(x + 3)$ y $C/(x - 1)$, respectivamente. La descomposición de fracción parcial tiene la forma

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1}$$

Guía 4 Encontramos los valores de A , B y C de la guía 3. Al multiplicar ambos lados de la descomposición de fracción parcial por el mínimo común denominador, $x(x + 3)(x - 1)$, resulta

$$\begin{aligned} 4x^2 + 13x - 9 &= A(x + 3)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 3) \\ &= A(x^2 + 2x - 3) + B(x^2 - x) + C(x^2 + 3x) \\ &= (A + B + C)x^2 + (2A - B + 3C)x - 3A. \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de potencias semejantes de x en cada lado de la última ecuación, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ 2A - B + 3C = 13 \\ -3A = -9 \end{cases}$$

Con los métodos de la sección 9.5 se obtiene la solución $A = 3$, $B = -1$ y $C = 2$; por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x + 3)(x - 1)} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x + 3} + \frac{2}{x - 1}$$

Hay una forma alterna para hallar A , B y C si todos los factores del denominador son lineales y no repetidos, como en este ejemplo. En lugar de igualar coeficientes y usar un sistema de ecuaciones, comenzamos con la ecuación

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x + 3)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 3).$$

(continúa)

Luego sustituimos valores para x para hacer los factores, x , $x - 1$ y $x + 3$, iguales a cero. Si $x = 0$ y simplificamos, se obtiene

$$-9 = -3A, \quad \text{o} \quad A = 3.$$

Con $x = 1$ en la ecuación llegamos a $8 = 4C$, o sea, $C = 2$. Por último, si $x = -3$, entonces tenemos $-12 = 12B$, o sea, $B = -1$.



EJEMPLO 2 Descomposición en fracciones parciales con un factor lineal repetido

Encuentra la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x - 3)^2}$$

SOLUCIÓN

Guía 1 El grado del numerador, 2, es menor que el grado del denominador, 3, por lo que no se requiere división larga.

Guía 2 El denominador, $x(x - 3)^2$, ya está factorizado.

Guía 3 Por la regla A con $m = 1$, hay una fracción parcial de la forma A/x correspondiente al factor x . En seguida, aplicando la regla A con $m = 2$, encontramos que el factor $(x - 3)^2$ determina una suma de dos fracciones parciales de la forma $B/(x - 3)$ y $C/(x - 3)^2$. De esta manera, la descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x - 3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2}$$

Guía 4 Para hallar A , B y C , comenzamos por multiplicar ambos lados de la descomposición en fracciones parciales de la guía 3 por el MCD, $x(x - 3)^2$:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x - 36 &= A(x - 3)^2 + Bx(x - 3) + Cx \\ &= A(x^2 - 6x + 9) + B(x^2 - 3x) + Cx \\ &= (A + B)x^2 + (-6A - 3B + C)x + 9A \end{aligned}$$

A continuación, igualamos los coeficientes de potencias semejantes de x , con lo que resulta el sistema

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -6A - 3B + C = 10 \\ 9A = -36 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones tiene la solución $A = -4$, $B = 5$ y $C = 1$; por lo tanto, la descomposición de fracción parcial es

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x - 3)^2} = \frac{-4}{x} + \frac{5}{x - 3} + \frac{1}{(x - 3)^2}$$

Igual que en el ejemplo 1, podríamos obtener A y C comenzando con la ecuación

$$x^2 + 10x - 36 = A(x - 3)^2 + Bx(x - 3) + Cx$$

y luego reemplazamos valores para x que igualen a cero los factores, $x - 3$ y x . Así, con $x = 3$, obtenemos $3 = 3C$, o sea, $C = 1$. Con $x = 0$ resulta $-36 = 9A$, esto es, $A = -4$. El valor de B se encuentra con una de las ecuaciones del sistema.

EJEMPLO 3 Descomposición en fracciones parciales con un factor cuadrático irreducible

Encuentra la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}$$

SOLUCIÓN

Guía 1 El grado del numerador, 3, es igual al grado del denominador. Por lo tanto, se requiere división larga y se obtiene

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}$$

Guía 2 El denominador se puede factorizar por agrupación:

$$2x^3 - x^2 + 8x - 4 = x^2(2x - 1) + 4(2x - 1) = (x^2 + 4)(2x - 1)$$

Guía 3 Al aplicar la regla B al factor cuadrático irreducible $x^2 + 4$ de la guía 2, vemos que una de las fracciones parciales tiene la forma $(Ax + B)/(x^2 + 4)$. Según la regla A, también hay una fracción parcial $C/(2x - 1)$ correspondiente a $2x - 1$. En consecuencia,

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{2x - 1}$$

Guía 4 Multiplicamos ambos lados de la descomposición de fracción parcial de la guía 3 por el MCD, $(x^2 + 4)(2x - 1)$, con lo cual

$$\begin{aligned} x^2 - x - 21 &= (Ax + B)(2x - 1) + C(x^2 + 4) \\ &= 2Ax^2 - Ax + 2Bx - B + Cx^2 + 4C \\ &= (2A + C)x^2 + (-A + 2B)x - B + 4C \end{aligned}$$

Esto lleva al sistema

$$\begin{cases} 2A + C = 1 \\ -A + 2B = -1 \\ -B + 4C = -21 \end{cases}$$

Este sistema tiene la solución $A = 3$, $B = 1$ y $C = -5$. Así, la descomposición en fracciones parciales de la guía 3 es

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{2x - 1}$$

(continúa)

y, por lo tanto, la descomposición de la expresión dada (consulta la guía 1) es

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{2x - 1}$$

EJEMPLO 4 Descomposición en fracciones parciales con un factor cuadrático repetido

Encuentra la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

SOLUCIÓN

Guía 1 El grado del numerador, 3, es menor que el grado del denominador, 4, por lo que no se requiere división larga.

Guía 2 El denominador, $(x^2 + 1)^2$, ya está en forma factorizada.

Guía 3 Aplicamos la regla B con $n = 2$ a $(x^2 + 1)^2$, para obtener la descomposición de fracción parcial

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

Guía 4 Al multiplicar ambos lados de la descomposición de la guía 3 por $(x^2 + 1)^2$ obtenemos

$$\begin{aligned} 5x^3 - 3x^2 + 7x - 3 &= (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D \\ &= Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D) \end{aligned}$$

Al comparar los coeficientes de x^3 y x^2 obtenemos $A = 5$ y $B = -3$. De los coeficientes de x , vemos que $A + C = 7$. Así, $C = 7 - A = 7 - 5 = 2$. Por último, comparando los términos constantes resulta $B + D = -3$ y $D = -3 - B = -3 - (-3) = 0$. Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{5x - 3}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

9.10 Ejercicios

Ejercicios 1 al 28: encuentra la descomposición en fracciones parciales.

1 $\frac{8x - 1}{(x - 2)(x + 3)}$

2 $\frac{x - 29}{(x - 4)(x + 1)}$

5 $\frac{4x^2 - 15x - 1}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)}$

6 $\frac{x^2 + 19x + 20}{x(x + 2)(x - 5)}$

3 $\frac{x + 34}{x^2 - 4x - 12}$

7 $\frac{4x^2 - 5x - 15}{x^3 - 4x^2 - 5x}$

4 $\frac{5x - 12}{x^2 - 4x}$

8 $\frac{37 - 11x}{(x + 1)(x^2 - 5x + 6)}$

9 $\frac{2x+3}{(x-1)^2}$

10 $\frac{5x^2-4}{x^2(x+2)}$

21 $\frac{4x^3-x^2+4x+2}{(x^2+1)^2}$

11 $\frac{19x^2+50x-25}{3x^3-5x^2}$

12 $\frac{10-x}{x^2+10x+25}$

22 $\frac{3x^2+13x-1}{(x^2+4)^2}$

13 $\frac{x^2-6}{(x+2)^2(2x-1)}$

14 $\frac{2x^2+x}{(x-1)^2(x+1)}$

23 $\frac{2x^4-2x^3+6x^2-5x+1}{x^3-x^2+x-1}$

15 $\frac{3x^4+11x^3+16x^2+5}{x(x+1)^2}$

16 $\frac{4x^3+3x^2+5x-2}{x^2(x+2)}$

24 $\frac{x^3}{x^3-3x^2+9x-27}$

25 $\frac{3x^2-16}{x^2-4x}$

26 $\frac{2x^3+7x}{x^2+6x+9}$

17 $\frac{x^2+x-6}{(x^2+1)(x-1)}$

18 $\frac{x^2-x-21}{(x^2+4)(2x-1)}$

27 $\frac{4x^3+4x^2-4x+2}{2x^2-x-1}$

19 $\frac{9x^2-3x+8}{x^3+2x}$

20 $\frac{2x^3+2x^2+4x-3}{x^4+x^2}$

28 $\frac{x^5-5x^4+7x^3-x^2-4x+12}{x^3-3x^2}$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 9

Ejercicios 1 al 16: resuelve el sistema.

1 $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 3x+4y=1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x-3y=4 \\ -2x+6y=2 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 4x-3y-z=0 \\ x-y-z=0 \\ 3x-y+3z=0 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-2y+z=0 \\ 3x+3y+2z=0 \end{cases}$

3 $\begin{cases} y+4=x^2 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x-y=7 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 4x+2y-z=1 \\ 3x+2y+4z=2 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-3y=17 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 9x^2+16y^2=140 \\ x^2-4y^2=4 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 2x=y^2+3z \\ x=y^2+z-1 \\ x^2=xz \end{cases}$

15 $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 4 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \end{cases}$

7 $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 7 \\ \frac{4}{x} - \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2^x + 3^{x+1} = 10 \\ 2^{x+1} - 3^x = 5 \end{cases}$

15 $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 4 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 3x+y-2z=-1 \\ 2x-3y+z=4 \\ 4x+5y-z=-2 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x+3y=0 \\ y-5z=3 \\ 2x+z=-1 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x-y+3z-w=-3 \\ 3x+2y-z+w=13 \\ x-3y+z-2w=-4 \\ -x+y+4z+3w=0 \end{cases}$

Ejercicios 17 al 20: traza la gráfica del sistema.

17
$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 16 \\ y - x^2 > 0 \end{cases}$$

18
$$\begin{cases} y - x \leq 0 \\ y + x \geq 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

19
$$\begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ y - 3x \leq 4 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$$

20
$$\begin{cases} x^2 - y < 0 \\ y - 2x < 5 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Ejercicios 21 al 30: expresa como una sola matriz.

21
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

22
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

23
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

24
$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

25
$$2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

26
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

27
$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

28
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

29
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right\}$$

30
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Ejercicios 31 al 34: halla la inversa de la matriz.

31
$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

32
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

33
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

34
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

35 Utiliza el resultado del ejercicio 31 y resuelve el sistema

$$\begin{cases} 5x - 4y = -30 \\ -3x + 2y = -16 \end{cases}$$

36 Emplea el resultado del ejercicio 32 para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ x + 4y + 2z = 15 \\ 3x - 2y + z = -7 \end{cases}$$

Ejercicios 37 al 46: encuentra el determinante de la matriz.

37
$$[-6]$$

38
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

39
$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

40
$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

41
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

42
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -4 \\ 7 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

43
$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

44
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

45
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$45. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 47 y 48: resuelve la ecuación $|A - xI| = 0$.

$$47. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad I = I_2$$

$$48. A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad I = I_3$$

Ejercicios 49 y 50: sin expandir, explica por qué el enunciado es verdadero.

$$49. \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 12 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$50. \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

51. Encuentra el determinante de la matriz (a_{ij}) de $n \times n$ en la que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

52. Sin expandir, demuestra que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$$

Ejercicios 53 y 54: usa la regla de Cramer y resuelve el sistema.

$$53. \begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases} \quad 54. \begin{cases} 2x - 3y + 2z = -3 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ 4x + y - 3z = 4 \end{cases}$$

Ejercicios 55 al 58: encuentra la descomposición en fracciones parciales.

$$55. \frac{4x^2 + 54x + 134}{(x+3)(x^2 + 4x - 5)}$$

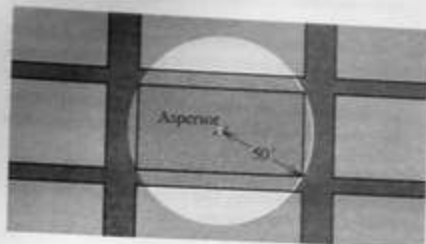
$$56. \frac{2x^2 + 7x + 9}{x^2 + 2x + 1}$$

$$57. \frac{x^2 + 14x - 13}{x^3 + 5x^2 + 4x + 20}$$

$$58. \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 16}{x^4 + 7x^2 + 10}$$

59. Riego de un campo. Se va a poner un aspersor giratorio con alcance de 50 pies en el centro de un campo rectangular (ve la figura). Si el área del campo es de 4000 pies² y el agua debe llegar a las esquinas, encuentra las dimensiones del campo.

Ejercicio 59

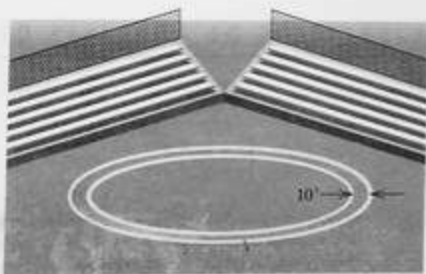


60. Halla las ecuaciones de las dos líneas que son tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 1$ y pasan por el punto $(0, 3)$. (Sugerencia: sea $y = mx + 3$, y determina condiciones en m que garanticen que el sistema tiene sólo una solución.)

61. Contabilidad de nómina. Un contador debe pagar impuestos y bonos sobre nómina a empleados, tomándolos de los \$50 000 de utilidades de la compañía. El total del impuesto es el 40% de la cantidad después de pagar bonos y el total pagado en bonos es el 10% de la cantidad, luego de impuestos. Encuentra la cantidad del impuesto total y del total de bonos.

62. Dimensiones de una pista. Una pista circular debe tener un carril de 10 pies de ancho a su alrededor (ve la figura). La distancia interior alrededor de la pista debe ser el 90% de la distancia exterior. Encuentra las dimensiones de la pista.

Ejercicio 62



63. **Medida de flujo.** Se pueden usar tres tubos de entrada, A, B y C, para llenar un tanque de 1000 pies³. Cuando los tres tubos están en operación, el tanque se llena en 10 h; cuando sólo se usan A y B, el tiempo aumenta a 20 h; con los tubos A y C, el tanque se puede llenar en 12.5 h. Encuentra la medida de caudal individual (en pies³/h) para cada uno de los tres tubos.
64. **Cargos de envío de almacén.** Para despachar un pedido de 150 escritorios, un distribuidor de muebles debe enviarlos desde dos almacenes. El costo de envío por escritorio es de \$24 desde el almacén poniente y de \$35 desde el oriente. Si el cargo total de envío es de \$4205, ¿cuántos escritorios debe enviar de cada local?
65. **Tarifas de correo expreso.** Una compañía de correo expreso cobra \$15 por entregar una carta al día siguiente, siempre que las dimensiones del sobre estándar satisfagan estas tres condiciones: (a) la longitud, que es la mayor de las dos dimensiones, debe ser cuando más de 12 pulg.; (b) el ancho debe ser, cuando mucho, de 8 pulg.; y (c) el ancho debe ser cuando más la mitad del largo. Encuentra y grafica un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para dimensiones de un sobre estándar.
66. **Actividades de un venado.** Un venado pasa el día en tres actividades básicas: descansar, buscar alimento y pastar. Por lo menos debe descansar seis horas de cada día y la cantidad de horas gastadas en buscar alimento es por lo menos el doble del número de horas que gasta en pastar. Con x como la cantidad de horas empleadas en buscar alimento y y como las utilizadas en pastar, encuentra y grafica el sistema de desigualdades que describa las posibles divisiones del día.

67. **Programación de producción.** Una compañía fabrica dos tipos de podadoras de motor y una cortadora. Todos los productos son de tan alta calidad, que la compañía puede vender todos los que haga, pero su capacidad de producción es limitada en las secciones de maquinado, soldadura y ensamble. Cada semana, la compañía dispone de 600 h de mano de obra para el maquinado, 300 h para soldadura y 550 h para ensamble. En la tabla que sigue mostramos la cantidad de horas requerida para la producción de un solo artículo. Las utilidades por la venta de una podadora y una cortadora son de \$100 y \$80, respectivamente. ¿Cuántas podadoras y cortadoras se deben fabricar cada semana para maximizar la utilidad?

Producto	Maquinado	Soldadura	Ensamble
Podadora	6	2	5
Cortadora	4	3	5

68. **Aumentar al máximo el ingreso por inversión.** Una pareja de jubilados desea invertir \$150 000 diversificando la inversión en tres aspectos: una acción de alto riesgo que tenga un retorno anual esperado (intereses) de 15%, una acción de bajo riesgo con un retorno anual esperado de 10% y bonos del gobierno que paguen interés anual de 8% y no tienen riesgo. Para proteger el valor de la inversión, la pareja desea poner por lo menos el doble en la acción de bajo riesgo que en la de alto riesgo y usar el resto en la compra de bonos. ¿Cómo deben invertir su dinero para maximizar el retorno anual esperado?

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 9

1. (a) Es fácil ver que el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

no tiene solución. Sea $x + by = 5$ la segunda ecuación, resuelve el sistema para $b = 1.99$ y $b = 1.999$. Observa que un pequeño cambio en b produce una gran modificación en x y y . Dicho sistema se conoce como sistema mal condicionado (en muchos tex-

tos de análisis numérico aparece una definición precisa).

- (b) Despeja x y y de este sistema en términos de b y explica por qué un pequeño cambio en b (para b cercano a 2) produce una alteración considerable en x y y .
- (c) Si b se vuelve muy grande, ¿qué le pasa a la solución del sistema?

2. Tendencia de migración de aves. Consulta el ejercicio 30 de la sección 9.5. Supongamos que las poblaciones iniciales en las islas A, B y C son 12 000, 9000 y 14 000, respectivamente.

(a) Representa las poblaciones iniciales con una matriz D de 1×3 . Representa las proporciones de las poblaciones que emigran a cada isla con una matriz E de 3×3 . (Sugerencia: el primer renglón de E es 0.90, 0.10 y 0.00, lo que indica que 90% de las aves en A se quedan en A, 10% de los ejemplares en A emigran a B y ninguno en A emigra a C.)

(b) Encuentra el producto $F = DE$ e interpreta el significado de los elementos de F .

(c) Con equipo de cómputo, multiplica F por E y continúa multiplicando este resultado por E hasta que se haga evidente un modelo. ¿Cuál es tu conclusión?

(d) Supongamos que la matriz de la población inicial es D y es igual a $[34\ 000\ 500\ 500]$. Multiplica D por E , y continúa multiplicando el resultado por E hasta configurar un modelo. ¿Cuál es tu conclusión?

3. Explica por qué una matriz A no cuadrada no puede tener una inversa.

4. Distribución de dinero. El rector de una universidad ha recibido presupuestos del director de deportes (DD), del decano de estudiantes (DE) y del presidente de la sociedad de alumnos (PS), en los que proponen la distribución de fondos a los tres departamentos de trabajo básicos de becas, actividades y servicios estudiantiles como se muestra en la tabla.

	Becas	Actividades	Servicios
DD	50%	40%	10%
DE	30%	20%	50%
PS	20%	40%	40%

El Consejo de Regentes ha solicitado que la distribución total de los fondos a estos tres departamentos de trabajo sea en estas proporciones: becas, 34%; actividades, 33% y servicios, 33%. Determina qué porcentaje del total de fondos debe asignar el rector a cada departamento, de modo que los porcentajes gastados en los mismos se ajusten a los requerimientos del Consejo de Regentes.

5. Si $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces $x = -1, 2$ y 3 , encuentra a, b, c y la cuarta raíz de la ecuación.

6. Exploración de un cubo. Utiliza el método de la inversa para hallar una ecuación de la cúbica que pasa por los puntos $(-6, -6)$, $(-4, 3)$, $(2, 2)$ y $(6, 6)$. Ahora, sustituye el punto $(-4, 3)$ con $(-4, y)$, donde y toma diversos valores positivos y negativos, y encuentra la ecuación que pasa por estos puntos. ¿Qué observación general puedes hacer sobre el aspecto de la gráfica y los coeficientes de su ecuación, a medida que el valor de y se vuelve grande positivo o grande negativo? Sugerencia: para facilitar este proceso, asigna

$$[C](1, 1)x^2 + [C](2, 1)x + [C](3, 1)x + [C](4, 1)$$

a Y_1 , donde $[C] = [A]^{-1} \cdot [B]$.

7. Demuestra (+) en la página 715.

8. Dados los puntos $P(-1, 3)$, $Q(0, 4)$ y $R(3, 2)$, encuentra si es posible una ecuación de:

(a) Una recta

(b) Un círculo

(c) Una parábola con eje vertical

(d) Una ecuación cúbica

(e) Una expresión exponencial

Que pase por P, Q y R .

10

Sucesiones, series y probabilidad

10.1 Sucesiones infinitas y notación de sumatoria

10.2 Sucesiones aritméticas

10.3 Sucesiones geométricas

10.4 Inducción matemática

10.5 Teorema del binomio

10.6 Permutaciones

10.7 Permutaciones y combinaciones distinguibles

10.8 Probabilidad

Las sucesiones y la notación de sumatoria que se estudian en la primera sección del capítulo, son muy importantes en matemáticas avanzadas y en aplicaciones prácticas. Las sucesiones aritméticas y geométricas consideradas en las secciones 10.2 y 10.3 resultan de especial interés. A continuación estudiaremos el método de inducción matemática, que suele emplearse para demostrar que cada uno de los enunciados de una sucesión infinita de éstos es verdadero. Como aplicación, lo usamos para demostrar el teorema del binomio en la sección 10.5. La última parte del capítulo está relacionada con procesos de conteo que se presentan con frecuencia en matemáticas y en la vida diaria. Estos procesos incluyen conceptos de permutaciones, combinaciones y probabilidad.

10.1

Sucesiones infinitas y notación de sumatoria

Una sucesión infinita arbitraria se puede denotar como sigue:

Notación de sucesión infinita

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Por conveniencia, algunas veces nos referimos a las sucesiones infinitas como *sucesiones*. Podemos considerar que una sucesión infinita es un conjunto de números reales que está en correspondencia biunívoca con los enteros positivos. Cada número a_n es un **término** de la sucesión, la cual es *ordenada* en el sentido de que hay un **primer término** a_1 , un *segundo término* a_2 , un *cuadragésimo quinto término* a_{45} , y si n denota un entero positivo arbitrario, un **n -ésimo término** a_n . Las sucesiones infinitas se definen a menudo estableciendo una fórmula para calcular el n -ésimo término.

Las sucesiones infinitas son frecuentes en matemáticas; por ejemplo, la sucesión

$$0.6, 0.66, 0.666, 0.6666, 0.66666, \dots$$

puede utilizarse para representar el número racional $\frac{2}{3}$. En este caso, el n -ésimo término se acerca a $\frac{2}{3}$ a medida que n aumenta.

Podemos ver una sucesión infinita como una función. Según la sección 3.4, recordarás que una función f es una correspondencia que asigna a cada número x del dominio D exactamente un número $f(x)$ de la imagen R . Si restringimos el dominio a los enteros positivos $1, 2, 3, \dots$, obtenemos una sucesión infinita, como en la siguiente definición.

Definición de sucesión infinita

Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

En esta obra, la imagen de una sucesión infinita será un conjunto de números reales.

Si una función f es una sucesión infinita, entonces a cada entero positivo n le corresponde un número real $f(n)$. Estos números del intervalo de f pueden representarse al escribir

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

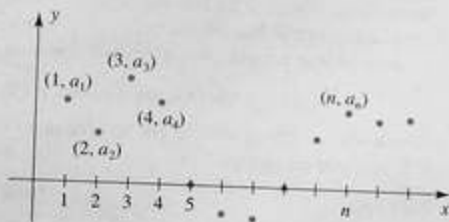
Para obtener la forma de subíndice de una sucesión, según se presenta al principio de esta sección, hacemos $a_n = f(n)$ para todo entero positivo n .

Si consideramos una sucesión como una función f , entonces podemos considerar su gráfica en un plano xy . Como el dominio de f , es el conjunto de enteros positivos, los únicos puntos en la gráfica son

$$(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n), \dots,$$

donde a_n es el n -ésimo término de la sucesión, como se muestra en la figura 1. Algunas veces usamos la gráfica de una sucesión para ilustrar el comportamiento del n -ésimo término a_n cuando n crece sin límite.

Figura 1 Gráfica de una sucesión



Según la definición de igualdad de funciones, vemos que una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

es **igual** a una sucesión

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$$

si y sólo si $a_k = b_k$ para todo entero positivo k .

Otra notación para una sucesión con n -ésimo término a_n es $\{a_n\}$. Por ejemplo, la sucesión $\{2^n\}$ tiene el n -ésimo término $a_n = 2^n$. Con la notación de sucesiones, la escribimos de esta manera:

$$2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$$

Por definición, la sucesión $\{2^n\}$ es la función f con $f(n) = 2^n$ para todo entero positivo n .

EJEMPLO 1 Búsqueda de términos de una sucesión

Escribe los primeros cuatro términos y el décimo término de cada sucesión:

$$(a) \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} \quad (b) \{2 + (0.1)^n\} \quad (c) \left\{ (-1)^{n+1} \frac{n^2}{3n-1} \right\} \quad (d) \{4\}$$

SOLUCIÓN Para hallar los primeros cuatro términos sustituimos, sucesivamente, $n = 1, 2, 3$ y 4 en la fórmula para a_n . El décimo término se encuentra al reemplazar n por 10 . Al sustituir y simplificar llegamos a:

(continúa)

Sucesión	n -ésimo término a_n	Primeros cuatro términos	Décimo término
(a) $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$	$\frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$	$\frac{10}{11}$
(b) $\{2 + (0.1)^n\}$	$2 + (0.1)^n$	2.1, 2.01, 2.001, 2.0001	2.000 000 000 1
(c) $\left\{ (-1)^{n-1} \frac{n^2}{3n-1} \right\}$	$(-1)^{n-1} \frac{n^2}{3n-1}$	$\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{8}, \frac{16}{11}$	$-\frac{100}{29}$
(d) $\{4\}$	4	4, 4, 4, 4	4

La TI-83 Plus cuenta con un modo especial de sucesión que no tiene la TI-86. El uso de este modo se analiza al final de esta sección. Por ahora, consideraremos métodos genéricos que se aplican en ambas calculadoras.

Para generar una sucesión, usamos el comando

$\text{seq}(\text{expresión}, \text{variable}, \text{begin}, \text{end}, \text{increment})$.

(Si se omite increment , el valor por omisión es 1.) Generemos los cuatro primeros términos de la sucesión del ejemplo 1(a).

TI-83 Plus

Generar la sucesión.

2nd LIST D 5
X.T.R.N. - 1 X.T.R.N. + 1) ,
X.T.R.N. + 1 * 4) ENTER

Convertir a fracciones.

MATH 1 ENTER

```
seq(X/(X+1),X,1,
4)
(.5 .666666666667
Ans>Frac
(1/2 2/3 3/4 4/5)
```

TI-86

2nd LIST OPS(F5) MORE seq(F3)
x-VAR - 1 x-VAR + 1) ,
x-VAR + 1 * 4) ENTER

2nd MATH MISCF5 MORE
Frac(F1) ENTER

```
seq(x/(x+1),x,1,4)
(.5 .666666666667 .7
Ans>Frac
(1/2 2/3 3/4 4/5)
```

Nota: El menú que se muestra en la figura aparece sólo después que introduces el comando de sucesión.



EJEMPLO 2 Gráfica de una sucesión

Gráfica la sucesión del ejemplo 1(a); es decir,

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$$

SOLUCIÓN Los valores del dominio son

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

Los valores de la imagen son

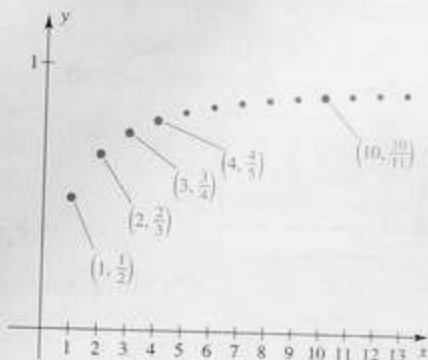
$$\frac{1}{1+1}, \frac{2}{2+1}, \frac{3}{3+1}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

lo que es equivalente a

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

En la figura 2 se muestra una gráfica de los pares ordenados $(n, n/(n+1))$.

Figura 2



Para graficar la sucesión del ejemplo 2 usaremos listas. (Al final de la sección se presenta una demostración de graficado en el modo de sucesión con la TI-83 Plus.)

TI-83 Plus

Almacenar los n primeros enteros positivos en una lista (los valores del dominio).

2nd LIST > 5
X,T,θ,n , X,T,θ,n , 1 , 4)
STO > 2nd L1 ENTER

TI-86

2nd LIST OPS(F5) MORE seq(F3)
x-VAR , x-VAR , 1 , 4)
STO > 2nd LIST NAMES(F3)
xStat(F2) ENTER

Almacena los n primeros términos en una segunda lista (los valores del intervalo).

2nd LIST > 5
X,T,θ,n = (X,T,θ,n + 1) , x-VAR = (x-VAR + 1) ,

(continúa)

$(X, Y, 1, 4) \rightarrow L_1$
 $(1, 2, 3, 4)$
 $\text{seq}(X/(X+1), X, 1,$
 $4) \rightarrow L_2$
 $(.5, .666666666667...$

$\text{seq}(X/(X+1), 4) \rightarrow \text{Stat}$
 $(1, 2, 3, 4)$
 $\text{seq}(X/(X+1), X, 1, 4) \rightarrow \text{Stat}$
 $(.5, .666666666667...$

$X\text{-VAR}$ $(1, 4)$
 $\text{STO} \rightarrow$ 2nd LIST $\text{NAME}(F3)$ $\text{YStat}(F3)$
 ENTER

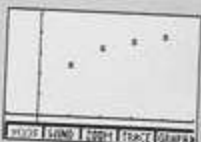
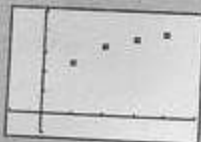
$\text{seq}(X/(X+1), 4) \rightarrow \text{Stat}$
 $(1, 2, 3, 4)$
 $\text{seq}(X/(X+1), X, 1, 4) \rightarrow \text{Stat}$
 $(.5, .666666666667...$

Enciende Stat Plot 1.

2nd STAT PLOT (1) ENTER

2nd STAT $\text{PLOT}(F3)$ $\text{PLOT}(F1)$
 ENTER

Establece una pantalla de $[-1, 5]$ por $[-0.2, 1, 0.2]$ y grafica.



Observa que nuestro método se adapta fácilmente para encontrar 50 (en vez de 4) términos de la sucesión.

En algunas sucesiones expresamos el primer término a_1 , junto con una regla para obtener cualquier término a_{k+1} del término anterior a_k , siempre que $k \geq 1$. Esta expresión se denomina **definición recursiva**, y se dice que la sucesión está definida **recursivamente**.

EJEMPLO 3 Búsqueda de términos de una sucesión definida recursivamente

Encuentra los primeros cuatro términos y el n -ésimo término de la sucesión infinita definida recursivamente por:

$$a_1 = 3, \quad a_{k+1} = 2a_k \quad \text{para } k \geq 1$$

SOLUCIÓN Los primeros cuatro términos son

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 && \text{dados} \\ a_2 &= 2a_1 = 2 \cdot 3 = 6 && k = 1 \\ a_3 &= 2a_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12 && k = 2 \\ a_4 &= 2a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24, && k = 3 \end{aligned}$$

Hemos expresado los términos como productos a fin de obtener alguna información acerca de la naturaleza del n -ésimo término. Si continuamos, llegamos $a_5 = 2^4 \cdot 3$, $a_6 = 2^5 \cdot 3$, y en general

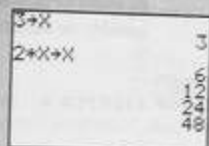
$$a_n = 2^{n-1} \cdot 3$$

para todo entero positivo n .

Podemos generar los términos de una sucesión definida recursivamente almacenando primero un valor *semilla* (o valor inicial) en una variable. Luego, escribimos la definición recursiva en términos de esa variable y almacenamos ese resultado en la misma variable. Podemos usar cualquier variable en la calculadora, pero la más fácil es la localización ANS porque el último resultado calculado se almacena automáticamente ahí. A continuación se presentan dos ejemplos para generar los términos del ejemplo 3; uno para la variable X y otro para la localización ANS. Las secuencias de teclas que se proporcionan son para la TI-83 Plus; simplemente sustituye $\boxed{X \rightarrow \text{VAR}}$ por $\boxed{X \rightarrow \text{AN}}$ para la TI-86. (Las capacidades recursivas de la TI-83 Plus se analizan al final de la sección.)

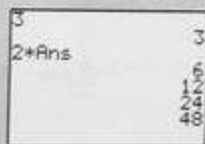
Para generar una sucesión definida recursivamente usando la variable X , utiliza

3 $\boxed{\text{STO} \rightarrow}$ $\boxed{X, T, \theta, n}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ 2 $\boxed{\times}$ $\boxed{X, T, \theta, n}$ $\boxed{\text{STO} \rightarrow}$ $\boxed{X, T, \theta, n}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$...



Para generar una sucesión definida recursivamente usando ANS, utiliza

3 $\boxed{\text{ENTER}}$ 2 $\boxed{\times}$ $\boxed{2\text{nd}}$ $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$...



Si sólo conocemos unos cuantos términos de una sucesión infinita, resulta imposible predecir otros términos; por ejemplo, si nos dan 3, 6, 9, ... y nos piden el cuarto término, no podríamos predecirlo sin tener más información. La sucesión infinita con n -ésimo término

$$a_n = 3n + (1 - n)^3(2 - n)^2(3 - n),$$

tiene como sus cuatro primeros términos 3, 6, 9 y 120. Es posible describir sucesiones cuyos tres primeros términos sean 3, 6 y 9 y el cuarto, cualquier número dado. Esto demuestra que, cuando trabajamos con una sucesión infinita,

resulta esencial contar con información específica respecto del n -ésimo término o conocer un método general que nos permita obtener cada término a partir del anterior. (Ver ejercicio 1 de los ejercicios de análisis del capítulo 10.)

A veces tendremos que hallar la suma de muchos términos de una sucesión infinita. Es más fácil expresar tal suma con la **notación de sumatoria**. Dada una sucesión infinita

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

el símbolo $\sum_{k=1}^m a_k$ representa la suma de los m primeros términos, como sigue.

Notación sumatoria

$$\sum_{k=1}^m a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$$

La letra griega mayúscula sigma, Σ , indica una suma, y el símbolo a_k representa el k -ésimo término. La letra k es el **índice de sumatoria**, o **variable de sumatoria**, y los números 1 y m dan los valores mínimo y máximo de la variable de sumatoria, respectivamente.



EJEMPLO 4 Evaluación de una suma

Encuentra la suma $\sum_{k=1}^4 k^2(k-3)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a_k = k^2(k-3)$. Para hallar la suma, basta sustituir k por los enteros 1, 2, 3 y 4 en sucesión y sumar los términos resultantes:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 k^2(k-3) &= 1^2(1-3) + 2^2(2-3) + 3^2(3-3) + 4^2(4-3) \\ &= (-2) + (-4) + 0 + 16 = 10 \end{aligned}$$

Para encontrar la suma del ejemplo 4 en una calculadora graficadora, simplemente sumamos una sucesión.

TI-83 Plus

Genera la sucesión.

2nd LIST > 5
X,T,θ,n x^2 (X,T,θ,n - 3)
X,T,θ,n , 1 + 4) ENTER

TI-86

2nd LIST OPS(F5) MORE seq(F3)
x-VAR x^2 (x-VAR - 3)
x-VAR , 1 + 4) ENTER

Encuentra la suma de la sucesión.

2nd LIST <1> 5

2nd ANS 1 ENTER

```
seq(X^2(X-3), X, 1,
4)
{-2 -4 0 16}
sum(Ans)
10
```

2nd LIST OPS(F5) MORE sum(F1)

2nd ANS ENTER

```
seq(X^2(X-3), X, 1, 4)
{-2 -4 0 16}
sum Ans
10
```

La letra que usamos para la variable de sumatoria es arbitraria. Para ilustrar lo anterior, si usamos j como variable de sumatoria, entonces

$$\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

que es lo mismo que $\sum_{i=1}^n a_i$. A manera de ejemplo específico, la suma del ejemplo 4 se escribe

$$\sum_{j=1}^4 j^2(j-3).$$

Si n es un entero positivo, S_n denotará la suma de los primeros n términos de una sucesión infinita; por ejemplo, dada la sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

y, en general,

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Observa que también podemos escribir

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = S_2 + a_3$$

$$S_4 = S_3 + a_4$$

y, para toda $n > 1$,

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

El número real S_n se denomina la n -ésima suma parcial de la sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ y la sucesión

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

se denomina **sucesión de sumas parciales**. Las sucesiones de sumas parciales son importantes en el estudio de las *series infinitas*, un tema de cálculo. En la sección 10.3 estudiaremos algunos tipos especiales de series infinitas.

EJEMPLO 5 Búsqueda de los términos de una sucesión de sumas parciales

Encuentra los primeros cuatro términos y el n -ésimo término de la sucesión de sumas parciales asociados con la sucesión $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ de enteros positivos.

SOLUCIÓN Con $a_n = n$, los primeros cuatro términos de la sucesión de sumas parciales son

$$S_1 = a_1 = 1$$

$$S_2 = S_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = 3 + 3 = 6$$

$$S_4 = S_3 + a_4 = 6 + 4 = 10.$$

La suma parcial n -ésima S_n (es decir, la suma de $1, 2, 3, \dots, n$) se puede escribir en cualquiera de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ S_n &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

Al sumar los términos correspondientes a cada lado de estas ecuaciones resulta

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ veces}}$$

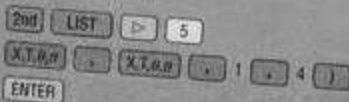
Como la expresión $(n+1)$ aparece n veces en el lado derecho de la última ecuación, vemos que

$$2S_n = n(n+1) \quad \text{o, lo que es equivalente,} \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \square$$

Para encontrar los términos de la sucesión de sumas parciales del ejemplo 5 en una calculadora graficadora, usamos la característica de suma acumulada.

TI-83 Plus

Genera la sucesión.



TI-86



Encuentra los términos de la sucesión de sumas parciales.

2nd LIST > 6
2nd ANS) ENTER

```
seq(X,X,1,4)
{1 2 3 4}
cumSum(Ans)
{1 3 6 10}
```

2nd LIST OPS(F5) MORE MORE
cSum(F3) 2nd ANS) ENTER

```
seq(X,X,1,4)
{1 2 3 4}
cSum(Ans)
{1 3 6 10}
```

C 1 NAMES EDIT
F10 END COPY PASTE CLR

Para graficar la sucesión de sumas parciales, podríamos almacenar los n primeros enteros positivos y la suma acumulada en dos listas y luego graficarlas, como se muestra en el recuadro de la calculadora que aparece a continuación del ejemplo 2.

Si a_k es la misma para todo entero positivo k , por ejemplo $a_k = c$ para un número real c , entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= c + c + c + \cdots + c = nc.\end{aligned}$$

Hemos demostrado la propiedad 1 del teorema que sigue.

Teorema sobre la suma de una constante

$$(1) \sum_{k=1}^n c = nc \quad (2) \sum_{k=m}^n c = (n - m + 1)c.$$

Para demostrar la propiedad 2, escribimos

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^n c &= \sum_{k=1}^n c - \sum_{k=1}^{m-1} c && \text{restar los primeros } m-1 \text{ términos de la suma de } n \text{ términos} \\ &= nc - (m-1)c && \text{usar la propiedad 1 para cada suma.} \\ &= [n - (m-1)]c && \text{factorizar } c \\ &= (n - m + 1)c. && \text{simplificar}\end{aligned}$$

ILUSTRACIÓN Suma de una constante

$$\blacksquare \sum_{k=1}^4 7 = 4 \cdot 7 = 28$$

$$\blacksquare \sum_{k=1}^{10} \pi = 10 \cdot \pi = 10\pi$$

(continúa)

$$\blacksquare \sum_{i=1}^9 9 = (8 - 3 + 1)(9) = 6(9) = 54$$

$$\blacksquare \sum_{i=10}^{20} 5 = (20 - 10 + 1)(5) = 11(5) = 55$$

Como se expone en la propiedad 2 del teorema anterior, el dominio de la variable de sumatoria no tiene que empezar en 1; por ejemplo,

$$\sum_{i=3}^9 a_i = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9.$$

Como otra variante, si el primer término de una sucesión infinita es a_0 , como en

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

entonces podemos considerar sumas de la forma

$$\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

que es la suma de los primeros $n + 1$ términos de la sucesión.

Si la variable de sumatoria no aparece en el término a_i , cabe decir que *todo el término* es una constante; por ejemplo,

$$\sum_{j=1}^n a_i = n \cdot a_i,$$

ya que j no aparece en el término a_i .

La notación de sumatoria sirve para denotar polinomios. Así, si

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

entonces

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

El teorema que sigue en relación con las sumas tiene múltiples usos.

Teorema sobre sumas

Si $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ y $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ son sucesiones infinitas, entonces para todo entero positivo n ,

$$(1) \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$(2) \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$$

$$(3) \sum_{i=1}^n c a_i = c \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \text{ para todo número real } c.$$

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la fórmula 1, escribimos primero

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n).$$

Con el uso repetitivo de las propiedades conmutativa y asociativa de los números reales, podemos reacomodar los términos del lado derecho y obtener

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k. \end{aligned}$$

Para probar la fórmula 3, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (ca_k) &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \\ &= c \left(\sum_{k=1}^n a_k \right). \end{aligned}$$

La demostración de la fórmula 2 se deja como ejercicio.

Uso del modo de sucesión (sequence) de la TI-83 Plus

Oprime **MODE** y usa las teclas del cursor para resaltar Seq y Dot. Apaga Stat Plot 1.

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
Mtr Horiz G-T
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n)=n/(n+1)
u(nMin)=
u(n)=
u(nMin)=
u(n)=
u(nMin)=
```

Listado y graficado de una sucesión

Introduce la sucesión del ejemplo 1(a), $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$.

Y= **X,T,θ,n** **=** **(** **X,T,θ,n** **+** **1** **)**

Nota: u(nMin) puede dejarse en blanco.

Enlista la sucesión.

2nd **QUIT** **2nd** **u** **(** **1** **,** **4** **)** **MATH** **1**

ENTER

Enlista un término específico.

2nd **u** **(** **3** **)** **MATH** **1** **ENTER**

```
u(1,4)*Frac
(1/2 2/3 3/4 4/5)
u(3)*Frac
3/4
```

(continúa)

Establece las variables de la pantalla para graficar los cuatro primeros términos de la sucesión.

WINDOW 1 4 1 1 -1
5 1 -2 1 .2

```

WINDOW
nMin=1
nMax=4
PlotStart=1
PlotStep=1
Ymin=-1
Ymax=.2
Xscl=1
Ymin=-.2
Ymax=1
Yscl=.2

```

Grafica la sucesión al oprimir GRAPH. Oprime TRACE y las teclas izquierda y derecha del cursor para ver los valores de la sucesión.



Generación de una sucesión definida recursivamente

Define recursivamente la sucesión del ejemplo 3.

$$a_1 = 3, \quad a_{k+1} = 2a_k \quad \text{para } k \geq 1.$$

Y= CLEAR 2 × 2nd u (X,T,θ,n - 1)
ENTER 3 ENTER

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n)=2*u(n-1)
u(nMin)=3
u(n)=
u(nMin)=
u(n)=
u(nMin)=

```

Enlista los cuatro primeros términos de la sucesión.

2nd QUIT 2nd u (1 , 4) ENTER

```

u(1,4)
(3 6 12 24)

```

Graficación de una sucesión de sumas parciales

Podemos graficar una sucesión de sumas parciales si definimos u como la sucesión de términos y v como la suma de esa sucesión. Mostraremos esto con la sucesión del ejemplo 5, es decir, $a_n = n$.

Y= CLEAR X,T,θ,n 1
2nd LIST < 5 2nd LIST > 5
2nd u , X,T,θ,n , 1 , X,T,θ,n , 1
1 1 1

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n)=n
u(nMin)=1
v(n)=sum(u,
n,1,n,1)
u(nMin)=1
u(n)=

```


Establece las variables de la pantalla para graficar los cuatro primeros términos de las sucesiones.

WINDOW 1 4 1 1 -1
5 1 -1 11 1

WINDOW
nMin=1
nMax=4
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=-1
Xmax=5
Xscl=1
Ymin=-1
Ymax=11
Yscl=1

Grafica la sucesión y la sucesión de sumas parciales oprimiendo [GRAPH]. Observa que la primera suma parcial es igual al primer término de la sucesión.



10.1 Ejercicios

Ejercicios 1 al 16: encuentra los primeros cuatro términos y el octavo término de la sucesión.

1 $\{12 - 3n\}$

2 $\left\{\frac{3}{5n-2}\right\}$

3 $\left\{\frac{3n-2}{n^2+1}\right\}$

4 $\left\{10 + \frac{1}{n}\right\}$

5 $\{9\}$

6 $\{\sqrt{2}\}$

7 $\{2 + (-0.1)^n\}$

8 $\{4 + (0.1)^n\}$

9 $\left\{(-1)^n \cdot \frac{n+7}{2n}\right\}$

10 $\left\{(-1)^n \cdot \frac{6-2n}{\sqrt{n+1}}\right\}$

11 $\{1 + (-1)^{n+1}\}$

12 $\{(-1)^{n+1} + (0.1)^{n-1}\}$

13 $\left\{\frac{2^n}{n^2+2}\right\}$

14 $\{(n-1)(n-2)(n-3)\}$

15 a_n es el número de lugares decimales en $(0.1)^n$.

16 a_n es el número de enteros positivos menores que n^3 .

Ejercicios 17 al 20: grafica la sucesión.

17 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$

18 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

19 $\{(-1)^{n+1}n^2\}$

20 $\{(-1)^n(2n+1)\}$

Ejercicios 21 al 28: halla los primeros cinco términos de la sucesión infinita definida recursivamente.

21 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = 3a_k - 5$

22 $a_1 = 5, \quad a_{k+1} = 7 - 2a_k$

23 $a_1 = -3, \quad a_{k+1} = a_k^2$

24 $a_1 = 128, \quad a_{k+1} = \frac{1}{4}a_k$

25 $a_1 = 5, \quad a_{k+1} = ka_k$

26 $a_1 = 3, \quad a_{k+1} = 1/a_k$

27 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = (a_k)^k$

28 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = (a_k)^{1/k}$

Ejercicios 29 al 32: encuentra los primeros cuatro términos de la sucesión de sumas parciales para la sucesión dada.

$$29 \left\{ 3 + \frac{1}{n} \right\}$$

$$30 \{1/n^2\}$$

$$31 \{(-1)^n n^{-10}\}$$

$$32 \{(-1)^n (1/2)^n\}$$

Ejercicios 33 al 48: encuentra la suma.

$$33 \sum_{k=1}^5 (2k - 7)$$

$$34 \sum_{k=1}^6 (10 - 3k)$$

$$35 \sum_{k=1}^4 (k^2 - 5)$$

$$36 \sum_{k=1}^{10} \{1 + (-1)^k\}$$

$$37 \sum_{k=0}^5 k(k - 2)$$

$$38 \sum_{k=0}^4 (k - 1)(k - 3)$$

$$39 \sum_{k=1}^6 \frac{k - 5}{k - 1}$$

$$40 \sum_{k=1}^6 \frac{3}{k + 1}$$

$$41 \sum_{k=1}^5 (-3)^{k-1}$$

$$42 \sum_{k=0}^4 3(2^k)$$

$$43 \sum_{k=1}^{100} 100$$

$$44 \sum_{k=1}^{1000} 5$$

$$45 \sum_{k=251}^{571} \frac{1}{k}$$

$$46 \sum_{k=117}^{257} 2.1$$

$$47 \sum_{k=1}^7 \frac{1}{k^2}$$

$$48 \sum_{k=0}^3 (3j + 2)$$

49 Demuestra la fórmula 2 del teorema sobre sumas.

50 Extiende la fórmula 1 del teorema sobre sumas a

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k + c_k).$$

51 Considera la sucesión definida recursivamente por $a_1 = 5$, $a_{k+1} = \sqrt{a_k}$ para $k \geq 1$. Describe qué le sucede a los términos de la sucesión a medida que k aumenta.

52 Aproximaciones a π se pueden obtener a partir de la sucesión

$$x_1 = 3, \quad x_{k+1} = x_k - \tan x_k.$$

Usa la tecla $\boxed{\text{TAN}}$ para \tan .

- (a) Encuentra los primeros cinco términos de esta sucesión.
(b) ¿Qué sucede a los términos de la sucesión cuando $x_1 = 6$?

53 Sucesión de Bode La sucesión de Bode, definida por $a_1 = 0.4$, $a_k = 0.1(3 \cdot 2^{k-2} + 4)$ para $k \geq 2$,

es útil en el cálculo de las distancias entre los planetas y el Sol. Estas distancias se miden en unidades astronómicas (UA), con 1 UA = 93 000 000 millas; por ejemplo, el tercer término corresponde a la Tierra y el quinto al planeta menor Ceres. Calcula los primeros cinco términos de la sucesión.

54 Crecimiento de bacterias La cantidad de bacterias en cierto cultivo es inicialmente de 500, y el cultivo se duplica todos los días.

- (a) Encuentra la cantidad de bacterias después de uno, dos y tres días.
(b) Da una fórmula para hallar la población bacteriana luego de n días.

55 Sucesión Fibonacci Dicha sucesión puede definirse con la fórmula

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{k+1} = a_k + a_{k-1} \quad \text{para } k \geq 2.$$

- (a) Encuentra los primeros diez términos de la sucesión.
(b) Los términos de la sucesión $r_k = a_{k+1}/a_k$ dan aproximaciones progresivamente mejores de τ , que es la razón de oro. Calcula los primeros diez términos de esta sucesión.

56 Sucesión Fibonacci Dicha sucesión puede definirse con la fórmula

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

Halla los primeros ocho términos y prueba que concuerdan con los encontrados usando la definición del ejercicio 55.

57 Niveles de cloro A menudo se agrega cloro al agua de las piscinas para controlar los microorganismos. Si el nivel de cloro es mayor de 3 ppm (partes por millón), los nadadores sentirán que les arden los ojos e incomodidad en la piel; si el nivel baja a menos de 1 ppm, existe la posibilidad de que el agua tome un tono verdoso por la gran cantidad de algas. El cloro debe agregarse al agua a intervalos regulares. Si no se aplica a una piscina en un periodo de 24 horas, alrededor del 20% del cloro se disipará en la atmósfera y el 80% permanecerá en el agua.

- (a) Determina una sucesión recursiva, a_n , que exprese la cantidad de cloro presente después de n días, si la alberca tiene a_0 ppm de cloro al principio y no vuelve a agregársele más.

- (b) Si una piscina tiene al inicio 7 ppm de cloro, elabora una tabla para determinar el primer día en que el nivel del cloro bajará de las 3 ppm.

58 Niveles de cloro Consulta el ejercicio 57. Supongamos que una piscina tiene primero 2 ppm de cloro y que se le agregan 0.5 ppm al terminar cada día.

- (a) Encuentra una sucesión recursiva, a_n , que dé la cantidad de cloro después de n días.
- (b) Determina la cantidad de cloro luego de 15 días y después de un largo periodo.
- (c) Calcula la cantidad de cloro que es necesario agregar al día con objeto de estabilizar el nivel de cloro a 1.5 ppm.

59 Costos de un club de golf La compañía que administra este club vende cabezales para maderas a estos precios:

Número de cabezales	1-4	5-9	10+
Costo por cabeza	\$89.95	\$87.95	\$85.95

Encuentra una función C , definida por pieza, que especifique el costo total de n cabezales. Traza la gráfica de C .

60 Costos de reproductores DVD Un mayorista en electrónica vende reproductores DVD a \$20 cada uno las 4 primeras unidades. Todas las unidades que siguen después de la cuarta las vende a \$17 cada una. Encuentra una función C , definida por partes, para calcular el costo total de n reproductores. Traza la gráfica de C .

Ejercicios 61 y 62: algunas calculadoras utilizan un algoritmo similar al siguiente para calcular \sqrt{N} para un número N real positivo: sea $x_1 = N/2$ y encuentra aproximaciones sucesivas x_2, x_3, \dots mediante

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{N}{x_1} \right), \quad x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{N}{x_2} \right), \quad \dots$$

hasta obtener la precisión deseada. Con este método calcula el radical a una precisión de seis lugares decimales.

61 $\sqrt{5}$

62 $\sqrt{18}$

63 La ecuación $\frac{1}{3}\sqrt[3]{x} - x + 2 = 0$ tiene una raíz cercana a 2. Para calcular esta raíz, vuelve a escribir la ecuación como $x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + 2$. Haz $x_1 = 2$ y halla las aproximaciones sucesivas x_2, x_3, \dots con las fórmulas

$$x_2 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x_1} + 2, \quad x_3 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x_2} + 2, \quad \dots$$

hasta una precisión de cuatro lugares decimales.

64 La ecuación $2x + \frac{1}{x^2 + x + 2} = 0$ tiene una raíz cercana a 0. Con un procedimiento semejante al del ejercicio 63, calcula esta raíz a una precisión de cuatro lugares decimales.

Ejercicios 65 y 66: (a) demuestra que f toma valores tanto positivos como negativos en el intervalo $[1, 2]$. (b) Utiliza el método del ejercicio 63, con $x_1 = 1.5$, para calcular un cero de f a una precisión de dos lugares decimales.

65 $f(x) = x - 2 + \log x$

66 $f(x) = \log x - 10^{-x}$ (Sugerencia: Despeja x en $\log x$).

Ejercicios 67 al 70: para el n -ésimo término dado $a_n = f(n)$ de una sucesión, usa la gráfica de $y = f(x)$ en el intervalo $[1, 100]$ con objeto de confirmar que a medida que n aumenta sin límite, a_n se aproxima a algún número real c .

67 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\right)^n$

68 $a_n = n^{1/n}$

69 $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$

70 $a_n = (2.1^n + 1)^{1/n}$

Ejercicios 71 al 74: grafica la sucesión a_k definida recursivamente en el modo de puntos para $k = 1, 2, 3, \dots, 20$. Para esto, encuentra el valor de k a lo largo del eje x y el valor de a_k a lo largo del eje y . Traza la gráfica para establecer la k mínima tal que $a_k > 100$.

71 $a_1 = 0.25, \quad a_k = 1.7a_{k-1} + 0.5$

72 $a_1 = 6, \quad a_k = 1.05a_{k-1} + 4$

73 $a_1 = 7.25, \quad a_k = 0.1a_{k-1}^2 + 2$

74 $a_1 = 1, \quad a_k = 0.2a_{k-1}^2 + 1.5$

75 Población de insectos En el estudio del aumento de la población de insectos se usa la sucesión definida por

$$a_{k+1} = ca_k(1 - a_k).$$

La constante c se llama factor de Malthus. Supongamos que $1000a_1$ es igual a la cantidad de insectos después de k

intervalos. Si $a_1 = 0.25$ al inicio, describe el comportamiento de la población de insectos para cada valor de c .

- (a) $c = 0.5$ (b) $c = 1.5$ (c) $c = 2.75$

76 Población de insectos Consulta el ejercicio 75. El factor c de Malthus afecta de manera importante la población a_k de insectos, y c se puede interpretar como el grado de fertilidad de los insectos.

- (a) Determina la forma en que c afecta la población si $0 < c < 1$.
- (b) Demuestra esta determinación usando diversos valores de c .

10.2

Sucesiones aritméticas

En esta sección y en la siguiente consideraremos dos tipos especiales de sucesiones: aritmética y geométrica. La primera se puede definir como sigue:

Definición de sucesión aritmética

Una sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ es una **sucesión aritmética** si hay un número real d tal que para todo entero positivo k ,

$$a_{k+1} = a_k + d.$$

El número $d = a_{k+1} - a_k$ se llama **diferencia común** de la sucesión.

Observa que la diferencia común d es la diferencia de dos términos sucesivos cualesquiera de una sucesión aritmética.

ILUSTRACIÓN Sucesión aritmética y diferencia común

- $-3, 2, 7, 12, \dots, 5n - 8, \dots$ diferencia común $= 2 - (-3) = 5$
- $17, 10, 3, -4, \dots, 24 - 7n, \dots$ diferencia común $= 10 - 17 = -7$

EJEMPLO 1 Demostración de que una sucesión es aritmética

Prueba que la sucesión

$$1, 4, 7, 10, \dots, 3n - 2, \dots$$

es aritmética y halla la diferencia común.

SOLUCIÓN Si $a_n = 3n - 2$, entonces para todo entero positivo k ,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= [3(k+1) - 2] - (3k - 2) \\ &= 3k + 3 - 2 - 3k + 2 = 3. \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión dada es aritmética con diferencia común 3.

Dada una sucesión aritmética, sabemos que

$$a_{k+1} = a_k + d$$

para todo entero positivo k . Esto nos da una fórmula recursiva para encontrar términos sucesivos. A partir de cualquier número real a_1 , obtenemos una sucesión aritmética con diferencia común d con sólo agregar d a a_1 , luego a $a_1 + d$, y así sucesivamente, con lo que resulta

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \dots$$

El n -ésimo término a_n de esta sucesión está dado por la fórmula que sigue.

El n -ésimo término de una sucesión aritmética

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

EJEMPLO 2 Localización de un término específico en una sucesión aritmética

Los tres primeros términos de una sucesión aritmética son 20, 16.5 y 13. Encuentra el decimoquinto término.

SOLUCIÓN La diferencia común es

$$a_2 - a_1 = 16.5 - 20 = -3.5.$$

Al sustituir $n = 15$, $a_1 = 20$ y $d = -3.5$ en la fórmula para el n -ésimo término de una sucesión aritmética, $a_n = a_1 + (n - 1)d$, resulta

$$a_{15} = 20 + (15 - 1)(-3.5) = 20 - 49 = -29. \quad \checkmark$$

EJEMPLO 3 Localización de un término específico en una sucesión aritmética

Si el cuarto término de una sucesión aritmética es 5 y el noveno es 20, encuentra el sexto término.

SOLUCIÓN Nos dan $a_4 = 5$ y $a_9 = 20$, y deseamos hallar a_6 . Los siguientes son sistemas equivalentes de ecuaciones de las variables a_1 y d :

$$\begin{cases} a_4 = a_1 + (4 - 1)d & \text{sea } n = 4 \text{ en } a_n = a_1 + (n - 1)d \\ a_9 = a_1 + (9 - 1)d & \text{sea } n = 9 \text{ en } a_n = a_1 + (n - 1)d \\ 5 = a_1 + 3d & a_4 = 5 \\ 20 = a_1 + 8d & a_9 = 20 \end{cases}$$

Al restar del sistema la primera ecuación de la segunda, resulta $15 = 5d$, o sea $d = 3$. Al sustituir 3 por d en la primera ecuación, $5 = a_1 + 3d$, llegamos a $a_1 = 5 - 3d = 5 - 3(3) = -4$; por tanto, para hallar el sexto término tenemos

$$\begin{aligned} a_6 &= a_1 + (6 - 1)d & \text{sea } n = 6 \text{ en } a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ &= (-4) + (5)(3) = 11 & a_1 &= -4 \text{ y } d = 3 \end{aligned} \quad \checkmark$$

El teorema siguiente contiene una fórmula para la n -ésima suma parcial S_n de una sucesión aritmética.

Teorema: fórmulas para S_n

Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ es una sucesión aritmética con diferencia común d , entonces la n -ésima suma parcial S_n (esto es, la suma de los primeros n términos), está dada por

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \quad \text{o} \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

DEMOSTRACIÓN Podemos escribir

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d]. \end{aligned}$$

Con el uso repetido de las propiedades conmutativa y asociativa de números reales, resulta

$$S_n = (a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1) + [d + 2d + \cdots + (n-1)d],$$

con a_1 n veces dentro del primer par de paréntesis. Así,

$$S_n = na_1 + d[1 + 2 + \cdots + (n-1)].$$

La expresión dentro de corchetes es la suma de los primeros $n-1$ enteros positivos. Con la fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos, $S_n = n(n+1)/2$ del ejemplo 5 de la sección 10.1, pero con $n-1$ en lugar de n y n en lugar de $n+1$, tenemos

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Sustituimos en la última ecuación por S_n y factorizamos $n/2$ con lo cual

$$S_n = na_1 + d \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d].$$

Puesto que $a_n = a_1 + (n-1)d$, la última ecuación es equivalente a

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

EJEMPLO 4 Determinación de una suma de enteros pares

Encuentra la suma de todos los enteros pares de 2 a 100.

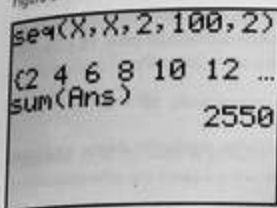
SOLUCIÓN Este problema equivale a hallar la suma de los primeros 50 términos de la sucesión aritmética

$$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$$

Al sustituir $n = 50$, $a_1 = 2$ y $a_{50} = 100$ en $S_n = (n/2)(a_1 + a_n)$ produce

$$S_{50} = \frac{50}{2}(2 + 100) = 2550.$$

Figura 1



De manera alterna, podemos usar $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ con $d = 2$:

$$S_{50} = \frac{50}{2}[2(2) + (50-1)2] = 25[4 + 98] = 2550$$

(Ve la figura 1, si necesitas ayuda para obtener este resultado con calculadora.)

La **media aritmética** de dos números a y b está definida como $(a+b)/2$. Este es el **promedio** de a y b . Advierte que los tres números

$$a, \frac{a+b}{2}, \text{ y } b,$$

constituyen una sucesión aritmética (finita) con diferencia común $d = \frac{1}{2}(b-a)$. Este concepto puede generalizarse como sigue: Si c_1, c_2, \dots, c_k son número reales tales que

$$a, c_1, c_2, \dots, c_k, b,$$

sea una sucesión aritmética (finita), entonces c_1, c_2, \dots, c_k son k **medias aritméticas** entre los números a y b . El proceso para determinar estos números se conoce como **inserción de k medias aritméticas entre a y b** .

EJEMPLO 5 Inserción de medias aritméticas

Inserta tres medias aritméticas entre 2 y 9.

SOLUCIÓN Deseamos hallar tres números reales c_1, c_2 y c_3 tales que la siguiente sea una sucesión aritmética (finita):

$$2, c_1, c_2, c_3, 9.$$

Es posible considerar esta sucesión como una sucesión aritmética donde el primer término $a_1 = 2$ y el quinto término $a_5 = 9$. Para hallar la diferencia común d , procederemos de esta manera:

$$a_5 = a_1 + (5-1)d \quad \text{sea } n = 5 \text{ en } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$9 = 2 + 4d \quad a_5 = 9 \text{ y } a_1 = 2$$

$$d = \frac{7}{4} \quad \text{despejar } d$$

De esta forma, las medias aritméticas son

$$c_1 = a_1 + d = 2 + \frac{7}{4} = \frac{15}{4}$$

$$c_2 = c_1 + d = \frac{15}{4} + \frac{7}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$$

$$c_3 = c_2 + d = \frac{22}{4} + \frac{7}{4} = \frac{29}{4}$$



EJEMPLO 6 Aplicación de una sucesión aritmética

Un carpintero desea construir una escalera con nueve peldaños cuyas longitudes decrecen de manera uniforme, de 24 pulgadas en la base a 18 pulgadas en la parte superior. Determina las longitudes de los siete peldaños intermedios.

Figura 7



SOLUCIÓN La escalera aparece en la figura 2. Las longitudes de los peldaños forman una sucesión aritmética a_1, a_2, \dots, a_9 donde $a_1 = 18$ y $a_9 = 24$. Por tanto, necesitamos insertar siete medias aritméticas entre 18 y 24. Con $a_n = a_1 + (n-1)d$ con $n = 9$, $a_1 = 18$ y $a_9 = 24$ resulta

$$24 = 18 + 8d \text{ o bien, lo que es igual, } 8d = 6,$$

De ahí que $d = \frac{3}{4} = 0.75$, y que los peldaños siguientes tengan longitudes (en pulgadas)

$$18.75, 19.5, 20.25, 21, 21.75, 22.5 \text{ y } 23.25.$$

A veces es deseable expresar una suma en términos de notación sumatoria, como se ilustra en el ejemplo que sigue.



EJEMPLO 7 Expresión de una suma en notación sumatoria

Expresa en términos de notación sumatoria:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \frac{4}{19} + \frac{5}{24} + \frac{6}{29}$$

SOLUCIÓN Los seis términos de la suma no forman una sucesión aritmética; sin embargo, cada uno de los numeradores y denominadores de las fracciones, *considerados por separado*, son aritméticos. En particular tenemos:

Numeradores: 1, 2, 3, 4, 5, 6 *diferencia común 1*

Denominadores: 4, 9, 14, 19, 24, 29 *diferencia común 5*

Usamos dos veces la fórmula para el n -ésimo término de una sucesión aritmética y obtenemos el siguiente n -ésimo término de cada sucesión:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)1 = n$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1)5 = 5n - 1$$

En consecuencia, el n -ésimo término de la suma dada es $n/(5n-1)$, y podemos escribir

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \frac{4}{19} + \frac{5}{24} + \frac{6}{29} = \sum_{n=1}^6 \frac{n}{5n-1}.$$

10.2 Ejercicios

Ejercicios 1 y 2: demuestra que la sucesión dada es aritmética y encuentra la diferencia común.

1 $-6, -2, 2, \dots, 4n - 10, \dots$

2 $53, 48, 43, \dots, 58 - 5n, \dots$

Ejercicios 3 al 10: halla los términos quinto, décimo y n -ésimo de la sucesión aritmética.

3 $2, 6, 10, 14, \dots$

4 $16, 13, 10, 7, \dots$

5 $3, 2.7, 2.4, 2.1, \dots$

6 $-6, -4.5, -3, -1.5, \dots$

7 $-7, -3.9, -0.8, 2.3, \dots$

8 $x - 8, x - 3, x + 2, x + 7, \dots$

9 $\ln 3, \ln 9, \ln 27, \ln 81, \dots$

10 $\log 1000, \log 100, \log 10, \log 1, \dots$

Ejercicios 11 y 12: encuentra la diferencia común para la sucesión aritmética con los términos especificados.

11 $a_1 = 21, a_6 = -11$

12 $a_1 = 14, a_{11} = 35$

Ejercicios 13 al 18: halla el término especificado de la sucesión aritmética que tenga los dos términos dados.

13 $a_{12}; a_1 = 9.1, a_2 = 7.5$

14 $a_{10}; a_1 = 2 + \sqrt{2}, a_2 = 3$

15 $a_7; a_5 = 2.7, a_7 = 5.2$

16 $a_4; a_3 = 47, a_5 = 53$

17 $a_{15}; a_1 = 7, a_{30} = 43$

18 $a_{10}; a_7 = 1, a_{13} = 49$

Ejercicios 19 al 22: encuentra la suma S_n de la sucesión aritmética que satisfaga las condiciones dadas.

19 $a_1 = 40, d = -3, n = 30$

20 $a_1 = 5, d = 0.1, n = 40$

21 $a_1 = -9, a_{10} = 15, n = 10$

22 $a_1 = \frac{7}{3}, d = -\frac{2}{3}, n = 15$

Ejercicios 23 al 28: determina la suma.

23 $\sum_{k=1}^{20} (3k - 5)$

24 $\sum_{k=1}^{12} (7 - 4k)$

25 $\sum_{k=1}^{14} (\frac{1}{2}k + 7)$

26 $\sum_{k=1}^{10} (\frac{1}{4}k + 3)$

27 $\sum_{j=126}^{192} (5k + 2j)$

28 $\sum_{k=88}^{171} (3j - 2k)$

Ejercicios 29 al 34: expresa la suma en términos de notación sumatoria (las respuestas no son únicas).

29 $4 + 11 + 18 + 25 + 32$

30 $3 + 8 + 13 + 18 + 23$

31 $4 + 11 + 18 + \dots + 466$

32 $3 + 8 + 13 + \dots + 463$

33 $-\frac{2}{3} + \frac{6}{11} + \frac{8}{13} + \frac{12}{19} + \frac{15}{23} + \frac{18}{27}$

34 $\frac{5}{13} + \frac{10}{11} + \frac{15}{9} + \frac{20}{7}$

Ejercicios 35 y 36: expresa la suma en términos de notación sumatoria y halla la suma.

35 $8 + 19 + 30 + \dots + 16805$

36 $2 + 11 + 20 + \dots + 16058$

Ejercicios 37 al 40: encuentra el número de términos de la sucesión aritmética con las condiciones dadas.

37 $a_1 = -2, d = \frac{1}{4}, S = 21$

38 $a_1 = -1, d = \frac{1}{5}, S = 21$

39 $a_1 = -\frac{29}{8}, d = \frac{1}{8}, S = -36$

40 $a_6 = -3, d = 0.2, S = -33$

41 Inserta cinco medias aritméticas entre 2 y 10.

42 Inserta tres medias aritméticas entre 3 y -5.

43 (a) Encuentra el número de entero entre 32 y 395 divisible entre 6.

(b) Halla su suma.

44 (a) Determina el número de entero negativo mayor que -500 divisible entre 33.

(b) Encuentra su suma.

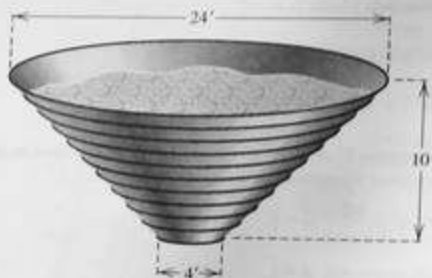
45 Pila de troncos Una pila de troncos tiene 24 troncos en la base, 23 en la segunda capa, 22 en la tercera, etc.; la capa superior tiene 10 troncos. Encuentra la cantidad total de troncos de la pila.

46 Asientos en un estadio Las primeras diez filas en cierta sección de un estadio tienen 30, 32, 34 asientos, etc.; las filas de la undécima a la vigésima tienen cada una 50 asientos. Encuentra el número total de asientos en la sección.

47 Construcción de una tolva para granos Se va a fabricar una tolva para granos en forma de cono truncado (ve la figura). La tolva debe medir 10 pies de altura con 11 anillos metálicos colocados uniformemente a su alrededor, desde la abertura de 4 pies del fondo hasta la de 24 pies de la par-

te superior. Encuentra la longitud total del metal necesario para fabricar los anillos.

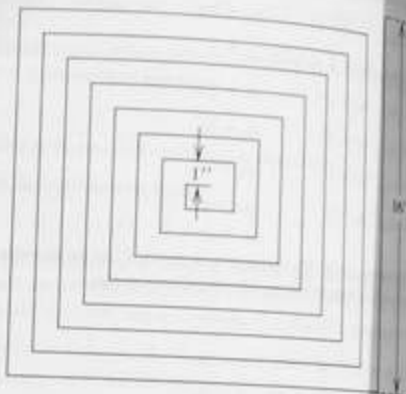
Ejercicio 47



- 48 **Avanzar cuesta abajo** Un ciclista avanza cuesta abajo a razón de 4 pies el primer segundo. En cada segundo sucesivo, avanza 5 pies más que en el segundo anterior. Si el deportista llega a la parte inferior del cerro en 11 segundos, encuentra la distancia total recorrida.
- 49 **Dinero de premio** Un concursante obtendrá cinco premios en efectivo por un total de \$5000 y habrá una diferencia de \$100 entre premios sucesivos. Encuentra el primer premio.
- 50 **Bonos de ventas** Una compañía va a distribuir \$46 000 en bonos a sus diez mejores vendedores. El último premiado de la lista recibirá \$1000 y la diferencia en dinero entre los vendedores sucesivamente clasificados debe ser constante. Encuentra el bono para cada vendedor.
- 51 **Distancia a la que cae un objeto** Un pequeño objeto que se deja caer desde un globo de aire caliente cae 16 pies durante el primer segundo, 48 el siguiente, 80 el tercero, 112 el cuarto, etc. Encuentra la expresión para determinar la distancia que cae el objeto en n segundos (desprecia la resistencia del aire).
- 52 Si f es una función lineal, prueba que la sucesión con el n -ésimo término $a_n = f(n)$ es una sucesión aritmética.
- 53 **Sucesión genética** La sucesión definida recursivamente por $x_{i+1} = x_i / (1 + x_i)$ se presenta en genética en el estudio de la eliminación de un gen deficiente de una población. Demuestra que la sucesión cuyo n -ésimo término es $1/x_n$ es aritmética.

- 54 **Dimensiones de un laberinto** Encuentra la longitud total de la línea espiral roja de la figura, si el ancho del laberinto formado por la curva es de 16 pulgadas y todos los anillos del laberinto tienen un ancho de 1 pulgada. ¿Cuánta longitud si el ancho del laberinto es de 32 pulgadas?

Ejercicio 54



Ejercicios 55 y 56: hombres de negocios y otras personas usan métodos de depreciación para calcular el valor de una propiedad durante una vida de n años. En el método de dígitos de suma de año, para cada año $k = 1, 2, 3, \dots, n$, el valor de una propiedad

disminuye según la fracción $A_k = \frac{n-k+1}{T_n}$ de su costo inicial, donde $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

- 55 (a) Si $n = 8$, encuentra $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$.
 (b) Demuestra que la sucesión en (a) es aritmética y encuentra S_8 .
 (c) Si el valor inicial de una propiedad es de \$1000, ¿cuánto se ha depreciado después de cuatro años?
- 56 (a) Si n es cualquier entero positivo, halla $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.
 (b) Prueba que la sucesión en (a) es aritmética y encuentra S_n .

10.3

Sucesiones geométricas

El segundo tipo especial de sucesión que estudiaremos, la sucesión geométrica, es muy común en la práctica.

Definición de sucesión geométrica

Una sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ es una **sucesión geométrica** si $a_1 \neq 0$ y si hay un número real $r \neq 0$ tal que para todo entero positivo k ,

$$a_{k+1} = a_k r.$$

El número $r = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ se conoce como la **razón común** de la sucesión.

Observa que la razón común $r = a_{k+1}/a_k$ es la razón entre dos términos sucesivos cualesquiera de una sucesión geométrica.

ILUSTRACIÓN Sucesión geométrica y razón común

■ $6, -12, 24, -48, \dots, (-2)^{n-1}(6), \dots$ razón común $= \frac{-12}{6} = -2$

■ $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \dots, (3)^{1-n}, \dots$ razón común $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

La fórmula $a_{k+1} = a_k r$ proporciona un método recursivo para obtener términos de una sucesión geométrica. Comenzamos con cualquier número real a_1 , diferente de cero, multiplicamos por el número r sucesivamente y obtenemos

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \dots$$

El n -ésimo término a_n de esta sucesión está dado por la fórmula que sigue.

Fórmula para hallar el n -ésimo término de una sucesión geométrica

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

EJEMPLO 1 Búsqueda de términos en una sucesión geométrica

Una sucesión geométrica tiene un primer término 3 y razón común $-\frac{1}{2}$. Encuentra los primeros cinco y el décimo términos.

SOLUCIÓN Si multiplicamos $a_1 = 3$ sucesivamente por $r = -\frac{1}{2}$, los primeros cinco términos son

$$3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}.$$

Con la fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $n = 10$, encontramos que el décimo término es

$$a_{10} = a_1 r^9 = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^9 = -\frac{3}{512}.$$

**EJEMPLO 2** Búsqueda de un término específico en una sucesión geométrica

El tercer término en una sucesión geométrica es 5 y el sexto, -40 . Encuentra el octavo término.

SOLUCIÓN Nos dan $a_3 = 5$ y $a_6 = -40$ y debemos hallar a_8 . Los siguientes son sistemas de ecuaciones equivalentes en las variables a_1 y r :

$$\begin{cases} a_3 = a_1 r^{3-1} & \text{sea } a_1 = 5 \text{ en } a_3 = a_1 r^{3-1} \\ a_6 = a_1 r^{6-1} & \text{sea } a_1 = -40 \text{ en } a_6 = a_1 r^{6-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = a_1 r^2 & a_1 = 5 \\ -40 = a_1 r^5 & a_1 = -40 \end{cases}$$

Despejamos a_1 de la primera ecuación del sistema y resulta $a_1 = 5/r^2$. Al sustituir esta expresión en la segunda ecuación obtenemos

$$-40 = \frac{5}{r^2} \cdot r^5.$$

Simplificamos y obtenemos $r^3 = -8$. Por tanto, $r = -2$. A continuación usamos $a_1 = 5/r^2$ y llegamos a

$$a_1 = \frac{5}{(-2)^2} = \frac{5}{4}.$$

Por último, con $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $n = 8$ resulta

$$a_8 = a_1 r^7 = \left(\frac{5}{4}\right)(-2)^7 = -160.$$

El teorema siguiente contiene una fórmula para hallar la n -ésima suma parcial S_n de una sucesión geométrica.

Teorema: fórmula para hallar S_n

La n -ésima suma parcial S_n de una sucesión geométrica con primer término a_1 y razón común $r \neq 1$ es

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

DEMOSTRACIÓN Por definición, la n -ésima suma parcial S_n de una sucesión geométrica es

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}. \quad (1)$$

Si multiplicamos ambos lados de (1) por r obtenemos

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n. \quad (2)$$

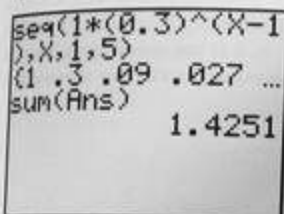
Si restamos la ecuación (2) de la (1), todos los términos de la derecha (con excepción de dos) se cancelan y obtenemos:

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n \quad \text{restar (2) de (1)}$$

$$S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n) \quad \text{factorizar ambos miembros}$$

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad \text{dividir entre (1 - r)}$$

Figura 1



EJEMPLO 3 Determinación de una suma de términos de una sucesión geométrica

Si la sucesión 1, 0.3, 0.09, 0.027, ... es una sucesión geométrica, encuentra la suma de los primeros cinco términos.

SOLUCIÓN Hacemos $a_1 = 1$, $r = 0.3$ y $n = 5$ en la fórmula para hallar S_n expresada en el teorema anterior, y obtenemos

$$S_5 = a_1 \frac{1 - r^5}{1 - r} = (1) \frac{1 - (0.3)^5}{1 - 0.3} = 1.4251.$$

(Véase la figura 1 para calcular y reafirmar este resultado.)

EJEMPLO 4 Rápido crecimiento de los términos de una sucesión geométrica

Un hombre desea ahorrar guardando un centavo el primer día, dos el segundo, cuatro el tercero y así sucesivamente.

(a) Si continúa duplicando la cantidad guardada todos los días, ¿cuánto debe guardar el decimoquinto día?

(b) Supón que no se le acabe el dinero, ¿cuál es la cantidad total ahorrada al término de 30 días?

SOLUCIÓN

(a) La cantidad (en centavos) guardada en días sucesivos forma una sucesión geométrica.

$$1, 2, 4, 8, \dots$$

con 1 como el primer término y 2 como razón común. Encontramos la cantidad que debe guardar el decimoquinto día usando $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $a_1 = 1$ y $n = 15$:

$$a_{15} = a_1 r^{14} = 1 \cdot 2^{14} = 16\,384.$$

Así se deben guardar \$163.84 el decimoquinto día.

(b) A fin de hallar la cantidad ahorrada después de 30 días, usamos la fórmula para encontrar S_n con $n = 30$, y se obtiene (en centavos)

$$S_{30} = (1) \frac{1 - 2^{30}}{1 - 2} = 1\,073\,741\,823.$$

Por tanto, la cantidad total ahorrada es \$10 737 418.23.

La terminología que se emplea en las sucesiones geométricas es análoga a la utilizada en las sucesiones aritméticas. Si a y b son números reales positivos, un número positivo c se llama **media geométrica** de a y b si c es una sucesión geométrica. Si la razón común es r , entonces

$$r = \frac{c}{a} = \frac{b}{c}, \quad 0 < c^2 = ab.$$

Tomamos la raíz cuadrada de ambos lados de la última ecuación, y vemos que la **media geométrica** de los números positivos a y b es \sqrt{ab} . A manera de generalización, k números reales positivos c_1, c_2, \dots, c_k son **k medias geométricas** entre a y b si $a, c_1, c_2, \dots, c_k, b$ es una sucesión geométrica. El proceso de determinación de estos números se conoce como **inserción de k medias geométricas entre a y b** .

ILUSTRACIÓN Medias geométricas

Números	Media geométrica
20, 45	$\sqrt{20 \cdot 45} = \sqrt{900} = 30$
3, 4	$\sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{12} \approx 3.46$

$$\blacksquare \quad 20, 45 \quad \sqrt{20 \cdot 45} = \sqrt{900} = 30$$

$$\blacksquare \quad 3, 4 \quad \sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{12} \approx 3.46$$

Dada la serie geométrica con el primer término a_1 y razón común $r \neq 1$, podemos escribir la fórmula para hallar S_n del teorema anterior en la forma

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1}{1-r} r^n.$$

Si $|r| < 1$, entonces r^n se aproxima a 0 a medida que n aumenta sin límite; por tanto, S_n se aproxima a $a_1/(1-r)$ conforme n crece sin límite. Con la notación desarrollada para funciones racionales de la sección 4.5, tenemos

$$S_n \rightarrow \frac{a_1}{1-r} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

El número $a_1/(1-r)$ se llama **suma S de la serie geométrica infinita**

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} + \cdots$$

Esto nos da el resultado siguiente.

Teorema sobre la suma de una serie geométrica infinita

Si $|r| < 1$, la serie geométrica infinita

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} + \cdots$$

tiene la suma

$$S = \frac{a_1}{1-r}.$$

El teorema anterior significa que conforme agreguemos términos de la serie geométrica infinita indicada, la suma se aproximará más a $a_1/(1-r)$. En el ejemplo siguiente se expone la forma de usar el teorema para probar que todo número real representado por un decimal repetitivo es racional.

EJEMPLO 5 Expresión de un decimal repetitivo infinito como número racional

Encuentra un número racional que corresponda a $5.4\overline{27}$.

SOLUCIÓN Podemos escribir la expresión decimal $5.4272727\ldots$ como

$$5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots$$

A partir del segundo término, 0.027, la suma anterior tiene la forma dada en el teorema sobre la suma de una serie geométrica infinita, con $a_1 = 0.027$ y $r = 0.01$. De ahí que la suma S de esta serie geométrica infinita sea

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.027}{1-0.01} = \frac{0.027}{0.990} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}.$$

En consecuencia, el número deseado es

$$5.4 + \frac{3}{110} = \frac{594}{110} + \frac{3}{110} = \frac{597}{110}.$$

Una comprobación por división muestra que $\frac{597}{110}$ corresponde a $5.4\overline{27}$. 

En general, dada cualquier sucesión infinita $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, la expresión

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

se llama **serie infinita** o simplemente **serie**. Denotamos esta serie así

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Cada número a_k es un **término** de la serie, y a_n es el **n -ésimo término**. Puesto que sólo se pueden sumar algebraicamente sumas finitas, es necesario definir qué se quiere decir por una **suma infinita**. Considera la sucesión de sumas parciales

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

Si hay un número S tal que $S_n \rightarrow S$ a medida que $n \rightarrow \infty$, entonces, igual que en nuestro análisis de una serie geométrica infinita, S es la **suma** de la serie infinita y escribimos

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

En el ejemplo anterior encontramos que el decimal repetitivo infinito $5.4\overline{27}$ corresponde al número racional $\frac{597}{110}$. Dado que $\frac{597}{110}$ es la suma de una serie infinita determinada por el decimal, escribimos

$$\frac{597}{110} = 5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots$$

Si los términos de una sucesión infinita son alternativamente positivos y negativos, como en la expresión

$$a_1 + (-a_2) + a_3 + (-a_4) + \cdots + [(-1)^{n+1}a_n] + \cdots$$

para números reales positivos a_n , la expresión es una serie infinita alternante y la escribimos en la forma

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots$$

Los tipos más comunes de series infinitas alternantes son series geométricas infinitas en las que la razón común r es negativa.



EJEMPLO 6 Determinación de la suma de una serie geométrica infinita

Encuentra la suma S de la serie geométrica infinita alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 3 - 2 + \frac{4}{3} - \frac{8}{9} + \cdots + 3\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots$$

SOLUCIÓN Con la fórmula para hallar S en el teorema sobre la suma de una serie geométrica infinita, con $a_1 = 3$ y $r = -\frac{2}{3}$, obtenemos

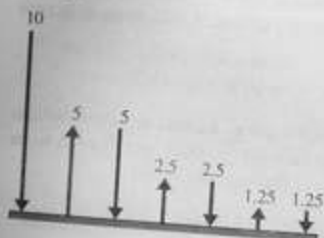
$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{1} = 9$$

```
seq(3*(-2/3)^(X-1), X, 1, 55)
{3 -2 1.3333333...}
sum(Ans)
```

1.8

Para comprobar el resultado del ejemplo 6, podemos sustituir n con un número razonablemente grande y encontrar la suma de esa serie geométrica. Como se muestra en la figura, con 55 términos obtenemos 1.8, que es la respuesta previamente obtenida. **Nota:** La calculadora sólo apoya nuestra respuesta; para encontrar sumas de series geométricas infinitas es necesario aplicar la fórmula.

Figura 2



EJEMPLO 7 Aplicación de una serie geométrica infinita

Se deja caer una pelota de hule de una altura de 10 metros. Supongamos que rebota la mitad de la distancia después de cada caída como se ilustra mediante flechas en la figura 2. Encuentra la distancia total que recorre la pelota.

SOLUCIÓN La suma de las distancias que recorre hacia abajo y la suma de las que recorre en los rebotes forman dos series geométricas infinitas:

Serie descendente: $10 + 5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \cdots$

Serie ascendente: $5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \cdots$

Consideramos que la distancia total S que recorre la pelota se puede encontrar agregando las sumas de estas series infinitas. Esto da

$$\begin{aligned} S &= 10 + 2[5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \dots] \\ &= 10 + 2\left[5 + 5\left(\frac{1}{2}\right) + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots\right]. \end{aligned}$$

Usamos la fórmula $S = a_1/(1 - r)$ con $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{2}$, con lo que obtenemos

$$S = 10 + 2\left(\frac{5}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 10 + 2(10) = 30 \text{ m.}$$

Problema relacionado: ¿Alguna vez llega la pelota al reposo? Consulta el ejercicio de análisis 7 al final del capítulo.

10.3 Ejercicios

Ejercicios 1 y 2: demuestra que la sucesión dada es geométrica y encuentra la razón común.

1. $5, -\frac{5}{4}, \frac{5}{16}, \dots, 5\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \dots$

2. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{9}{8}, \dots, \frac{1}{2}(3)^{n-1}, \dots$

Ejercicios 3 al 14: halla los términos quinto, octavo y n -ésimo de la sucesión geométrica.

3. 8, 4, 2, 1, ...

4. 4, 1.2, 0.36, 0.108, ...

5. 300, -30, 3, -0.3, ...

6. $1, -\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3}, \dots$

7. 5, 25, 125, 625, ...

8. 2, 6, 18, 54, ...

9. 4, -6, 9, -13.5, ...

10. 162, -54, 18, -6, ...

11. $1, -x^2, x^4, -x^6, \dots$

12. $1, \frac{x}{3}, \frac{x^2}{9}, \frac{x^3}{27}, \dots$

13. $2, 2^{2^{n-1}}, 2^{2^{n-2}}, 2^{2^{n-3}}, \dots$

14. $10, 10^{2^{n-1}}, 10^{2^{n-2}}, 10^{2^{n-3}}, \dots$

Ejercicio 15 y 16: encuentra todos los posibles valores de r para una sucesión geométrica con los dos términos dados.

15. $a_1 = 3, a_6 = 9$

16. $a_1 = 4, a_7 = \frac{1}{4}$

17. Halla el sexto término de la sucesión geométrica cuyos primeros dos términos son 4 y 6.

18. Encuentra el séptimo término de la sucesión geométrica cuyos términos segundo y tercero son 2 y $-\sqrt{2}$.

19. Dada una sucesión geométrica tal que $a_4 = 4$ y $a_7 = 12$, determina r y a_{10} .

20. Dada una sucesión geométrica tal que $a_2 = 3$ y $a_5 = -81$, encuentra r y a_9 .

Ejercicios 21 al 26: halla la suma.

21. $\sum_{k=1}^{10} 3^k$

22. $\sum_{k=1}^9 (-\sqrt{5})^k$

23. $\sum_{k=0}^9 \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

24. $\sum_{k=1}^7 (3^{-k})$

25. $\sum_{k=10}^{\infty} (2^{k-14} + 5)$

26. $\sum_{k=4}^{14} (3^{k-7} + 2j^2)$

Ejercicios 27 al 30: expresa la suma en términos de notación de sumatoria (las respuestas no son únicas).

27. $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$

28. $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64$

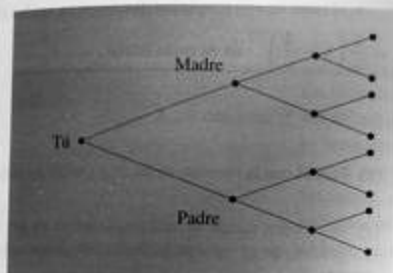
29. $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{36} - \frac{1}{108}$

30. $3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625}$

que se pueda administrar en forma repetida durante un periodo largo.

- 60 Genealogía En la figura aparece un árbol genealógico con la generación actual (tú) y tres generaciones anteriores, con un total de 12 abuelos. Si te remontaras en tu historia familiar hasta 10 generaciones, ¿cuántos abuelos encontrarías?

Ejercicio 60



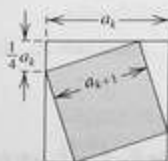
- 61 La primera figura muestra algunos términos de una sucesión de cuadrados, $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots$. Denotemos con a_k , A_k y P_k el lado, área y perímetro, respectivamente, del cuadrado S_k . El cuadrado S_{k+1} se construye a partir de S_k al unir cuatro puntos de S_k con cada punto a una distancia de $\frac{1}{4}a_k$ de un vértice según se aprecia en la segunda figura.

(a) Encuentra la relación entre a_{k+1} y a_k .

(b) Halla a_n , A_n y P_n .

(c) Calcula $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$.

Ejercicio 61



- 62 La figura presenta varios términos de una sucesión formada por círculos y cuadrados alternados. Cada círculo está inscrito en un cuadrado y cada cuadrado (excluyendo el mayor) está inscrito en un círculo. Denotemos con S_n el área del n -ésimo cuadrado y con C_n el área del n -ésimo círculo.

(a) Encuentra las relaciones entre S_n y C_n y entre C_n y S_{n+1} .

(b) ¿Qué porción del cuadrado más grande está sombreada en la figura?

Ejercicio 62



- 63 Tamiz de Sierpinski El tamiz de Sierpinski, diseñado en 1915, es un ejemplo de un fractal. Se puede construir empezando con un triángulo equilátero sólido negro; este triángulo se divide en cuatro triángulos equiláteros congruentes y se elimina el triángulo del centro. En el siguiente paso, cada uno de los tres triángulos equiláteros restantes se divide en cuatro triángulos equiláteros congruentes y se elimina el triángulo del centro de cada uno de éstos, como se muestra en la primera figura. En el tercer paso, se eliminan nueve triángulos. Si el proceso continúa en forma indefinida, resulta el tamiz de Sierpinski (véase la segunda figura).

Ejercicio 63



- (a) Encuentra una sucesión geométrica a_k que dé la cantidad de triángulos eliminados en el k -ésimo paso.

(continúa)

- (b) Calcula la cantidad de triángulos suprimidos en el decimoquinto paso.
- (c) Supongamos que el triángulo inicial tiene un área de una unidad. Encuentra la sucesión geométrica b_k que dé el área borrada en el k -ésimo paso.
- (d) Determina el área eliminada en el séptimo paso.
- 64 Tamiz de Sierpinski Consulta el ejercicio 63.
- (a) Escribe una serie geométrica que calcule la cantidad total de triángulos suprimidos después de n pasos.
- (b) Determina el número total de triángulos borrados después de 12 pasos.
- (c) Escribe una serie geométrica que calcule el área total suprimida después de n pasos.
- (d) Determina el área total eliminada después de 12 pasos.
- 65 Interés compuesto Si se hace un depósito de \$100 el primer día de cada mes en una cuenta que paga al año 6% de interés compuesto mensual, indica la cantidad en la cuenta después de 18 años.
- 66 Interés compuesto Consulta el ejercicio 65. Demuestra que si el depósito mensual es C dólares y la tasa es $i\%$ anual compuesto mensualmente, la cantidad A de la cuenta después de n meses está dada por
- $$A = C \left(\frac{12}{i} + 1 \right) \left[\left(1 + \frac{i}{12} \right)^n - 1 \right]$$
- 67 Interés compuesto Utiliza el ejercicio 66 para hallar A cuando $C = \$100$, $i = 8\%$ y $n = 60$.
- 68 Interés compuesto Consulta el ejercicio 66. Si $i = 10\%$, ¿cuántos años se necesitan para acumular \$100,000 si el depósito mensual C es
- (a) \$100 (b) \$200
- Ejercicios 69 y 70: el método de doble disminución del saldo es un método de depreciación en el que, por cada año $k = 1, 2, 3, \dots, n$, el valor de una propiedad disminuye en una fracción
- $$A_k = \frac{2}{n} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{k-1}$$
- de su costo inicial.
- 69 (a) Si $n = 5$, encuentra A_1, A_2, \dots, A_5 .
- (b) Prueba que la sucesión en (a) es geométrica y halla S_5 .
- (c) Si el valor inicial de una propiedad es de \$25,000, ¿cuánto de su valor se ha depreciado después de dos años?
- 70 (a) Si n es cualquier entero positivo, encuentra A_1, A_2, \dots, A_n .
- (b) Demuestra que la sucesión en (a) es geométrica y determina S_n .

10.4

Inducción matemática

Si n es un entero positivo y denotamos con P_n al enunciado matemático $(xy)^n = x^n y^n$, obtenemos esta sucesión infinita de enunciados:

Enunciado P_1 : $(xy)^1 = x^1 y^1$

Enunciado P_2 : $(xy)^2 = x^2 y^2$

Enunciado P_3 : $(xy)^3 = x^3 y^3$

Enunciado P_n : $(xy)^n = x^n y^n$

Es fácil demostrar que P_1 , P_2 y P_3 son enunciados verdaderos, pero es imposible comprobar la validez de P_n para todo entero positivo n . Demostrar que P_n es verdadero para toda n requiere del principio siguiente.

Principio de inducción matemática

Si con cada entero positivo n se relaciona un enunciado P_n , entonces todos los enunciados P_n son verdaderos siempre que se satisfagan estas dos condiciones:

- (1) P_1 es verdadero.
- (2) Siempre que k sea un entero positivo tal que P_k sea verdadero, P_{k+1} será verdadero.

Para ayudarnos a entender este principio, consideramos una sucesión infinita de enunciados clasificados como

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$$

que satisfagan las condiciones (1) y (2). Por (1), el enunciado P_1 es verdadero. En vista de que se cumple la condición (2), siempre que un enunciado P_k sea verdadero el siguiente enunciado P_{k+1} también lo será; por tanto, puesto que P_1 es verdadero, P_2 también lo es según (2); sin embargo, si P_2 es verdadero, entonces, por (2), el enunciado P_3 que sigue es verdadero. Una vez más, si P_3 es verdadero, entonces, por (2), P_4 también lo es. Si continuamos de esta manera, podemos afirmar que si n es cualquier entero particular, entonces P_n es verdadero, ya que podemos usar la condición (2) un paso a la vez, con lo cual llegaremos a P_n . Aun cuando este tipo de razonamiento no demuestra en realidad el principio de inducción matemática, lo hace razonable. El principio se prueba en álgebra avanzada usando postulados para los enteros positivos.

Al aplicar el principio de inducción matemática, siempre seguimos dos pasos.

Pasos en la aplicación del principio de inducción matemática

- 1 Demostrar que P_1 es verdadero.
- 2 Asumir que P_k es verdadero y luego demostrar que P_{k+1} también es verdadero.

El paso 2 causa confusión a veces. Observa que no *demostramos* que P_k sea verdadero (excepto para $k = 1$). En lugar de ello, demostramos que *si* P_k es verdadero, entonces el enunciado P_{k+1} también lo es. La suposición de que P_k es verdadero se denomina **hipótesis de inducción**.

 **EJEMPLO 1** Uso del principio de inducción matemática

Con la inducción matemática, demuestra que para todo entero positivo n , la suma de los primeros n enteros positivos es

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

SOLUCIÓN Si n es cualquier entero positivo, denotemos con P_n el enunciado

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(continúa)

Los siguientes son casos especiales de P_n .

Si $n = 1$, entonces P_1 es

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}; \text{ es decir, } 1 = 1.$$

Si $n = 2$, entonces P_2 es

$$1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}; \text{ es decir, } 3 = 3.$$

Si $n = 3$, entonces P_3 es

$$1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2}; \text{ es decir, } 6 = 6.$$

Aun cuando es instructivo comprobar la validez de P_n para varios valores de n como lo hemos hecho, no es necesario proceder así. Basta aplicar el proceso de dos pasos señalado antes de este ejemplo. Así, trabajemos de este modo:

Paso 1 Si sustituimos $n = 1$ en P_n , entonces el lado izquierdo contiene sólo el número 1 y el lado derecho es $\frac{1(1+1)}{2}$, que también es igual a 1; por tanto, P_1 es verdadero.

Paso 2 Supongamos que P_k es verdadero. Así la hipótesis de inducción es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Nuestra meta es demostrar que P_{k+1} es verdadero; es decir, que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Podemos demostrar que la última fórmula es verdadera si volvemos a escribir el lado izquierdo y usamos la hipótesis de inducción de esta forma:


$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = (1 + 2 + 3 + \cdots + k) + (k+1) \quad \text{agrupar los primeros } k \text{ términos}$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \quad \text{hipótesis de inducción}$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \quad \text{sumar términos}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \text{factorizar } k+1$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \quad \text{cambiar la forma de } k+2$$

Esto demuestra que P_{k+1} es verdadero y, por tanto, la prueba por inducción matemática está completa. 

EJEMPLO 2 Uso del principio de inducción matemáticaDemuestra que para cada entero positivo n ,

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

SOLUCIÓN Para cada entero positivo n , denotemos con P_n el enunciado dado. Observa que ésta es una fórmula para hallar la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos nones. De nueva cuenta seguimos el procedimiento de dos pasos.

Paso 1 Al sustituir 1 por n en P_n , obtenemos

$$1^2 = \frac{(1)(2-1)(2+1)}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

Esto demuestra que P_1 es verdadero.

Paso 2 Supongamos que P_k es verdadero. Así, la hipótesis de inducción es

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}.$$

Deseamos demostrar que P_{k+1} es verdadero; es decir, que

$$1^2 + 3^2 + \cdots + [2(k+1)-1]^2 = \frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}.$$

Esta ecuación se simplifica a

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

Recuerda que el término junto al último del lado izquierdo de la ecuación (el k -ésimo término) es $(2k-1)^2$. De modo semejante al usado en la solución del ejemplo 1, podemos probar la fórmula para P_{k+1} si volvemos a escribir el lado izquierdo y usamos la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + \cdots + (2k+1)^2 &= [1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2] + (2k+1)^2 && \text{agrupar los primeros } k \text{ términos} \\ &= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 && \text{hipótesis de inducción} \\ &= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} && \text{sumar términos} \\ &= \frac{(2k+1)[k(2k-1) + 3(2k+1)]}{3} && \text{factorizar } 2k+1 \\ &= \frac{(2k+1)(2k^2 + 5k + 3)}{3} && \text{simplificar} \\ &= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} && \text{factorizar y cambiar orden} \end{aligned}$$

Esto demuestra que P_{k+1} es verdadero, por tanto, P_n es verdadero para toda n .

**EJEMPLO 3** Uso del principio de inducción matemática

Demuestra que 2 es un factor de $n^2 + 5n$ para todo entero positivo n .

SOLUCIÓN Para cada entero positivo n , denotemos con P_n este enunciado:

$$2 \text{ es un factor de } n^2 + 5n$$

Seguiremos el procedimiento de dos pasos,

Paso 1 Si $n = 1$, entonces

$$n^2 + 5n = 1^2 + 5 \cdot 1 = 6 = 2 \cdot 3.$$

Así, 2 es un factor de $n^2 + 5n$ para $n = 1$; esto es, P_1 es verdadero.

Paso 2 Supongamos que P_k es verdadero. Así, la hipótesis de inducción es

$$2 \text{ es un factor de } k^2 + 5k$$

o, lo que equivale,

$$k^2 + 5k = 2p$$

para algún entero p .

Deseamos probar que P_{k+1} es verdadero; esto es, que

$$2 \text{ es un factor de } (k+1)^2 + 5(k+1).$$

Podemos proceder de este modo:

$$\begin{aligned} (k+1)^2 + 5(k+1) &= k^2 + 2k + 1 + 5k + 5 && \text{multiplicar} \\ &= (k^2 + 5k) + (2k + 6) && \text{reacomodar términos} \\ &= 2p + 2(k+3) && \text{hipótesis de inducción,} \\ & && \text{factorizar } 2k+6 \\ &= 2(p+k+3) && \text{factorizar 2} \end{aligned}$$

Puesto que 2 es un factor de la última expresión, P_{k+1} es verdadero; así pues, P_n es verdadero para toda n .

Sea j un entero positivo, y supongamos que con cada entero $n \geq j$ se relaciona un enunciado P_n . Por ejemplo, si $j = 6$, los enunciados se numeran P_6, P_7, P_8, \dots . El principio de inducción matemática se puede extender para abarcar esta situación. Con objeto de probar que los enunciados P_n son verdaderos para $n \geq j$, usamos los siguientes dos pasos de la misma forma que para $n \geq 1$.

Pasos en la aplicación del principio extendido de inducción matemática para $P_n, n \geq j$

1 Demostrar que P_j es verdadero.

2 Asumir que P_k es verdadero con $k \geq j$, y luego demostrar que P_{k+1} es verdadero.

EJEMPLO 4 Uso del principio extendido de inducción matemática

Sea a un número real diferente de cero, tal que $a > -1$. Demuestra que

$$(1+a)^n > 1+na$$

para todo entero $n \geq 2$.

SOLUCIÓN Para cada entero positivo n , denotemos con P_n la desigualdad $(1+a)^n > 1+na$. Observa que P_1 es falso, puesto que $(1+a)^1 = 1+(1)a$. Sin embargo podemos probar que P_n es verdadero para $n \geq 2$ si usamos el principio extendido con $j=2$.

Paso 1 Primero observamos que $(1+a)^2 = 1+2a+a^2$. Puesto que $a \neq 0$, tenemos $a^2 > 0$; así pues $1+2a+a^2 > 1+2a$, o bien, lo que es igual $(1+a)^2 > 1+2a$. Por tanto, P_2 es verdadero.

Paso 2 Supongamos que P_k es verdadero. De este modo, la hipótesis de inducción es

$$(1+a)^k > 1+ka.$$

Deseamos demostrar que P_{k+1} es verdadero; es decir, que

$$(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a.$$

Para probar la última desigualdad, primero notamos lo siguiente:


$$\begin{aligned}(1+a)^{k+1} &= (1+a)^k(1+a) && \text{ley de los exponentes} \\ &> (1+ka)(1+a) && \text{hipótesis de inducción y } 1+a > 0\end{aligned}$$

En seguida advertimos que

$$\begin{aligned}(1+ka)(1+a) &= 1+ka+a+ka^2 && \text{multiplicar} \\ &= 1+(ka+a)+ka^2 && \text{agrupar términos} \\ &= 1+(k+1)a+ka^2 && \text{factorizar } a \\ &> 1+(k+1)a && \text{porque } ka^2 > 0\end{aligned}$$

Las dos últimas desigualdades dan

$$(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a.$$

En consecuencia, P_{k+1} es verdadero, y la prueba por inducción matemática está completa. 

Hemos visto diversos ejemplos de demostración de enunciados mediante el principio de inducción matemática. Puedes preguntarte, “¿de dónde vienen estos enunciados?” Se pueden “descubrir” observando modelos, combinando resultados de diversos temas de matemáticas, o reconociendo ciertos tipos o categorías de relaciones. Dos de dichos enunciados se dan en los ejercicios 37 y 38, de esta sección y otros dos (algo más difíciles) se encuentran en los ejercicios de análisis 3 y 4 al final del capítulo.

10.4 Ejercicios

Ejercicios 1 al 26: demuestra que el enunciado es verdadero para todo entero positivo n .

$$1 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

$$2 + 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$3 + 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

$$4 + 3 + 9 + 15 + \cdots + (6n-3) = 3n^2$$

$$5 + 2 + 7 + 12 + \cdots + (5n-3) = \frac{1}{2}n(5n-1)$$

$$6 + 2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$$

$$7 + 1 + 2 + 2 + 3 + 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1) \cdot 2^n$$

$$8 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n = \frac{(-1)^n - 1}{2}$$

$$9 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$10 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$11 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$12 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$13 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$$

$$14 + 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

$$15 + n < 2^n$$

$$16 + 1 + 2n \leq 3^n$$

$$17 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

$$18. \text{ Si } 0 < a < b, \text{ entonces } \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} < \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

$$19 + 3 \text{ es un factor de } n^3 - n + 3.$$

$$20 + 2 \text{ es un factor de } n^2 + n. \quad 21 + 4 \text{ es un factor de } 5^n - 1.$$

$$22 + 9 \text{ es un factor de } 10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5.$$

$$23 + \text{Si } a \text{ es mayor que } 1, \text{ entonces } a^n > 1.$$

$$24 + \text{Si } r \neq 1, \text{ entonces}$$

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$25 + a - b \text{ es un factor de } a^n - b^n.$$

$$(\text{Sugerencia: } a^{n+1} - b^{n+1} = a^1(a^n - b^n) + (a^1 - b^1)b^n.)$$

$$26 + a + b \text{ es un factor de } a^{2n+1} + b^{2n+1}.$$

Ejercicios 27 al 32: encuentra el menor entero positivo j para el que el enunciado es verdadero; con el principio entendido de inducción matemática prueba que la fórmula es verdadera para todo entero mayor que j .

$$27 + n + 12 \leq n^2$$

$$28 + n^2 + 18 \leq n^3$$

$$29 + 5 + \log_2 n \leq n$$

$$30 + n^2 \leq 2^n$$

$$31 + 2n + 2 \leq 2^n$$

$$32 + n \log_2 n + 20 \leq n^2$$

Ejercicios 33 al 36: expresa la suma en términos de n .

$$33 + \sum_{k=1}^n (k^2 + 3k + 5)$$

(Sugerencia: usa el teorema sobre sumas para escribir la suma como

$$\sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 5.)$$

A continuación utiliza el ejercicio 9 anterior, el ejemplo 5 de la sección 10.1 y el teorema sobre la suma de una constante.

$$34 + \sum_{k=1}^n (3k^2 - 2k + 1)$$

$$35 + \sum_{k=1}^n (2k - 3)^2$$

$$36 + \sum_{k=1}^n (k^3 + 2k^2 - k + 4) \quad (\text{Sugerencia: usa el ejercicio 10})$$

Ejercicios 37 y 38: (a) evalúa la fórmula dada para los valores indicados en n , y del sistema resultante de ecuaciones despeja a , b , c y d . (Este método a veces sirve para obtener fórmulas para sumas); (b) compara el resultado de la parte (a) en el ejercicio indicado y explica por qué este método no demuestra que la fórmula es verdadera para toda n .

$$37 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn; \quad n = 1, 2, 3 \quad (\text{ejercicio 9})$$

$$38 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn; \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{ejercicio 10})$$

Ejercicios 39 al 42: demuestra que el enunciado es válido para cualquier entero positivo n .

$$39 + \sin(\theta + n\pi) = (-1)^n \sin \theta$$

$$40 + \cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos \theta$$

$$41 + \text{Demuestra el teorema de De Moivre:}$$

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

para todo entero positivo n .

$$42 + \text{Demuestra que para cualquier entero positivo } n \geq 3, \text{ la suma de los ángulos interiores de un polígono de } n \text{ lados está dada por la expresión } (n-2) \cdot 180^\circ.$$

10.5

Teorema del binomio

Un **binomio** es una suma $a + b$, donde a y b representan números. Si n es un entero positivo, entonces está dada una fórmula general para *expandir* $(a + b)^n$ (esto es, para expresarla como suma) por el **teorema del binomio**. En esta sección usaremos la inducción matemática para establecer esta fórmula general. Los siguientes casos especiales se pueden obtener por multiplicación:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Tales expansiones de $(a + b)^n$ para $n = 2, 3, 4$ y 5 tienen estas propiedades:

- (1) Hay $n + 1$ términos, el primero es a^n y el último es b^n .
- (2) Conforme avanzamos desde cualquier término al siguiente, la potencia de a disminuye en 1 y la potencia de b aumenta en 1. Por cada término, la suma de los exponentes de a y b es n .
- (3) Cada término tiene la forma $(c)a^k b^{n-k}$, donde el coeficiente c es un entero y $k = 0, 1, 2, \dots, n$.
- (4) La siguiente fórmula es verdadera para cada uno de los primeros n términos de la expansión:

$$\frac{(\text{coeficiente de término}) \cdot (\text{exponente de } a)}{\text{número de término}} = \text{coeficiente del siguiente término}$$

En la siguiente tabla se ilustra la propiedad 4 para la expansión de $(a + b)^5$.

Término	Número de términos	Coeficiente de término	Exponente de a	Coeficiente del siguiente término
a^5	1	1	5	$\frac{1 \cdot 5}{1} = 5$
$5a^4b$	2	5	4	$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$
$10a^3b^2$	3	10	3	$\frac{10 \cdot 3}{3} = 10$
$10a^2b^3$	4	10	2	$\frac{10 \cdot 2}{4} = 5$
$5ab^4$	5	5	1	$\frac{5 \cdot 1}{5} = 1$

Consideremos en seguida $(a + b)^n$ para un entero positivo arbitrario n . El primer término es a^n , que tiene coeficiente 1. Si suponemos que la propiedad 4 es verdadera, obtenemos los coeficientes sucesivos que se enumeran en la siguiente tabla:

Término	Número de términos	Coefficiente de término	Exponente de a	Coefficiente del siguiente término
a^n	1	1	n	$\frac{1 \cdot n}{1} = n$
$\frac{n}{1} a^{n-1} b$	2	$\frac{n}{1}$	$n-1$	$\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$
$\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} a^{n-2} b^2$	3	$\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$	$n-2$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} a^{n-3} b^3$	4	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$	$n-3$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

El modelo que aparece en la quinta columna lleva a la siguiente fórmula para hallar el coeficiente del término general.

Coefficiente del término $(k+1)$ en la expansión de $(a+b)^n$	$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad k = 1, 2, \dots, n$
---	---

El coeficiente $(k+1)$ se puede escribir en forma compacta usando **notación factorial**. Si n es cualquier entero no negativo, entonces el símbolo $n!$ (n factorial) está definido de esta forma.

Definición de $n!$	<p>(1) $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 1$ si $n > 0$</p> <p>(2) $0! = 1$.</p>
--------------------	--

De esta manera, si $n > 0$, entonces $n!$ es el producto de los primeros n enteros positivos. La definición $0! = 1$ se usa de modo que ciertas fórmulas con factoriales sean verdaderas para todos los enteros no negativos.

ILUSTRACIÓN n factorial

- $1! = 1$
- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
- $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$
- $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$

Observa el rápido crecimiento de $n!$ a medida que n aumenta.

Las aproximaciones factoriales se muestran hasta tres cifras decimales. (El número de cifras decimales puede cambiarse con **MODE**.)

TI-83 Plus

Factoriales

20 **MATH** **<** 4 **ENTER**

20!	2.433E18
30!	2.653E32
40!	8.159E47

TI-86

20 **2nd** **MATH** **PROB(F2)****(F1)** **ENTER**

20!	2.433E18
30!	2.653E32

MODE **2nd** **ANGLE** **RT** **MODE**
1 **2nd** **MODE** **2nd** **MODE**

A veces deseamos simplificar fracciones en las que numerador y denominador contienen factoriales, como se expone en la próxima ilustración.

ILUSTRACIÓN Simplificación de fracciones con factoriales

$$\blacksquare \frac{7!}{5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42$$

$$\blacksquare \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

Al igual que en la ilustración anterior, si n y k son enteros positivos y $k < n$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) \cdot [(n-k)!]}{(n-k)!} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1), \end{aligned}$$

que es el numerador del coeficiente del $(k+1)$ término de $(a+b)^n$. Al dividir entre el denominador $k!$ obtenemos la próxima forma alternativa para el coeficiente $(k+1)$:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Estos números reciben el nombre de **coeficientes binomiales** y muchas veces se denotan con el símbolo $\binom{n}{k}$ o con el símbolo $C(n, k)$; por tanto, tenemos:

Coficiente del $(k + 1)$ término
en la expansión de $(a + b)^n$
(forma alterna)

$$\binom{n}{k} = C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Los símbolos $\binom{n}{k}$ y $C(n, k)$ se leen a veces "de n escoger k ".

EJEMPLO 1 Evaluación de $\binom{n}{k}$

Encuentra $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{5}{4}$ y $\binom{5}{5}$.

SOLUCIÓN Estos seis números son los coeficientes de la expansión de $(a + b)^5$, que tabulamos antes en esta sección. Por definición,

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{5!}{0!5!} = \frac{5!}{1 \cdot 5!} = 1$$

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{1!4!} = \frac{5!}{1 \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 4!}{4!} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5!}{4!1!} = \frac{5!}{4! \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4!}{4!} = 5$$

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{5!}{5!0!} = \frac{5!}{5! \cdot 1} = 1.$$

EJEMPLO 2 Simplificación de fracciones de factoriales

Vuelve a escribir $(3n + 3)!/(3n)!$ como una expresión que no contenga factoriales.

SOLUCIÓN Por la definición de $n!$, escribimos $(3n + 3)!$ como

$$(3n + 3)(3n + 2)(3n + 1)\underbrace{(3n)(3n - 1)(3n - 2) \cdots (3)(2)(1)}_{(3n)!}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{(3n + 3)!}{(3n)!} &= \frac{(3n + 3)(3n + 2)(3n + 1)(3n)!}{(3n)!} && \text{definición de } n! \\ &= (3n + 3)(3n + 2)(3n + 1). && \text{cancelar } (3n)! \neq 0 \end{aligned}$$

El teorema del binomio se puede expresar del siguiente modo:

Teorema del binomio

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

Con notación sumatoria, podemos expresar el teorema del binomio así:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Observa que hay $n + 1$ términos (no n términos) en la expansión de $(a + b)^n$, y por ello

$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ es una fórmula para encontrar el término $(k + 1)$ de la expansión.

Una expresión alternativa del teorema del binomio es la que sigue. (Al término de esta sección aparece una demostración.)

Teorema del binomio (forma alternativa)

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

Los ejemplos que siguen se pueden resolver mediante las fórmulas generales del teorema del binomio o por el uso repetido de la propiedad (4), expresada al comienzo de la sección.



EJEMPLO 3 Determinación de una expansión binomial

Encuentra la expansión binomial de $(2x + 3y^2)^4$.

SOLUCIÓN Utilizamos el teorema del binomio con $a = 2x$, $b = 3y^2$ y $n = 4$:

$$\begin{aligned} (2x + 3y^2)^4 &= (2x)^4 + \binom{4}{1} (2x)^3 (3y^2)^1 + \binom{4}{2} (2x)^2 (3y^2)^2 + \binom{4}{3} (2x)^1 (3y^2)^3 + (3y^2)^4 \\ &= 16x^4 + 4(8x^3)(3y^2) + 6(4x^2)(9y^4) + 4(2x)(27y^6) + 81y^8 \\ &= 16x^4 + 96x^3y^2 + 216x^2y^4 + 216xy^6 + 81y^8 \end{aligned}$$

Al analizar los términos de la expansión de izquierda a derecha, vemos que los exponentes de x disminuyen de 1 en 1 y que los exponentes de y aumentan de 2 en 2. Una buena idea es comprobar modelos de exponentes después de simplificar una expansión binomial.

En el ejemplo siguiente se muestra que si a o b es negativa, los términos de la expansión son alternadamente positivos y negativos.

EJEMPLO 4 Determinación de una expansión binomial

Expandir $\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5$.

SOLUCIÓN Los coeficientes binomiales para $(a+b)^n$ se calculan en el ejemplo 1. Por tanto, si hacemos $a = 1/x$, $b = -2\sqrt{x}$ y $n = 5$ en el teorema del binomio, obtendremos

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5 &= \binom{5}{0}\left(\frac{1}{x}\right)^5 + 5\binom{5}{1}\left(\frac{1}{x}\right)^4(-2\sqrt{x})^1 + 10\binom{5}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^3(-2\sqrt{x})^2 \\ &\quad + 10\binom{5}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^2(-2\sqrt{x})^3 + 5\binom{5}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^1(-2\sqrt{x})^4 + (-2\sqrt{x})^5,\end{aligned}$$

que podemos escribir como

$$\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5 = \frac{1}{x^5} - \frac{10}{x^{7/2}} + \frac{40}{x^2} - \frac{80}{x^{3/2}} + 80x - 32x^{5/2}.$$

Para hallar un término específico de la expansión de $(a+b)^n$, es conveniente hallar primero el exponente k que se ha de asignar a b . Observamos que, por el teorema del binomio, el exponente de b es siempre uno menos que el número del término. Una vez encontrada k , sabremos que el exponente de a es $n-k$ y el coeficiente es $\binom{n}{k}$.

EJEMPLO 5 Búsqueda de un término específico de una expansión binomial

Encuentra el quinto término de la expansión de $(x^3 + \sqrt{y})^{13}$.

SOLUCIÓN Sea $a = x^3$ y $b = \sqrt{y}$. El exponente de b del quinto término es $k = 5 - 1 = 4$; en consecuencia, el exponente de a es $n - k = 13 - 4 = 9$. Del análisis del párrafo anterior obtenemos

$$(k+1)\text{ término} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{13}{4} (x^3)^9 (\sqrt{y})^4 = \frac{13!}{4!(13-4)!} x^{27} y^2 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4!} x^{27} y^2 = 715x^{27}y^2.$$



EJEMPLO 6 Búsqueda de un término específico en una expansión binomial

Encuentra el término con q^{10} en la expansión binomial de $\left(\frac{1}{3}p + q^2\right)^{12}$.

SOLUCIÓN Según el enunciado del teorema del binomio con $a = \frac{1}{3}p$, $b = q^2$ y $n = 12$, cada término de la expansión tiene la forma

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{12}{k} \left(\frac{1}{3}p\right)^{12-k} (q^2)^k.$$

Puesto que $(q^2)^k = q^{2k}$, debemos hacer $k = 5$ para obtener el término que tenga q^{10} . Con esto obtendremos

$$\binom{12}{5} \left(\frac{1}{3}p\right)^{12-5} (q^2)^5 = \frac{12!}{5!(12-5)!} \left(\frac{1}{3}\right)^7 p^7 q^{10} = \frac{88}{243} p^7 q^{10}$$

Hay un interesante arreglo triangular de números, llamado **triángulo de Pascal**, que sirve para obtener coeficientes binomiales. Los números están ordenados así:



Los números del segundo renglón son los coeficientes de la expansión de $(a+b)^1$; los del tercer renglón, los coeficientes determinados por $(a+b)^2$; los del cuarto renglón se obtienen de $(a+b)^3$; etc. Cada número de este arreglo, que sea diferente de 1, se encuentra sumando los dos números del renglón anterior que aparece arriba e inmediatamente a izquierda y derecha del número, como se ilustra en la solución del ejemplo que sigue.

EJEMPLO 7 Uso del triángulo de Pascal

Encuentra el octavo renglón del triángulo de Pascal y con él expande $(a+b)^7$.

SOLUCIÓN Volvamos a escribir el séptimo renglón y luego usemos el proceso descrito arriba. En la próxima ordenación, las flechas indican cuáles dos números del séptimo renglón se suman para obtener los números del octavo renglón.



El octavo renglón da los coeficientes de la expansión de $(a+b)^7$:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

El triángulo de Pascal es útil para expandir pequeñas potencias de $a+b$; pero la fórmula general dada por el teorema del binomio es más útil para expandir grandes potencias o para hallar un término específico, como en los ejemplos 5 y 6.

Concluimos esta sección con una demostración del teorema del binomio mediante inducción matemática.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL BINOMIO Para cada entero positivo n , denotemos con P_n la expresión dada en la forma alterna del teorema del binomio.

Paso 1 Si $n = 1$, la expresión se reduce a $(a + b)^1 = a^1 + b^1$. En consecuencia, P_1 es verdadero.

Paso 2 Supongamos que P_k es verdadero. Así, la hipótesis de inducción es

$$(a + b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^2 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^r + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-r+1)}{r!}a^{k-r}b^r + \dots + kab^{k-1} + b^k$$

Hemos demostrado el término r -ésimo y el $(r+1)$ en la expansión anterior.

Para probar que P_{k+1} es verdadero, escribimos primero

$$(a + b)^{k+1} = (a + b)^k(a + b).$$

Usamos la hipótesis de inducción para sustituir $(a + b)^k$, multiplicamos esa expresión por $a + b$ y obtenemos

$$(a + b)^{k+1} = \left[a^{k+1} + ka^k b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-1}b^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{r!}a^{k-r+1}b^r + \dots + ab^k \right] \\ + \left[a^k b + ka^{k-1}b^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^r + \dots + kab^k + b^{k+1} \right]$$

donde los términos del primer par de corchetes resultan de multiplicar por a el lado derecho de la hipótesis de inducción, y los del segundo par de multiplicar por b . En seguida volvemos a acomodar y combinar términos:

$$(a + b)^{k+1} = a^{k+1} + (k+1)a^k b + \left(\frac{k(k-1)}{2!} + k \right) a^{k-1} b^2 + \dots \\ + \left(\frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{r!} + \frac{k(k-1)\dots(k-r+2)}{(r-1)!} \right) a^{k-r+1} b^r \\ + \dots + (1+k)ab^k + b^{k+1}$$

Si los coeficientes se simplifican, obtenemos la expresión P_n con $k+1$ que sustituye a n . Así, P_{k+1} es verdadera y, por tanto, P_n se cumple para todo entero positivo n , lo que completa la prueba. \square

10.5 Ejercicios

Ejercicios 1 al 12: evalúa la expresión.

1 $2!6!$

2 $3!4!$

3 $7!0!$

4 $5!0!$

5 $\frac{8!}{5!}$

6 $\frac{6!}{3!}$

7 $\binom{5}{5}$

8 $\binom{7}{0}$

9 $\binom{7}{5}$

10 $\binom{8}{4}$

11 $\binom{13}{4}$

12 $\binom{52}{2}$

Ejercicios 13 al 16: vuelve a escribir como una expresión que no contenga factoriales.

13 $\frac{n!}{(n-2)!}$

14 $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

15 $\frac{(2n+2)!}{(2n)!}$

16 $\frac{(3n+1)!}{(3n-1)!}$

Ejercicios 17 al 30: utiliza el teorema del binomio para expandir y simplificar.

17 $(4x - y)^3$

18 $(x^2 + 2y)^3$

19 $(x + y)^6$

20 $(x + y)^4$

21 $(x - y)^7$

22 $(x - y)^5$

23 $(3x - 5y)^4$

24 $(2x - x)^3$

25 $(\frac{1}{2}x + y^2)^5$

26 $(\frac{1}{2}x + y^2)^4$

27 $\left(\frac{1}{x^2} + 3x\right)^6$

28 $\left(\frac{1}{x^3} - 2x\right)^5$

29 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$

30 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$

Ejercicios 31 al 46: sin expandir por completo, encuentra los términos indicados en la expansión de la expresión.

31 $(3x^{-2} + e^{x^2})^{25}$; primeros tres términos

32 $(x^3 + 5x^{-2})^{20}$; primeros tres términos

33 $(4z^{-1} - 3z)^{15}$; últimos tres términos

34 $(x - 2x^2)^{12}$; últimos tres términos

35 $\left(\frac{3}{c} + \frac{c^2}{4}\right)^7$; sexto término

36 $(3x^2 - \sqrt{y})^8$; quinto término

37 $(\frac{1}{3}u + 4v)^8$; séptimo término

38 $(3x^2 - y^3)^{10}$; cuarto término

39 $(x^{1/2} + y^{1/2})^8$; término del medio

40 $(rs^2 + t)^7$; dos términos del medio

41 $(2y + x^2)^8$; término que contiene x^{10}

42 $(x^2 - 2y^3)^5$; término que contiene y^6

43 $(3y^3 - 2x^2)^4$; término que contiene y^8

44 $(\sqrt{c} + \sqrt{d})^8$; término que contiene c^2

45 $\left(3x - \frac{1}{4x}\right)^6$; término que no contiene x

46 $(xy - 3y^{-1})^4$; término que no contiene y

47 Calcula $(1.2)^{10}$ usando los primeros tres términos de la expansión de $(1 + 0.2)^{10}$; compara la respuesta con la que se obtiene con una calculadora.

48 Calcula $(0.9)^4$ utilizando los primeros tres términos de la expansión de $(1 - 0.1)^4$; compara la respuesta con la que obtienes empleando tu calculadora.

Ejercicios 49 y 50: simplifica la expresión usando el teorema del binomio.

49 $\frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$ 50 $\frac{(x+h)^5 - x^5}{h}$

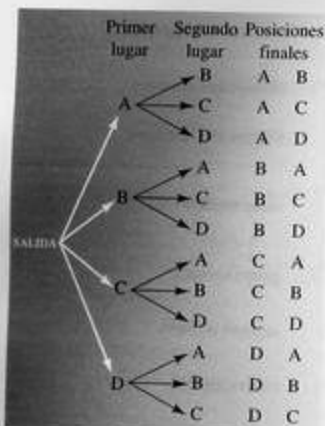
51 Demuestra que $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$ para $n \geq 1$.

52 Demuestra que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$ para $n \geq 0$.

10.6

Permutaciones

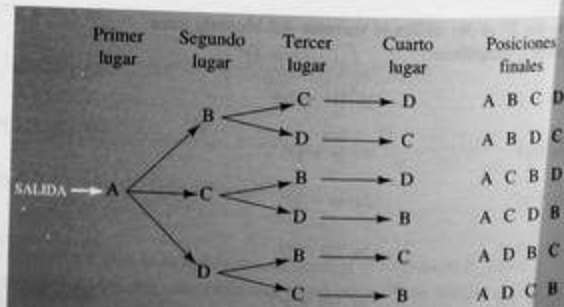
Figura 1



Supongamos que intervienen cuatro equipos en un torneo en el que han de establecerse los lugares primero, segundo, tercero y cuarto. Para fines de identificación, marcamos los equipos con A, B, C y D. Encontramos el número de diferentes formas en las que se puede decidir el primero y segundo lugar. Es conveniente usar un **diagrama de árbol** (figura 1). Después de la palabra SALIDA se enumeran las cuatro posibilidades para el primer lugar; de cada una de éstas sale una flecha a un posible segundo lugar. Las posiciones finales indican los posibles resultados, de izquierda a derecha, que se encuentran siguiendo las diferentes trayectorias (ramas del árbol) que van de la palabra SALIDA al equipo del segundo lugar. El número total de resultados es 12, que es el producto del número de opciones (4) para el primer lugar y el de opciones (3) para el segundo lugar (una vez que se ha definido el primero).

Encontramos ahora el número total de formas en que se pueden ocupar las posiciones del primero, al cuarto lugar. Para obtener el diagrama de árbol, comencemos trazando flechas desde la palabra SALIDA a cada posible ocupante A, B, C o D del primer lugar, de las que luego dibujamos flechas a los posibles ocupantes del segundo lugar, igual que en la figura 1. A partir de cada posición de segundo lugar dibujamos flechas que indican los posibles terceros lugares y, por último, trazamos flechas al equipo del cuarto lugar. Si consideramos sólo el caso en que el equipo A termina en primer lugar, tenemos el diagrama de la figura 2.

Figura 2



Observa que hay seis posibles posiciones finales en las que el equipo A ocupa el primer lugar. En un diagrama de árbol completo también habría otras tres ramas de este tipo correspondientes al primer lugar para B, C y D. Un diagrama completo mostraría las siguientes 24 posibilidades para las posiciones finales:

A primero	ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB,
B primero	BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA,
C primero	CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA,
D primero	DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA.

Observa que el número de posibilidades (24) es el producto del número de formas (4) en que puede presentarse el primer lugar, el de posibilidades (3) para el segundo lugar (después que se ha decidido el primer lugar), el número de posibles resultados (2) para el tercer lugar (después de decidir los primeros dos lugares), y el número de formas (1) en que puede darse el cuarto lugar (después que se hayan ocupado los primeros tres lugares).

Lo anterior ilustra la siguiente regla general, que aceptamos como axioma básico de conteo.

Principio fundamental de conteo

Sean E_1, E_2, \dots, E_k una sucesión de k hechos. Si, para cada i , puede ocurrir el hecho E_i de m_i maneras, la cantidad total de formas en que todos los hechos pueden tener lugar es el producto $m_1 m_2 \cdots m_k$.

En relación con nuestra primera ilustración, si E_1 representa la determinación del equipo ganador del primer lugar, $m_1 = 4$. Si E_2 denota la determinación del equipo ganador del segundo lugar, $m_2 = 3$; por tanto, el número de resultados para la sucesión E_1, E_2 es $4 \cdot 3 = 12$, que es el mismo que encontramos por medio del diagrama de árbol. Si continuamos a E_3 , la determinación del equipo ganador del tercer lugar, entonces $m_3 = 2$ y, por tanto, $m_1 m_2 m_3 = 24$. Por último, si ya han ocurrido E_1, E_2 y E_3 , sólo hay un posible resultado para E_4 . Así $m_4 = 1$, y $m_1 m_2 m_3 m_4 = 24$.

En vez de equipos, consideremos a, b, c y d meramente como símbolos y veamos los diversos *ordenamientos*, o *arreglos*, que se les pueden asignar tomándolos de dos, tres o cuatro a la vez. Si hacemos esta abstracción podremos aplicar nuestros métodos a otras situaciones similares. Los arreglos que hemos analizado son **arreglos sin repeticiones**, ya que un símbolo no se puede utilizar más de una vez en un arreglo. En el ejemplo 1 consideraremos arreglos en los que *se permiten* las repeticiones.

Antes definimos pares (o diadas) ordenados y triadas ordenadas. Del mismo modo, una *tétrada ordenada* es un conjunto que contiene cuatro elementos x_1, x_2, x_3, x_4 , en los que se ha especificado un orden, de modo que uno de los elementos puede ser el *primer elemento*, otro el *segundo elemento*, etc. El símbolo (x_1, x_2, x_3, x_4) se usa para la tétrada ordenada que tiene el primer elemento x_1 , el segundo elemento x_2 , el tercer elemento x_3 y el cuarto

elemento x_i . En general, para cualquier entero positivo r , hablamos de la **r-ada ordenada**

$$(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

como un conjunto de r elementos en la que x_1 es el primer elemento, x_2 el segundo elemento, y así, sucesivamente.

EJEMPLO 1 Determinación del número de r-adas

Usa sólo las letras a, b, c y d , y determina cuántas de las siguientes se pueden obtener:

- (a) triadas ordenadas; (b) tétradas ordenadas y (c) r -adas ordenadas

SOLUCIÓN

(a) Debemos definir el número de símbolos de la forma (x_1, x_2, x_3) que se pueden obtener usando sólo las letras a, b, c y d . Esto no es lo mismo que enumerar primero, segundo y tercer lugares como en nuestra ilustración anterior, ya que no hemos descartado la posibilidad de repeticiones. Por ejemplo (a, b, a) , (a, a, b) y (a, a, a) son triadas ordenadas diferentes. Si, para $i = 1, 2, 3$, representamos con E_i la determinación de x_i en la triada ordenada (x_1, x_2, x_3) , entonces, ya que se permiten las repeticiones, hay cuatro posibilidades, a, b, c y d , para cada una de E_1, E_2 y E_3 . Así, por el principio fundamental de conteo, el número total de triadas ordenadas es $4 \cdot 4 \cdot 4$, o sea, 64.

(b) La cantidad posible de tétradas ordenadas de la forma (x_1, x_2, x_3, x_4) es $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$, o sea, 256.

(c) La cantidad de r -adas ordenadas es el producto de $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 4$, con el 4 como factor r veces. Ese producto es igual a 4^r .



EJEMPLO 2 Selección de oficiales de clase

Un grupo de estudiantes está formado por 60 muchachas y 40 muchachos. ¿De cuántas formas se puede elegir director, subdirector, tesorero y secretario, si el tesorero debe ser una muchacha, el secretario un muchacho y ningún estudiante puede tener más de un cargo?

SOLUCIÓN Si un evento está especializado de alguna manera (por ejemplo que el tesorero *debe* ser mujer), entonces hay que tomarlo en cuenta antes de cualquiera que no sea especializado. Así, representamos con E_1 la selección de tesorero y E_2 la de secretario. Luego denotamos con E_3 y E_4 las selecciones de director y subdirector, respectivamente. De igual forma que en el principio fundamental de conteo, denotamos con m_i la cantidad de maneras en que E_i puede presentarse para $i = 1, 2, 3$ y 4. Se deduce $m_1 = 60$, $m_2 = 40$, $m_3 = 60 + 40 - 2 = 98$ y $m_4 = 97$. Por el principio fundamental de conteo el número total de posibilidades es

$$m_1 m_2 m_3 m_4 = 60 \cdot 40 \cdot 98 \cdot 97 = 22\,814\,400.$$

Por lo general, al trabajar con conjuntos no ponemos mucha atención al orden o arreglo de los elementos; pero en el resto de esta sección, ésta será nuestra primera preocupación.

Definición de permutación

Sea S un conjunto de n elementos y $1 \leq r \leq n$. Una **permutación** de r elementos de S es un arreglo, sin repeticiones, de r elementos.

También usamos la frase **permutación de n elementos tomando r a la vez**. El símbolo $P(n, r)$ denotará la cantidad de permutaciones diferentes de r elementos que se pueden obtener de un conjunto de n elementos. Como caso especial, $P(n, n)$ denota el número de arreglos de n elementos de S ; es decir, la cantidad de formas en que se pueden ordenar todos los elementos de S .

En nuestro primer análisis con los cuatro equipos A, B, C y D, teníamos $P(4, 2) = 12$; porque había 12 maneras de acomodar los cuatro equipos en grupos de dos. También demostramos que la cantidad de maneras de acomodar todos los elementos A, B, C y D es 24. En notación de permutación escribiríamos este resultado como $P(4, 4) = 24$.

En el teorema a continuación se da una fórmula general para $P(n, r)$.

Teorema sobre el número de permutaciones diferentes

Sea S un conjunto de n elementos con $1 \leq r \leq n$. El número de permutaciones diferentes de r elementos de S es

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1).$$

DEMOSTRACIÓN El problema de hallar $P(n, r)$ es equivalente a determinar la cantidad de r -adas diferentes (x_1, x_2, \dots, x_r) tal que cada x_i es un elemento de S y ningún elemento de S aparece dos veces en la misma r -ada. Podemos encontrar este número por medio del principio fundamental de conteo. Para cada $i = 1, 2, \dots, r$, representamos con E_i la determinación del elemento x_i y con m_i la cantidad de modos de seleccionar x_i . Descartamos aplicar la sucesión E_1, E_2, \dots, E_r . Tenemos n posibles opciones para x_1 y en consecuencia, $m_1 = n$. Como no se permiten repeticiones, tenemos $n-1$ opciones para x_2 ; así que $m_2 = n-1$. Continuamos de esta manera y, sucesivamente obtenemos $m_3 = n-2$, $m_4 = n-3$; por último $m_r = n-(r-1)$, o bien, lo que es igual, $m_r = n-r+1$. Así pues, usamos el principio fundamental de conteo y obtenemos la fórmula para hallar $P(n, r)$.

Observa que la fórmula para hallar $P(n, r)$ en el teorema anterior contiene exactamente r factores en el lado derecho, según apreciarás en la próxima ilustración.

ILUSTRACIÓN Cantidad de permutaciones diferentes

$$\begin{aligned} \blacksquare P(n, 1) &= n & \blacksquare P(n, 3) &= n(n-1)(n-2) \\ \blacksquare P(n, 2) &= n(n-1) & \blacksquare P(n, 4) &= n(n-1)(n-2)(n-3) \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Evaluación de $P(n, r)$

Encuentra $P(5, 2)$, $P(6, 4)$ y $P(5, 5)$.

SOLUCIÓN Usaremos la fórmula para hallar $P(n, r)$ del teorema anterior. En cada caso, primero calculamos el valor de $(n - r + 1)$.

$$5 - 2 + 1 = 4, \text{ por lo que } P(5, 2) = 5 \cdot 4 = 20$$

$$6 - 4 + 1 = 3, \text{ por lo que } P(6, 4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

$$5 - 5 + 1 = 1, \text{ por lo que } P(5, 5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

EJEMPLO 4 Acomodo del orden de bateo de un equipo de béisbol

Un equipo de béisbol está formado por nueve jugadores. Encuentra la cantidad de maneras de acomodar las primeras cuatro posiciones en el orden de bateo excluyendo al lanzador.

SOLUCIÓN Deseamos hallar el número de permutaciones de ocho sujetos tomados cuatro a la vez. Con la fórmula para hallar $P(n, r)$ con $n = 8$ y $r = 4$, tenemos $n - r + 1 = 5$, y se deduce que

$$P(8, 4) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$

El resultado que sigue da una forma para hallar $P(n, r)$ donde interviene el símbolo factorial.

Forma factorial para hallar $P(n, r)$

Si n es un entero positivo y $1 \leq r \leq n$, entonces

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

DEMOSTRACIÓN Con $r = n$ en la fórmula para hallar $P(n, r)$ en el teorema sobre permutaciones obtenemos la cantidad de arreglos diferentes de todos los elementos de un conjunto formado por n elementos. En este caso,

$$n - r + 1 = n - n + 1 = 1$$

y

$$P(n, n) = n(n - 1)(n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Así pues, $P(n, n)$ es el producto de los primeros n enteros positivos. Este resultado también está dado por la forma factorial porque si $r = n$, entonces

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

Si $1 \leq r \leq n$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n - r)!} &= \frac{n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1) \cdot [(n - r)!]}{(n - r)!} \\ &= n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1). \end{aligned}$$

Esto concuerda con la fórmula para hallar $P(n, r)$ del teorema sobre permutaciones.


EJEMPLO 5 Evaluación de $P(n, r)$ usando factoriales

Utiliza la forma factorial para $P(n, r)$, y encuentra $P(5, 2)$, $P(6, 4)$ y $P(5, 5)$.

SOLUCIÓN

$$P(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

$$P(5, 5) = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

En muchas calculadoras, $P(n, r)$ se denota por nPr . Podemos calcular las permutaciones del ejemplo 5 como sigue.

TI-83 Plus

5 **MATH** **<** 2 **ENTER**

5 nPr 2	20
6 nPr 4	360
5 nPr 5	120

TI-86

5 **2nd** **MATH** **PROB(F2)**
nPr(F2) 2 **ENTER**

5 nPr 2	20
6 nPr 4	360

10.6 Ejercicios

Ejercicios 1 al 8: encuentra el número.

- | | |
|--------------|--------------|
| 1. $P(7, 3)$ | 2. $P(8, 5)$ |
| 3. $P(9, 6)$ | 4. $P(5, 3)$ |
| 5. $P(5, 5)$ | 6. $P(4, 4)$ |
| 7. $P(6, 1)$ | 8. $P(5, 1)$ |

Ejercicios 9 al 12: simplifica la permutación.

- | | |
|-----------------|---------------|
| 9. $P(n, 0)$ | 10. $P(n, 1)$ |
| 11. $P(n, n-1)$ | 12. $P(n, 2)$ |

13. ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar de los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 si las repeticiones

(a) no se permiten? (b) se permiten?

14. Trabaja el ejercicio 13 para números de cuatro dígitos.

15. ¿Cuántos números se pueden formar de los dígitos 1, 2, 3 y 4 si no se permiten repeticiones? (Nota: 42 y 231 son ejemplos de tales números.)

16. Halla el número de enteros positivos menores de 10 000 que se pueden formar de los dígitos 1, 2, 3 y 4 si se permiten repeticiones.

17. Posiciones en básquetbol Si ocho equipos de básquetbol participan en un torneo, encuentra la cantidad de formas diferentes en que se pueden decidir el primero, segundo y tercer lugares, suponiendo que no se permitan empates.
18. Posiciones en básquetbol Trabaja el ejercicio 17 para 12 equipos.
19. Guardarropa para combinar e igualar Una muchacha tiene cuatro faldas y seis blusas. ¿Cuántas combinaciones de falda y blusa puede usar?
20. Guardarropa para combinar e igualar Consulta el ejercicio 19. Si la muchacha tiene también tres suéteres, ¿cuántas combinaciones de falda-blusa-suéter puede usar?
21. Números de placa de circulación En cierto estado, las placas de circulación empiezan con una letra del alfabeto seguida de cinco dígitos (0, 1, 2, ..., 9). Indica cuántas placas de circulación diferentes son posibles si
- (a) El primer dígito que sigue a la letra no puede ser 0.
 - (b) La primera letra no puede ser O ni I, y el primer dígito no puede ser 0.
22. Tiro de dados Se lanzan dos dados, uno después de otro. ¿En cuántas formas pueden caer? Cita la cantidad de formas en que la suma de los puntos puede ser igual a
- (a) 3
 - (b) 5
 - (c) 7
 - (d) 9
 - (e) 11
23. Acomodo de asientos En un aula hay seis asientos y diez estudiantes.
- (a) ¿De cuántas formas se pueden ocupar los asientos?
 - (b) Si hay seis muchachos y cuatro muchachas en el grupo y si ambos sexos han de alternarse, encuentra la cantidad de acomodados diferentes de los asientos.
24. Programación de cursos Un estudiante de determinada universidad puede tomar matemáticas a las 8, 10, 11 o 12 horas; inglés a las 9, 10, 1 o 2 e historia a las 8, 11, 2 o 3. Halla la cantidad de maneras en que puede programar los tres cursos.
25. Prueba de falso o verdadero ¿En cuántas formas puede completarse una prueba de diez preguntas de falso o verdadero?
26. Prueba de opción múltiple Una prueba consta de diez preguntas de opción múltiple y hay cinco opciones por pregunta. ¿De cuántas maneras se puede completar la prueba?
27. Acomodo de asientos ¿De cuántos modos se pueden sentar ocho personas en una fila?
28. Acomodo de libros ¿De cuántas maneras se pueden acomodar diez libros en un estante?
29. Semáforo Con seis banderas diferentes, ¿cuántas señales se pueden transmitir al poner tres banderas, una sobre la otra, en un asta?
30. Selección de libros ¿De cuántos modos se pueden seleccionar cinco libros de un conjunto de doce volúmenes?
31. Nomenclatura de estaciones de radio ¿Cuántos nombres de cuatro letras para estaciones de radio se pueden formar si la primera letra debe ser K o W y las repeticiones
- (a) no se permiten?
 - (b) se permiten?
32. Designaciones de fraternidad Hay 24 letras en el alfabeto griego. ¿Cuántas fraternidades se pueden especificar eligiendo tres letras griegas si las repeticiones
- (a) no se permiten?
 - (b) se permiten?
33. Números telefónicos ¿Cuántos números telefónicos de siete dígitos se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, ..., 9 si el primer dígito no puede ser 0?
34. Orden de bateo en el béisbol Después de seleccionar nueve jugadores para un partido de béisbol, el entrenador acomoda el orden al bat de modo que al lanzador le corresponde el último lugar y al mejor bateador el tercero. ¿De cuántas formas puede acomodarse el resto del orden de bateo?
35. Clave de acceso a cajeros automáticos Un cliente recuerda que 2, 4, 7 y 9 son los dígitos de una clave de acceso de cuatro cifras para un cajero automático. Desafortunadamente, ha olvidado el orden de los dígitos. Encuentra el máximo número posible de intentos necesarios para obtener la clave correcta.
36. Clave de acceso a cajeros automáticos Trabaja el ejercicio 35 si los dígitos son 2, 4 y 7 y uno de estos dígitos está repetido en la clave de cuatro cifras.

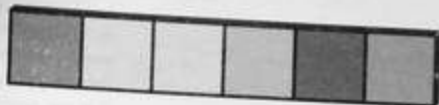
37. Selección de asientos para teatro. Tres matrimonios han comprado boletos para una obra de teatro; marido y mujer han de sentarse juntos y los seis asientos están en una fila. ¿De cuántas formas se pueden sentar las seis personas?
38. Resultados de una carrera de caballos. Diez caballos participan en una carrera. Si se pasa por alto la posibilidad de un empate en cualquier lugar, ¿de cuántas maneras pueden determinarse los ganadores del primero, segundo y tercer lugares?
39. Posibilidades para el almuerzo. Los dueños de un restaurante anuncian que ofrecen 1 114 095 almuerzos diferentes por el hecho de que tienen 16 "complementos gratuitos" para acompañar cualquiera de las 17 selecciones de su menú (sandwiches, hot dogs y ensaladas). ¿Cómo obtuvieron ese número?

40. Barajar las cartas (o naipes)

- (a) ¿De cuántas maneras se puede barajar un montón de 52 cartas?
- (b) ¿De cuántas formas es posible barajar las cartas, de modo que aparezcan cuatro ases en la parte superior del montón?
41. Palíndromos numéricos. Un palíndromo es un entero, como el 45 654, que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.
- (a) ¿Cuántos palíndromos de cinco dígitos hay?
- (b) ¿Cuántos palíndromos de n dígitos hay?

42. Arreglos de colores. Cada uno de los seis cuadros de la figura ha de llenarse con cualquiera de diez colores posibles. ¿Cuántas maneras hay de rellenar la franja de la figura, de modo que no haya dos cuadros adyacentes con el mismo color?

Ejercicio 42



43. Este ejercicio requiere una calculadora que pueda graficar x^y .

- (a) Grafica $y = \frac{x! e^x}{x^x \sqrt{2\pi x}}$ en $(0, 20]$ y calcula la asíntota horizontal.
- (b) Utiliza la gráfica de (a) y halla una aproximación para $n!$ si n es un entero positivo grande.
44. (a) ¿Qué pasa si se usa una calculadora para hallar $P(150, 50)$? Explícate.
- (b) Calcular r si $P(150, 50) = 10^r$ usando la siguiente fórmula de matemáticas avanzadas:

$$\log n! = \frac{n \ln n - n}{\ln 10}$$

10.7

Permutaciones y combinaciones distinguibles

En determinados problemas se tienen que encontrar diferentes arreglos de objetos, algunos de los cuales no pueden identificarse. Por ejemplo, supongamos que nos dan cinco discos del mismo tamaño y que tres son negros, uno es blanco y el otro es rojo. Encontremos la cantidad de maneras en que se pueden colocar en una fila de modo que se obtengan diferentes arreglos de colores. Si los discos fueran todos de distintos colores, la cantidad de arreglos sería $5!$, o sea 120. Sin embargo, puesto que algunos tienen el mismo color, no podemos obtener 120 arreglos diferentes. Para aclarar este punto escribimos

$$N \quad N \quad N \quad B \quad R$$

Para el arreglo con discos negros en las tres primeras posiciones de la fila, el disco blanco está en cuarta posición y el rojo en la quinta. Los primeros tres se pueden acomodar en $3!$, o sea 6, maneras, pero estos arreglos no se pueden distinguir uno de otro porque los primeros tres discos tienen el mismo

color. Decimos que estas $3!$ permutaciones son **indistinguibles**. Del mismo modo, dado otro arreglo cualquiera, por ejemplo

$$N \quad R \quad N \quad B \quad N,$$

hay $3!$ maneras de acomodar los discos negros pero, otra vez, cada uno de dichos arreglos es indistinguible de los otros. Llamemos a dos arreglos de objetos **permutaciones distinguibles** si un arreglo no se puede obtener a partir del otro por el reacomodo de objetos semejantes. Así, $NNNBR$ y $NNRNB$ son permutaciones distinguibles de los cinco discos. Denotemos con k el número de permutaciones distinguibles. Puesto que a cada uno de dichos arreglos corresponden $3!$ permutaciones *no distinguibles*, debemos tener $3!k = 5!$, la cantidad de permutaciones de cinco objetos *diferentes*. Por tanto, $k = 5!/3! = 5 \cdot 4 = 20$. Por el mismo tipo de razonamiento podemos ampliar este análisis como se explica a continuación.

Primer teorema sobre permutaciones distinguibles

Si en un conjunto de n objetos r de ellos son iguales y si los objetos restantes son distintos entre sí y de los r objetos, la cantidad de permutaciones distinguibles de n objetos es

$$\frac{n!}{r!}.$$

Podemos generalizar este teorema al caso en el que hay varios subconjuntos de objetos no distinguibles. Por ejemplo, consideremos ocho discos, de los cuales cuatro son negros, tres blancos y uno rojo. En este caso, con cada arreglo, como

$$N \quad B \quad N \quad B \quad N \quad B \quad N \quad R,$$

hay $4!$ arreglos de los discos negros y $3!$ arreglos de los discos blancos que no tienen efecto en el arreglo de colores. De ahí que $4!3!$ posibles arreglos de los discos no produzcan permutaciones distinguibles. Si denotamos con k la cantidad de permutaciones *distinguibles*, $4!3!k = 8!$, porque $8!$ son las permutaciones que obtendríamos si todos los discos fueran diferentes. Así el número de permutaciones distinguibles es

$$k = \frac{8!}{4!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{4!}{4!} = 280.$$

Se puede demostrar el siguiente resultado general.

Segundo teorema sobre permutaciones distinguibles

Si, en un conjunto de n objetos, n_1 son semejantes de una clase, n_2 , de otra, ..., n_k , de otra más, y

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k,$$

entonces la cantidad de permutaciones distinguibles de los n objetos es

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

**EJEMPLO 1** Búsqueda de un número de permutaciones distinguibles

Encuentra la cantidad de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra *Mississippi*.

SOLUCIÓN En este ejemplo nos dan un conjunto de once objetos, de los cuales cuatro son de una clase (la letra *s*), cuatro de otra (*i*), dos de una tercera (*p*) y uno es de una cuarta (*M*). Por lo tanto, por el teorema anterior, tenemos $11 = 4 + 4 + 2 + 1$ y la cantidad de permutaciones distinguibles es

$$\frac{11!}{4! 4! 2! 1!} = 34\,650.$$

Cuando trabajamos con permutaciones, los ordenamientos o arreglos de elementos son el punto básico. Pasemos por alto, de momento, el orden o arreglo de elementos y consideremos esta pregunta: dado un conjunto con n elementos distinguibles, ¿de cuántas maneras puede escogerse un subconjunto de r elementos con $r \leq n$? Antes de contestar, establezcamos una definición.

Definición de combinación

Sea S un conjunto de n elementos con $1 \leq r \leq n$. Una **combinación** de r elementos de S es un subconjunto de S con r elementos distintos.

Si S contiene n elementos, también usamos la frase **combinación de n elementos tomados r a la vez**. El símbolo $C(n, r)$ denotará la cantidad de combinaciones de r elementos que puede obtenerse de un conjunto de n elementos.

Teorema sobre la cantidad de combinaciones

La cantidad de combinaciones de r elementos que puede obtenerse de un conjunto de n elementos es

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! r!}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

La fórmula para $C(n, r)$ es idéntica a la fórmula para el coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ de la sección 10.5.

DEMOSTRACIÓN Si S contiene n elementos, entonces, para hallar $C(n, r)$, debemos encontrar la cantidad total de subconjuntos de la forma

$$\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$$

tal que los x_i sean diferentes elementos de S . Puesto que los r elementos x_1, x_2, \dots, x_r se pueden acomodar en $r!$ formas distintas, cada uno de dichos subconjuntos produce $r!$ r -adas diferentes; por tanto, el total de r -adas diferentes es $r! C(n, r)$. Sin embargo, en la sección previa encontramos que el total de r -adas es

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Por tanto,

$$r! C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Al dividir entre $r!$ ambos lados de la última ecuación resulta la fórmula para hallar $C(n, r)$.

A partir de la demostración, advierte que

$$P(n, r) = r! C(n, r)$$

lo cual significa que hay más permutaciones que combinaciones cuando de un conjunto de n elementos elegimos un subconjunto de r elementos. Para recordar esta relación, considera la combinación Bush-Quayle. Sólo hay un grupo o combinación de estas dos personas, pero cuando a estas dos personas se asocia un orden Presidente-Vicepresidente, hay dos permutaciones y Bush-Quayle es claramente distinta de Quayle-Bush.

A medida que leas los ejemplos y trabajes los ejercicios, recuerda lo siguiente:

Si el orden de la selección es importante, usa una permutación.

Si el orden de la selección no es importante, usa una combinación.

EJEMPLO 2 Selección de un equipo de béisbol

Un equipo de béisbol de ligas menores tiene seis jardineros, siete jugadores de cuadro, cinco lanzadores y dos receptores. Cada jardinero puede ocupar cualquiera de las tres posiciones y cada jugador de cuadro puede hacerse cargo de las cuatro posiciones del cuadro. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar el equipo de nueve jugadores?

SOLUCIÓN La cantidad de formas de seleccionar tres jardineros, a partir de seis candidatos, es

$$C(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

Recuerda: si es posible ignorar el orden de la selección, usa una combinación.

Las formas de seleccionar los cuatro jugadores de cuadro son

$$C(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!4!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

Hay cinco formas de seleccionar un lanzador y dos de escoger el receptor. A partir del principio fundamental de conteo, se deduce que el total de maneras de seleccionar un equipo es

$$20 \cdot 35 \cdot 5 \cdot 2 = 7000.$$



EJEMPLO 3 Obtención de un "full"

En un tipo de póquer, de una baraja de 52 cartas se da una mano de cinco naipes.

- (a) ¿Cuántas manos son posibles?
 (b) Un *full* (o *fuljan*) es una mano que consta de tres cartas de una denominación y dos cartas de otra denominación. (Las 13 denominaciones son 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, sota, reina, rey y as). ¿Cuántas manos son *full*?

SOLUCIÓN

- (a) El orden en que se dan las cartas no importa, así que usamos una combinación:

$$C(52, 5) = \frac{52!}{(52-5)!5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{47! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2\,598\,960$$

- (b) Primero determinamos de cuántas formas es posible obtener un *full* específico; por ejemplo, tres ases y dos reyes (figura 1). Hay cuatro cartas de cada denominación y el orden de la selección puede omitirse, de modo que empleamos combinaciones:

$$\text{cantidad de formas en que es posible obtener 3 ases} = C(4, 3)$$

$$\text{cantidad de formas en que es posible obtener 2 reyes} = C(4, 2)$$

Ahora debemos elegir las dos denominaciones. Como 3 ases y 2 reyes es un *full* distinto a 3 reyes y 2 ases, el orden de selección de la denominación es importante y utilizamos una permutación:

$$\text{cantidad de formas de elegir dos denominaciones} = P(13, 2)$$

Por el principio fundamental de conteo, el número de *fulles* es

$$C(4, 3) \cdot C(4, 2) \cdot P(13, 2) = 4 \cdot 6 \cdot 156 = 3744.$$

Figura 1



El orden de la selección no es importante, por lo que usamos combinaciones.

El orden de la selección es importante, por lo que usamos una permutación.

La combinación de teclas para calcular combinaciones es casi idéntica a la que se usa para calcular permutaciones: simplemente utiliza nCr en vez de nPr .

TI-83 Plus

5 MATH < 3 2 ENTER

5 nCr 2	
6 nCr 4	10
5 nCr 5	15
	1

TI-86

5 2nd MATH PROB(F2) nCr(F3) 2 ENTER

5 nCr 2	
6 nCr 4	10
	15
<div> <div>MODE</div> <div>EDIT</div> <div>ANGLE</div> <div>HY</div> <div>MODE</div> </div> <div> <div>1</div> <div>2</div> <div>3</div> <div>4</div> <div>5</div> <div>6</div> <div>7</div> <div>8</div> <div>9</div> <div>0</div> <div>DEL</div> <div>CE</div> <div>END</div> <div>QUIT</div> <div>2nd</div> <div>DEL</div> <div>CE</div> <div>END</div> <div>QUIT</div> <div>2nd</div> <div>DEL</div> <div>CE</div> <div>END</div> <div>QUIT</div> </div>	

Observa que si $r = n$, la fórmula para hallar $C(n, r)$ se convierte en

$$C(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

Es conveniente asignar un significado a $C(n, r)$ si $r = 0$. Si la fórmula ha de ser verdadera en este caso, entonces debemos tener

$$C(n, 0) = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1.$$

Por tanto, definimos $C(n, 0) = 1$, que es lo mismo que $C(n, n)$. Para finalizar, por consistencia, también definimos $C(0, 0) = 1$. Así, $C(n, r)$ tiene significado para todos los enteros no negativos n y r con $r \leq n$.

EJEMPLO 4 Búsqueda de la cantidad de subconjuntos de un conjunto

Sea S un conjunto de n elementos. Encuentra el número de subconjuntos distintos de S .

SOLUCIÓN Sea r cualquier entero no negativo tal que $r \leq n$. De nuestro trabajo anterior, el número de subconjuntos de S formado por r elementos es $C(n, r)$, o sea $\binom{n}{r}$. Por tanto, para hallar el número total de subconjuntos, basta encontrar la suma

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}. \quad (*)$$

Al recordar la fórmula para el teorema del binomio,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

podemos ver que la suma indicada (+) es la expansión binomial de $(1 + 1)^n$. Así hay 2^n subconjuntos de un conjunto de n elementos. En particular, un conjunto de 3 elementos tiene 2^3 , esto es 8, subconjuntos diferentes. Un conjunto de 4 elementos tiene 2^4 , o sea 16, subconjuntos. Un conjunto de 10 elementos tiene 2^{10} , es decir, 1024 subconjuntos.

La siguiente forma de combinación permite recordar con facilidad el triángulo de Pascal (sección 10.5):

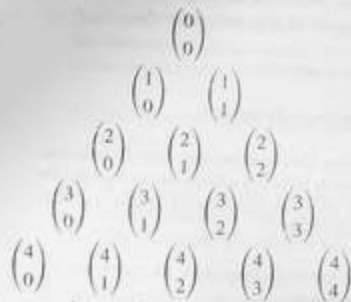
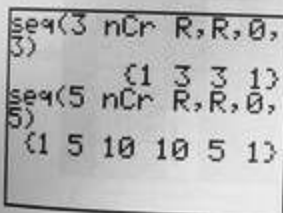


Figura 2



Combinamos esta información con la del ejemplo 4 y concluimos que el tercer coeficiente de la expansión de $(a + b)^4$, $\binom{4}{2}$, es exactamente el mismo que la cantidad de subconjuntos de dos elementos de un conjunto que contiene cuatro elementos. Dejamos como ejercicio hallar una generalización del último enunciado (ve el ejercicio de análisis 6 al final de este capítulo). Observa que podemos usar el comando de sucesión (*sequence*) para generar los renglones del triángulo de Pascal, como se muestra en la figura 2.

10.7 Ejercicios

Ejercicios 1 al 8: encuentra el número.

- 1 $C(7, 3)$
- 2 $C(8, 4)$
- 3 $C(9, 8)$
- 4 $C(6, 2)$
- 5 $C(n, n - 1)$
- 6 $C(n, 1)$
- 7 $C(7, 0)$
- 8 $C(5, 5)$

Ejercicios 9 y 10: proporciona la cantidad de posibles arreglos de color para los 12 discos dados, dispuestos en una fila.

- 9 Cinco negros, tres rojos, dos blancos y dos verdes.

- 10 Tres negros, tres rojos, tres blancos y tres verdes.

- 11 Encuentra el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra *bookkeeper*.
- 12 Encuentra el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra *moon*. Enumera todas las permutaciones.
- 13 Selección de equipos de béisquetbol. Diez personas desean jugar en un partido de béisquetbol. ¿De cuántas maneras se pueden formar dos equipos de cinco jugadores?

14. Selección de preguntas de examen. Un estudiante puede contestar seis preguntas cualesquiera de diez de un examen.

- (a) ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse seis preguntas?
- (b) ¿Cuántas selecciones son posibles si las primeras dos preguntas deben contestarse?

Ejercicios 15 y 16: considera cualesquiera ocho puntos tales que ningunos tres de ellos sean colineales.

15. ¿Cuántas rectas se determinan?
16. ¿Cuántos triángulos se determinan?

17. **Acomodo de libros** Un estudiante tiene cinco libros de matemáticas, cuatro de historia y ocho de ciencia-ficción. ¿De cuántas formas los puede acomodar en un estante conservando junta cada clase?

- 18 Selección de un equipo de básquetbol. Un equipo está formado por 12 jugadores.

- (a) Sin considerar las posiciones, ¿de cuántas maneras se puede seleccionar un equipo de cinco?
- (b) Si el centro del equipo debe ser uno de dos jugadores y los otros cuatro se escogerán entre los diez restantes, encuentra la cantidad de posibles equipos diferentes.

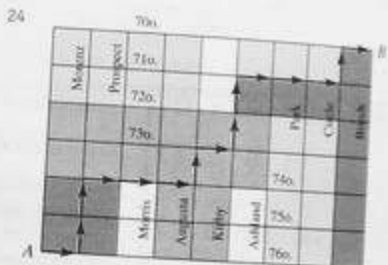
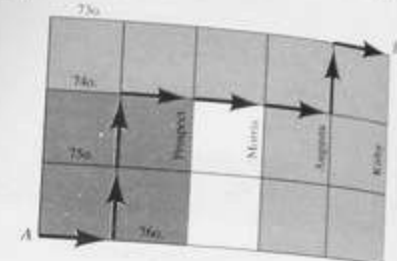
- 19 Selección de un equipo de fútbol. Un equipo de fútbol está formado por tres centros, diez linieros que pueden jugar de guardias o de tackles, tres mariscales de campo, seis *halfbacks*, cuatro extremos y cuatro *fullbacks*. Un equipo debe tener un centro, dos guardias, dos tackles, dos extremos, dos *halfbacks*, un mariscal de campo y un *fullback*. ¿De cuántas formas se puede seleccionar un equipo?

- 20 Acomoda de llaves en un llavero. ¿De cuántas formas se pueden colocar siete llaves en un llavero, si las llaves se pueden deslizar alrededor del llavero?

- 21 Selección de un comité. De un grupo de 12 hombres y 8 mujeres se ha de elegir un comité de tres hombres y dos mujeres. Da el total de maneras de seleccionar el comité.

- 22 Orden de nacimiento Las letras M y H denotan el nacimiento de una niña o un niño, respectivamente. Para una familia de tres niños y tres niñas, un posible orden de nacimiento es M M M H H H. ¿Cuántos órdenes de nacimiento son posibles para estos seis hijos?

Ejercicios 23 y 24: en la figura se muestra un mapa de calles y una posible trayectoria del punto A al B. ¿Cuántas trayectorias posibles hay de A a B si los movimientos se restringen a la derecha o arriba? (Sugerencia: si B genera un movimiento de una unidad a la derecha y A es un movimiento unitario hacia arriba, la trayectoria del ejercicio 23 se puede especificar mediante D A A D D D A B.)



25. Selecciones de lotería. Para ganar en la lotería del estado, un jugador debe seleccionar correctamente seis números del 1 al 49.

- (b) Trabaja la parte (a) si un jugador elige sólo números pares.

26. **Asignaciones de oficina** Un departamento de matemáticas tiene diez profesores pero sólo nueve oficinas, así que habrá que compartir una. ¿De cuántas maneras se pueden asignar las oficinas?

- 27 Torneo de tenis. En un torneo de tenis *round-robin*, cada jugador se enfrenta a cada uno de los otros una vez. ¿Cuántos jugadores pueden participar en un torneo de 45 juegos?

28 Prueba de verdadero o falso Un examen de verdadero o falso tiene 20 preguntas.

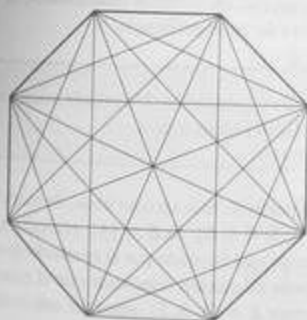
- (a) ¿De cuántas maneras se puede completar la prueba?
- (b) ¿De cuántos modos puede contestar un estudiante correctamente diez preguntas?

29 Serie de campeonato de básquetbol El ganador de la serie de campeonato de siete juegos de la NBA es el equipo que gana cuatro partidos. ¿De cuántas maneras puede extenderse la serie a siete juegos?

30 Un diseño geométrico se determina uniendo cada par de vértices de un octágono (ve la figura).

- (a) ¿Cuántos triángulos del diseño tienen sus tres vértices en el octágono?
- (b) ¿Cuántos cuadriláteros del diseño tienen sus cuatro vértices en el octágono?

Ejercicio 30



31 Selección de helado Una nevería tiene 31 sabores y anuncia que sirve casi 4500 barquillos distintos de tres bolas, cada una de diferente sabor. ¿Cómo se obtuvo este número?

32 Opciones de condimentos para hamburguesa Un restaurante de comida rápida ofrece cualquier combinación de ocho condimentos en una hamburguesa, lo que da al cliente 256 opciones. ¿Cómo se obtuvo este número?

33 Selección de becarios De 1000 estudiantes, un comité elegirá 30 para otorgarles una beca. ¿De cuántas formas es posible elegir a los becarios si cada beca tiene

- (a) el mismo monto?
- (b) un monto diferente?

34 Clasificación de velocistas Doce corredores compiten en una eliminatoria; quienes hagan los cuatro mejores tiempos avanzarán a la final.

- (a) ¿De cuántas formas es posible seleccionar este grupo de cuatro?
- (b) Si los cuatro mejores tiempos estarán sembrados (clasificados) en la final, ¿de cuántas formas es posible seleccionar y sembrar a este grupo de cuatro?

35 Juegos de póquer Consulta el ejemplo 3. ¿Cuántas manos tendrán exactamente tres reyes?

36 Juegos de bridge ¿Cuántas manos de 13 naipes de una baraja normal tendrán exactamente siete espadas?

Ejercicios 37 y 38: (a) calcula la suma S_n para $n = 1, 2, 3, \dots, 10$, donde si $n < r$, entonces $\binom{n}{r} = 0$. (b) Predice una fórmula general para S_n .

$$37 \quad \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \dots$$

$$38 \quad (1)\binom{n}{1} - (2)\binom{n}{2} + (3)\binom{n}{3} - (4)\binom{n}{4} + (5)\binom{n}{5} - \dots$$

Ejercicios 39 al 42: (a) grafica $C(n, r)$ para el valor dado de n , donde $r = 1, 2, 3, \dots, n$. (b) Determina el máximo de $C(n, r)$ y el o los valores de r cuando este máximo se presente.

$$39 \quad n = 10$$

$$40 \quad n = 13$$

$$41 \quad n = 19$$

$$42 \quad n = 20$$

10.8

Probabilidad

Si se lanzan dos dados ¿cuáles son las probabilidades de que salga el 7? Si una persona recibe cinco cartas de una baraja normal de 52 naipes, ¿cuál es la probabilidad de que le toquen tres ases? En el siglo XVII, preguntas similares sobre los juegos de azar llevaron al estudio de la *probabilidad*. Desde entonces, la teoría de las probabilidades se ha extendido en forma considerable. Ahora se utiliza para pronosticar los resultados de una amplia variedad de situaciones que se presentan en las ciencias naturales y sociales.

Cualquier proceso de azar, como es tirar al aire una moneda, arrojar un dado, repartir cartas de una baraja, determinar si una pieza fabricada es defectuosa o la presión sanguínea de una persona, es un **experimento**. El efecto de un experimento se llama **resultado**. Restringiremos nuestro análisis a experimentos para los que los resultados son **igualmente probables**, a menos que se indique de otra manera. Esto significa, por ejemplo, que si una moneda se lanza al aire, suponemos que la posibilidad de que salga cara o cruz es la misma. Del mismo modo, si se tira un dado, suponemos que el dado *no está cargado*; es decir, hay igual probabilidad de obtener 1, 2, 3, 4, 5 o 6. El conjunto S de todos los posibles resultados de un experimento es el **espacio muestral** del experimento. Así, si éste consiste en lanzar al aire una moneda y denotamos con H o T el resultado de obtener cara o cruz, respectivamente, el espacio muestral S se puede denotar con

$$S = \{H, T\}.$$

Si se arroja un dado no cargado como experimento, el conjunto S de todos los posibles resultados (el espacio muestral) es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

La siguiente definición expresa, en términos matemáticos, la noción de obtener resultados *particulares* de un experimento.

Definición de evento

Sea S el espacio muestral de un experimento. Un **evento** relacionado con el experimento es cualquier subconjunto E de S .

Consideremos el experimento de tirar un solo dado, de modo que el espacio muestral sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si $E = \{4\}$, entonces el evento E relacionado con el experimento está formado por el resultado de obtener un 4 en el tiro. Diferentes eventos se pueden relacionar con el mismo experimento. Por ejemplo, si hacemos $E = \{1, 3, 5\}$, entonces este evento consistirá en obtener un número non en un tiro del dado.

Como otra ilustración supongamos el experimento que se da al lanzar al aire dos monedas, una después de otra. Si denotamos con HH el resultado en que aparecen dos caras, con HT que aparezca una cara en la primera y cruz en la segunda, etcétera, el espacio muestral S del experimento puede denotarse con

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

$$E = \{HT, TH\}.$$

Si hacemos

entonces el evento E está formado por la aparición de una cara en una moneda y una cruz en la otra.

A continuación definimos qué se quiere decir con *probabilidad* de un evento. En todo nuestro análisis supondremos que el espacio muestral S de un experimento contiene sólo un número finito de elementos. Si E es un evento, los símbolos $n(E)$ y $n(S)$ denotarán el número de elementos de E y S , respectivamente. Recuerda que E y S están formados por resultados igualmente probables.

Definición de la probabilidad de un evento

Sea S el espacio muestral de un experimento y E un evento. La **probabilidad** $P(E)$ de E está dada por

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Como E es un subconjunto de S , vemos que

$$0 \leq n(E) \leq n(S).$$

Dividimos entre $n(S)$ y obtenemos

$$\frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(E)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \quad \text{o bien de manera equivalente,} \quad 0 \leq P(E) \leq 1.$$

Advierte que $P(E) = 0$ si E no contiene elementos y $P(E) = 1$ si $E = S$.

El ejemplo que sigue contiene tres ilustraciones de la definición anterior si E contiene exactamente un elemento.

EJEMPLO 1 Determinación de la probabilidad de un evento

- Si se lanza una moneda, encuentra la probabilidad de que salga cara.
- Si se tira un dado no cargado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 4?
- Si se arrojan dos monedas, encuentra la probabilidad de que en ambas salga cara.

SOLUCIÓN Para cada experimento expresaremos los conjuntos S y E y luego usaremos la definición de probabilidad de un evento para hallar $P(E)$.

$$(a) \quad S = \{H, T\}, \quad E = \{H\}, \quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

$$(b) \quad S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad E = \{4\}, \quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

$$(c) \quad S = \{HH, HT, TH, TT\}, \quad E = \{HH\}, \quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

En la parte (a) del ejemplo 1 encontramos que la probabilidad de obtener cara en una moneda es $\frac{1}{2}$. Tomamos esto para significar que si una moneda se lanza muchas veces, la cantidad de veces que salga cara debe ser aproximadamente la mitad del total de tiros. Por lo tanto, para 100 tiros, debe caer cara unas 50 veces. Es poco probable que esta cifra sea *exactamente* 50. Una probabilidad de $\frac{1}{2}$ significa que si aumentamos la cantidad de tiros, el número

de veces que salga cara se aproxima a la mitad del total de tiros. Se pueden establecer observaciones semejantes para las partes (b) y (c) del ejemplo 1. En los dos ejemplos siguientes consideramos experimentos en los que un evento contiene más de un elemento.

EJEMPLO 2 Determinación de probabilidades cuando se tiran dos dados

Si se arrojan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que salga una suma de (a) 7? (b) 9?

SOLUCIÓN Vamos a referirnos a un dado como el *primer dado* y, al otro, como el *segundo dado*. Usaremos pares ordenados para representar resultados: (2, 4) denota el resultado de obtener un 2 en el primer dado y un 4 en el segundo; (5, 3) representa un 5 en el primero y un 3 en el segundo, etc. Puesto que hay seis posibilidades para el primer número del par ordenado y, con cada uno de éstos, seis posibilidades para el segundo número, el total de pares ordenados es $6 \times 6 = 36$; por tanto, si S es el espacio muestral, entonces $n(S) = 36$.

(a) El evento E correspondiente a tirar una suma de 7 está dado por

$$E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

y, entonces

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

(b) Si E es el evento correspondiente a tirar una suma de 9, resulta

$$E = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

y

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

En el ejemplo que viene (y en los ejercicios), cuando indicamos que se sacan una o más cartas de una baraja, queremos decir que cada carta se retira de una baraja normal de 52 cartas y *no* se devuelve antes de sacar la siguiente.

EJEMPLO 3 Determinación de las probabilidades de sacar determinada juego (o mano) de cartas

Supongamos que se toman cinco cartas de una baraja. Encuentra la probabilidad de que las cinco sean corazones.

SOLUCIÓN El espacio muestral S del experimento es el conjunto de todas las posibles manos de cinco cartas que se pueden formar de la baraja de 52 cartas. Se deduce de nuestro trabajo de la sección anterior que $n(S) = C(52, 5)$.

Puesto que el palo de corazones tiene 13 cartas, las posibilidades de obtener una mano con cinco corazones es $C(13, 5)$. De ahí que si E representa este evento, entonces

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C(13, 5)}{C(52, 5)} = \frac{\frac{13!}{5!8!}}{\frac{52!}{5!47!}} = \frac{1287}{2\,598\,960} \approx 0.0005 = \frac{5}{10\,000} = \frac{1}{2000}.$$

Este resultado significa que si el experimento se efectúa muchas veces, una mano de cinco corazones debe sacarse aproximadamente una vez cada 2000 intentos.

Supongamos que S es el espacio muestral de un experimento y E_1 y E_2 son dos eventos asociados con el experimento. Si E_1 y E_2 no tienen elementos en común, se llaman *conjuntos ajenos o disjuntos* y escribimos $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (conjunto vacío). En este caso, si ocurre un evento, el otro no puede ocurrir; son **eventos mutuamente excluyentes**. Por tanto, si $E = E_1 \cup E_2$, entonces

$$n(E) = n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2).$$

En consecuencia,

$$P(E) = \frac{n(E_1) + n(E_2)}{n(S)} = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)},$$

o bien

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2).$$

La probabilidad de E es, por tanto, la suma de las probabilidades de E_1 y E_2 . Hemos demostrado lo siguiente.

Teorema sobre eventos mutuamente excluyentes

Si E_1 y E_2 son eventos mutuamente excluyentes y $E = E_1 \cup E_2$, entonces

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2).$$

Este teorema se puede extender a cualquier número de eventos E_1, E_2, \dots, E_k que son mutuamente excluyentes, en el sentido de que si $i \neq j$, entonces $E_i \cap E_j = \emptyset$. La conclusión del teorema es

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_k).$$

EJEMPLO 4 Determinación de probabilidades cuando se tiran dos dados

Si se arrojan dos dados, encuentra la probabilidad de tirar una suma de 7 o de 9.

SOLUCIÓN Denotemos con E_1 el evento de tirar 7 y con E_2 el de sacar 9. Puesto que E_1 y E_2 no pueden ocurrir en forma simultánea, son eventos mutuamente excluyentes. Deseamos hallar la probabilidad del evento $E = E_1 \cup E_2$. Del ejemplo 2 sabemos que $P(E_1) = \frac{1}{6}$ y $P(E_2) = \frac{1}{9}$. Por tanto, por el último teorema,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_1) + P(E_2) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18} = 0.27. \end{aligned}$$

Si E_1 y E_2 son eventos que quizá tengan elementos en común, entonces se puede demostrar lo siguiente.

Teorema sobre la probabilidad de que ocurra cualquiera de dos eventos

Si E_1 y E_2 son dos eventos cualesquiera, entonces

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2).$$

Observa que si E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes, entonces $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ y $P(E_1 \cap E_2) = 0$. En consecuencia, el último teorema incluye, como caso especial, el teorema sobre eventos mutuamente excluyentes.



EJEMPLO 5 Determinación de la probabilidad de seleccionar cierta carta de una baraja

Si se toma una sola carta de una baraja, encuentra la probabilidad de que sea una reina o una espada.

SOLUCIÓN Denotemos con E_1 el evento de que la carta sea una sota y con E_2 que sea una espada. Los eventos E_1 y E_2 no son mutuamente excluyentes, ya que hay una carta (la sota de espadas) en ambos eventos y, por tanto, $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{52}$. Por el teorema anterior la probabilidad de que la carta sea una sota o una espada es

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \approx 0.31. \end{aligned}$$

Al solucionar problemas de probabilidad, a veces es útil clasificar por categorías los resultados de un espacio muestral S en un evento E y el conjunto E' de elementos de S que no pertenezcan a E . E' recibe el nombre de **complemento** de E . Observa que

$$E \cup E' = S \quad \text{y} \quad n(E) + n(E') = n(S).$$

Al dividir entre $n(S)$ ambos lados de la última ecuación obtenemos

$$\frac{n(E)}{n(S)} + \frac{n(E')}{n(S)} = 1.$$

En consecuencia,

$$P(E) + P(E') = 1, \quad \text{o} \quad P(E) = 1 - P(E').$$

Usaremos la última fórmula en este ejemplo.

EJEMPLO 6 Cálculo de la probabilidad de sacar determinada mano de cartas

Si se sacan 13 cartas de una baraja, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos sean corazones?

SOLUCIÓN Si $P(k)$ denota la probabilidad de sacar k corazones, la probabilidad de tener por lo menos dos corazones es

$$P(2) + P(3) + P(4) + \cdots + P(13).$$

Dado que las únicas posibilidades restantes son $P(0)$ y $P(1)$, la probabilidad deseada es igual a

$$1 - [P(0) + P(1)].$$

Para calcular $P(k)$ para cualquier k , podemos dividir la baraja en dos grupos: corazones y no corazones. Para $P(0)$ vemos que de los trece corazones no sacamos ninguno, de las 39 que no son corazones, sacamos 13. En vista de que el total de posibilidades de seleccionar 13 cartas de una baraja de 52 es $C(52, 13)$, vemos que

$$P(0) = \frac{n(0)}{n(S)} = \frac{C(13, 0) \cdot C(39, 13)}{C(52, 13)} \approx 0.0128.$$

La probabilidad $P(1)$ corresponde a sacar uno de los corazones y 12 de las 39 que no son corazones. De esta forma,

$$P(1) = \frac{n(1)}{n(S)} = \frac{C(13, 1) \cdot C(39, 12)}{C(52, 13)} \approx 0.0801.$$

En consecuencia, la probabilidad deseada es

$$1 - [P(0) + P(1)] = 1 - [0.0128 + 0.0801] = 0.9071.$$

Las palabras *probabilidad* y *apuestas* (o *momios*) a menudo se usan como sinónimos. Aunque el conocimiento de una permite calcular las otras, son bastante diferentes.

Definición de los momios de un evento

Sean S el espacio muestral de un experimento, E un evento y E' su complemento. Los **momios** $O(E)$ a favor de que ocurra el evento E están dados por

$$n(E) \text{ a } n(E').$$

Podemos pensar que los momios a favor de un evento E son la cantidad de formas en que ocurre E comparada con la cantidad de formas en que no ocurre E . De manera semejante, los momios *en contra* de la ocurrencia de E están dados por $n(E')$ a $n(E)$.

EJEMPLO 7 Determinación de los momios cuando se lanzan dos dados

Si se lanzan dos dados y E es el evento de obtener una suma de 7, ¿cuáles son los momios

- (a) a favor de E ? (b) en contra de E ?

SOLUCIÓN Con base en el ejemplo 2, tenemos $n(E) = 6$ y $n(S) = 36$, así que

$$n(E') = n(S) - n(E) = 36 - 6 = 30.$$

- (a) Los momios a favor de obtener una suma de 7 son $n(E)$ a $n(E')$, o bien, 6 a 30 o, de manera equivalente, 1 a 5.

- (b) Los momios en contra de obtener una suma de 7 son $n(E')$ a $n(E)$, o bien, 30 a 6 o, de manera equivalente, 5 a 1.

Los momios $n(E)$ a $n(E')$ algunas veces se denotan por $n(E) : n(E')$.

EJEMPLO 8 Determinación de las probabilidades y los momios

- (a) Si $P(E) = 0.75$, encuentra $O(E)$.
 (b) Si $O(E)$ son 6 a 5, encuentra $P(E)$.

SOLUCIÓN

- (a) Como $P(E) = 0.75 = \frac{3}{4}$ y $P(E) = n(E)/n(S)$, podemos hacer

$$n(E) = 3 \quad \text{y} \quad n(S) = 4.$$

Así, $n(E') = n(S) - n(E) = 4 - 3 = 1$, y $O(E)$ están dados por
 $n(E)$ a $n(E')$, o 3 a 1.

- (b) Como $O(E)$ son 6 a 5 y $O(E)$ son $n(E)$ a $n(E')$, podemos hacer

$$n(E) = 6 \quad \text{y} \quad n(E') = 5.$$

Así, $n(S) = n(E) + n(E') = 6 + 5 = 11$, y

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{11}.$$

Se dice que dos eventos E_1 y E_2 son **eventos independientes** si el que se presente uno no afecta el que se dé el otro.

Teorema sobre eventos independientes

Si E_1 y E_2 son eventos independientes, entonces

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2).$$

En otras palabras, el teorema expresa que si E_1 y E_2 son eventos independientes, la probabilidad de que E_1 y E_2 sucedan al mismo tiempo es el producto de sus probabilidades. Observa que si dos eventos E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes, entonces $P(E_1 \cap E_2) = 0$ y no pueden ser independientes. (Suponemos que ni E_1 ni E_2 son vacíos.)



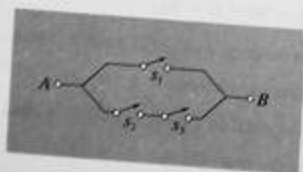
EJEMPLO 9 Aplicación de las probabilidades a un sistema eléctrico

Un sistema eléctrico tiene interruptores s_1 , s_2 y s_3 , de abrir y cerrar, como se muestra en la figura 1. Los interruptores operan de manera independiente uno de otro y la corriente circulará de A a B tanto si s_1 está cerrado como si s_2 y s_3 (ambos) están cerrados.

- (a) Si S_k denota el evento de que s_k está cerrado, donde $k = 1, 2, 3$, expresa en términos de $P(S_1)$, $P(S_2)$ y $P(S_3)$, la probabilidad p de que circule corriente de A a B.

- (b) Encuentra p si $P(S_k) = \frac{1}{2}$ para cada k .

Figura 1



SOLUCIÓN

(a) La probabilidad p de que se dé S_1 o tanto S_2 como S_3 es

$$p = P(S_1 \cup (S_2 \cap S_3)).$$

Con el teorema sobre la probabilidad de que ocurra cualquiera de dos eventos S_1 o $S_2 \cap S_3$, obtenemos

$$p = P(S_1) + P(S_2 \cap S_3) - P(S_1 \cap (S_2 \cap S_3)).$$

Al aplicar el teorema sobre eventos independientes dos veces resulta

$$p = P(S_1) + P(S_2) \cdot P(S_3) - P(S_1) \cdot P(S_2 \cap S_3).$$

Por último, usando una vez más el teorema sobre eventos independientes vemos que

$$p = P(S_1) + P(S_2) \cdot P(S_3) - P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3).$$

(b) Si $P(S_k) = \frac{1}{2}$ para cada k , entonces de la parte (a) la probabilidad de que la corriente circule de A a B es

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8} = 0.625.$$

**EJEMPLO 10** Una continuación del ejemplo 9

Consulta el ejemplo 9. Si la probabilidad de que s_k esté cerrado es la misma para cada k , determina $P(S_k)$ tal que $p = 0.99$.

SOLUCIÓN Puesto que la probabilidad $P(S_k)$ es la misma para cada k , hacemos $P(S_k) = x$ para $k = 1, 2, 3$. Al sustituir en la fórmula para la p que se obtuvo en la parte (a) del ejemplo 9, llegamos a

$$p = x + x \cdot x - x \cdot x \cdot x = -x^3 + x^2 + x.$$

Al hacer $p = 0.99$ resulta la ecuación

$$-x^3 + x^2 + x = 0.99.$$

Al graficar $y = -x^3 + x^2 + x - 0.99$ en una pantalla estándar, vemos que hay tres intersecciones en x . La probabilidad deseada debe estar entre $x = 0$ y $x = 1$ y muy cerca de 1. Con las dimensiones de pantalla $[0.8, 1, 0.1]$ por $[-0.01, 0.01, 0.01]$, obtenemos una imagen similar a la figura 2. Con las funciones *root* o *zero* resulta que $x = 0.93$. Por tanto, $P(S_k) = 0.93$.

Observa que la probabilidad de que un interruptor en particular esté cerrado es menor a la probabilidad de que circule corriente por el sistema.

EJEMPLO 11 Uso de un diagrama de árbol para hallar una probabilidad

Si se sacan dos cartas de una baraja, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos una de ellas corresponda a una figura?

Figura 2
[0.8, 1, 0.1] por [-0.01, 0.01, 0.01]

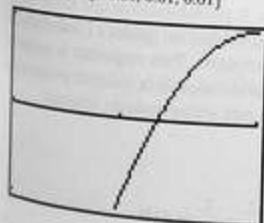
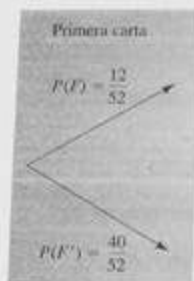


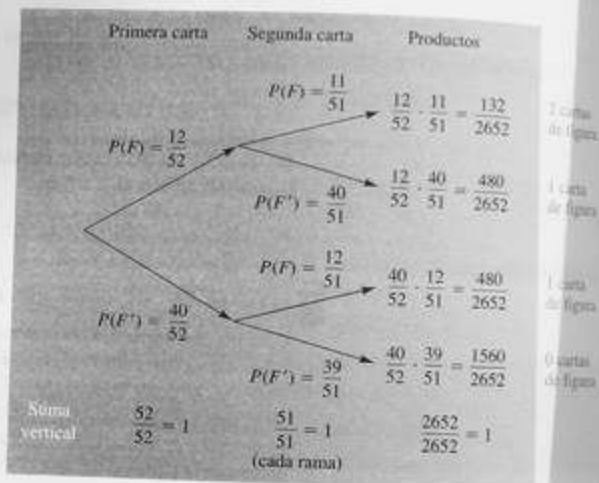
Figura 3



SOLUCIÓN Supongamos que F denota el hecho de sacar una carta que corresponda a una figura. En una baraja de 52 cartas hay 12 figuras, por lo cual $P(F) = \frac{12}{52}$. Podemos describir esta probabilidad y también la probabilidad de su complemento, mediante el diagrama de árbol que se muestra en la figura 3.

Las probabilidades de extraer la segunda carta dependen de la primera carta que haya salido. Para cubrir todas las posibilidades de la segunda carta, agregamos ramas con probabilidades iguales en el extremo de cada rama del primer diagrama de árbol, como se aprecia en la figura 4.

Figura 4



En la columna productos se listan las probabilidades para todas las posibilidades con dos cartas. Por ejemplo, la probabilidad de que ambas cartas sean figuras es de $\frac{132}{2652}$. Las sumas verticales deben ser iguales a 1 (calcularlas es un buen método para verificar sus cálculos). Para responder la pregunta podemos sumar las tres primeras probabilidades de la columna productos o restar la cuarta probabilidad de 1. Con este último método, tenemos

$$1 - \frac{1560}{2652} = \frac{1092}{2652} = \frac{7}{17} \approx 41\%.$$

A menudo nos interesa saber cuánto beneficio podemos esperar de una inversión en un juego de azar. La siguiente definición nos ayudará a responder preguntas que caen en esta categoría.

Definición de valor esperado

Supongamos que una variable puede tener recompensas a_1, a_2, \dots, a_n con probabilidades correspondientes p_1, p_2, \dots, p_n . El **valor esperado (VE)** de la variable está dado por

$$VE = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n = \sum_{i=1}^n a_i p_i$$

EJEMPLO 12 Valor esperado de una sola ficha

Los estados de la Unión que tienen lotería a veces ofrecen juegos en los que se imprime cierto número de fichas, algunas canjeables por dinero y otras sin valor. Supongamos que en un juego en particular hay 4000 fichas, 432 de las cuales son canjeables con base en la siguiente tabla.

Número de fichas	Valor
4	\$100
8	50
20	20
400	2

Encuentra el valor esperado de una ficha que se vende en \$1.

SOLUCIÓN Las cantidades de recompensa (\$100, \$50, \$20 y \$2) tienen probabilidades $\frac{4}{4000}$, $\frac{8}{4000}$, $\frac{20}{4000}$, y $\frac{400}{4000}$, respectivamente. Las 3568 fichas restantes dan una recompensa de \$0. Por la definición anterior, el valor esperado de una sola ficha es

$$\begin{aligned} VE &= 100 \cdot \frac{4}{4000} + 50 \cdot \frac{8}{4000} + 20 \cdot \frac{20}{4000} + 2 \cdot \frac{400}{4000} + 0 \cdot \frac{3568}{4000} \\ &= \frac{2000}{4000} = \$0.50. \end{aligned}$$

Por tanto, después de restar el costo de \$1 de la ficha, podemos esperar perder \$0.50 por cada ficha que compremos. Observemos que no podemos perder \$0.50 en alguna ficha en particular, pero podemos esperar perder esta cantidad en cada ficha a la larga. Este juego da un rendimiento terriblemente malo para el comprador y una excelente ganancia para el vendedor.

El valor esperado de \$0.50 obtenido en el ejemplo 12 puede considerarse como la cantidad que esperaríamos pagar por participar en el juego si éste fuera *justo*; es decir, si no esperaríamos ganar o perder nada de dinero después de jugarlo muchas veces.

En esta sección simplemente hemos introducido varios conceptos básicos de probabilidad. La persona interesada debe leer muchos libros y llevar cursos dedicados a esta rama de las matemáticas.

10.8 Ejercicios

Ejercicios 1 y 2: se saca una sola carta de una baraja. Encuentra la probabilidad de que sea como se indica.

- 1 (a) Un rey
(b) Un rey o una reina
(c) Un rey, una reina o un as
- 2 (a) Un corazón
(b) Un corazón o un diamante
(c) Un corazón, un diamante o un trébol

Ejercicios 3 y 4: se tira un solo dado. Halla la probabilidad de que el dado caiga en la cara en que se especifica.

- 3 (a) Un 4 (b) Un 6 (c) Un 4 o un 6
- 4 (a) Un número par (b) Un número divisible entre 5
(c) Un número par o un número divisible entre 5

Ejercicios 5 y 6: una urna contiene cinco esferas rojas, seis verdes y cuatro blancas. Si se saca una esfera, indica la probabilidad y la desigualdad de que sea como se especifica.

- 5 (a) Roja (b) Verde (c) Roja o blanca
- 6 (a) Blanca (b) Verde o blanca (c) No verde

Ejercicios 7 y 8: se arrojan dos dados. Encuentra las probabilidades en favor y en contra de que la suma sea como se especifica.

- 7 (a) 11 (b) 8 (c) 11 o 8
- 8 (a) Mayor de 9 (b) Un número non

Ejercicios 9 y 10: se tiran tres dados. Halla la probabilidad del evento especificado.

- 9 Una suma de 5
- 10 Aparece un 6 en un dado
- 11 Si se lanzan al aire tres monedas, indica la probabilidad de que aparezcan dos caras.

12 Si se tiran al aire cuatro monedas, encuentra la probabilidad de que salgan dos caras y dos cruces.

13 Si $P(E) = \frac{1}{3}$, encuentra $O(E)$ y $O(E')$.

14 Si $P(E) = 0.4$, encuentra $O(E)$ y $O(E')$.

15 Si $O(E)$ es 9 a 5, encuentra $O(E')$ y $P(E)$.

16 Si $O(E')$ es 7 a 3, encuentra $O(E)$ y $P(E)$.

Ejercicios 17 y 18: para el valor dado de $P(E)$, calcula $O(E)$ en términos de " X a 1".

17 $P(E) = 0.659$

18 $P(E) = 0.822$

Ejercicios 19 al 24: supongamos que se sacan cinco cartas de una baraja. Señala la posibilidad de obtener las cartas indicadas.

- 19 Cuatro de un mismo tipo (por ejemplo, cuatro ases o cuatro reyes)
- 20 Tres ases y dos reyes
- 21 Cuatro diamantes y una de espadas
- 22 Cinco figuras
- 23 Una flor (cinco cartas, todas del mismo palo)
- 24 Una flor imperial (un as, rey, reina, sota y el 10 del mismo palo)
- 25 Si se tira un solo dado, indica la probabilidad de obtener un número non o uno primo.
- 26 Se saca una sola carta de una baraja; encuentra la probabilidad de que la carta sea o roja o figura.
- 27 Si la probabilidad de que un jugador de béisbol conecte un *hit* en una vez al bat es de 0.326, halla la probabilidad de que no conecte *hit* en cuatro veces al bat.
- 28 Si la probabilidad de que un basquetbolista enceste un tiro libre es de 0.9, encuentra la probabilidad de que enceste por lo menos 1 de 2 tiros libres.

Ejercicios 29 y 30: en la tabla que sigue se muestran los resultados 1, 2, ..., 6 de un experimento y sus probabilidades.

Resultado	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	0.25	0.10	0.15	0.20	0.25	0.05

Para los eventos indicados, encuentra (a) $P(E_1)$, (b) $P(E_1 \cap E_2)$, (c) $P(E_1 \cup E_2)$ y (d) $P(E_2 \cup E_3)$.

$$29 \ E_1 = \{1, 2\}; \quad E_2 = \{2, 3, 4\}; \quad E_3 = \{4, 6\}$$

$$30 \ E_1 = \{1, 2, 3, 6\}; \quad E_2 = \{3, 4\}; \quad E_3 = \{4, 5, 6\}$$

Ejercicios 31 y 32: una caja contiene 10 fichas rojas, 20 azules y 30 verdes. Si se sacan cinco fichas de la caja, encuentra la probabilidad de sacar las fichas indicadas.

31 (a) Todas azules

(b) Por lo menos una verde

(c) A lo mucho una roja

32 (a) Cuatro verdes

(b) Por lo menos dos rojas

(c) A lo mucho dos azules

33 Prueba de verdadero o falso. Una prueba de verdadero o falso consta de ocho preguntas. Si un estudiante adivina la respuesta de cada pregunta, encuentra la probabilidad de que

(a) Ocho respuestas sean correctas

(b) Siete respuestas sean correctas y una incorrecta

(c) Seis respuestas sean correctas y dos incorrectas

(d) Al menos seis respuestas sean correctas

34 Selección de un comité. Se va a elegir un comité de seis personas sacando sus nombres de un sombrero. Si éste contiene los nombres de ocho hombres y 14 mujeres, encuentra la probabilidad de que la comisión se forme de tres hombres y tres mujeres.

Ejercicios 35 y 36: se sacan cinco cartas de una baraja. Halla la probabilidad del evento especificado.

35 Obtener por lo menos un as

36 Obtener por lo menos un corazón

37 Experimento de cartas y dados. Cada palo de una baraja está formado por un as (A), nueve cartas numeradas

(2, 3, ..., 10), y tres figuras (sota, reina, rey). Un experimento consiste en sacar una sola carta de la baraja después de tirar un solo dado.

(a) Describe el espacio muestral S del experimento y encuentra $n(S)$.

(b) Sea E_1 el evento formado por los resultados en los que una carta numerada se saca y el número de puntos del dado es el mismo que el número de la carta. Encuentra $n(E_1)$, $n(E_1^c)$ y $P(E_1)$.

(c) Sea E_2 el evento en que la carta sacada es una figura, y sea E_1 el evento en que el número de puntos del dado es par. ¿Son E_2 y E_1 mutuamente excluyentes? ¿Son independientes? Encuentra $P(E_2)$, $P(E_1)$, $P(E_2 \cap E_1)$ y $P(E_2 \cup E_1)$.

(d) ¿Son E_1 y E_2 mutuamente excluyentes? ¿Son independientes? Halla $P(E_1 \cap E_2)$ y $P(E_1 \cup E_2)$.

38 Experimento de letra y número. Un experimento consiste en seleccionar una letra del alfabeto y uno de los dígitos 0, 1, ..., 9.

(a) Describe el espacio muestral S del experimento y encuentra $n(S)$.

(b) Supón que a las letras del alfabeto se les asignan números como sigue: $A = 1, B = 2, \dots, Z = 26$. Sea E_1 el evento en que el dígito de unidades del número asignado a la letra del alfabeto es el mismo que el dígito seleccionado. Encuentra $n(E_1)$, $n(E_1^c)$ y $P(E_1)$.

(c) Sea E_2 el evento en que la letra es una de las vocales, y sea E_1 el evento que el dígito es un número primo. ¿Son E_2 y E_1 mutuamente excluyentes? ¿Son independientes? Encuentra $P(E_2)$, $P(E_1)$, $P(E_2 \cap E_1)$ y $P(E_2 \cup E_1)$.

(d) Sea E_3 el evento que el valor numérico de la letra es par. ¿Son E_2 y E_3 mutuamente excluyentes? ¿Son independientes? Encuentra $P(E_2 \cap E_3)$ y $P(E_2 \cup E_3)$.

39 Tiro de dados. Si se arrojan dos dados, señala la probabilidad de que la suma sea mayor que 5.

40 Tiro de dados. Si se arrojan tres dados, encuentra la probabilidad de que la suma sea menor que 16.

41 Composición de una familia. Si suponemos que los nacimientos de niño o niña tienen la misma probabilidad, halla la probabilidad de que una familia con cinco hijos tenga

(a) Sólo niños (b) Por lo menos una niña

42. **Máquina tragamonedas.** Una máquina tragamonedas normal tiene tres rollos y en cada uno de éstos hay 20 símbolos. Si el primer rollo tiene cinco campanas, el de en medio cuatro y el último sólo dos, indica la probabilidad de sacar tres campanas consecutivas.

43. **Experimento de percepción extrasensorial.** En un experimento diseñado para prueba de percepción extrasensorial, se barajan cuatro cartas (sota, reina, rey y as) y luego se ponen boca abajo en una mesa. El sujeto intenta identificar cada carta, dando un nombre diferente a cada una. Si el sujeto está adivinando, encuentra la probabilidad de identificar correctamente:

- (a) Las cuatro cartas. (b) Dos de las cuatro cartas.

44. **Tiro de dados.** Se arrojan tres dados.

(a) Encuentra la probabilidad de que todos los dados muestren el mismo número de puntos.

(b) Indica la probabilidad de que todos los puntos (números) sean distintos.

(c) Trabaja las partes (a) y (b) para n dados.

45. **Dados "cargados".** Para un dado normal, la suma de los puntos de caras opuestas es 7. En la figura hay un par de dados "cargados" en los que el mismo número de puntos aparece en caras opuestas. Encuentra la probabilidad de tirar una suma de

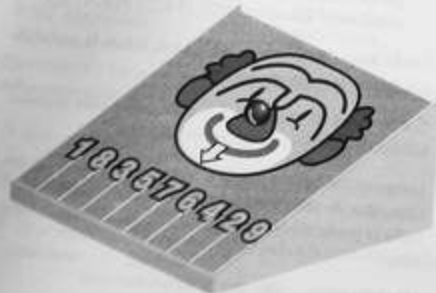
- (a) 7. (b) 8.

Ejercicio 45



46. **Juego de feria.** En un juego común de feria se tiran tres pelotas por un plano inclinado con ranuras numeradas del 1 al 9.

Ejercicio 46



según se aprecia en la figura. Debido a que las ranuras son muy estrechas, los jugadores no controlan dónde entrarán las pelotas. Se otorga un premio si la suma de los tres números es menor que 7. Encuentra la probabilidad de ganar un premio.

47. **Muertes por fumar.** Durante 1990, fumar cigarrillos causó la muerte de 418 890 habitantes de Estados Unidos. Entre éstos, los decesos por trastornos cardiovasculares fueron 179 820; por cáncer, 151 322; y por enfermedades respiratorias, como el enfisema, 84 475.

(a) Encuentra la probabilidad de que las muertes relacionadas con fumar fuesen resultado de enfermedades cardiovasculares o cáncer.

(b) Determina la probabilidad de que una muerte relacionada con el tabaco no sea resultado de trastornos respiratorios.

48. **Comienzo de horas de trabajo.** En un estudio sobre la hora en que las personas van al trabajo, se encontró que 8.2 millones acuden a laborar entre la medianoche y las 6 A.M., 60.4 millones, entre las 6 A.M. y las 9 A.M., y 18.3 millones, entre las 9 A.M. y la medianoche.

(a) Indica la probabilidad de que una persona vaya al trabajo entre las 6 A.M. y la medianoche.

(b) Determina la probabilidad de que una persona acuda al trabajo entre la medianoche y las 6 A.M.

49. **La exposición al arsénico y al cáncer.** El 2% de la gente de cierto país padece cáncer. Entre los que tienen cáncer, el 70% ha estado expuesto a altos niveles de arsénico. Entre los que no tienen cáncer, el 10% ha estado expuesto. ¿Qué porcentaje de las personas que han estado expuestas a altos niveles de arsénico padecen cáncer? (Sugerencia: Usa un diagrama de árbol.)

50. **Computadoras y microcircuitos defectuosos.** Un fabricante de computadoras adquiere el 30% de sus microcircuitos a través del proveedor A y el resto del proveedor B. El 2% de los microcircuitos del proveedor A están defectuosos y lo mismo ocurre con el 4% de los que proporciona el proveedor B. Calcula qué porcentaje de los microcircuitos defectuosos son del proveedor B.

51. **Demostración de probabilidades.** En la figura que sigue se exhibe una pequeña versión de un aparato para la demostración de probabilidades. Se deja caer una pelotilla en la parte superior del laberinto y se desliza hacia el fondo. Cada vez que la pelotilla toca un obstáculo, hay 50% de probabilidad de que se mueva a la izquierda. Encuentra la probabilidad de que la pelotilla termine en la ranura

- (a) Del extremo izquierdo. (b) Del centro.

Ejercicios 59 y 60: consulta los ejemplos 9 y 10. (a) Encuentra p para el sistema eléctrico de la figura si $P(S_1) = 0.9$ para cada k . (b) Con una gráfica estima $P(S_2)$ si $p = 0.99$.

59



60



61 Probabilidad de cumpleaños

(a) Demuestra que la probabilidad p de que n personas tengan cumpleaños diferentes está dada por

$$p = \frac{365!}{365^n(365 - n)!}$$

(b) Si en un salón hay 32 personas, calcula la probabilidad de que dos o más tengan el mismo cumpleaños. (Primero calcula $\ln p$ usando esta fórmula de matemáticas avanzadas:

$$\ln n! \approx n \ln n - n.)$$

62 Probabilidad de cumpleaños. Consulta el ejercicio 61. Encuentra el número mínimo de personas en una sala, tales que la probabilidad de que cada una tenga cumpleaños distinto sea menor que $\frac{1}{2}$.

63 Una apuesta en dados. Consulta el ejercicio 57. Un jugador recibe \$2 por ganar \$1 en una apuesta de línea de pase. Calcula el valor esperado de una apuesta de \$1.

64 Una apuesta en ruleta. Consulta el ejercicio 52. Si un jugador apuesta \$1 a que la bolita se detendrá en una ranura negra, recibirá \$2 si esto ocurre. Calcula el valor esperado de una apuesta de \$1.

65 Ganancia de premios en un concurso. Un concurso ofrece los siguientes premios en efectivo.

Cantidad de premios	1	10	100	1000
Valores de los premios	\$1 000 000	\$100 000	\$10 000	\$1000

Si el patrocinador espera 20 millones de concursantes, encuentra el valor esperado para un solo concursante.

66 Ganancia de premios en un torneo. Un torneo de boliche tiene el obstáculo de que los 80 bolicistas son de la misma fuerza. En la tabla que sigue aparecen los premios del torneo.

Lugar	1o.	2o.	3o.	4o.	5o.-10o.
Premio	\$1000	\$500	\$300	\$200	\$100

Halla la ganancia esperada para un concursante.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 10

Ejercicios 1 al 4: encuentra los primeros cuatro términos y el séptimo término de la sucesión que tiene el n -ésimo término dado.

1 $\left\{ \frac{5n}{3-2n} \right\}$

2 $\{(-1)^{n+1} - (0.1)^n\}$

3 $\left\{ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}$

4 $\left\{ \frac{2^n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\}$

Ejercicios 5 al 8: halla los primeros cinco términos de la sucesión infinita recursivamente definida.

5 $a_1 = 10, a_{k+1} = 1 + (1/a_k)$

6 $a_1 = 2, a_{k+1} = a_k!$

7 $a_1 = 9, a_{k+1} = \sqrt{a_k}$

8 $a_1 = 1, a_{k+1} = (1 + a_k)^{-1}$

Ejercicios 9 al 12: evalúa lo siguiente.

9 $\sum_{k=1}^5 (k^2 + 4)$

10 $\sum_{k=2}^5 \frac{2k-8}{k-1}$

11 $\sum_{k=1}^{100} 10$

12 $\sum_{k=1}^4 (2^k - 10)$

Ejercicios 13 al 24: expresa la suma en términos de notación sumatoria (las respuestas no son únicas).

$$13 \quad 3 + 6 + 9 + 12 + 15 \qquad 14 \quad 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$15 \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100}$$

$$16 \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{98 \cdot 99 \cdot 100}$$

$$17 \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$18 \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$19 \quad 100 - 95 + 90 - 85 + 80$$

$$20 \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

$$21 \quad a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{25}x^{100}$$

$$22 \quad a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{100}$$

$$23 \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$$

$$24 \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

25 Encuentra el décimo término y la suma de los primeros diez términos de la sucesión aritmética cuyos primeros dos términos son 4 y $\sqrt{3}$ y 3.

26 Halla la suma de los primeros ocho términos de la sucesión aritmética en que el cuarto término es 9 y la diferencia común es -5.

27 Los términos quinto y decimotercero de una sucesión aritmética son 5 y 77, respectivamente. Encuentra los términos primero y décimo.

28 Halla el número de términos de la sucesión aritmética con $a_1 = 1$, $d = 5$ y $S = 342$.

29 Inserta cuatro medias aritméticas entre 20 y -10.

30 Encuentra el décimo término de la sucesión geométrica cuyos primeros dos términos son $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$.

31 Si una sucesión geométrica tiene 3 y -0.3 como su tercero y cuarto términos, encuentra el octavo término.

32 Dada una sucesión geométrica con $a_1 = 16$ y $a_7 = 625$, calcula a_6 .

33 Proporciona la media geométrica de 4 y 8.

34 En cierta sucesión geométrica, el octavo término es 100 y la razón común es $-\frac{1}{2}$. Halla el primer término.

35 Dada una sucesión aritmética donde $S_{11} = 402$ y $a_{12} = 50$, encuentra a_1 y d .

36 Dada una sucesión geométrica tal que $a_5 = \frac{1}{16}$ y $r = \frac{1}{2}$, determina a_1 y S_5 .

Ejercicios 37 al 40: evalúa lo siguiente.

$$37 \quad \sum_{k=1}^{15} (5k - 2)$$

$$38 \quad \sum_{k=1}^{10} (6 - \frac{1}{2}k)$$

$$39 \quad \sum_{k=1}^{10} (2^k - \frac{1}{2})$$

$$40 \quad \sum_{k=1}^6 (\frac{1}{2} - 2^k)$$

41 Encuentra la suma de la serie geométrica infinita

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \cdots$$

42 Encuentra el número racional cuya representación decimal es 6.274.

Ejercicios 43 a 47: demuestra que el enunciado es verdadero para todo entero positivo n .

$$43 \quad 2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$$

$$44 \quad 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(2n + 1)(n + 1)}{3}$$

$$45 \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{n}{2n + 1}$$

$$46 \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$$

47 3 es un factor de $n^3 + 2n$.

48 Prueba que $n^2 + 3 < 2^n$ para todo entero positivo $n \geq 5$.

Ejercicios 49 y 50: encuentra el menor entero positivo j para el que el enunciado es verdadero. Con el principio ampliado de inducción matemática demuestra que la fórmula es verdadera para todo entero mayor que j .

49 $2^j \leq n!$

50 $10^j \leq n^j$

Ejercicios 51 y 52: usa el teorema del binomio para expandir y simplificar la expresión.

51 $(x^2 - 3y)^4$

52 $(2x + y)^4$

Ejercicios 53 al 56: sin expandir por completo, encuentra el o los términos indicados en la expansión de la expresión.

53 $(a^{23} + 2a^{-10}b^3)^{10}$, primeros tres términos

54 $(y^3 - \frac{1}{2}c^2)^6$, sexto término

55 $(4x^2 - y)^7$, término que contiene x^{10}

56 $(2x^3 + 5x^{-2})^{10}$, término que no contiene x

57. Bloques de construcción. Se va a cortar piezas de madera de 2×2 , de 10 pies de largo, en cinco piezas para formar bloques de construcción para niños; los tramos de los cinco bloques han de formar una sucesión aritmética.

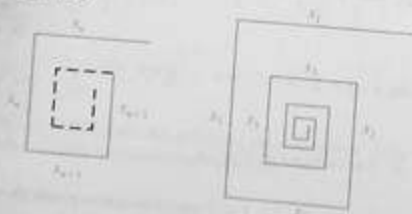
(a) Demuestra que la diferencia d en longitudes debe ser menor que 1 pie.

(b) Si el bloque más pequeño debe tener una longitud de 6 pulgadas, encuentra las longitudes de las otras cuatro piezas.

58. Construcción de una escalera. Se va a construir una escalera con 16 peldaños cuyas longitudes decrecen uniformemente, de 20 pulgadas en la base a 16 pulgadas en la parte superior. Encuentra la longitud total del material necesario para los peldaños.

59. En la primera figura se presenta una curva de líneas interrumpidas obtenidas al tomar dos lados adyacentes de un cuadrado, cada uno de longitudes s_n que decrecen la longitud del lado en un factor f con $0 < f < 1$ y forman dos lados de un cuadrado más pequeño de longitud $s_{n+1} = f \cdot s_n$. El proceso se repite hasta el infinito. Si $s_1 = 1$ en la segunda figura, expresa la longitud de la curva resultante de línea interrumpida (infinita) en términos de f .

Ejercicio 59



60. Las leyes conmutativa y asociativa de la adición garantizan que la suma de los enteros del 1 al 10 sea independiente del orden en el cual se sumen estos números. ¿En cuántas formas se pueden sumar estos enteros?

61. Selección de cartas

(a) ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 13 cartas de una baraja?

(b) ¿De cuántas formas se pueden escoger 13 cartas para obtener cinco espadas, tres corazones, tres tréboles y dos diamantes?

62. ¿Cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si las repeticiones

(a) No se permiten? (b) Se permiten?

63. Selección de preguntas para examen

(a) Si un estudiante debe contestar 8 de 12 preguntas, ¿cuántas selecciones diferentes son posibles?

(b) ¿Cuántas selecciones son viables si debe contestar las primeras tres preguntas?

64. Arreglo de colores. Si hay que acomodar seis discos negros, cinco rojos, cuatro blancos y dos verdes en una fila, ¿cuál es el total de posibles arreglos de colores?

65. Si $O(E)$ son 8 a 5, encuentra $O(E')$ y $P(E)$.

66. Tiro de una moneda. Encuentra la probabilidad de que las monedas salgan iguales si

(a) Dos muchachos tiran cada uno una moneda

(b) Tres muchachos tiran cada uno una moneda

67. Reparto de naipes. Si se reparten cuatro cartas de una baraja, encuentra la probabilidad de que

(a) Las cuatro sean del mismo color

(b) Las cartas se reparten en color alternado rojo-negro-rojo-negro

68. Probabilidades de una rifa. Si se venden 1000 boletos para una rifa, encuentra la probabilidad de que un individuo gane si compra

(a) 1 boleto (b) 10 boletos (c) 50 boletos

69. **Tiro de monedas.** Si se arrojan al aire cuatro monedas, indica la probabilidad y los momentos de obtener una cara y tres cruces.
70. **Examen de verdadero o falso.** Un examen consta de seis preguntas de verdadero o falso; se necesitan por lo menos cuatro respuestas correctas para obtener calificación de pase. Si un estudiante adivina en cada pregunta, ¿cuál es la probabilidad de
- Pasar?
 - Reprobar?
71. **Probabilidades en dados y cartas.** Si se lanza un solo dado y luego se saca una carta de una baraja, ¿cuál es la probabilidad de obtener
- Un 6 en el dado y un rey de corazones?
 - Un 6 en el dado o el rey de corazones?
72. **Estudios demográficos.** De una ciudad de 5000 habitantes, 1000 tienen más de 60 años de edad y 2000 son mujeres. Se sabe que 40% de las mujeres tienen más de 60 años. ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo seleccionado al azar sea mujer o tenga más de 60 años?
73. **Movimientos de backgammon.** En el backgammon, los jugadores mueven las fichas, la misma cantidad de espacios que la suma de los puntos de dos dados. Sin embargo, si se tira un doble (es decir, ambos dados muestran el mismo número de puntos), entonces mueven las fichas el doble de la suma de los puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador pueda mover sus fichas por lo menos 10 espacios en un tiro dado?
74. **Juegos de una serie.** Dos equipos de béisbol participan en una serie de juegos. El primero que venza en cuatro partidos gana la serie. Encuentra el número esperado de juegos de la serie.

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 10

1. En una pregunta de examen se enlistan los primeros cuatro términos de una sucesión como 2, 4, 6 y 8 y pide el quinto término. Demuestra que el quinto término puede ser cualquier número real a si encuentras el n -ésimo término de una sucesión cuyos primeros cinco términos son 2, 4, 6, 8 y n .

2. Decide si ☐ debe llenarse con \leq o \geq en n ☐ $(\ln n)^3$

para que el enunciado sea verdadero cuando $n \geq j$, cuando j es el mínimo entero positivo para el que el enunciado es verdadero. Encuentra j .

3. **Ejercicios 3 y 4:** (a) utiliza el método de los ejercicios 37 y 38 de la sección 10.4 y halla una fórmula para la suma. (b) Comprueba que la fórmula encontrada en la parte (a) sea verdadera para toda n .

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$$

$$1^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3$$

4. Determina el máximo factorial que tu calculadora pueda calcular. Algunos valores característicos son $69!$ y $449!$. Especula sobre la razón de que estos números sean los valores máximos de tu calculadora.

5. Encuentra una relación entre los coeficientes de la expansión de $(a+b)^n$ y el número de subconjuntos únicos de un conjunto de n elementos.

7. **Pelota que rebota.** Cuando se deja caer una bola desde una altura de h pies, llega al suelo en $\sqrt{h/4}$ segundos. La pelota rebota a una altura de d pies en $\sqrt{d/4}$ segundos. Si se deja caer una pelota de hule desde una altura de 10 pies y rebota a la mitad de su altura después de cada caída, aproximadamente ¿durante cuántos segundos se mueve la pelota?

8. **Torneo.** Se va a llevar a cabo un torneo durante un mes de 30 días, ocho horas diarias, con 36 concursantes cada hora. La estructura de premios es como sigue:

Lugar	1o.	2o.	3o.	4o.	5o.
Premio \$	4000	2000	1500	1000	800

Lugar	6o.	7o.	8o.	9o.	10o.
Premio \$	600	500	400	300	200

Lugar	11o.-50o.	51o.-100o.	101o.-300o.	301o.-500o.
Premio \$	100	75	50	25

También se otorga un premio diario como sigue: \$250 para el primero, \$100 para el segundo y \$50 para el tercero. ¿Cuánto esperarías pagar por una cuota si el torneo es justo?

- 9 Premios en dinero Supongamos que el décimo premio de un torneo con premios por \$1600 es de \$100 y cada lugar debe valer alrededor del 10% más que el siguiente lugar. Analiza la distribución realista de valores de premios si han de redondearse al más cercano centavo, dólar, cinco dólares y diez dólares.



- 10 Ingredientes para pizzas Una pizzería anuncia que da un total de 1 048 576 posibles formas de pedir dos pizzas, con hasta cinco clases de ingredientes para cada una. Analiza la forma en que el restaurante calculó el número de posibles formas de pedir pizzas y determina cuántos ingredientes son posibles.

- 11 Juego de lotería En una lotería jugada en algunos estados de la Unión Americana, el jugador selecciona cinco enteros entre 1 y 49 y un entero entre 1 y 42. Estos números corresponden a cinco bolas blancas y una roja que se extraen de una tómbola. Para ganar el premio mayor (que ha llegado a ser de \$150 millones), el jugador debe acertar los seis números. Los premios para la cantidad de aciertos se muestran en la tabla.

Aciertos	Premio
5 blancas y una roja	premio mayor
5 blancas	\$100 000
4 blancas y una roja	\$5000
4 blancas	\$100
3 blancas y una roja	\$100
3 blancas	\$7
2 blancas y una roja	\$7
1 blanca y una roja	\$4
Sólo la roja	\$3

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio mayor?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar cualquier premio?

- (c) ¿Cuál es el valor esperado del juego sin el premio mayor?

- (d) ¿Cuál es el valor esperado del juego para esta lotería pueda considerarse un juego justo?

- 12 Confusión entre probabilidad y momentos Analiza el siguiente enunciado: "Hay un 20% de posibilidades de que un aspirante sea aceptado, pero los momentos son tres veces más favorables para una aspirante". ¿Cuál es la probabilidad de admitir una aspirante mujer?

- 13 Sea $a = 0$ y $b = 1$ en

$$(a + by)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k y^k$$

y comenta el resultado.

- 14 Investiga las sumas parciales de

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$

y coméntalas.

- 15 (a) Examina $\tan nx$ en las siguientes identidades en términos de $\tan x$:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

$$\tan 4x = \frac{4 \tan x - 4 \tan^3 x}{1 - 6 \tan^2 x + \tan^4 x}$$

Utilizando un modelo formado por las tres identidades, pronostica una identidad para $\tan 5x$ en términos de $\tan x$.

- (b) A continuación se enlistan identidades para $\cos 2x$ y $\sin 2x$:

$$\cos 2x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x$$

Escribe identidades similares para $\cos 3x$ y $\sin 3x$, y luego para $\cos 4x$ y $\sin 4x$. Usa un patrón y pronostica identidades para $\cos 5x$ y $\sin 5x$.

Temas de geometría analítica

11.1 Parábolas

11.2 Elipses

11.3 Hipérbolas

11.4 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

11.5 Coordenadas polares

11.6 Ecuaciones polares de cónicas

La geometría plana comprende el estudio de figuras como rectas, círculos y triángulos, que se encuentran en un plano. Los teoremas se demuestran de manera deductiva por razonamiento a partir de determinados postulados. En geometría analítica, las figuras geométricas planas se estudian mediante el uso de sistemas coordenados y de ecuaciones y fórmulas. Si el estudio de la geometría analítica se resumiera por medio de un enunciado, quizá el siguiente sería el mejor: dada una ecuación, encuentra su gráfica y, al revés, dada una gráfica, encuentra su ecuación. En este capítulo aplicaremos métodos coordenados para diversas figuras planas básicas.

11.1

Parábolas

Las secciones cónicas, también denominadas *cónicas*, pueden obtenerse al cortar con un plano dos conos circulares rectos opuestos por el vértice. Al variar la posición del plano obtenemos un *círculo*, una *elipse*, una *parábola* o una *hipérbola*, como se ilustra en la figura 1.

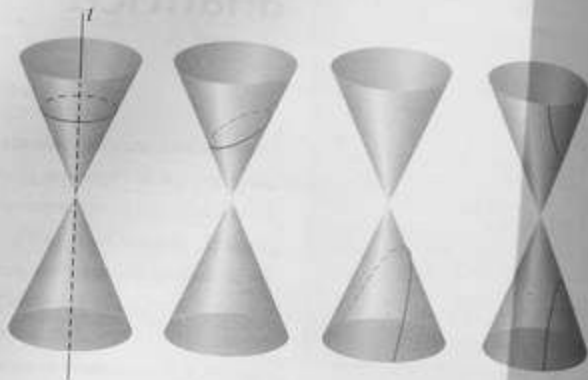
Figura 1

(a) Círculo

(b) Elipse

(c) Parábola

(d) Hipérbola



Las *cónicas degeneradas* se obtienen si el plano corta al cono en sólo un punto o a lo largo ya sea de una o dos líneas que estén en el cono. Las secciones cónicas fueron bastante estudiadas por los antiguos griegos, quienes descubrieron propiedades que nos permiten plantear sus definiciones en términos de puntos y rectas, como haremos en nuestro análisis.

A partir del trabajo que realizamos en la sección 3.6, si $a \neq 0$, la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una *parábola* con un eje vertical. A continuación plantearemos una definición general de la parábola y obtendremos ecuaciones para parábolas que tengan un eje vertical o un eje horizontal.

Definición de parábola

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo F (el **foco**) y una recta fija l (la **directriz**) que están en el plano.

Supondremos que F no está en l , ya que de ser así se obtendría una recta. Si P es un punto en el plano y P' es el punto en l determinado por una recta que pasa por P y es perpendicular a l (observa la figura 2), entonces,

Figura 2

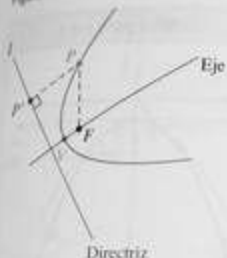
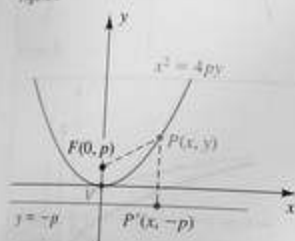


Figura 3



por la definición precedente, P está en la parábola si y sólo si las distancias $d(P, F)$ y $d(P, P')$ son iguales. El eje de la parábola es la recta que pasa por F y es perpendicular a la directriz. El vértice de la parábola es el punto V sobre el eje a la mitad de la distancia entre F y l . El vértice es el punto en la parábola más próximo a la directriz.

Para obtener una ecuación sencilla de una parábola, colocamos el eje y a lo largo del eje de la parábola, con el origen en el vértice V , como se muestra en la figura 3. En este caso, el foco F tiene coordenadas $(0, p)$ para algún número real $p \neq 0$, y la ecuación de la directriz es $y = -p$. (En la figura se muestra el caso $p > 0$.) Por la fórmula de la distancia, un punto $P(x, y)$ está en la gráfica de la parábola si y sólo si $d(P, F) = d(P, P')$; es decir, si

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}.$$

Elevamos al cuadrado ambos lados y simplificamos:

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py$$

Una ecuación equivalente de la parábola es

$$y = \frac{1}{4p}x^2.$$

Hemos demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) en la parábola satisfacen $x^2 = 4py$. Recíprocamente, si (x, y) es una solución de $x^2 = 4py$, entonces al invertir los pasos previos vemos que el punto (x, y) está sobre la parábola.

Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba, como en la figura 3. Si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. La gráfica es simétrica con respecto al eje y , ya que la sustitución de $-x$ por x no cambia la ecuación $x^2 = 4py$.

Si intercambiamos los papeles de x y y , obtenemos

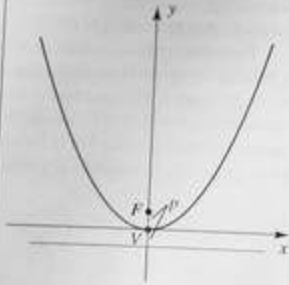
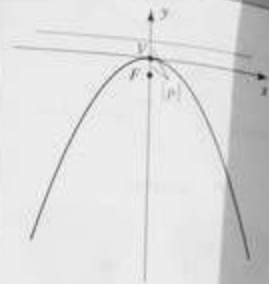
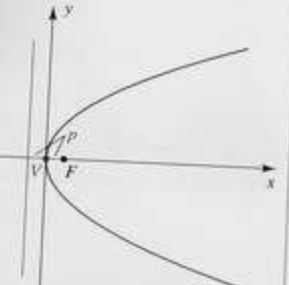
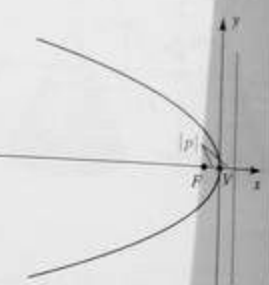
$$y^2 = 4px \quad \text{o bien, su equivalente} \quad x = \frac{1}{4p}y^2.$$

Ésta es la ecuación de una parábola con vértice en el origen, foco $F(p, 0)$ y que abre a la derecha si $p > 0$ o a la izquierda si $p < 0$. La ecuación de la directriz es $x = -p$.

Por conveniencia, a menudo nos referimos a "la parábola $x^2 = 4py$ " (o $y^2 = 4px$) en vez de "la parábola con ecuación $x^2 = 4py$ " (o $y^2 = 4px$).

El análisis se resume en la tabla siguiente.

Parábolas con vértice $V(0, 0)$

Ecuaciones, foco, directriz	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$x^2 = 4py$ o bien, $y = \frac{1}{4p}x^2$ Foco: $F(0, p)$ Directriz: $y = -p$		
$y^2 = 4px$ o bien, $x = \frac{1}{4p}y^2$ Foco: $F(p, 0)$ Directriz: $x = -p$		

En la tabla vemos que para cualquier número real a diferente de cero, la gráfica de la **ecuación normal** (o **estándar**) $y = ax^2$ o $x = ay^2$ es una parábola con vértice $V(0, 0)$. Además, $a = 1/(4p)$ o lo que equivale, $p = 1/(4a)$, donde $|p|$ es la distancia entre el foco F y el vértice V . Para encontrar la directriz l , recuerde que l también es la distancia $|p|$ desde V .

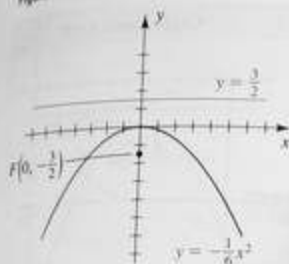
EJEMPLO 1 Determinación del foco y la directriz de una parábola

Encuentra el foco y la directriz de la parábola $y = -\frac{1}{6}x^2$, y traza su gráfica.

SOLUCIÓN La ecuación es de la forma $y = ax^2$, con $a = -\frac{1}{6}$. Como en la tabla precedente, $a = 1/(4p)$, y de ahí

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4(-\frac{1}{6})} = -\frac{3}{2}.$$

Figura 4



En consecuencia, la parábola abre hacia abajo y tiene foco $F(0, -\frac{3}{2})$, como se ilustra en la figura 4. La directriz es la recta horizontal $y = \frac{3}{2}$, que es una distancia $\frac{3}{2}$ por arriba de V , como se muestra en la figura.

EJEMPLO 2 Determinación de la ecuación de una parábola que cumple condiciones prescritas

- (a) Encuentra la ecuación de una parábola que tenga vértice en el origen, abra a la derecha y pase por el punto $P(7, -3)$.
 (b) Halla el foco de la parábola.

SOLUCIÓN

(a) La parábola se muestra en la figura 5. Una ecuación de una parábola con vértice en el origen que abre a la derecha es de forma $x = ay^2$ para algún número a . Si $P(7, -3)$ está en la gráfica, entonces podemos sustituir 7 por x y -3 por y para encontrar a :

$$7 = a(-3)^2, \text{ o bien, } a = \frac{7}{9}.$$

Por tanto, una ecuación de la parábola es $x = \frac{7}{9}y^2$.

(b) El foco está a una distancia p a la derecha del vértice. Como $a = \frac{7}{9}$, tenemos

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4(\frac{7}{9})} = \frac{9}{28}.$$

Así, el foco tiene las coordenadas $(\frac{9}{28}, 0)$.

Si consideramos una ecuación normal de una parábola (de la forma $x^2 = 4py$) y sustituimos x por $x - h$ y y por $y - k$, entonces

$$(x - h)^2 = 4p(y - k). \quad (*)$$

Con base en el análisis de traslaciones de la sección 3.5, reconocemos que la gráfica de la segunda ecuación puede obtenerse a partir de la gráfica de la primera ecuación al desplazarla h unidades a la derecha y k unidades hacia arriba, moviendo así el vértice de $(0, 0)$ a (h, k) . Al elevar al cuadrado el lado izquierdo de $(*)$ y simplificando se llega a una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son números reales.

De manera semejante, si comenzamos con $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, puede escribirse en la forma $x = ay^2 + by + c$. En la tabla siguiente, $V(h, k)$ se ha colocado en el primer cuadrante, pero la información de la columna de la izquierda sigue siendo verdadera sin importar la posición de V .

Parábolas con vértice $V(h, k)$

Ecuaciones, foco, directriz	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ o bien, $y = ax^2 + bx + c$, donde $p = \frac{1}{4a}$ Foco: $F(h, k + p)$ Directriz: $y = k - p$		
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ o bien, $x = ay^2 + by + c$, donde $p = \frac{1}{4a}$ Foco: $F(h + p, k)$ Directriz: $x = h - p$		

EJEMPLO 3 Trazo de una parábola con eje horizontalAnaliza y traza una gráfica de $2x = y^2 + 8y + 22$.

SOLUCIÓN La ecuación puede escribirse en la forma que se muestra en el segundo renglón de la tabla anterior, $x = ay^2 + by + c$, de modo que por la tabla vemos que la gráfica es una parábola con eje horizontal. Primero escribimos la ecuación dada como

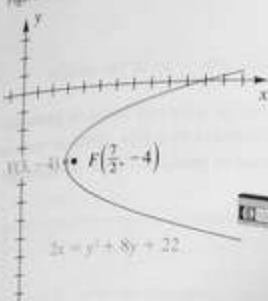
$$y^2 + 8y + \underline{\quad} = 2x - 22 + \underline{\quad}$$

y luego complementamos el cuadrado al sumar $\left[\frac{1}{2}(8)\right]^2 = 16$ a ambos lados:

$$y^2 + 8y + 16 = 2x - 6$$

$$(y + 4)^2 = 2(x - 3)$$

Figura 6



Con referencia a la última tabla, vemos que $h = 3$, $k = -4$ y $4p = 2$ o, su equivalente, $p = \frac{1}{2}$. Así obtenemos lo siguiente.

El vértice $V(h, k)$ es $V(3, -4)$.

El foco es $F(h + p, k) = F(3 + \frac{1}{2}, -4)$, o $F(\frac{7}{2}, -4)$.

La directriz es $x = h - p = 3 - \frac{1}{2}$, o $x = \frac{5}{2}$.

La parábola se muestra en la figura 6.

EJEMPLO 4 Determinación de la ecuación de una parábola dados su vértice y directriz.

Una parábola tiene vértice $V(-4, 2)$ y directriz $y = 5$. Expresa la ecuación de la parábola en la forma $y = ax^2 + bx + c$.

SOLUCIÓN El vértice y la directriz se muestran en la figura 7. Las líneas discontinuas indican una posición posible de la parábola. En la última tabla se muestra que una ecuación de la parábola es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k),$$

con $h = -4$ y $k = 2$ y con p igual a 3 *negativo*, ya que V está 3 unidades por debajo de la directriz. Así obtenemos

$$(x + 4)^2 = -12(y - 2).$$

La última ecuación puede expresarse en la forma $y = ax^2 + bx + c$, como sigue:

$$x^2 + 8x + 16 = -12y + 24$$

$$12y = -x^2 - 8x + 8$$

$$y = -\frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

Figura 7

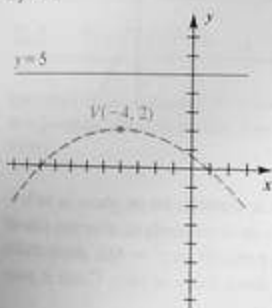
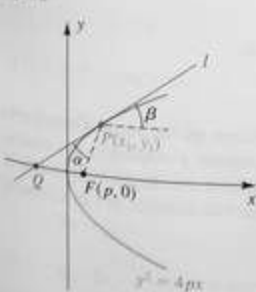


Figura 8



Una propiedad importante está asociada con la recta tangente a una parábola. (Una *tangente* a una parábola es una recta que tiene exactamente un punto en común con la parábola pero no la corta.) Asume que l es la recta tangente en un punto $P(x_1, y_1)$ en la gráfica de $y^2 = 4px$, y sea F el foco. Así como en la figura 8, sea α el ángulo entre l y el segmento de recta FP , y sea β el ángulo entre l y la semirecta horizontal indicada con punto extremo P . Es posible demostrar que $\alpha = \beta$. Esta *propiedad reflexiva* tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, la forma del espejo en un reflector se obtiene al hacer girar una parábola alrededor de su eje. Se dice que la superficie tridimensional resultante es *generada* por la parábola y se denomina **paraboloide**. El **foco** del paraboloide es el mismo que el foco de la parábola generadora. Si una fuente luminosa se coloca en F , entonces, por una ley física (el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia), un haz de luz se refleja a lo largo de una recta paralela al eje (figura 9(a)). El mismo principio se usa en la construcción de espejos para telescopios u hornos solares: un haz de luz que incide en el espejo parabólico en forma paralela al eje se reflejará hacia el foco (figura 9(b)). Esta propiedad se aplica también a antenas

Figura 9

(a) Espejo de un reflector



(b) Espejo de telescopio



para sistemas de radar, radiotelescopios y micrófonos de campo que se utilizan en juegos de fútbol.

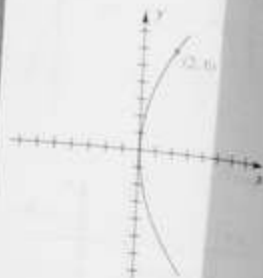
EJEMPLO 5 Localización del foco de una antena de TV por satélite

El interior de la antena de TV por satélite es un disco con forma de parábola de (finito) de diámetro de 12 pies y profundidad de 2 pies, como se muestra en la figura 10. Encuentra la distancia desde el centro del disco hasta el foco.

Figura 10



Figura 11



SOLUCIÓN La parábola generadora se muestra en un plano xy en la figura 11, donde hemos tomado el vértice de la parábola en el origen y su eje a lo largo del eje x . Una ecuación de la parábola es $y^2 = 4px$, donde p es la distancia requerida desde el centro del disco hasta el foco. Como el punto $(2, 6)$ está en la parábola, obtenemos

$$6^2 = 4p \cdot 2, \quad \text{ó} \quad p = \frac{36}{8} = 4.5 \text{ pies.}$$

En el ejemplo siguiente usamos una graficadora para obtener la gráfica de una parábola con eje horizontal.

EJEMPLO 6 Graficado de semiparábolas

Grafica $x = y^2 + 2y - 4$.

SOLUCIÓN La gráfica es una parábola con eje horizontal. Como y no es una función de x , despejamos y en la ecuación y obtenemos dos ecuaciones (en forma bastante parecida a lo que hicimos con círculos en el ejemplo 11 de la sección 3.2). Empezamos por despejar y en términos de x en la ecuación equivalente

$$y^2 + 2y - 4 - x = 0$$

usando la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = 2$ y $c = -4 - x$:

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-4-x)}}{2(1)} \quad \text{fórmula cuadrática}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20 + 4x}}{2} \quad \text{simplificar}$$

$$= -1 \pm \sqrt{x+5} \quad \text{factorizar } \sqrt{4}; \text{ simplificar}$$

La última ecuación, $y = -1 \pm \sqrt{x+5}$, representa la parte superior de la parábola ($y = -1 + \sqrt{x+5}$) y la parte inferior ($y = -1 - \sqrt{x+5}$). Observa que $y = -1$ es el eje de la parábola.

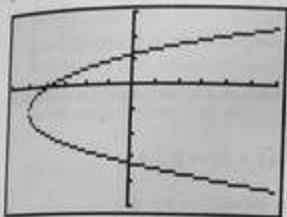
A continuación hacemos las asignaciones

$$Y_1 = -1 + \sqrt{x+5} \quad y \quad Y_2 = -1 - \sqrt{x+5}.$$

Luego graficamos Y_1 y Y_2 para obtener un trazo semejante al de la figura 12.

figura 12

$[-6, 6]$ por $[-5, 3]$



11.1 Ejercicios

Ejercicios 1 al 12: encuentra el vértice, el foco y la directriz de la parábola. Traza su gráfica, mostrando el foco y la directriz.

1 $8y = x^2$

2 $20x = y^2$

3 $2y^2 = -3x$

4 $x^2 = -3y$

5 $(x+2)^2 = -8(y-1)$

6 $(x-3)^2 = \frac{1}{2}(y+1)$

7 $(y-2)^2 = \frac{1}{4}(x-3)$

8 $(y+1)^2 = -12(x+2)$

9 $y = x^2 - 4x + 2$

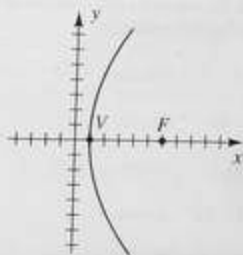
10 $y^2 + 14y + 4x + 45 = 0$

11 $x^2 + 20y = 10$

12 $y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$

Ejercicios 13 al 18: encuentra una ecuación de la parábola que se muestra en la figura.

13



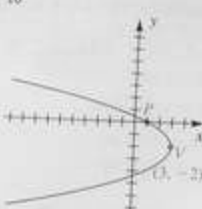
14



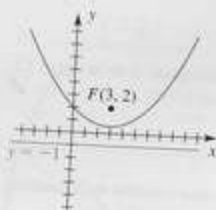
15



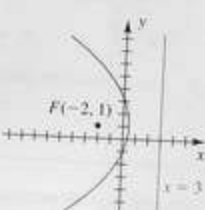
16



17



18



Ejercicios 19 al 30: encuentra una ecuación de la parábola que cumpla las condiciones dadas.

19. Foco $F(2, 0)$, directriz $x = -2$
20. Foco $F(0, -4)$, directriz $y = 4$
21. Foco $F(6, 4)$, directriz $y = -2$
22. Foco $F(-3, -2)$, directriz $y = 1$
23. Vértice $V(3, -5)$, directriz $x = 2$
24. Vértice $V(-2, 3)$, directriz $y = 5$
25. Vértice $V(-1, 0)$, foco $F(-4, 0)$
26. Vértice $V(1, -2)$, foco $F(1, 0)$
27. Vértice en el origen, simétrica al eje y y pasa por el punto $(2, -3)$
28. Vértice en el origen, simétrica al eje y y pasa por el punto $(6, 3)$

29. Vértice $V(-3, 5)$, eje paralelo al eje x y que pasa por el punto $(5, 9)$
30. Vértice $V(3, -2)$, eje paralelo al eje x e intersección en y igual a 1

Ejercicios 31 al 34: encuentra una ecuación para el conjunto de puntos en un plano xy que son equidistantes del punto P y la recta l .

31. $P(0, 5)$; $l: y = -3$
32. $P(7, 0)$; $l: x = 1$
33. $P(-6, 3)$; $l: x = -2$
34. $P(5, -2)$; $l: y = 4$

Ejercicios 35 al 38: halla una ecuación para la mitad indicada de la parábola.

35. Mitad inferior de $(y + 1)^2 = x + 3$
36. Mitad superior de $(y - 2)^2 = x - 4$
37. Mitad derecha de $(x + 1)^2 = y - 4$
38. Mitad izquierda de $(x + 3)^2 = y + 2$

Ejercicios 39 y 40: encuentra una ecuación para la parábola que tiene un eje vertical y pasa por los puntos dados.

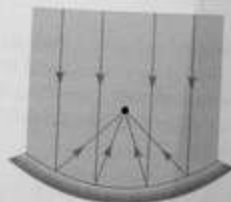
39. $P(2, 5)$, $Q(-2, -3)$, $R(1, 6)$
40. $P(3, -1)$, $Q(1, -7)$, $R(-2, 14)$

Ejercicios 41 y 42: halla una ecuación para la parábola que tiene un eje horizontal y pasa por los puntos dados.

41. $P(-1, 1)$, $Q(11, -2)$, $R(5, -1)$
42. $P(2, 1)$, $Q(6, 2)$, $R(12, -1)$

43. Espejo de un telescopio. El espejo de un telescopio reflector tiene la forma de un paraboloide (finito) con un diámetro de 8 pulg y profundidad de 1 pulg. ¿A qué distancia del centro del espejo se concentra la luz?

Ejercicio 43

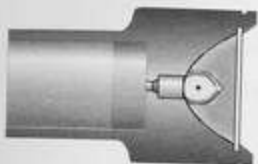


44. **Disco de una antena** El disco de una antena para satélite tiene la forma de un paraboloide que mide 10 pies a través del extremo abierto y 3 pies de profundidad. ¿A qué distancia del centro del disco debe colocarse el receptor a fin de recibir la máxima intensidad de ondas sonoras?

45. **Faro de reflector** Un faro reflector tiene la forma de un paraboloide, con la fuente de luz en el foco. Si el reflector mide 3 pies a través del extremo abierto y 1 pie de profundidad, ¿dónde está el foco?

46. **Espejo de una linterna** El espejo de una linterna tiene la forma de un paraboloide de diámetro de 4 pulgadas y profundidad de $\frac{1}{2}$ pulg., como se muestra en la figura. ¿Dónde debe colocarse la bombilla de modo que los rayos de luz emitida sean paralelos al eje del paraboloide?

Ejercicio 46



47. **Disco receptor** Un disco receptor de sonido usado en eventos deportivos al aire libre se construye en forma de paraboloide, con su foco a 5 pulg del vértice. Determina el ancho del disco si la profundidad mide 2 pies.

48. **Disco receptor** Resuelve el ejercicio 47 si el receptor mide 9 pulg desde el vértice.

49. **Receptor parabólico**

- (a) La distancia focal del paraboloide (finito) de la figura es la distancia p entre el vértice y el foco. Expresa p en términos de r y h .

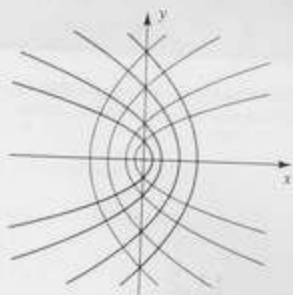
- (b) Se piensa construir un reflector con una distancia focal de 10 pies y profundidad de 5 pies. Encuentra el radio del reflector.

Ejercicio 49



50. **Parábolas confocales** La parábola $y^2 = 4p(x + p)$ tiene su foco en el origen y el eje a lo largo del eje x . Al asignar diferentes valores a p , obtenemos una familia de parábolas confocales, como se muestra en la figura. Tales familias surgen en el estudio de la electricidad y el magnetismo. Demuestra que hay exactamente dos parábolas en la familia que pasan por un punto dado $P(x_1, y_1)$ si $y_1 \neq 0$.

Ejercicio 50



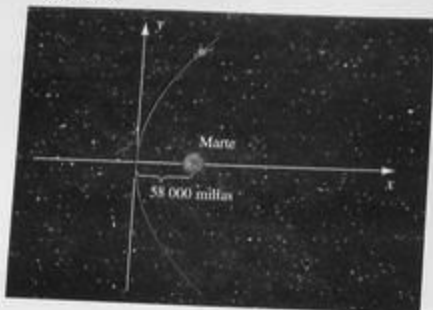
51. **Radiotelescopio de Jodrell Bank** Un radiotelescopio tiene la forma de un paraboloide de revolución, con distancia focal p y diámetro en la base igual a $2a$. Del cálculo, el área superficial S disponible para detectar ondas de radio es

$$S = \frac{8\pi p^2}{3} \left[\left(1 + \frac{a^2}{4p^2} \right)^{3/2} - 1 \right].$$

Uno de los radiotelescopios más grandes, localizado en Jodrell Bank, Cheshire, Inglaterra, tiene un diámetro de 250 pies y una distancia focal de 50 pies. Calcula S al pie cuadrado más próximo.

52. **Trayectoria de un satélite** Un satélite se desplaza en una trayectoria parabólica cerca de un planeta si su velocidad v en metros por segundo cumple la ecuación $v = \sqrt{2k/r}$, donde r es la distancia en metros entre el satélite y el centro del planeta y k es una constante positiva. El planeta está situado en el foco de la parábola y el satélite pasa una vez por el planeta. Asume que se diseña un satélite para seguir una trayectoria parabólica y viajar a menos de 58 000 millas de Marte, como se muestra en la figura.

Ejercicio 52



- (a) Determina una ecuación de la forma $x = ay^2$ que describa la trayectoria de vuelo del satélite.

- (b) Para Marte, $k = 4.28 \times 10^{11}$, calcula la velocidad máxima del satélite.

- (c) Encuentra la velocidad del satélite cuando su coordenada y es de 1 000 000 millas.

Ejercicios 53 y 54: traza la ecuación.

53 $x = -y^2 + 2y + 5$

54 $x = 2y^2 + 3y - 7$

Ejercicios 55 y 56: traza las parábolas en el mismo plano coordenado y calcula el punto de intersección.

55 $y = x^2 - 2.1x - 1$; $x = y^2 + 1$

56 $y = -2.1x^2 + 0.1x + 1.2$; $x = 0.6y^2 + 1.7y - 1.1$

11.2

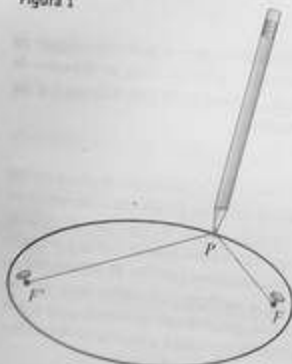
Elipses

Una elipse puede definirse como sigue.

Definición de elipse

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos en un plano, la suma de cuyas distancias a dos puntos fijos (los **focos**) en el plano es una constante positiva.

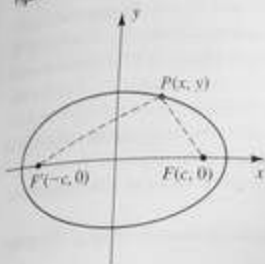
Figura 1



Podemos trazar una elipse en papel como sigue: clava dos chinchas en el papel en dos puntos cualesquiera F y F' , y ata los extremos de un trozo de cuerda a las chinchas. Después de colocar un lápiz y tensar la cuerda como se muestra en el punto P de la figura 1, mueve el lápiz manteniendo tensa la cuerda. La suma de las distancias $d(P, F)$ y $d(P, F')$ es la longitud de la cuerda y, por tanto, es constante; así, el lápiz traza una elipse con focos en F y F' . El punto medio del segmento $F'F$ se denomina **centro** de la elipse. Al cambiar la posición de F y F' mientras se mantiene fija la longitud de la cuerda, podemos variar considerablemente la forma de la elipse. Si F y F' están lejos uno de otro, de modo que $d(F, F')$ mida casi la longitud de la cuerda, entonces la elipse es plana. Si $d(F, F')$ se aproxima a cero, la elipse es casi circular. Si $F = F'$, obtenemos un círculo con centro F .

Para obtener una ecuación simple para una elipse, elegimos el eje x como la recta que pasa por los dos focos F y F' , con el centro de la elipse en el origen. Si F tiene las coordenadas $(c, 0)$, con $c > 0$, entonces, como en la figura 2, F' tiene las coordenadas $(-c, 0)$. Por tanto, la distancia entre F y F' es $2c$. La suma constante de las distancias de P desde F y F' se denotará por

Figura 2



2a. Para obtener puntos que no están en el eje x , debemos tener $2a > 2c$; es decir, $a > c$. Por definición, $P(x, y)$ está sobre la elipse si y sólo si las siguientes ecuaciones equivalentes son verdaderas:

$$\begin{aligned} d(P, F) + d(P, F') &= 2a \\ \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de la última ecuación, obtenemos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

o bien,

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Al elevar nuevamente al cuadrado ambos lados, obtenemos

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

o bien,

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Al dividir ambos lados entre $a^2(a^2 - c^2)$, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Al recordar que $a > c$ y, por consiguiente, $a^2 - c^2 > 0$, obtenemos

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad \text{o} \quad b^2 = a^2 - c^2.$$

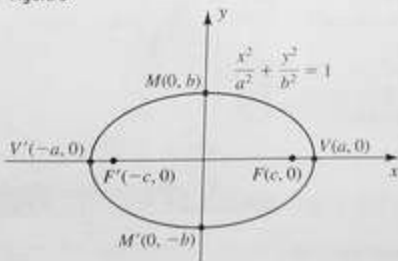
Esta sustitución conduce a la siguiente ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como $c > 0$ y $b^2 = a^2 - c^2$, se concluye que $a^2 > b^2$ y entonces $a > b$.

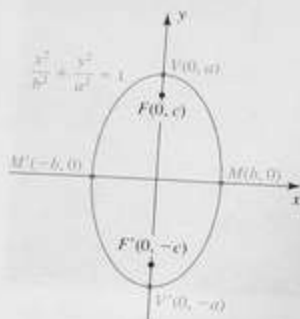
Hemos demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) en la elipse de la figura 3 satisface la ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. A la inversa, si (x, y) es una solución de esta ecuación, entonces al invertir los pasos precedentes vemos que el punto (x, y) está en la elipse.

Figura 3



828 CAPÍTULO 11 TEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Figura 4



Podemos encontrar las intersecciones en x de la elipse al hacer $y = 0$ en la ecuación. Al hacerlo, obtenemos $x^2/a^2 = 1$, o bien, $x^2 = a^2$. En consecuencia, las intersecciones en x son a y $-a$. Los puntos correspondientes $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ en la gráfica se denominan **vértices** de la elipse (figura 3). El segmento de recta VV' se denomina **eje mayor**. De manera semejante, al hacer $x = 0$ en la ecuación, obtenemos $y^2/b^2 = 1$, o bien, $y^2 = b^2$. Por tanto, las intersecciones en y son b y $-b$. El segmento entre $M'(0, -b)$ y $M(0, b)$ se denomina **eje menor** de la elipse. El eje mayor siempre es más grande que el eje menor, ya que $a > b$.

Al aplicar pruebas de simetría vemos que la elipse es simétrica con respecto al eje x , y el origen.

De manera semejante, si consideramos los focos en el eje y , obtenemos la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

En este caso, los vértices de la elipse son $(0, \pm a)$ y los puntos extremos del eje menor son $(\pm b, 0)$, como se muestra en la figura 4.

El análisis precedente puede resumirse como se muestra en seguida.

Ecuaciones estándar de una elipse con centro en el origen

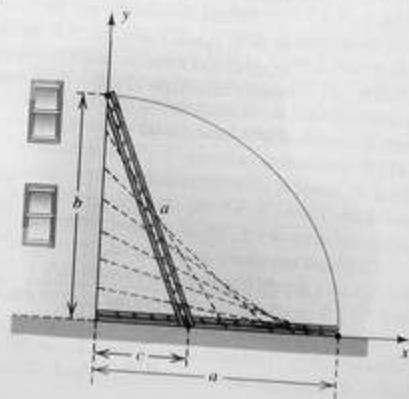
La gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

donde $a > b > 0$, es una elipse con centro en el origen. La longitud del eje mayor es $2a$ y la del eje menor es $2b$. Los focos están a una distancia c del origen, donde $c^2 = a^2 - b^2$.

Como ayuda para recordar la relación entre los focos, piensa en el triángulo rectángulo que se formó con una escalera de longitud a apoyada contra un edificio, como se muestra en la figura 5. Según el teorema de Pitágoras, $b^2 + c^2 = a^2$. En esta posición, los extremos de la escalera están en un foco y en un punto extremo del eje menor. Si la escalera cae, los extremos de la misma quedarán en el centro de la elipse y en un punto extremo del eje mayor.

Figura 5



Hemos demostrado que la ecuación de una elipse con centro en el origen y focos en un eje coordenado siempre puede escribirse en la forma

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1, \quad \text{o} \quad qx^2 + py^2 = pq,$$

con p y q positivos y $p \neq q$. Si $p > q$, el eje mayor está en el eje x ; si $p < q$, el eje mayor está en el eje y . No es necesario memorizar estos hechos, ya que en cualquier problema dado el eje mayor puede determinarse al analizar las intersecciones en x y en y .

EJEMPLO 1 Trazado de una elipse con centro en el origen

Traza la gráfica de $2x^2 + 9y^2 = 18$, y halla los focos.

SOLUCIÓN La gráfica es una elipse con centro en el origen y focos en un eje coordenado. Para encontrar las intersecciones en x , hacemos $y = 0$, con lo que obtenemos

$$2x^2 = 18, \quad \text{o bien,} \quad x = \pm 3.$$

Para encontrar las intersecciones en y , hacemos $x = 0$, con lo que obtenemos

$$9y^2 = 18, \quad \text{o} \quad y = \pm \sqrt{2}.$$

Ahora podemos trazar la elipse (figura 6). Como $\sqrt{2} \approx 1.4 < 3$, el eje mayor está en el eje x .

Para encontrar los focos, hacemos $a = 3$ y $b = \sqrt{2}$ y calculamos

$$c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 7.$$

Así, $c = \sqrt{7}$, y los focos son $(\pm\sqrt{7}, 0)$.

EJEMPLO 2 Trazado de una elipse con centro en el origen

Traza la gráfica de $9x^2 + 4y^2 = 25$ y encuentra los focos.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 1, la gráfica es una elipse con centro en el origen y focos sobre un eje coordenado. Para encontrar las intersecciones en x , hacemos $y = 0$, con lo que obtenemos

$$9x^2 = 25, \quad \text{o} \quad x = \pm \frac{5}{3}.$$

Para encontrar las intersecciones en y , hacemos $x = 0$, con lo que obtenemos

$$4y^2 = 25, \quad \text{o} \quad y = \pm \frac{5}{2}.$$

Estos cálculos producen la gráfica de la figura 7. Como $\frac{5}{3} < \frac{5}{2}$, el eje mayor está en el eje y .

Para encontrar los focos, hacemos $a = \frac{5}{2}$ y $b = \frac{5}{3}$ y calculamos

$$c^2 = a^2 - b^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{125}{36}.$$

Así, $c = \sqrt{125/36} = 5\sqrt{5}/6 \approx 1.86$, y los focos son $(0, \pm 5\sqrt{5}/6)$.

Figura 6

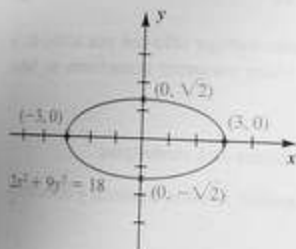
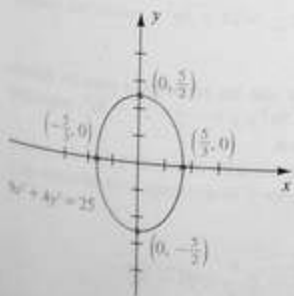


Figura 7



EJEMPLO 3 Determinación de una ecuación de una elipse dados sus vértices y focos

Encuentra una ecuación de una elipse con vértices $(\pm 4, 0)$ y focos $(\pm 2, 0)$.

SOLUCIÓN Debido a que los focos están en el eje x y son equidistantes del origen, el eje mayor está en el eje x y la elipse tiene centro $(0, 0)$. Así una ecuación general de una elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ya que los vértices son $(\pm 4, 0)$, concluimos que $a = 4$. Como los focos son $(\pm 2, 0)$, tenemos $c = 2$. Por tanto,

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 2^2 = 12,$$

y la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

En ciertas aplicaciones es necesario trabajar sólo con una mitad de la elipse. El siguiente ejemplo indica cómo encontrar ecuaciones en tales casos.

EJEMPLO 4 Determinación de ecuaciones para semielipses

Encuentra ecuaciones para la mitad superior, inferior, izquierda y derecha de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 25$.

SOLUCIÓN La gráfica de toda la elipse se muestra en la figura 7. Para encontrar ecuaciones para las mitades superior e inferior, despejamos y en términos de x , como sigue:

$$9x^2 + 4y^2 = 25$$

dado

$$y^2 = \frac{25 - 9x^2}{4}$$

despejar y^2

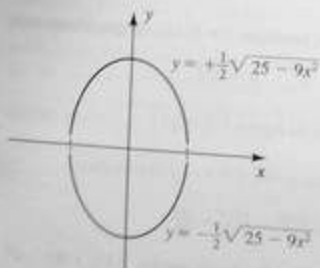
$$y = \pm \sqrt{\frac{25 - 9x^2}{4}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{25 - 9x^2} \quad \text{extraer raíz cuadrada}$$

Como $\sqrt{25 - 9x^2} \geq 0$, se concluye que las ecuaciones para las mitades superior e inferior son $y = \frac{1}{2}\sqrt{25 - 9x^2}$ y $y = -\frac{1}{2}\sqrt{25 - 9x^2}$, respectivamente, como se muestra en la figura 8.

Para encontrar ecuaciones para las mitades izquierda y derecha, usamos un procedimiento semejante al anterior y despejamos x en términos de y , con lo que obtenemos

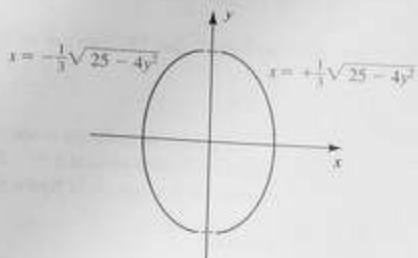
$$x = \pm \sqrt{\frac{25 - 4y^2}{9}} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{25 - 4y^2}.$$

Figura 8



La mitad izquierda de la elipse tiene la ecuación $x = -\frac{1}{3}\sqrt{25 - 4y^2}$, y la mitad derecha está dada por $x = \frac{1}{3}\sqrt{25 - 4y^2}$, como se muestra en la figura 9.

Figura 9



Si consideramos una ecuación normal de la elipse ($x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$) y sustituimos x por $x - h$ y por $y - k$, entonces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{se convierte en} \quad \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1. \quad (*)$$

La gráfica de (*) es una elipse con centro (h, k) . Al elevar al cuadrado los términos de (*) y simplificar obtenemos una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde los coeficientes son números reales y ambos A y C son positivos. Al revés, si empezamos con una ecuación así, entonces al completar los cuadrados podemos obtener una forma que es útil para encontrar el centro de la elipse y las longitudes de los ejes mayor y menor. Esta técnica se ilustra en el ejemplo siguiente.



EJEMPLO 5 Trazado de una elipse con centro (h, k)

Analiza y traza la gráfica de la ecuación

$$16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0.$$

SOLUCIÓN Empezamos por agrupar los términos que contienen x y y :

$$(16x^2 + 64x) + (9y^2 - 18y) = 71$$

Luego, factorizamos los coeficientes de x^2 y y^2 como sigue:

$$16(x^2 + 4x + \underline{\quad}) + 9(y^2 - 2y + \underline{\quad}) = 71$$

Ahora completamos los cuadrados para las expresiones entre paréntesis:

$$16(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 71 + 16 \cdot 4 + 9 \cdot 1$$

Al sumar 4 a la expresión dentro del primer paréntesis, hemos sumado 64 al lado izquierdo de la ecuación y, por tanto, debemos compensar este hecho sumando 64 al lado derecho. De manera semejante, al sumar 1 a la expresión

(continúa)

dentro del segundo paréntesis hemos sumado 9 al lado izquierdo y, en consecuencia también debemos sumar 9 al lado derecho. La última ecuación puede escribirse como

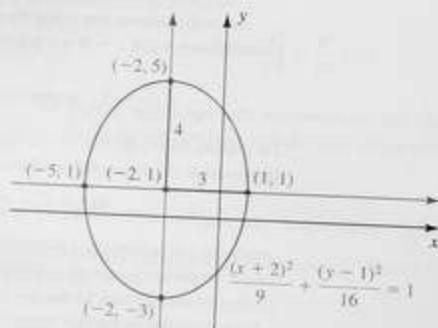
$$16(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 144.$$

Al dividir entre 144 para que en el lado derecho dé 1, obtenemos

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1.$$

La gráfica de la última ecuación es una elipse con centro $C(-2, 1)$ y eje mayor en la recta vertical $x = -2$ (ya que $9 < 16$). Al usar $a = 4$ y $b = 3$, obtenemos la elipse de la figura 10.

Figura 10



Para encontrar los focos, primero calculamos

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4^2 - 3^2 = 7.$$

La distancia del centro de la elipse a los focos es $c = \sqrt{7}$. Ya que el centro es $(-2, 1)$, los focos son $(-2, 1 \pm \sqrt{7})$.

Las calculadoras graficadoras y los programas de graficación a menudo no permiten trazar las gráficas de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

como la que se consideró en el último ejemplo. En estos casos, primero es necesario despejar y en términos de x en la ecuación y luego trazar las dos funciones resultantes, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Graficación de elipses

Traza la gráfica de $3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y + 9 = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación puede considerarse como una ecuación cuadrática en y de la forma $ay^2 + by + c = 0$ al reagrupar los términos como sigue:

$$4y^2 - 8y + (3x^2 + 12x + 9) = 0.$$

Al aplicar la fórmula cuadrática a la ecuación previa, con $a = 4$, $b = -8$ y $c = 3x^2 + 12x + 9$, obtenemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(3x^2 + 12x + 9)}}{2(4)} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}}{8} \\ &= 1 \pm \frac{1}{8} \sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}. \end{aligned}$$

Advierte que no simplificamos por completo el radicando, ya que utilizamos una calculadora graficadora.

A continuación hacemos las asignaciones

$$Y_1 = \frac{1}{8} \sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}, \quad Y_2 = 1 + Y_1 \quad \text{y} \quad Y_3 = 1 - Y_1.$$

TI-83 Plus

Haz asignaciones Y

Y= (1 - 8)
 2nd [√] 64 - 16 (3 [X,T,θ,n] x²
 + 12 [X,T,θ,n] + 9)))
 1 + [VAR] [1] [1]
 1 - [VAR] [1] [1]

Desactiva Y₁

△ △ △ < ENTER

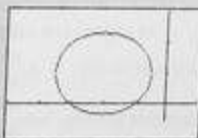
Plot1 Plot2 Plot3
 Y1=(1/8)√(64-16
 (3X²+12X+9))
 Y2=Y1+1
 Y3=1-Y1
 Y4=
 Y5=
 Y6=

TI-86

GRAPH y(x)=(F1) (1 - 8)
 2nd [√] 64 - 16 (3 [x-VAR] x²
 + 12 [x-VAR] + 9)))
 1 + [y(F2)] 1
 1 - [y(F2)] 1
 △ △ SELECT(F5)

Plot1 Plot2 Plot3
 Y1=(1/8)√(64-16(3X²
 +12X+9))
 Y2=Y1+1
 Y3=1-Y1
 Y4=
 Y5=
 Y6=

Ahora grafica Y_2 y Y_3 en la pantalla $[-5,1]$ por $[-1,3]$.



Las elipses pueden ser muy planas o casi circulares. Para obtener información sobre la *redondez* de una elipse, algunas veces usamos el término *excentricidad*, que se define como sigue, donde a , b y c tienen el mismo significado que antes.

Definición de excentricidad

La **excentricidad** e de una elipse es

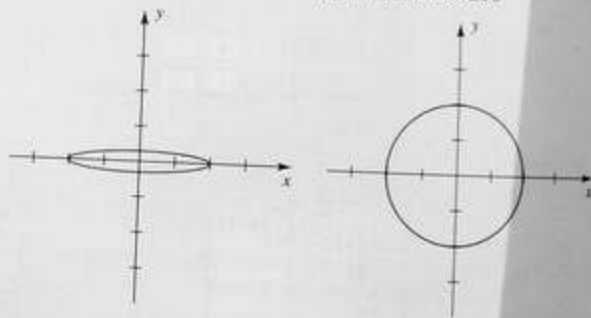
$$e = \frac{\text{distancia del centro al foco}}{\text{distancia del centro al vértice}} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Considera la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, y asume que la longitud $2a$ del eje mayor es fija y que la longitud $2b$ del eje menor es variable (observa que $0 < b < a$). Como b^2 es positivo, $a^2 - b^2 < a^2$ y, por tanto $\sqrt{a^2 - b^2} < a$. Al dividir ambos lados de la última desigualdad entre a obtenemos $\sqrt{a^2 - b^2}/a < 1$, o bien, $0 < e < 1$. Si b está próximo a 0 (c está cerca de a), entonces $\sqrt{a^2 - b^2} = a$, $e = 1$, y la elipse es muy plana. Este caso se ilustra en la figura 11(a), con $a = 2$, $b = 0.3$ y $e = 0.99$. Si b está próximo a a (c está cerca de 0), entonces $\sqrt{a^2 - b^2} = 0$, $e = 0$, y la elipse es casi circular. Este caso se ilustra en la figura 11(b), con $a = 2$, $b = 1.9999$ y $e \approx 0.01$.

Figura 11

(a) Excentricidad casi 1

(b) Excentricidad casi 0



En la figura 11(a), los focos están cerca de los vértices.

En la figura 11(b), los focos están cerca del origen.

Observa que la elipse de la figura 5 tiene $\frac{5}{13} \approx 0.38$ de excentricidad y parece ser casi circular.

Después de muchos años de analizar una gran cantidad de datos empíricos, el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571–1630) planteó tres leyes que describen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. La primera ley de Kepler establece que la órbita de cada planeta del Sistema Solar es una elipse con el Sol en uno de los focos. La mayor parte de estas órbitas son casi circulares, de modo que sus excentricidades correspondientes se acercan a 0. Como ilustración, para la Tierra, $e \approx 0.017$; para Marte, $e \approx 0.093$; y para Urano, $e \approx 0.046$. Las órbitas de Mercurio y Plutón son menos circulares, con excentricidades de 0.206 y 0.249, respectivamente.

Muchos cometas tienen órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos. En este caso, la excentricidad e está próxima a 1 y la elipse es muy plana. En el siguiente ejemplo usamos la **unidad astronómica (UA)** —es decir, la distancia media de la Tierra al Sol— para especificar grandes distancias (1 UA \approx 93 000 000 millas).

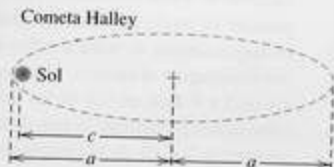


EJEMPLO 7 Cálculo de una distancia en una trayectoria elíptica

El cometa Halley tiene una órbita elíptica con excentricidad $e = 0.967$. La distancia más pequeña a la que el cometa Halley pasa del Sol es 0.587 UA. Calcula la distancia máxima del cometa al Sol, hasta la décima de UA más próxima.

SOLUCIÓN En la figura 12 se ilustra la órbita del cometa, donde c es la distancia del centro de la elipse al foco (el Sol) y $2a$ es la longitud del eje mayor.

Figura 12



Como $a - c$ es la distancia mínima entre el Sol y el cometa, tenemos (en UA):

$$a - c = 0.587, \quad \text{o bien} \quad a = c + 0.587.$$

Como $e = c/a = 0.967$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} c &= 0.967a && \text{multiplicar por } a \\ &= 0.967(c + 0.587) && \text{sustituir } a \\ &\approx 0.967c + 0.568 && \text{multiplicar} \\ c - 0.967c &= 0.568 && \text{restar } 0.967c \\ c(1 - 0.967) &= 0.568 && \text{factorizar } c \\ c &\approx \frac{0.568}{0.033} \approx 17.2 && \text{despejar } c \end{aligned}$$

Como $a = c + 0.587$, obtenemos

$$a \approx 17.2 + 0.587 \approx 17.8,$$

y la distancia máxima entre el Sol y el cometa es

$$a + c = 17.8 + 17.2 = 35.0 \text{ UA.}$$

Una elipse posee una *propiedad reflexiva* semejante a la de la parábola, analizada al final de la sección previa. Como ilustración, sea l la tangente

Figura 13

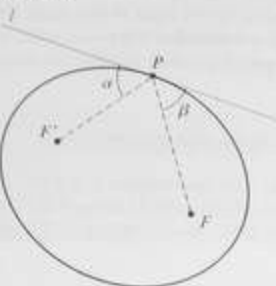
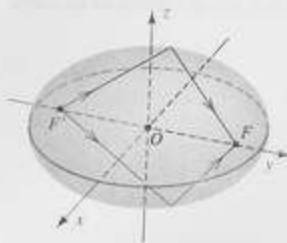


Figura 14



a un punto P en una elipse con focos F y F' , como se muestra en la figura 13. Si α es el ángulo agudo entre FP y l y si β es el ángulo agudo entre $F'P$ y l , puede demostrarse que $\alpha = \beta$. Por tanto, si un rayo de luz o sonoro emana desde uno de los focos, se refleja en el otro. Esta propiedad se utiliza en el diseño de ciertos tipos de instrumental óptico.

Si la elipse con centro O y focos F' y F se hace girar alrededor del eje x , como se ilustra en la figura 14, obtenemos una superficie tridimensional denominada **elipsoide**. La mitad superior o inferior es un **semielipsoide**, así como lo es la mitad derecha o izquierda. Las ondas sonoras u otros impulsos emitidos desde el foco F' se reflejan fuera del elipsoide hacia el foco F . Esta propiedad se aplica en el diseño de *galerías susurrantes*: estructuras con techos elipsoidales, donde una persona que susurra en un foco puede escucharse en el otro foco. Algunos ejemplos de estos recintos pueden encontrarse en la Rotonda del edificio del Capitolio en Washington, D.C., y en el Tabernáculo Mormón en Salt Lake City.

La propiedad reflexiva de los elipsoides (y de los semielipsoides) se utiliza en la medicina moderna en un dispositivo denominado *litotriptero*, que desintegra cálculos por medio de ondas de choque submarinas de alta energía. Después de tomar mediciones extremadamente precisas, el operador coloca al paciente de modo que el cálculo esté en el foco. A continuación, se producen ondas de choque de ultra alta frecuencia en el otro foco y las ondas reflejadas desintegran el cálculo. El tiempo de recuperación con esta técnica suele ser de 3 a 4 días, en vez de las 2 a 3 semanas que se requieren con cirugía convencional. Además, la tasa de mortalidad es inferior a 0.01%, en comparación con 2 a 3% de la cirugía tradicional (consulta ejercicios 51 y 52).

11.2 Ejercicios

Ejercicios 1 al 14: encuentra los vértices y focos de la elipse. Traza su gráfica, mostrando los focos.

$$1. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$2. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$3. \frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$4. \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{49} = 1$$

$$5. 4x^2 + y^2 = 16$$

$$6. y^2 + 9x^2 = 9$$

$$7. 4x^2 + 25y^2 = 1$$

$$8. 10y^2 + x^2 = 5$$

$$9. \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1 \quad 10. \frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

$$11. 4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$$

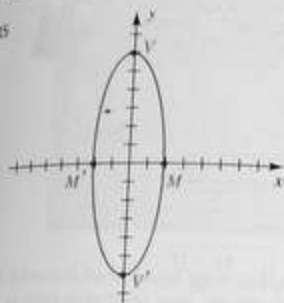
$$12. x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 43 = 0$$

$$13. 25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$$

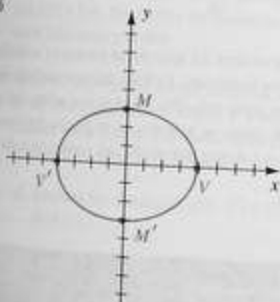
$$14. 4x^2 + y^2 = 2y$$

Ejercicios 15 al 18: halla una ecuación de la elipse que se muestra en la figura.

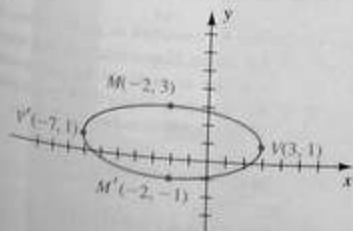
15



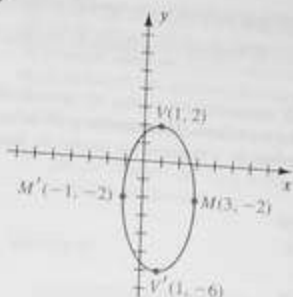
16



17



18



Ejercicios 19 al 30: encuentra una ecuación de la elipse que tiene centro en el origen y satisface las condiciones dadas.

19 Vértices $V(\pm 8, 0)$,focos $F(\pm 5, 0)$ 20 Vértices $V(0, \pm 7)$,focos $F(0, \pm 2)$ 21 Vértices $V(0, \pm 5)$,

eje menor de longitud 3

22 Focos $F(\pm 3, 0)$,

eje menor de longitud 2

23 Vértices $V(0, \pm 6)$,pasa por $(3, 2)$ 24 Pasa por $(2, 3)$ y $(6, 1)$ 25 Excentricidad $\frac{3}{4}$,vértices $V(0, \pm 4)$ 26 Excentricidad $\frac{1}{2}$,
pasa por $(1, 3)$ vértices en el eje x 27 Intersecciones $y \pm 2$,intersecciones $y \pm \frac{1}{2}$ 28 Intersecciones $y \pm \frac{1}{2}$,intersecciones $y \pm 4$

- 29 Eje mayor horizontal de longitud 8, eje menor de longitud 5.
30 Eje mayor vertical de longitud 7, eje menor de longitud 6.

Ejercicios 31 y 32: encuentra los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones. Traza ambas gráficas en el mismo plano coordenado y muestra los puntos de intersección.

$$31 \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 20 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$32 \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 36 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$$

Ejercicios 33 al 36: halla una ecuación para el conjunto de puntos en un plano xy tal que la suma de las distancias a F y F' sea k .

$$33 F(3, 0), F'(-3, 0); k = 10$$

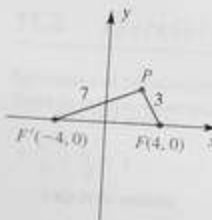
$$34 F(12, 0), F'(-12, 0); k = 26$$

$$35 F(0, 15), F'(0, -15); k = 34$$

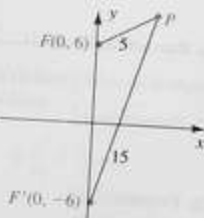
$$36 F(0, 8), F'(0, -8); k = 20$$

Ejercicios 37 y 38: encuentra una ecuación para la elipse cuyos focos son F y F' y que pasa por P . Traza esa elipse.

37



38



Ejercicios 39 al 46: determina si la gráfica de la ecuación es la mitad superior, inferior, izquierda o derecha de una elipse, y encuentra una ecuación para ésta.

$$39 y = 11 \sqrt{1 - \frac{x^2}{49}}$$

$$40 y = -6 \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$$

$$41 x = -\frac{1}{3} \sqrt{9 - y^2}$$

$$42 x = \frac{2}{3} \sqrt{25 - y^2}$$

$$43 x = 1 + 2 \sqrt{1 - \frac{(y+2)^2}{9}}$$

$$44 x = -2 - 5 \sqrt{1 - \frac{(y-1)^2}{16}}$$

$$45 y = 2 - 7 \sqrt{1 - \frac{(x+1)^2}{9}}$$

$$46 y = -1 + \sqrt{1 - \frac{(x-3)^2}{16}}$$

- 47 Dimensiones de un arco. El arco de un puente es semi-elíptico con eje mayor horizontal. La base del arco mide 30 pies de longitud y su parte más alta, 10 pies por arriba del camino horizontal, como se muestra en la figura. Encuentra la altura del arco a 6 pies por arriba del centro de la base.

Ejercicio 47



- 48 Diseño de un puente. Se construirá un puente a través de un río de 200 pies de ancho. El arco del puente será semi-elíptico y debe construirse de modo que una embarcación de menos de 30 pies de ancho y 30 pies de alto pueda pasar seguramente por el arco, como se muestra en la figura.

- (a) Encuentra una ecuación para el arco.
(b) Calcula la altura del arco a la mitad del puente.

Ejercicio 48



48. **Órbita de la Tierra** Asume que la longitud del eje mayor de la órbita de la Tierra mide 186 000 000 millas, y que la excentricidad es 0.017. Aproxima, a las 1000 millas más próximas, las distancias máxima y mínima entre la Tierra y el Sol.

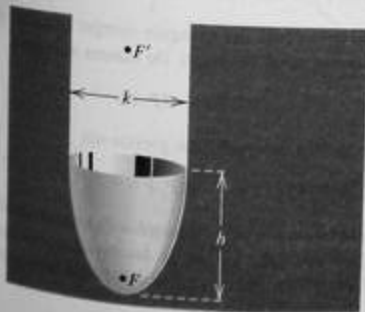
50. **Órbita de Mercurio** El planeta Mercurio se desplaza en una órbita elíptica de excentricidad 0.206 y eje mayor de longitud 0.774 UA. Encuentra las distancias máxima y mínima entre Mercurio y el Sol.

51. **Reflector elíptico** La forma básica de un reflector elíptico es un semielipsoide de altura h y diámetro k , como se muestra en la figura. Las ondas emitidas desde el foco F se reflejan en la superficie hacia el foco F' .

(a) Expresa las distancias $d(V, F)$ y $d(V, F')$ en términos de h y k .

(b) Se construirá un reflector elíptico de 17 centímetros de altura de modo que las ondas emitidas desde F se reflejen hacia un punto F' que está a 32 centímetros de V . Encuentra el diámetro del reflector y la ubicación de F .

Ejercicio 51

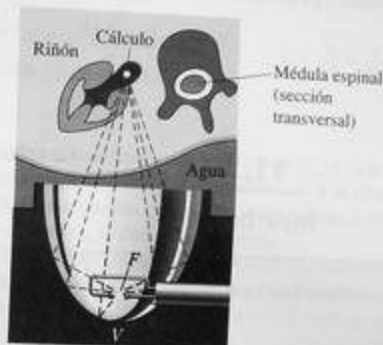


52. **Operación del litotriptor** Se construirá un litotriptor de 15 cm de altura y 18 cm de diámetro (consulta la figura). Se emitirán ondas de choque submarinas de alta energía desde el foco F más próximo al vértice V .

(a) Encuentra la distancia de V a F .

(b) ¿A qué distancia de V (en la dirección vertical) debe colocarse un cálculo?

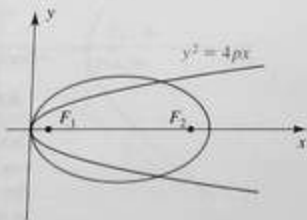
Ejercicio 52



53. **Galería susurrante** El techo de una galería susurrante tiene la forma del semielipsoide que se muestra en la figura 14, con el punto máximo del techo a 15 pies por arriba del piso elíptico y los vértices del piso a 50 pies de distancia entre sí. Si dos personas se colocan en los focos F y F' , ¿a qué distancia de los vértices están sus pies?

54. Una elipse tiene un vértice en el origen y focos $F_1(p, 0)$ y $F_2(p + 2c, 0)$, como se muestra en la figura. Si el foco en F_1 es fijo y $y(x, y)$ está en la elipse, demuestra que y^2 se acerca a $4px$ cuando $c \rightarrow \infty$. (Así, cuando $c \rightarrow \infty$, la elipse asume la forma de una parábola.)

Ejercicio 54



840 CAPÍTULO 11 TEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Ejercicios 55 y 56: los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas. Dados el semieje mayor a en millones de kilómetros y la excentricidad e , traza la órbita del planeta. Centra el eje mayor en el eje x y grafica la ubicación del Sol en uno de los focos.

55. Trayectoria de la Tierra $a = 149.6$, $e = 0.093$

56. Trayectoria de Plutón $a = 5913$, $e = 0.249$

Ejercicios 57 al 60: traza las elipses en el mismo plano coordenado y calcula sus puntos de intersección.

57. $\frac{x^2}{2.9} + \frac{y^2}{2.1} = 1$; $\frac{x^2}{4.3} + \frac{(y-2.1)^2}{4.9} = 1$

58. $\frac{x^2}{3.9} + \frac{y^2}{2.4} = 1$; $\frac{(x+1.9)^2}{4.1} + \frac{y^2}{2.5} = 1$

59. $\frac{(x+0.1)^2}{1.7} + \frac{y^2}{0.9} = 1$; $\frac{x^2}{0.9} + \frac{(y-0.25)^2}{1.8} = 1$

60. $\frac{x^2}{3.1} + \frac{(y-0.2)^2}{2.8} = 1$; $\frac{(x+0.23)^2}{1.8} + \frac{y^2}{4.2} = 1$

11.3

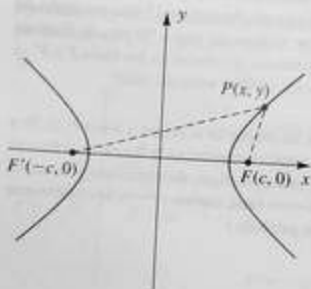
Hipérbolas

La definición de una hipérbola es semejante a la de la elipse. El único cambio es que en vez de la *suma* de las distancias a dos puntos fijos, usamos la *diferencia*.

Definición de una hipérbola

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos en un plano, la diferencia de cuyas distancias a dos puntos fijos (los **focos**) en el plano es una constante positiva.

Figura 1



Para encontrar una ecuación simple de una hipérbola, elegimos un sistema coordenado con focos en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y denotamos la distancia (constante) por $2a$. El punto medio del segmento $F'F$ (origen) se denomina **centro** de la hipérbola. Al referirnos a la figura 1, vemos que un punto $P(x, y)$ está en la hipérbola si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes expresiones:

(1) $d(P, F') - d(P, F) = 2a$ o (2) $d(P, F) - d(P, F') = 2a$

Si P no está en el eje x , entonces por la figura 1, vemos que

$$d(P, F) < d(F', F) + d(P, F'),$$

debido a que la longitud de un lado del triángulo siempre es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. De manera semejante,

$$d(P, F') < d(F', F) + d(P, F).$$

Formas equivalentes de las dos desigualdades previas son

$$d(P, F) - d(P, F') < d(F', F) \quad \text{y} \quad d(P, F') - d(P, F) < d(F', F).$$

Debido a que las diferencias en los lados izquierdos de estas desigualdades son, ambas, iguales a $2a$ y como $d(F', F) = 2c$, las dos últimas desigualdades implican que $2a < 2c$, o bien que $a < c$. (Recuerda que para las elipses se tenía $a > c$.)

Luego, las ecuaciones (1) y (2) pueden sustituirse por la ecuación

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a.$$

Al usar la fórmula de la distancia para encontrar $d(P, F)$ y $d(P, F')$, obtenemos una ecuación de la hipérbola:

$$|\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}| = 2a$$

Cuando usamos el tipo de procedimiento de simplificación para obtener una ecuación de una elipse, podemos escribir la ecuación precedente como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

obtenemos

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{con } b > 0$$

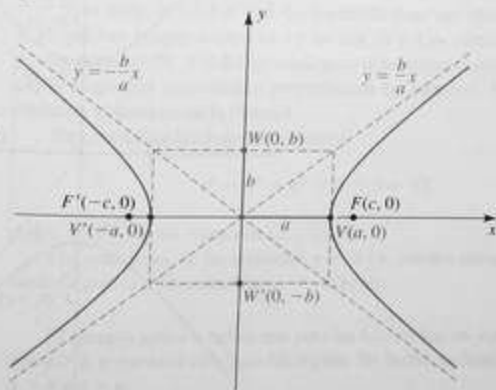
Por último, si en la ecuación precedente hacemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hemos demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) en la hipérbola de la figura 1 satisface la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$. A la inversa, si (x, y) es una solución de esta ecuación, entonces al intercambiar el orden de los pasos vemos que el punto (x, y) está en la hipérbola.

Si aplicamos pruebas de simetría vemos que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes y al origen. Podemos encontrar las intersecciones en x de la hipérbola haciendo $y = 0$ en la ecuación. Cuando se hace lo anterior, obtenemos $x^2/a^2 = 1$ o $x^2 = a^2$ y, en consecuencia, las intersecciones en x son a y $-a$. Los puntos correspondientes $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ en la gráfica se denominan **vértices** de la hipérbola (figura 2). El segmento de recta $V'V$ se denomina **eje transverso**. La gráfica carece de intersecciones en y , porque la ecuación $-y^2/b^2 = 1$ tiene las soluciones *complejas* $y = \pm bi$. Los puntos $W(0, b)$ y $W'(0, -b)$ son los puntos extremos del **eje conjugado** $W'W$. Los puntos W y W' no están en la hipérbola; como veremos, son útiles para describir la gráfica.

Figura 2



Al despejar y en la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ obtenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Si $x^2 - a^2 < 0$ o, en forma equivalente, $-a < x < a$, entonces no hay puntos (x, y) sobre la gráfica. Hay puntos $P(x, y)$ en la gráfica si $x \geq a$ o $x \leq -a$.

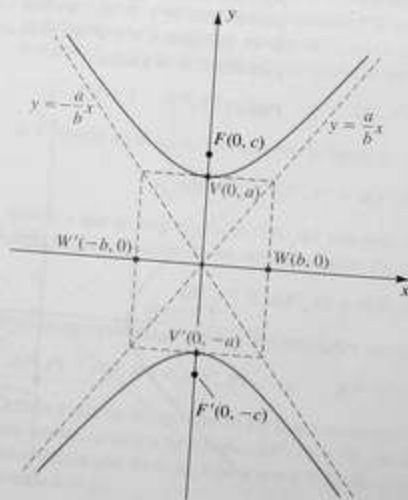
Puede demostrarse que las rectas $y = \pm(b/a)x$ son asíntotas de la hipérbola, las cuales sirven como guías excelentes para trazar la gráfica. Una forma conveniente de trazar las asíntotas es primero indicar los vértices $V(a, 0)$, $V'(-a, 0)$ y los puntos $W(0, b)$, $W'(0, -b)$ (figura 2). Si se trazan una recta vertical y una horizontal que pasen por estos puntos extremos de los ejes transversos y conjugados, respectivamente, entonces las diagonales del rectángulo auxiliar resultante tienen pendientes b/a y $-b/a$. Por tanto, al extender estas diagonales obtenemos las asíntotas $y = \pm(b/a)x$. Luego, la hipérbola se traza como en la figura 2, usando las asíntotas como guías. Las dos partes que constituyen la hipérbola se denominan **rama derecha** y **rama izquierda** de la hipérbola.

De manera semejante, si tomamos los focos sobre el eje y , obtenemos la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

En este caso los vértices de la hipérbola son $(0, \pm a)$ y los puntos extremos del eje conjugado son $(\pm b, 0)$, como se muestra en la figura 3. Las asíntotas son $y = \pm(a/b)x$ (no $y = \pm(b/a)x$, como en el caso anterior), y ahora nos referimos a las dos partes que constituyen la hipérbola como **rama superior** y **rama inferior** de la hipérbola.

Figura 3.



El desarrollo anterior se puede resumir como sigue:

Ecuaciones estándar de una hipérbola con centro en el origen

La gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

es una hipérbola con centro en el origen. La longitud del eje transverso es $2a$ y la del eje conjugado es $2b$. Los focos están a una distancia c del origen, donde $c^2 = a^2 + b^2$.

Hemos demostrado que una ecuación de una hipérbola con centro en el origen y focos sobre un eje coordenado siempre puede escribirse en la forma

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 1, \quad \text{o} \quad qx^2 + py^2 = pq,$$

donde p y q tienen signos opuestos. Los vértices están sobre el eje x si p es positivo o están en el eje y si q es positivo.

EJEMPLO 1 Trazo de una hipérbola con centro en el origen

Traza la gráfica de $9x^2 - 4y^2 = 36$. Encuentra los focos y las ecuaciones de las asíntotas.

SOLUCIÓN Con base en las observaciones que preceden a este ejemplo, la gráfica es una hipérbola con centro en el origen. Para expresar en forma estándar la ecuación dada, dividimos ambos lados entre 36 y simplificamos, con lo que obtenemos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Al comparar $(x^2/4) - (y^2/9) = 1$ con $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, vemos que $a^2 = 4$ y $b^2 = 9$; es decir, $a = 2$ y $b = 3$. La hipérbola tiene sus vértices sobre el eje x , ya que hay intersecciones en x y no hay en y . Los vértices $(\pm 2, 0)$ y los puntos extremos $(0, \pm 3)$ del eje conjugado determinan el rectángulo auxiliar cuyas diagonales (extendidas) proporcionan las asíntotas. La gráfica de la ecuación se muestra en la figura 4.

Para encontrar los focos, calculamos

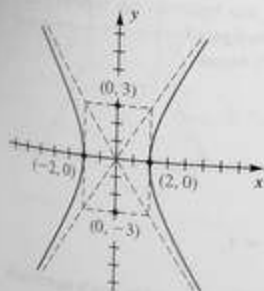
$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13.$$

Así, $c = \sqrt{13}$, y los focos son $(\pm\sqrt{13}, 0)$.

Las ecuaciones de las asíntotas, $y = \pm \frac{3}{2}x$, pueden encontrarse consultando la gráfica o las ecuaciones $y = \pm(b/a)x$.

El ejemplo anterior indica que para las hipérbolas, no siempre es cierto que $a > b$, como es el caso para las elipses. De hecho, podemos tener $a < b$, $a > b$ o $a = b$.

Figura 4



844 CAPÍTULO 11 TEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

EJEMPLO 2 Trazo de una hipérbola con centro en el origen

Traza la gráfica de $4y^2 - 2x^2 = 1$. Encuentra los focos y las ecuaciones de las asíntotas.

SOLUCIÓN Para expresar la ecuación dada en forma estándar, escribimos

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Así,

$$a^2 = \frac{1}{4}, \quad b^2 = \frac{1}{2} \quad y \quad c^2 = a^2 + b^2 = \frac{3}{4},$$

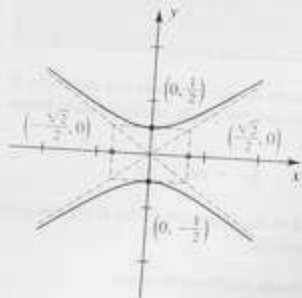
y en consecuencia

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad y \quad c = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La hipérbola tiene sus vértices sobre el eje y , ya que hay intersecciones en y (ordenadas) y no en x (abscisas). Los vértices son $(0, \pm \frac{1}{2})$, y los puntos extremos del eje conjugado son $(\pm \sqrt{2}/2, 0)$, y los focos son $(0, \pm \sqrt{3}/2)$. La gráfica se muestra en la figura 5.

Para encontrar las ecuaciones asíntotas, consultamos la figura o aplicamos $y = \pm(a/b)x$, con lo que obtenemos $y = \pm(\sqrt{2}/2)x$.

Figura 5

**EJEMPLO 3** Determinación de una hipérbola que satisface condiciones prescritas

Una hipérbola tiene vértices $(\pm 3, 0)$ y pasa por el punto $P(5, 2)$. Encuentra su ecuación, focos y asíntotas.

SOLUCIÓN Empezamos por graficar una hipérbola con vértices $(\pm 3, 0)$ que pase por el punto $P(5, 2)$, como en la figura 6.

Una ecuación de la hipérbola tiene la forma

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ya que $P(5, 2)$ está en la hipérbola, las coordenadas x y y satisfacen esta ecuación; es decir,

$$\frac{5^2}{3^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1.$$

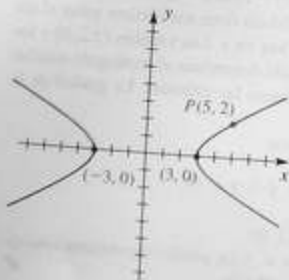
Al despejar b^2 , obtenemos $b^2 = \frac{9}{4}$, y entonces una ecuación para la hipérbola es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

o su equivalente

$$x^2 - 4y^2 = 9.$$

Figura 6



Para encontrar los focos, primero calculamos

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}.$$

Por tanto, $c = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \approx 3.35$, y los focos son $(\pm \frac{3}{2}\sqrt{5}, 0)$.

Las ecuaciones generales de las asíntotas son $y = \pm(b/a)x$. Al sustituir $a = 3$ y $b = \frac{3}{2}$ obtenemos $y = \pm \frac{1}{2}x$.

En el ejemplo siguiente se ilustra cómo encontrar ecuaciones de determinadas partes de una hipérbola.



EJEMPLO 4 Determinación de ecuaciones de porciones de una hipérbola

La hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ se analizó en el ejemplo 1. Despeja la ecuación como se indica y describe la gráfica resultante.

- (a) Para x en términos de y (b) Para y en términos de x .

SOLUCIÓN

- (a) Despejamos x en términos de y como sigue:

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

dada

$$x^2 = \frac{36 + 4y^2}{9}$$

despejar x^2

$$x = \pm \frac{2}{3}\sqrt{9 + y^2}$$

factorizar 4 y extraer la raíz cuadrada

La gráfica de la ecuación $x = \frac{2}{3}\sqrt{9 + y^2}$ es la rama derecha de la hipérbola que se muestra en la figura 4 (y se repite en la figura 7), y la gráfica de $x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 + y^2}$ es la rama izquierda.

- (b) Despejamos y en términos de x como sigue:

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

dada

$$y^2 = \frac{9x^2 - 36}{4}$$

despejar y^2

$$y = \pm \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$$

factorizar 9 y extraer la raíz cuadrada

La gráfica de $y = \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$ es la mitad superior de las ramas derecha e izquierda, y la gráfica de $y = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$ es la mitad inferior de estas ramas.

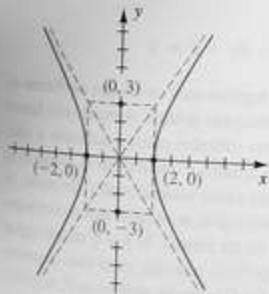
Como en el caso de las elipses, podemos usar traslaciones para trazar hipérbolas que tienen centro en algún punto $(h, k) \neq (0, 0)$. Esta técnica se ilustra en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 5 Trazado de una hipérbola con centro (h, k)

Analiza y traza la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0.$$

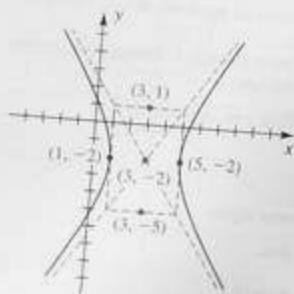
Figura 7



SOLUCIÓN Ordenamos nuestra tarea aplicando un procedimiento semejante al que usamos para las elipses en el ejemplo 5 de la sección precedente.

$$\begin{aligned} (9x^2 - 54x) + (-4y^2 - 16y) &= -29 && \text{agrupar términos} \\ 9(x^2 - 6x + __) - 4(y^2 + 4y + __) &= -29 && \text{factorizar } 9 \text{ y } -4 \\ 9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) &= -29 + 9 \cdot 9 - 4 \cdot 4 && \text{completar los cuadrados} \\ 9(x-3)^2 - 4(y+2)^2 &= 36 && \text{factorizar y simplificar} \\ \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} &= 1 && \text{dividir entre 36} \end{aligned}$$

Figura 8



La última ecuación indica que la hipérbola tiene centro $C(3, -2)$ con vértices y focos sobre la recta horizontal $y = -2$, ya que el término que contiene x es positivo. También sabemos que

$$a^2 = 4, \quad b^2 = 9 \quad \text{y} \quad c^2 = a^2 + b^2 = 13.$$

Por tanto,

$$a = 2, \quad b = 3 \quad \text{y} \quad c = \sqrt{13}.$$

Como se ilustra en la figura 8, los vértices son $(3 \pm 2, -2)$ es decir, $(5, -2)$ y $(1, -2)$. Los puntos extremos del eje conjugado son $(3, -2 \pm 3)$ es decir $(3, 1)$ y $(3, -5)$. Los focos son $(3 \pm \sqrt{13}, -2)$, y las ecuaciones de las asíntotas son $y + 2 = \pm \frac{3}{2}(x - 3)$.

Los resultados de las secciones 11.1 a 11.3 indican que la gráfica de toda ecuación de la forma

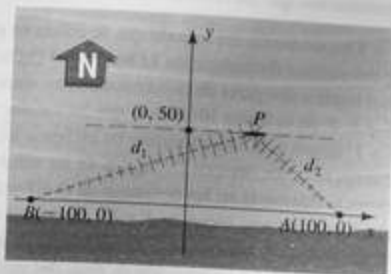
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica, excepto por ciertos casos degenerados en los que se obtiene un punto, una o dos rectas o no se obtiene ninguna gráfica. Aunque sólo hemos considerado ejemplos especiales, nuestros métodos pueden aplicarse a cualquiera de tales ecuaciones. Si A y C son iguales y distintas de 0, entonces la gráfica, cuando existe, es un círculo o, en casos excepcionales, un punto. Si A y C son diferentes, pero tienen el mismo signo, se obtiene una ecuación cónica, cuando existe, es una elipse (o un punto). Si A y C tienen signos opuestos, resulta una ecuación de una hipérbola o quizás, en el caso degenerado, dos rectas que se cortan. Si una de A o C (pero no ambas) es 0, la gráfica es una parábola o, en ciertos casos, un par de rectas paralelas.

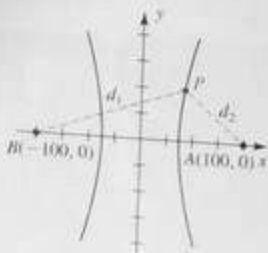
Terminaremos esta sección con una aplicación en la que intervienen hipérbolas.

EJEMPLO 6 Localización de un barco

La estación guardacostas A está a 200 millas directamente al este de otra estación B . Un barco navega a 50 millas al norte de la línea que une A y B , en forma paralela a ésta. Desde A y B se envían señales de radio a una velocidad de 980 pies/ μ s (microsegundo). Si, a la 1:00 p.m., la señal desde B llega al barco 400 microsegundos después que la señal desde A , localiza la posición del barco en ese instante.

Figura 9
(a)

(b)



SOLUCIÓN Introducimos un sistema coordenado como se muestra en la figura 9(a), con las estaciones en los puntos A y B sobre el eje x y el barco en P sobre la recta $y = 50$. Como a la 1:00 p.m. la llegada de la señal desde B requiere 400 microsegundos más que la llegada de la señal de A , la diferencia $d_1 - d_2$ en las distancias indicadas en ese instante es

$$d_1 - d_2 = (980)(400) = 392\,000 \text{ pies.}$$

Al dividir entre 5280 (pies/mi), obtenemos

$$d_1 - d_2 = \frac{392\,000}{5280} = 74.\overline{24} \text{ mi.}$$

A la 1:00 p.m., el punto P está sobre la rama derecha de una hipérbola cuya ecuación es $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ (figura 9(b)), que consiste de todos los puntos cuya diferencia en las distancias a los focos B y A es $d_1 - d_2$. Cuando obtuvimos la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, hicimos $d_1 - d_2 = 2a$, se concluye que, en la situación actual

$$a = \frac{74.\overline{24}}{2} = 37.\overline{12} \quad \text{y} \quad a^2 \approx 1378.$$

Como la distancia c del origen a cualquiera de los focos es 100,

$$b^2 = c^2 - a^2 = 10\,000 - 1378, \quad \text{o} \quad b^2 \approx 8622.$$

Por tanto, una ecuación (aproximada) para la hipérbola que tiene focos A y B , y pasa por P es

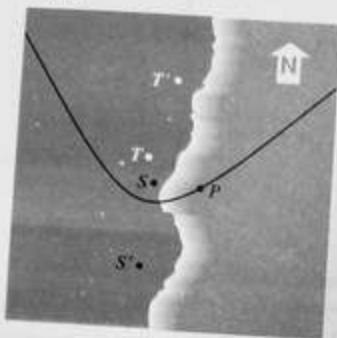
$$\frac{x^2}{1378} - \frac{y^2}{8622} = 1.$$

Si hacemos $y = 50$ (la coordenada y de P), obtenemos

$$\frac{x^2}{1378} - \frac{2500}{8622} = 1.$$

(continúa)

Figura 10

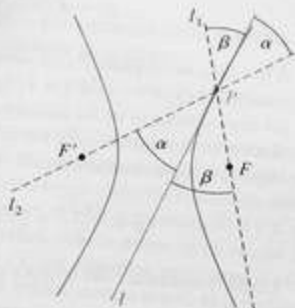


Al despejar x obtenemos $x = 42.16$. Al redondear hasta la milla más próxima, encontramos que las coordenadas de P son aproximadamente $(42, 50)$.

Una extensión del método que se utiliza en el ejemplo 6 constituye la base del sistema de navegación LORAN (del inglés *Long Range Navigation*), el cual implica dos pares de radiotransmisores, como los que están ubicados en T , T' y S , S' de la figura 10. Asume que las señales enviadas por los transmisores T y T' llegan a un radioreceptor en un barco localizado en algún punto P . La diferencia en los tiempos de llegada de las señales puede utilizarse para determinar la diferencia en las distancias de P a T y T' . Así, P está en una rama de una hipérbola con focos en T y T' . Al repetir este proceso para el otro par de transmisores, vemos que P también está en una rama de una hipérbola con focos en S y S' . La intersección de estas dos ramas determina la posición de P .

Una hipérbola posee una *propiedad reflexiva* semejante a la que tiene la elipse analizada en la sección anterior. Para ilustrar esta propiedad, sea l la tangente en un punto P de una hipérbola con focos F y F' , como se muestra en la figura 11. Si α es el ángulo agudo entre FP y l y si β es el ángulo agudo entre $F'P$ y l , puede demostrarse que $\alpha = \beta$. Si un rayo de luz se dirige a lo largo de la recta l_1 hacia F , se reflejará en P a lo largo de la recta l_2 hacia F' . Esta propiedad se usa para el diseño de telescopios del tipo de Cassegrain (consulta el ejercicio 64).

Figura 11



11.3 Ejercicios

Ejercicios 1 al 16: encuentra los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola. Traza la gráfica correspondiente, mostrando las asíntotas y los focos.

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

2. $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{16} = 1$

5. $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$

6. $y^2 - \frac{x^2}{15} = 1$

3. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

4. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$

7. $y^2 - 4x^2 = 16$

8. $x^2 - 2y^2 = 8$

9. $16x^2 - 36y^2 = 1$

10. $y^2 - 16x^2 = 1$

$$11 \frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$$

$$12 \frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

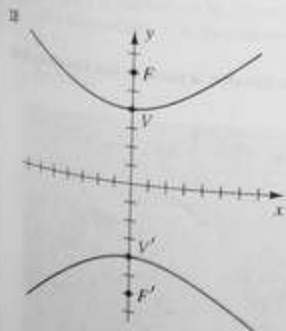
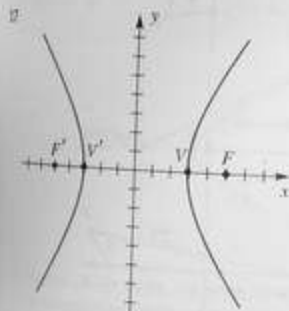
$$13 144x^2 - 25y^2 + 864x - 100y - 2404 = 0$$

$$14 y^2 - 4x^2 - 12y - 16x + 16 = 0$$

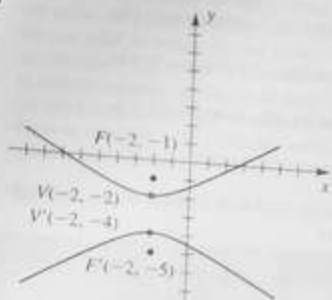
$$15 4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$$

$$16 25x^2 - 9y^2 + 100x - 54y + 10 = 0$$

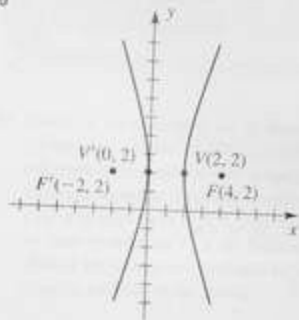
Ejercicios 17 al 20: encuentra una ecuación para la hipérbola que se muestra en la figura.



19



20



Ejercicios 21 al 32: halla una ecuación para la hipérbola que tiene su centro en el origen y satisface las condiciones dadas.

21 Focos $F(0, \pm 4)$, vértices $V(0, \pm 1)$

22 Focos $F(\pm 8, 0)$, vértices $V(\pm 5, 0)$

23 Focos $F(\pm 5, 0)$, vértices $V(\pm 3, 0)$

24 Focos $F(0, \pm 3)$, vértices $V(0, \pm 2)$

25 Focos $F(0, \pm 5)$, eje conjugado de longitud 4

26 Vértices $V(\pm 4, 0)$, pasa por $(8, 2)$

- 27 Vértices $V(\pm 3, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$
 28 Focos $F(0, \pm 10)$, asíntotas $y = \pm \frac{1}{3}x$
 29 Intersecciones $x \pm 5$, asíntotas $y = \pm 2x$
 30 Intersecciones $y \pm 2$, asíntotas $y = \pm \frac{1}{4}x$
 31 Eje transversal vertical de longitud 10, eje conjugado de longitud 14
 32 Eje transversal horizontal de longitud 6, eje conjugado de longitud 2

Ejercicios 33 al 42: identifica la gráfica de la ecuación como parábola (con eje horizontal o vertical), circunferencia, elipse o hipérbola.

- 33 $\frac{1}{2}(x+2) = y^2$
 34 $y^2 = \frac{16}{3} - x^2$
 35 $x^2 + 6x - y^2 = 7$
 36 $x^2 + 4x + 4y^2 - 24y = -36$
 37 $-x^2 = y^2 - 25$
 38 $x = 2x^2 - y + 4$
 39 $4x^2 - 16x + 9y^2 + 36y = -16$
 40 $x + 4 = y^2 + y$
 41 $x^2 + 3x = 3y - 6$
 42 $9x^2 - y^2 = 10 - 2y$

Ejercicios 43 y 44: encuentra los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones. Traza ambas gráficas en el mismo plano coordenado y muestra los puntos de intersección.

$$43 \begin{cases} y^2 - 4x^2 = 16 \\ y - x = 4 \end{cases} \quad 44 \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Ejercicios 45 al 48: encuentra una ecuación para el conjunto de puntos en un plano xy tal que la diferencia de las distancias a F y F' sea k .

45 $F(13, 0)$, $F'(-13, 0)$; $k = 24$

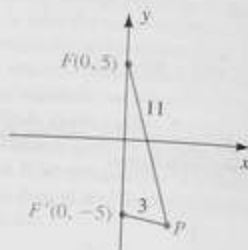
46 $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$; $k = 8$

47 $F(0, 10)$, $F'(0, -10)$; $k = 16$

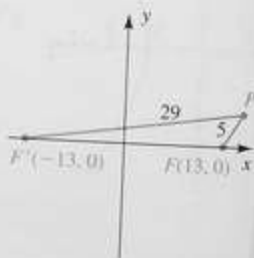
48 $F(0, 17)$, $F'(0, -17)$; $k = 30$

Ejercicios 49 y 50: encuentra una ecuación para la hipérbola cuyos focos son F y F' y que pasa por P . Traza la hipérbola.

49



50



Ejercicios 51 al 58: describe la parte de una hipérbola dada por la ecuación.

51 $x = \frac{1}{4}\sqrt{y^2 + 16}$

52 $x = -\frac{1}{4}\sqrt{y^2 + 16}$

53 $y = \frac{1}{7}\sqrt{x^2 + 49}$

54 $y = -\frac{1}{7}\sqrt{x^2 + 49}$

55 $y = -\frac{9}{4}\sqrt{x^2 - 16}$

56 $y = \frac{9}{4}\sqrt{x^2 - 16}$

57 $x = -\frac{2}{3}\sqrt{y^2 - 36}$

58 $x = \frac{2}{3}\sqrt{y^2 - 36}$

- 59 Las gráficas de las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

se denominan *hipérbolas conjugadas*. Traza las gráficas de ambas ecuaciones en el mismo plano coordenado, con $a = 5$, $b = 3$, y describe las relaciones entre las dos gráficas.

- 60 Encuentra una ecuación de la hipérbola con focos $(h \pm c, k)$ y vértices $(h \pm a, k)$, donde $0 < a < c$. y $c^2 = a^2 + b^2$.

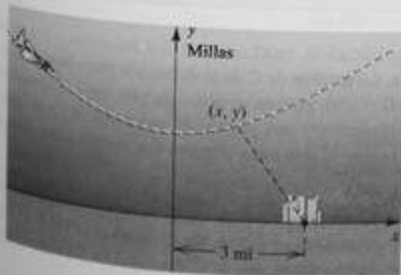
- 61 Partículas alfa En 1911, el físico Ernest Rutherford (1871-1937) descubrió que si se disparan partículas alfa hacia el núcleo de un átomo, terminan siendo rechazadas por éste en trayectorias hiperbólicas. En la figura se ilustra la trayectoria de una partícula que empieza hacia el origen a lo largo de la recta $y = \frac{1}{2}x$ y llega hasta menos de 3 unidades del núcleo. Encuentra la ecuación de la trayectoria.

Ejercicio 61



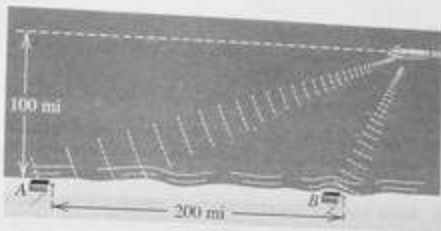
- 62 Manobra de un avión. Un avión se desplaza a lo largo de la trayectoria hiperbólica que se ilustra en la figura. Si una ecuación de la trayectoria es $2y^2 - x^2 = 8$, determina cuán cerca llega el avión a una ciudad ubicada en $(3, 0)$. (Sugerencia: Sea S el cuadrado de la distancia de un punto (x, y) sobre la trayectoria a $(3, 0)$, y encuentra el valor mínimo de S .)

Ejercicio 62



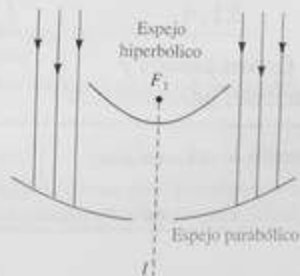
- 63 Localización de un barco. Un barco navega con un curso a 100 millas de, y paralelo a, una costa recta. El barco envía una señal de peligro la cual reciben dos estaciones guardacostas A y B, situadas a 200 millas de distancia entre sí, como se muestra en la figura. Al medir la diferencia en los tiempos de recepción de la señal, se determina que el barco se encuentra a 160 millas más cerca de B que de A. ¿Dónde está el barco?

Ejercicio 63



- 64 Diseño de un telescopio. En el diseño del telescopio de Cassegrain (que data de 1672) se aplican las propiedades reflexivas de la parábola y de la hipérbola. En la figura se muestran un espejo parabólico (separado), con foco en F_1 y eje a lo largo de la recta l , y un espejo hiperbólico, con un foco también en F_1 y eje transversal a lo largo de l . ¿Dónde terminan por encontrarse las ondas luminosas incidentes paralelas al eje común?

Ejercicio 64



- Ejercicios 65 y 66: grafica las hipérbolas en el mismo plano coordenado y estima su punto de intersección en el primer cuadrante.

65 $\frac{(y - 0.1)^2}{1.6} - \frac{(x + 0.2)^2}{0.5} = 1;$

$\frac{(y - 0.5)^2}{2.7} - \frac{(x - 0.1)^2}{5.3} = 1$

$$66 \quad \frac{(x-0.1)^2}{0.12} - \frac{y^2}{0.1} = 1; \quad \frac{x^2}{0.9} - \frac{(y-0.3)^2}{2.1} = 1$$

Ejercicios 67 y 68: grafica las hipérbolas en el mismo plano coordenado y determina el número de puntos de intersección.

$$67 \quad \frac{(x-0.3)^2}{1.3} - \frac{y^2}{2.7} = 1; \quad \frac{y^2}{2.8} - \frac{(x-0.2)^2}{1.2} = 1$$

$$68 \quad \frac{(x+0.2)^2}{1.75} - \frac{(y-0.5)^2}{1.6} = 1;$$

$$\frac{(x-0.6)^2}{2.2} - \frac{(y+0.4)^2}{2.35} = 1$$

- 69 **Trayectoria de un cometa** Los cometas pueden desplazarse en trayectorias elípticas, parabólicas o hiperbólicas alrededor del Sol. Si un cometa viaja a lo largo de una trayectoria parabólica o hiperbólica, pasa por el Sol una vez y nunca vuelve. Asume que las coordenadas de un cometa en millas pueden describirse por la ecuación

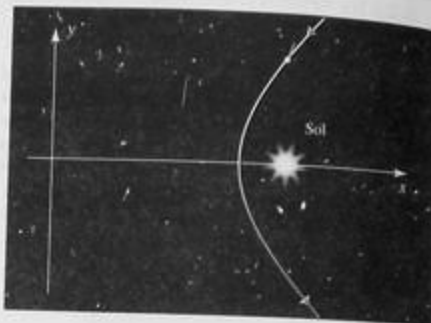
$$\frac{x^2}{26 \times 10^{14}} - \frac{y^2}{18 \times 10^{14}} = 1 \quad \text{para } x > 0,$$

donde el Sol está localizado en el foco, como se muestra en la figura.

- (a) Calcula las coordenadas del Sol.

- (b) Para que el cometa mantenga una trayectoria hiperbólica, la velocidad mínima del cometa v , en metros por segundo, debe satisfacer $v > \sqrt{2k/r}$, donde r es la distancia entre el cometa y el centro del Sol en metros $k = 1.325 \times 10^{20}$ es una constante. Determina v cuando r es mínima.

Ejercicio 69



11.4

Curvas planas y ecuaciones paramétricas

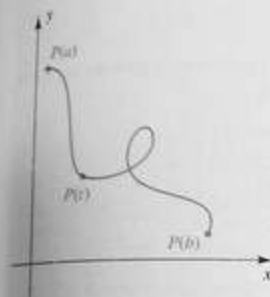
Si f es una función, a menudo se denomina *curva plana* a la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Sin embargo, esta definición es restrictiva porque excluye muchas gráficas útiles. La siguiente definición es más general.

Definición de una curva plana

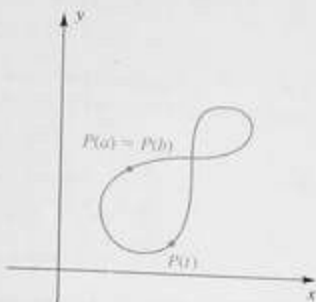
Una **curva plana** es un conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$, donde f y g son funciones definidas en un intervalo I .

Con fines de simplificación, muchas veces nos referimos a una curva plana como una **curva**. La gráfica de C de la definición precedente consiste de todos los puntos $P(t) = (f(t), g(t))$ en un plano xy , para t en I . Utilizaremos el término *curva* indistintamente con *gráfica de una curva*. A veces consideramos el punto $P(t)$ como el que traza la curva C a medida que t varía en el intervalo I .

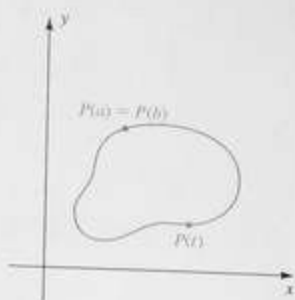
En la figura 1 aparecen las gráficas de varias curvas, donde I es un intervalo cerrado $[a, b]$, es decir, $a \leq t \leq b$. En la figura (a) $P(a) \neq P(b)$ y $P(a)$ y $P(b)$ se llaman **puntos extremos** de C . La curva en (a) se corta a sí

figura 1
(a) Curva.

(b) Curva cerrada



(c) Curva cerrada simple



misma, esto es, dos valores diferentes de t producen el mismo punto. Si $P(a) = P(b)$, como en la figura 1(b), entonces C es una **curva cerrada**. Si $P(a) = P(b)$ y C no se corta a sí misma en ningún otro punto, como en la figura 1(c), entonces C es una **curva cerrada simple**.

En la definición que sigue se da una forma conveniente de representar curvas.

Definición de ecuaciones paramétricas

Sea C la curva formada por todos los pares ordenados $(f(t), g(t))$, donde f y g están definidas en un intervalo I . Las ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

para t en I , son **ecuaciones paramétricas** para C con **parámetro t** .

La curva C en esta definición se conoce como **curva parametrizada**, y las ecuaciones paramétricas son una **parametrización** para C . Con frecuencia utilizamos la notación

$$x = f(t), \quad y = g(t); \quad t \text{ en } I,$$

para indicar el dominio I de f y g . Podemos referirnos a estas ecuaciones como la **ecuación en x** y la **ecuación en y** .

A veces puede ser posible eliminar el parámetro y obtener una ecuación conocida en x y en y para C . En casos sencillos podemos trazar una gráfica de una curva parametrizada si localizamos puntos y los enlazamos en orden de t creciente, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 1** Trazado de la gráfica de una curva parametrizada

Traza la gráfica de la curva C que tiene la parametrización

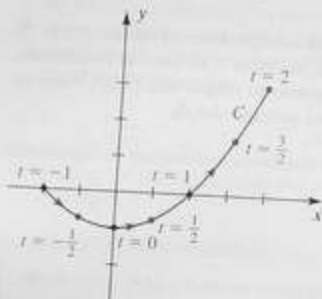
$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1; \quad -1 \leq t \leq 2.$$

SOLUCIÓN Utilizamos las ecuaciones paramétricas para tabular coordenadas de puntos $P(x, y)$ en C , como sigue

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

Figura 2

$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1; \quad -1 \leq t \leq 2$$



Localizar puntos lleva al trazo de la figura 2. Las puntas de la flecha de la gráfica indican la dirección en que $P(x, y)$ traza la curva a medida que t aumenta de -1 a 2 .

Podemos obtener una descripción más conocida de la gráfica si eliminamos el parámetro. Al despejar t de la primera ecuación paramétrica, obtenemos $t = \frac{1}{2}x$. Si se sustituye esta expresión por t en la segunda ecuación resulta

$$y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 1.$$

La gráfica de esta ecuación en x y y es una parábola simétrica con respecto al eje y con vértice $(0, -1)$. Sin embargo, como $x = 2t$ y $-1 \leq t \leq 2$, vemos que $-2 \leq x \leq 4$ para puntos (x, y) en C y, por tanto, C es la parte de la parábola entre los puntos $(-2, 0)$ y $(4, 3)$ que aparecen en la figura 2.

Como está indicado por las puntas de la flecha de la figura 2, el punto $P(x, y)$ traza la curva C de izquierda a derecha a medida que t aumenta. Las ecuaciones paramétricas

$$x = -2t, \quad y = t^2 - 1; \quad -2 \leq t \leq 1,$$

nos dan la misma gráfica; pero, a medida que t aumenta, $P(x, y)$ traza la curva de derecha a izquierda. Para otras parametrizaciones, el punto $P(x, y)$ puede oscilar en un sentido y en otro a medida que t aumenta.

La **orientación** de una curva parametrizada C es la dirección determinada por valores crecientes del parámetro. Con frecuencia indicamos una orientación poniendo puntas de flecha en C , como en la figura 2. Si $P(x, y)$ se mueve en uno y otro sentido a medida que t aumenta, podemos poner flechas a lo largo de C .

Como hemos observado, una curva puede tener orientaciones diferentes, dependiendo de la parametrización. Para ilustrar esto, la curva C del ejemplo 1 está dada paramétricamente por cualquiera de las siguientes ecuaciones:

$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1; \quad -1 \leq t \leq 2$$

$$x = t, \quad y = \frac{1}{4}t^2 - 1; \quad -2 \leq t \leq 4$$

$$x = t^3, \quad y = \frac{1}{4}t^6 - 1; \quad \sqrt[3]{-2} \leq t \leq \sqrt[3]{4}$$

Ejemplo 2 Trazado de gráficas en modo paramétrico

Traza la gráfica de la curva C que tiene la parametrización

$$x = t^2 - 3, y = 3t; -4 \leq t \leq 4.$$

SOLUCIÓN

TI-83 Plus

Establece el modo paramétrico

MODE ∇ (3 times) \rightarrow ENTER

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connect Dot
Sequential Simul
Real a+b/c re^et
2D Horiz G-T
```

Asigna las ecuaciones

Y= ∇ X,T,θ,n ∇ x² - 3 ∇ 3 ∇ X,T,θ,n ∇

```
Plot1 Plot2 Plot3
X1T BT-3
Y1T BT
X2T =
Y2T =
X3T =
Y3T =
X4T =
```

TI-862nd MODE ∇ (4 times) \rightarrow \rightarrow ENTER

```
Normal Sci Eng
Float 012345678901
Radian Degree
Angle PolarC
Func Pol Seq DifEq
Vec Bin Oct Hex
Recall CylD SpherU
dNDer dXNDer
```

GRAPH E(t)=(F1) (F1) x² - 3 ∇ 3 (F1) ∇

```
Plot1 Plot2 Plot3
X1T BT-3
Y1T BT
X2T =
Y2T =
FOCUS HIND ZOOM TRACE GRAB
F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7 F8
```

(El subíndice 1T en X y Y indica que X_{1T} y Y_{1T} representan el primer par de ecuaciones paramétricas.)

Al graficar ecuaciones paramétricas, es necesario asignar los valores mínimo (Tmin) y máximo (Tmax) al parámetro t , además de hacerlo a las dimensiones de la pantalla. También necesitamos seleccionar un incremento, o valor de paso (Tstep), para t . Un valor típico para Tstep es 0.1. Si se elige un valor menor para Tstep, aumenta la precisión de la gráfica, pero también aumenta la cantidad de tiempo necesario para trazarla.

Asigna valores a la pantalla

WINDOW -4 ∇ 4 ∇ .1 ∇ -4 ∇ 15 ∇ 5 ∇ -15 ∇ 15 ∇ 5

```
WINDOW
tMin=-4
tMax=4
tStep=.1
xMin=-4
xMax=15
yMin=-15
yMax=15
ySc1=5
```

2nd WINDOW(M2) -4 ∇ 4 ∇ .1 ∇ -4 ∇ 15 ∇ 5 ∇ -15 ∇ 15 ∇ 5

```
WINDOW
tMin=-4
tMax=4
tStep=.1
xMin=-4
xMax=15
yMin=-15
yMax=15
ySc1=5
FOCUS HIND ZOOM TRACE GRAB
```

(continúa)

Observa que en este ejemplo podemos interpretar t geométricamente como la medida en radianes del ángulo generado por el segmento de recta OP .

Valores seno y coseno en la circunferencia unitaria

Contraponiendo el último ejemplo, puedes usar ecuaciones paramétricas como ayuda para aprender y recordar valores de las funciones de seno y coseno. Fija la calculadora en los siguientes modos: Degree, Par(amétrico) y Dot. Haz las asignaciones de función $\cos(T)$ a X_{1T} y $\sin(T)$ a X_{2T} . Luego asigna 0 a T_{\min} , 360 a T_{\max} y 15 a T_{step} . Grafica en la pantalla $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. El uso de las teclas de modo *trace* y *cursor* revela muchos valores conocidos en la circunferencia unitaria.

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Not
Sequential Simul
Real a/bi re^θi
2/DI Horiz G-T
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
X1T=cos(T)
Y1T=sin(T)
X2T=
Y2T=
X3T=
Y3T=
X4T=
```

```
WINDOW
Tmin=0
Tmax=360
Tstep=15
Xmin=-3
Xmax=3
Xscl=1
Ymin=-2
```



EJEMPLO 4 Trazado de la gráfica de una curva parametrizada

Traza la gráfica de la curva C que tiene la parametrización

$$x = -2 + t^2, \quad y = 1 + 2t^2, \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

e indica la orientación.

SOLUCIÓN Para eliminar el parámetro, usamos la primera ecuación para obtener $t^2 = x + 2$ y luego sustituimos por t^2 en la segunda ecuación. Entonces,

$$y = 1 + 2(x + 2).$$

La gráfica de la última ecuación es la línea con pendiente 2 que pasa por el punto $(-2, 1)$, como se indica mediante la línea interrumpida de la figura 4(a). Sin embargo, como $t^2 \geq 0$, a partir de las ecuaciones paramétricas para C vemos que

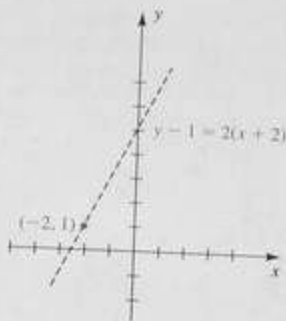
$$x = -2 + t^2 \geq -2 \quad \text{y} \quad y = 1 + 2t^2 \geq 1.$$

Por tanto, la gráfica C es la parte de la línea a la derecha de $(-2, 1)$ (el punto correspondiente a $t = 0$), como se muestra en la figura 4(b). La orientación está indicada por las flechas a lo largo de C . A medida que t aumenta en el intervalo $(-\infty, 0]$, $P(x, y)$ baja por la curva hacia el punto $(-2, 1)$. A medida que t aumenta en $[0, \infty)$, $P(x, y)$ sube por la curva alejándose de $(-2, 1)$.

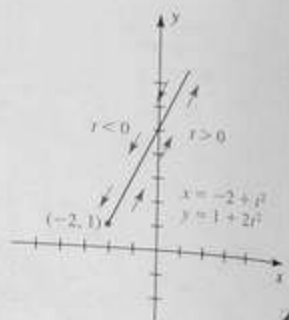
(continúa)

Figura 4.

(a)



(b)



Si una curva C está descrita por una ecuación $y = f(x)$ para alguna función f , entonces una forma fácil de obtener ecuaciones paramétricas para C es hacer

$$x = t, \quad y = f(t),$$

donde t está en el dominio de f . Por ejemplo, si $y = x^3$, entonces las ecuaciones paramétricas son

$$x = t, \quad y = t^3; \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Podemos usar muchas sustituciones diferentes para x , siempre que a medida que t varíe en algún intervalo, x tome todos los valores del dominio de f . Entonces, la gráfica de $y = x^3$ también está dada por

$$x = t^{1/3}, \quad y = t, \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Observa, sin embargo, que las ecuaciones paramétricas

$$x = \sin t, \quad y = \sin^3 t; \quad t \text{ en } \mathbb{R},$$

dan sólo parte de la gráfica de $y = x^3$ entre los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.



EJEMPLO 5 Búsqueda de ecuaciones paramétricas para una recta

Encuentra tres parametrizaciones de la recta de pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) .

SOLUCIÓN Por la forma de punto pendiente, una ecuación para la recta es

$$y - y_1 = m(x - x_1). \quad (*)$$

Si hacemos $x = t$, entonces $y - y_1 = m(t - x_1)$ y obtenemos la parametrización

$$x = t, \quad y = y_1 + m(t - x_1); \quad t \in \mathbb{R}.$$

Obtenemos otra parametrización para la recta si hacemos $x - x_1 = t$ en (*). En este caso $y - y_1 = mt$, y tenemos

$$x = x_1 + t, \quad y = y_1 + mt; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como tercera ilustración, si hacemos $x - x_1 = \tan t$ en (*), entonces

$$x = x_1 + \tan t, \quad y = y_1 + m \tan t; \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Hay muchas más parametrizaciones para la recta.

En el siguiente ejemplo, usamos ecuaciones paramétricas para modelar la trayectoria de un proyectil (objeto). Estas ecuaciones se desarrollan por medio de métodos físicos y de cálculo. Suponemos que el objeto se mueve cerca de la superficie terrestre sólo bajo el efecto de la gravedad; es decir, la resistencia del aire y otras fuerzas que pueden afectar la aceleración son despreciables. También suponemos que el suelo está a nivel y que la curvatura de la Tierra no es un factor en la determinación de la trayectoria del objeto.

EJEMPLO 6 Trayectoria de un proyectil

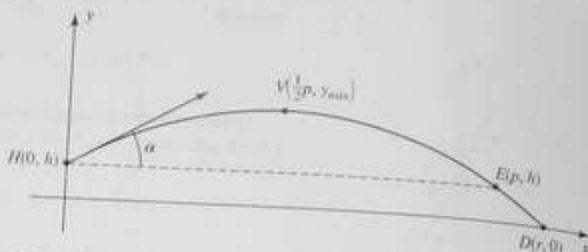
La trayectoria de un proyectil en el instante t puede modelarse usando las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = (s \cos \alpha)t, \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (s \sin \alpha)t + h; \quad t \geq 0, \quad (1)$$

donde, en $t = 0$, s es la velocidad del proyectil en pies/s, α es el ángulo que la trayectoria hace con la horizontal y h es la altura en pies. La aceleración debida a la gravedad es $g = 32$ pies/s². Supón que el proyectil se lanza a una velocidad de 1024 pies/s a un ángulo de 30° con respecto a la horizontal desde una altura de 2304 pies (figura 5).

- Encuentra las ecuaciones paramétricas para el proyectil.
- Determina el alcance r del proyectil; es decir, la distancia horizontal que recorre antes de tocar tierra.
- Halla una ecuación en x y y para el proyectil.
- Encuentra el punto y el tiempo en que el proyectil alcanza su altura máxima.

Figura 5



SOLUCIÓN

(a) Al sustituir 1024 por x , 30° por α , 32 por g y 2304 por h en las ecuaciones paramétricas de (1) se obtiene

$$x = (1024 \cos 30^\circ)t, \quad y = -\frac{1}{2}(32)t^2 + (1024 \sin 30^\circ)t + 2304; \quad t \geq 0.$$

Al simplificar, obtenemos

$$x = 512\sqrt{3}t, \quad y = -16t^2 + 512t + 2304; \quad t \geq 0. \quad (2)$$

(b) Para encontrar el alcance r del proyectil, debemos determinar el punto D (figura 5) en que el proyectil toca tierra. Como la coordenada y de D es 0, hacemos $y = 0$ en (2) y despejamos t :

$$\begin{aligned} y &= -16t^2 + 512t + 2304 && \text{dada en (2)} \\ 0 &= -16t^2 + 512t + 2304 && \text{sea } y = 0 \\ 0 &= t^2 - 32t - 144 && \text{dividimos entre } -16 \\ 0 &= (t - 36)(t + 4) && \text{factorizar} \end{aligned}$$

Como $t \geq 0$ debemos tener $t = 36$ s. Ahora usamos la ecuación en x de (2) para obtener el alcance:

$$x = 512\sqrt{3}t = 512\sqrt{3}(36) = 18\,432\sqrt{3} \approx 31\,925 \text{ pies}$$

(c) Para eliminar el parámetro t , despejamos t en la ecuación en x de (2) y sustituimos esta expresión para t en (2):

$$x = 512\sqrt{3}t \quad \text{implica} \quad t = \frac{x}{512\sqrt{3}} \quad \begin{array}{l} \text{despejar } t \text{ en la ecuación} \\ \text{en (2). } x \end{array}$$

$$y = -16t^2 + 512t + 2304 \quad \text{ecuación } y \text{ en (2)}$$

$$y = -16\left(\frac{x}{512\sqrt{3}}\right)^2 + 512\left(\frac{x}{512\sqrt{3}}\right) + 2304 \quad \text{sea } t = \frac{x}{512\sqrt{3}}$$

$$y = -\frac{1}{49\,152}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2304 \quad \text{simplificar} \quad (3)$$

La última ecuación es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, lo que demuestra que la trayectoria del proyectil es parabólica.

(d) La coordenada y del punto E , en la figura 5, es 2304, de modo que podemos encontrar el valor de t en E al resolver la ecuación $y = 2304$:

$$\begin{array}{ll} y = -16t^2 + 512t + 2304 & \text{dada en (2)} \\ 2304 = -16t^2 + 512t + 2304 & \text{sea } y = 2304 \\ 0 = -16t^2 + 512t & \text{restar 2304} \\ 0 = -16t(t - 32) & \text{factorizar} \end{array}$$

De modo que si $y = 2304$, $t = 0$ o $t = 32$. Como la trayectoria es parabólica, la coordenada x de V es la mitad de la coordenada p de E ; además, el valor de t en V es la mitad del valor de t en E , así que $t = \frac{1}{2}(32) = 16$ en V . Podemos encontrar los valores x y y en V al sustituir 16 por t en (2):

$$x = 512\sqrt{3}t = 512\sqrt{3}(16) = 8192\sqrt{3} \approx 14\,189 \text{ pies,}$$

y

$$y = -16t^2 + 512t + 2304 = -16(16)^2 + 512(16) + 2304 = 6400 \text{ pies.}$$

Por tanto, el proyectil alcanza su altura máxima cuando $t = 16$ aproximadamente en (14 189 6400).

La altura máxima también puede encontrarse aplicando el teorema para localizar el vértice de una parábola, a fin de encontrar el valor x ($x = -b/(2a)$) del punto más alto en la gráfica de la ecuación (3) y luego usar las ecuaciones en (2) para encontrar t y y .

Los ejercicios de análisis 7 y 8, al final del capítulo, se relacionan con el ejemplo 6.

Las ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = a \sin \omega_1 t, \quad y = b \cos \omega_2 t; \quad t \geq 0,$$

donde a , b , ω_1 y ω_2 son constantes, se presentan en teoría eléctrica. Las variables x y y suelen representar voltajes o corrientes en el tiempo t . La curva resultante es a veces difícil de trazar; pero, usando un osciloscopio y aplicando voltajes o corrientes en las terminales de entrada, podemos representar la gráfica, una **figura de Lissajous**, en la pantalla del osciloscopio. Los graficadores son muy útiles para obtener estas gráficas complicadas.



EJEMPLO 7 Graficación de una figura de Lissajous

Traza la gráfica de la figura de Lissajous que tiene la parametrización

$$x = \sin 2t, \quad y = \cos t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Determina los valores de t que corresponden a la curva en cada cuadrante.

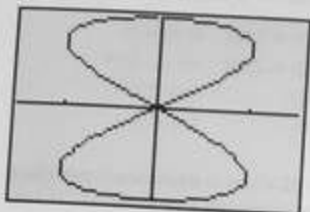
SOLUCIÓN Necesitamos primeramente fijar nuestra graficadora en un modo paramétrico y, a continuación, hacemos las asignaciones

$$X_{IT} = \sin 2t \quad y \quad Y_{IT} = \cos t.$$

(continúa)

Figura 6

[-1.5, 1.5] por [-1, 1]



Para este ejemplo, usamos $T_{\min} = 0$, $T_{\max} = 2\pi$ y $T_{\text{step}} = 0.1$. Como x y y están entre -1 y 1 , asignamos -1 a Y_{\min} y 1 a Y_{\max} . Para mantener nuestra proporción de pantalla de 3:2, seleccionamos -1.5 para X_{\min} y 1.5 para X_{\max} , y luego graficamos X_{17} y Y_{17} para obtener la figura de Lissajous de la figura 6.

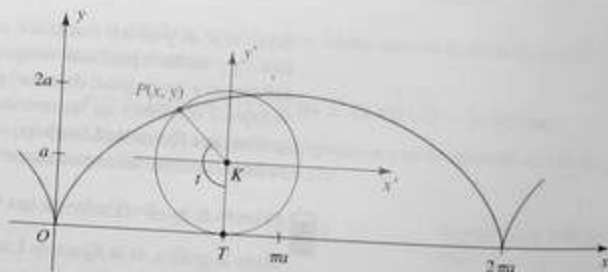
Al referirnos a las ecuaciones paramétricas, vemos que a medida que t aumenta de 0 a $\pi/2$, el punto $P(x, y)$ arranca en $(0, 1)$ y traza la parte de la curva en el primer cuadrante (generalmente en la dirección de giro de las manecillas de un reloj). A medida que t aumenta de $\pi/2$ a π , $P(x, y)$ traza la parte en el tercer cuadrante (en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj). Para $\pi < t < 3\pi/2$, obtenemos la parte del cuarto cuadrante; y $3\pi/2 < t < 2\pi$ nos da la parte del segundo cuadrante.

EJEMPLO 8 Búsqueda de ecuaciones paramétricas para una cicloide

La curva trazada por un punto fijo P en la circunferencia de un círculo que rueda a lo largo de una recta en un plano, se llama **cicloide**. Encuentra las ecuaciones paramétricas para una cicloide.

SOLUCIÓN Supongamos que el círculo tiene radio a y que gira a lo largo (y arriba) del eje x en la dirección positiva. Si una posición de P es el origen, entonces la figura 7 muestra parte de la curva y una posible posición del círculo. La parte en forma de V de la curva en $x = 2\pi a$ se llama **cúspide**.

Figura 7



Denotemos por K el centro del círculo y T el punto de tangencia con el eje x . Introducimos, como parámetro t , la medida en radianes del ángulo TKP . La distancia que el círculo ha girado es $d(O, T) = at$ (fórmula para la longitud de un arco circular). Consecuentemente, las coordenadas de K son $(x, y) = (at, a)$. Si consideramos un sistema de coordenadas $x'y'$ denota el

punto P relativo a este sistema, entonces, al sumar $P(x', y')$ con origen en $K(at, a)$ y si x' y y' a las coordenadas x y y de K , obtenemos

$$x = at + x', \quad y = a + y'.$$

Si, como en la figura 8, θ denota un ángulo en posición estándar en el plano $x'y'$ entonces $\theta + t = 3\pi/2$ o bien lo que es equivalente, $\theta = (3\pi/2) - t$. Por tanto,

$$x' = a \cos \theta = a \cos \left(\frac{3\pi}{2} - t \right) = -a \sin t$$

$$y' = a \sin \theta = a \sin \left(\frac{3\pi}{2} - t \right) = -a \cos t$$

y la sustitución en $x = at + x'$, $y = a + y'$ nos da las ecuaciones paramétricas para la cicloide:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t); \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $a < 0$, entonces la gráfica de $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ es la cicloide invertida que resulta si el círculo del ejemplo 8 gira *abajo* del eje x . Esta curva tiene varias propiedades físicas importantes. Para ilustrar esto, supongamos que un alambre delgado pasa por dos puntos fijos A y B , como se muestra en la figura 9, y que la forma del alambre se puede cambiar doblándolo de cualquier manera. Supongamos, además, que se deja deslizar una cuentecilla a lo largo del alambre y que la única fuerza que actúa sobre la cuentecilla es la gravedad. Ahora preguntamos cuál de todas las posibles trayectorias dejará que la cuentecilla se deslice de A a B en el menor tiempo posible. Es natural pensar que la trayectoria deseada es el segmento de línea recta de A a B ; sin embargo, ésta no es la respuesta correcta. La trayectoria que requiere el mínimo tiempo coincide con la gráfica de una cicloide invertida con A en el origen. Debido a que la velocidad de la cuentecilla aumenta más rápidamente a lo largo de la cicloide que a lo largo de la recta que pasa por A y B , la cuentecilla llega a B más rápidamente, aun cuando la distancia sea mayor.

Hay otra propiedad interesante de esta **curva de mínimo descenso**. Supongamos que A es el origen y B es el punto con coordenada x de π/a , es decir, el punto más bajo en la cicloide en el primer arco a la derecha de A . Si la cuentecilla se suelta en *cualquier* punto entre A y B , se puede demostrar que el tiempo necesario para que llegue a B es siempre *el mismo*.

Las variaciones de la cicloide se presentan en aplicaciones. Por ejemplo, si la rueda de una motocicleta gira a lo largo de un camino recto, entonces la curva trazada por un punto fijo en uno de los rayos es una curva semejante a una cicloide. En este caso la curva no tiene cúspides, ni interseca el camino (el eje x) como lo hace la gráfica de una cicloide. Si la rueda de un tren gira a lo largo de un vía de ferrocarril, entonces la curva trazada por un punto fijo de la circunferencia de la rueda (que se extiende debajo de la vía) contiene espiras a intervalos regulares. Otras cicloides se definen en los ejercicios 45 y 46.

Figura 8

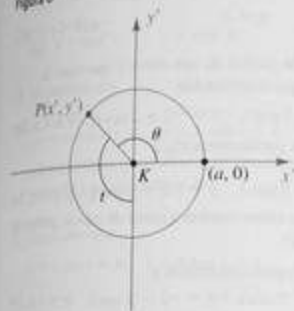


Figura 9



11.4 Ejercicios

Ejercicios 1 al 22: encuentra una ecuación en x y y cuya gráfica contenga los puntos en la curva C . Traza la gráfica de C e indica la orientación.

$$1. x = t - 2, \quad y = 2t + 3; \quad 0 \leq t \leq 5$$

$$2. x = 1 - 2t, \quad y = 1 + t; \quad -1 \leq t \leq 4$$

$$3. x = t^2 + 1, \quad y = t^2 - 1; \quad -2 \leq t \leq 2$$

$$4. x = t^3 + 1, \quad y = t^3 - 1; \quad -2 \leq t \leq 2$$

$$5. x = 4t^2 - 5, \quad y = 2t + 3; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$6. x = t^3, \quad y = t^2; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$7. x = e^t, \quad y = e^{-2t}; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$8. x = \sqrt{t}, \quad y = 3t + 4; \quad t \geq 0$$

$$9. x = 2 \sin t, \quad y = 3 \cos t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$10. x = \cos t - 2, \quad y = \sin t + 3; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$11. x = \sec t, \quad y = \tan t; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$$

$$12. x = \cos 2t, \quad y = \sin t; \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$13. x = t^2, \quad y = 2 \ln t; \quad t > 0$$

$$14. x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$15. x = \sin t, \quad y = \csc t; \quad 0 < t \leq \pi/2$$

$$16. x = e^t, \quad y = e^{-t}; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$17. x = t, \quad y = \sqrt{t^2 - 1}; \quad |t| \geq 1$$

$$18. x = -2\sqrt{1 - t^2}, \quad y = t; \quad |t| \leq 1$$

$$19. x = t, \quad y = \sqrt{t^2 - 2t + 1}; \quad 0 \leq t \leq 4$$

$$20. x = 2t, \quad y = 8t^3; \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$21. x = (t + 1)^3, \quad y = (t + 2)^2; \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$22. x = \tan t, \quad y = 1; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$$

23. (a) Describe la gráfica de una curva C que tiene la siguiente parametrización

$$x = 3 + 2 \sin t, \quad y = -2 + 2 \cos t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(b) Cambia la parametrización a

$$x = 3 - 2 \sin t, \quad y = -2 + 2 \cos t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

y describe cómo cambia a causa de esto la gráfica de la parte (a).

(c) Cambia la parametrización a

$$x = 3 - 2 \sin t, \quad y = -2 - 2 \cos t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

y describe cómo cambia a causa de esto la gráfica de la parte (a).

24. (a) Describe la gráfica de una curva C que tiene la siguiente parametrización

$$x = -2 + 3 \sin t, \quad y = 3 - 3 \cos t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(b) Cambia la parametrización a

$$x = -2 - 3 \sin t, \quad y = 3 + 3 \cos t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

y describe cómo cambia a causa de esto la gráfica de la parte (a).

(c) Cambia la parametrización a

$$x = -2 + 3 \sin t, \quad y = 3 + 3 \cos t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

y describe cómo cambia a causa de esto la gráfica de la parte (a).

Ejercicios 25 y 26: las curvas C_1 , C_2 , C_3 y C_4 están dadas paramétricamente para t en \mathbb{R} . Traza sus gráficas e indica las orientaciones.

$$25. C_1: x = t^2, \quad y = t$$

$$C_2: x = t^4, \quad y = t^2$$

$$C_3: x = \sin^2 t, \quad y = \sin t$$

$$C_4: x = e^{2t}, \quad y = -e^t$$

$$26. C_1: x = t, \quad y = 1 - t$$

$$C_2: x = 1 - t^2, \quad y = t^2$$

$$C_3: x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t$$

$$C_4: x = \ln t - t, \quad y = 1 + t - \ln t; \quad t > 0$$

Ejercicios 27 y 28: las ecuaciones paramétricas especifican la posición de un punto móvil $P(x, y)$ en el tiempo t . Traza la gráfica e indica el movimiento de P a medida que t aumenta.

$$27. (a) x = \cos t, \quad y = \sin t; \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$(b) \quad x = \sec t, \quad y = \cos t; \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$(c) \quad x = t, \quad y = \sqrt{1-t^2}; \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$38. (d) \quad x = t^2, \quad y = 1 - t^2; \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(e) \quad x = 1 - \ln t, \quad y = \ln t; \quad 1 \leq t \leq e$$

$$(f) \quad x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

39. Demuestra que

$$x = a \cos t + h, \quad y = b \sin t + k; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

son ecuaciones paramétricas de una elipse con centro (h, k) y ejes de longitudes $2a$ y $2b$.

40. Demuestra que

$$x = a \sec t + h, \quad y = b \tan t + k;$$

$$-\pi/2 < t < \pi/2 \text{ y } t \neq \pi/2$$

son ecuaciones paramétricas de una hipérbola con centro (h, k) , eje transversal de longitud $2a$ y eje conjugado de longitud $2b$. Determina los valores de t para cada rama.

Ejercicios 31 y 32: (a) encuentra tres parametrizaciones que den la misma gráfica que la ecuación dada. (b) Encuentra tres parametrizaciones que den sólo una parte de la gráfica de la ecuación dada.

$$31. \quad y = x^2$$

$$32. \quad y = \ln x$$

Ejercicios 33 al 36: consulta las ecuaciones en (1) del ejemplo 6. Encuentra el alcance y la altura máxima para los valores dados.

$$33. \quad x = 256\sqrt{3}, \quad \alpha = 60^\circ, \quad h = 400$$

$$34. \quad x = 512\sqrt{2}, \quad \alpha = 45^\circ, \quad h = 1088$$

$$35. \quad x = 704, \quad \alpha = 45^\circ, \quad h = 0$$

$$36. \quad x = 2448, \quad \alpha = 30^\circ, \quad h = 0$$

37. Consulta el ejemplo 7.

(a) Describe la figura de Lissajous dada por $f(t) = a \sin \omega_1 t$ y $g(t) = b \cos \omega_2 t$ para $t \geq 0$ y $a \neq b$.

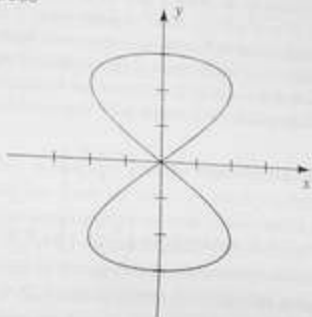
(b) Imagina que $f(t) = a \sin \omega_1 t$ y $g(t) = b \sin \omega_2 t$, donde ω_1 y ω_2 son números racionales positivos, y escribe m/n como m/n para enteros positivos m y n . Demuestra que si $p = 2\pi n/\omega_1$, entonces $f(t+p) = f(t)$ y $g(t+p) = g(t)$. Concluye que la curva se vuelve a trazar a sí misma cada p unidades de tiempo.

38. En la figura se muestra la figura de Lissajous dada por

$$x = 2 \sin 3t, \quad y = 3 \sin 1.5t, \quad t \geq 0.$$

Encuentra el periodo de la figura, esto es, la longitud del mínimo intervalo t que traza la curva.

Ejercicio 38



Ejercicios 39 al 42: las figuras de Lissajous se emplean en el estudio de circuitos eléctricos, para determinar la diferencia de fase ϕ entre un voltaje conocido $V_1(t) = A \sin(\omega t)$ y un voltaje desconocido $V_2(t) = B \sin(\omega t + \phi)$ que tengan la misma frecuencia. Los voltajes están graficados paramétricamente como $x = V_1(t)$ y $y = V_2(t)$. Si ϕ es agudo, entonces

$$\phi = \sin^{-1} \frac{y_{\min}}{y_{\max}},$$

donde y_{\min} es la intersección y no negativa y y_{\max} es el valor y máximo en la curva.

(a) Grafica la curva paramétrica $x = V_1(t)$ y $y = V_2(t)$ para el intervalo especificado de t .

(b) Utiliza la gráfica para aproximar ϕ en grados.

$$39. \quad V_1(t) = 3 \sin(240\pi t), \quad V_2(t) = 4 \sin(240\pi t); \quad 0 \leq t \leq 0.01$$

$$40. \quad V_1(t) = 6 \sin(120\pi t), \quad V_2(t) = 5 \cos(120\pi t); \quad 0 \leq t \leq 0.02$$

$$41. \quad V_1(t) = 80 \sin(60\pi t), \quad V_2(t) = 70 \cos(60\pi t - \pi/3); \quad 0 \leq t \leq 0.035$$

$$42. \quad V_1(t) = 163 \sin(120\pi t), \quad V_2(t) = 163 \sin(120\pi t + \pi/4); \quad 0 \leq t \leq 0.02$$

866 CAPÍTULO 11: TEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Ejercicios 43 y 44: grafica la figura de Lissajous en la pantalla $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ para el intervalo especificado de t .

43 $x(t) = \sin(6\pi t)$, $y(t) = \cos(5\pi t)$; $0 \leq t \leq 2$

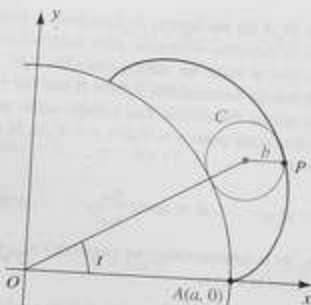
44 $x(t) = \sin(4t)$, $y(t) = \sin(3t + \pi/6)$; $0 \leq t \leq 6.5$

- 45 Un círculo C de radio b gira en el exterior del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ y $b < a$. Sea P un punto fijo en C y $A(a, 0)$ la posición inicial de P , como se muestra en la figura. Si el parámetro t es el ángulo desde el eje x positivo al segmento de recta de O al centro de C , demuestra que las ecuaciones paramétricas para la curva trazada por P (una epicloide) son

$$x = (a + b) \cos t - b \cos\left(\frac{a+b}{b}t\right),$$

$$y = (a + b) \sin t - b \sin\left(\frac{a+b}{b}t\right); \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ejercicio 45



- 46 Si el círculo C del ejercicio 45 gira en el interior del segundo círculo (véase figura), entonces la curva trazada por P es una hipocicloide.

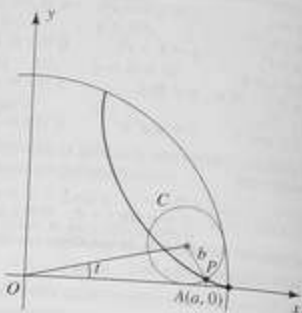
- (a) Demuestra que las ecuaciones paramétricas para esta curva son

$$x = (a - b) \cos t + b \cos\left(\frac{a-b}{b}t\right),$$

$$y = (a - b) \sin t + b \sin\left(\frac{a-b}{b}t\right); \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- (b) Si $b = \frac{1}{2}a$, demuestra que $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ y traza la gráfica.

Ejercicio 46



- 47 Si $b = \frac{1}{2}a$ en el ejercicio 45, encuentra ecuaciones paramétricas para la epicloide y traza la gráfica.

- 48 El radio del círculo B es un tercio del círculo A . ¿Cuántas revoluciones hará el círculo B a medida que gira alrededor del círculo A hasta que llega a su punto de partida? (Sugerencia: Utiliza el ejercicio 47.)

Ejercicios 49 al 52: grafica la curva.

49 $x = 3 \sin^3 t$, $y = 3 \cos^3 t$; $0 \leq t \leq 2\pi$

50 $x = 8 \cos t - 2 \cos 4t$,
 $y = 8 \sin t - 2 \sin 4t$; $0 \leq t \leq 2\pi$

51 $x = 3t - 2 \sin t$, $y = 3 - 2 \cos t$; $-8 \leq t \leq 8$

52 $x = 2t - 3 \sin t$, $y = 2 - 3 \cos t$; $-8 \leq t \leq 8$

Ejercicios 53 al 56: grafica las curvas dadas en el mismo plano coordenado y describe la forma de la figura resultante.

53 $C_1: x = 2 \sin 3t$, $y = 3 \cos 2t$; $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

$C_2: x = \frac{1}{4} \cos t + \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{4}$; $0 \leq t \leq 2\pi$

$C_3: x = \frac{1}{4} \cos t - \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{4}$; $0 \leq t \leq 2\pi$

$C_4: x = \frac{3}{4} \cos t$, $y = \frac{1}{4} \sin t$; $0 \leq t \leq 2\pi$

$C_5: x = \frac{1}{4} \cos t$, $y = \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{4}$; $\pi \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} 54 \quad C_1: x &= \frac{1}{2} \cos t + 1, y = \sin t - 1; & -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \\ C_2: x &= \frac{1}{2} \cos t + 1, y = \sin t + 1; & -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \\ C_3: x &= 1, y = 2 \tan t; & -\pi/4 \leq t \leq \pi/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 55 \quad C_1: x &= \tan t, y = 3 \tan t; & 0 \leq t \leq \pi/4 \\ C_2: x &= 1 + \tan t, y = 3 - 3 \tan t; & 0 \leq t \leq \pi/4 \\ C_3: x &= \frac{1}{2} + \tan t, y = \frac{1}{2}; & 0 \leq t \leq \pi/4 \end{aligned}$$

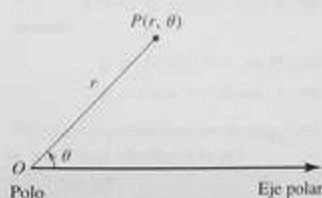
$$\begin{aligned} 56 \quad C_1: x &= 1 + \cos t, y = 1 + \sin t; & \pi/3 \leq t \leq 2\pi \\ C_2: x &= 1 + \tan t, y = 1; & 0 \leq t \leq \pi/4 \end{aligned}$$

11.5

Coordenadas polares

En un sistema de coordenadas rectangulares, el par ordenado (a, b) denota el punto cuyas distancias dirigidas desde los ejes x y y son b y a , respectivamente. Otro método para representar puntos es usar **coordenadas polares**. Comenzamos con un punto fijo O (el **origen**, o **polo**) y un semieje dirigido (el **eje polar**) con un punto final O . En seguida consideramos cualquier punto P del plano, diferente de O . Si, como se ilustra en la figura 1, $r = d(O, P)$ y θ denota la medida de cualquier ángulo determinado por el eje polar y OP , entonces r y θ son **coordenadas polares** de P y los símbolos (r, θ) o $P(r, \theta)$ se usan para denotar P . Como de costumbre, θ se considera positivo si el ángulo es generado por una rotación del eje polar en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, y negativo si la rotación es en el sentido del giro de las manecillas de un reloj. Para medir θ se pueden usar radianes o grados.

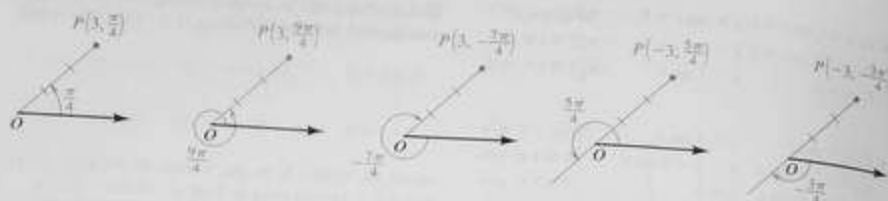
Figura 1



Las coordenadas polares de un punto no son únicas. Por ejemplo, $(3, \pi/4)$, $(3, 9\pi/4)$ y $(3, -7\pi/4)$ representan todas el mismo punto (figura 2). También dejaremos que r sea negativa. En este caso, en lugar de medir $|r|$ unidades a lo largo del lado terminal del ángulo θ , medimos a lo largo del semieje con punto final O que tiene dirección opuesta a la del lado terminal. Los puntos correspondientes a los pares $(-3, 5\pi/4)$ y $(-3, -3\pi/4)$ también se han trazado en la figura 2 que se incluye a continuación.

868 CAPÍTULO 11. TEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

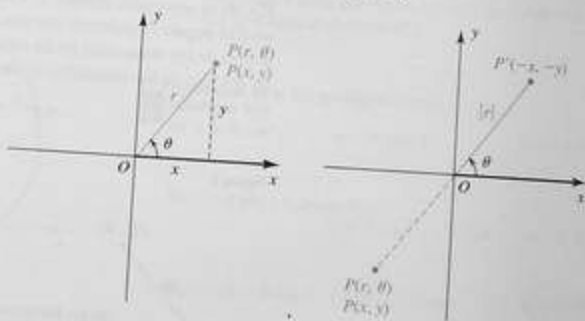
Figura 2



Convenimos en que el polo O tiene coordenadas polares $(0, \theta)$ para cualquier θ . Una asignación de pares ordenados de la forma (r, θ) a puntos de un plano es un **sistema polar coordenado** y el plano es un **plano $r\theta$** .

A continuación pongamos un plano xy sobre un plano $r\theta$ de manera que el eje x positivo coincida con el eje polar. A cualquier punto P del plano se le pueden asignar entonces coordenadas rectangulares (x, y) o coordenadas polares (r, θ) . Si $r > 0$, tenemos una situación semejante a la que se muestra en la figura 3(a); si $r < 0$, tenemos la que se incluye en (b). Para fines posteriores, en esta misma figura 3(b) también hemos localizado el punto P' , que tiene coordenadas polares $(|r|, \theta)$ y coordenadas rectangulares $(-x, -y)$.

Figura 3

(a) $r > 0$ (b) $r < 0$ 

En el resultado que sigue se especifican las relaciones entre (x, y) y (r, θ) , donde se supone que el eje x positivo coincide con el eje polar.

Relaciones entre coordenadas rectangulares y polares

Las coordenadas rectangulares (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) de un punto P se relacionan como sigue:

$$(1) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$(2) \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{Si } x \neq 0$$

DEMOSTRACIÓN

- (1) Aun cuando hemos trazado θ como un ángulo agudo en la figura 3, el análisis que se hace a continuación es válido para todos los ángulos.

Si $r > 0$, como en la figura 3(a), entonces $\cos \theta = x/r$ y $\sin \theta = y/r$, por tanto

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Si $r < 0$, entonces $|r| = -r$, y de la figura 3(b) vemos que

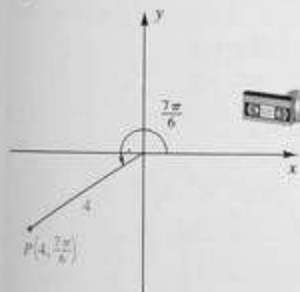
$$\cos \theta = \frac{-x}{|r|} = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{-y}{|r|} = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}.$$

La multiplicación por r nos da la relación 1 y, por tanto, estas fórmulas se cumplen si r es positiva o negativa.

Si $r = 0$, entonces el punto es el polo y otra vez vemos que las fórmulas de (1) son verdaderas.

- (2) Las fórmulas de la relación 2 pueden concluirse fácilmente a partir de la figura 3(a). Por el teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = r^2$ y la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, $\tan \theta = y/x$ (si $x \neq 0$), tenemos que si $x = 0$, entonces $\theta = (\pi/2) + \pi n$ para cualquier número entero n .

Figura 4



Podemos utilizar el resultado precedente para cambiar de un sistema de coordenadas a otro.

EJEMPLO 1 Cambio de coordenadas polares a coordenadas rectangulares

Si $(r, \theta) = (4, 7\pi/6)$ son coordenadas polares de un punto P , encuentra las coordenadas rectangulares de P .

SOLUCIÓN El punto P está localizado en la figura 4. Al sustituir $r = 4$ y $\theta = 7\pi/6$ en la relación de 1 del resultado precedente, obtenemos lo siguiente:

$$x = r \cos \theta = 4 \cos (7\pi/6) = 4(-\sqrt{3}/2) = -2\sqrt{3}$$

$$y = r \sin \theta = 4 \sin (7\pi/6) = 4(-1/2) = -2$$

Por tanto, las coordenadas rectangulares de P son $(x, y) = (-2\sqrt{3}, -2)$.

Confirmemos los resultados del ejemplo 1 en una calculadora graficadora.

TI-83 Plus

Conversión de polar a rectangular

Usamos la característica "dada en polar-regresar x ".

2nd ANGLE 7 4) 7
2nd π = 6) ENTER

TI-86

Usamos el formato magnitud de ángulo \angle para introducir r y θ .

f 4 2nd ∠ 7
2nd π = 6) ENTER

(continúa)

La segunda entrada, $-2(\sqrt{3})$, confirma que el valor de x es correcto. Ahora usamos la función de "dado en polar-obtener y ".

2nd ANGLE 8 4 7
2nd = 6 1 ENTER

P→R<(4, 7π/6)
-3.464101615
-2r(3)
-3.464101615
P→R<(4, 7π/6)
-2

Como opción, podemos agregar el comando convertir a rectangular que se muestra en el segundo renglón.

2nd ENTRY 2nd CPLX
MORE ►Rec(F1) ENTER

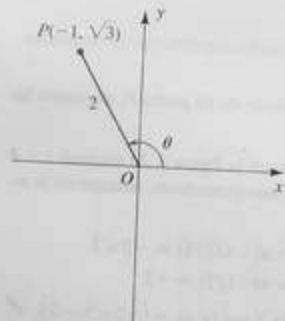
(4, 7π/6)
(-3.464101615, -2)
(4, 7π/6)→Rec
(-3.464101615, -2)
Rec Pol

EJEMPLO 2 Cambio de coordenadas rectangulares a coordenadas polares

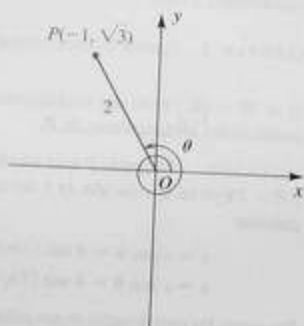
Si $(x, y) = (-1, \sqrt{3})$ son coordenadas rectangulares de un punto P , encuentra tres pares diferentes de coordenadas polares (r, θ) para P .

Figura 5

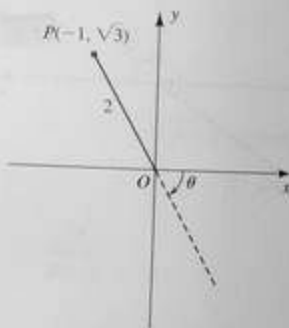
(a)



(b)



(c)



SOLUCIÓN En la figura 5(a)-(c) se ilustran tres posibilidades para θ . Si se usa $x = -1$ y $y = \sqrt{3}$ en la relación 2 entre coordenadas rectangulares y polares, obtenemos

$$r^2 = x^2 + y^2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4,$$

y como r es positiva en la figura 5(a), $r = 2$. Si se usa

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3},$$

vemos que el ángulo de referencia para θ es $\theta_r = \pi/3$ y, por tanto,

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Por tanto, $(2, 2\pi/3)$ es un par de coordenadas polares para P .

Con referencia a la figura 5(b) y los valores obtenidos para P en la figura 5(a), obtenemos

$$r = 2 \quad \text{y} \quad \theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$$

En consecuencia, $(2, 8\pi/3)$ es otro par de coordenadas polares para P .

En la figura 5(c), $\theta = -\pi/3$. En este caso usamos $r = -2$ para obtener $(-2, -\pi/3)$ como un tercer par de coordenadas polares para P .

Confirmemos los resultados del ejemplo 2 en una calculadora graficadora.

TI-83 Plus

Conversión de
rectangular a polar

Usamos la característica "dada en rectangular-regresar r ".

2nd ANGLE 5 -1 .
2nd √ 3)) ENTER

Luego usamos la característica "dada en rectangular-regresar θ ".

2nd ANGLE 6 -1 .
2nd √ 3)) ENTER

Para ver el último resultado en grados, cambiamos de modo de radianes a modo de grados.

MODE ▾ ▾ ▸ ENTER
2nd QUIT 2nd ENTRY ENTER

R→Pr(-1,√(3)) 2 modo de
R→Pθ(-1,√(3)) 2.094395102 radianes
R→Pθ(-1,√(3)) 120 modo de
grados

TI-86

Convertimos de coordenadas rectangulares a polares.

(-1 . 2nd √ 3)
2nd CPLX MORE ► Pol(F2) ENTER

2nd MODE ▾ ▾ ▸ ENTER
2nd QUIT 2nd ENTRY ENTER

(-1,√(3))→Pol
(2,2.09439510239) modo de
radianes
(-1,√(3))→Pol
(2,120) modo de
grados

Una **ecuación polar** es una ecuación en r y θ . Una **solución** de una ecuación polar es un par ordenado (a, b) que lleva a una igualdad si a es sustituida por r y b por θ . La **gráfica** de una ecuación polar es el conjunto de todos los puntos (de un plano $r\theta$) que corresponden a las soluciones.

872 CAPÍTULO 11 TEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Figura 6

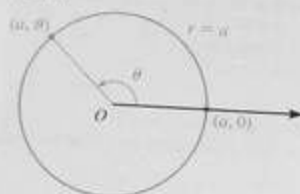


Figura 7



Las ecuaciones polares más sencillas son $r = a$ y $\theta = a$, donde a es un número real diferente de cero. Como las soluciones de la ecuación polar $r = a$ son de la forma (a, θ) para cualquier ángulo θ , se deduce que la gráfica es un círculo de radio $|a|$ con centro en el polo. En la figura 6 aparece una gráfica para $a > 0$. La misma gráfica se obtiene para $r = -a$.

Las soluciones de la ecuación polar $\theta = a$ son de la forma (r, a) para cualquier número real r . Como la coordenada a (el ángulo) es constante, la gráfica de $\theta = a$ es una recta que pasa por el origen, como se ilustra en la figura 7 para un ángulo agudo a .

Podemos usar las relaciones entre coordenadas rectangulares y polares para transformar una ecuación polar a una ecuación en x y y , y viceversa. Este procedimiento se ilustra en los tres ejemplos siguientes.

EJEMPLO 3 Búsqueda de una ecuación polar de una recta

Encuentra una ecuación polar de una recta arbitraria.

SOLUCIÓN Toda línea del plano coordenado xy es la gráfica de una ecuación lineal que se puede escribir de la forma $ax + by = c$. El uso de las fórmulas $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$ nos da las siguientes ecuaciones polares equivalentes:

$$ar \cos \theta + br \sin \theta = c \quad \text{sustituir por } x \text{ y } y$$

$$r(a \cos \theta + b \sin \theta) = c \quad \text{factorizar } r$$

Si $a \cos \theta + b \sin \theta \neq 0$, la última ecuación se puede escribir como sigue:

$$r = \frac{c}{a \cos \theta + b \sin \theta}$$

EJEMPLO 4 Cambio de una ecuación en x y y a ecuación polar

Encuentra una ecuación polar para la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$.

SOLUCIÓN Si utilizamos las fórmulas $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, obtenemos las siguientes ecuaciones polares:

$$(r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2 = 16 \quad \text{sustituir por } x \text{ y } y$$

$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = 16 \quad \text{elevar al cuadrado los términos}$$

$$r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 16 \quad \text{factorizar } r^2$$

$$r^2 \cos 2\theta = 16 \quad \text{fórmula de doble ángulo}$$

$$r^2 = \frac{16}{\cos 2\theta} \quad \text{dividir entre } \cos 2\theta$$

La división entre $\cos 2\theta$ es permisible porque $\cos 2\theta \neq 0$. (Observemos que si $\cos 2\theta = 0$, entonces $r^2 \cos 2\theta \neq 16$.) También podemos escribir la ecuación polar como $r^2 = 16 \sec 2\theta$.

EJEMPLO 5 Cambio de una ecuación polar a una ecuación en x y y

Encuentra una ecuación en x y y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar $r = a \operatorname{sen} \theta$, con $a \neq 0$. Traza la gráfica.

SOLUCIÓN Una fórmula que relaciona $\operatorname{sen} \theta$ y y está dada por $y = r \operatorname{sen} \theta$. Para introducir la expresión $r \operatorname{sen} \theta$ en la ecuación $r = a \operatorname{sen} \theta$, multiplicamos ambos lados por r y obtenemos

$$r^2 = ar \operatorname{sen} \theta.$$

A continuación, si sustituimos r^2 por $x^2 + y^2$ y $r \operatorname{sen} \theta$ por y , la última ecuación se convierte en

$$x^2 + y^2 = ay,$$

o bien

$$x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Al completar el cuadrado en y resulta

$$x^2 + y^2 - ay + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

o bien

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

En el plano xy , la gráfica de la última ecuación es un círculo con centro $(0, a/2)$ y radio $|a|/2$, como se ilustra en la figura 8 para el caso $a > 0$ (el círculo en línea continua) y $a < 0$ (el círculo en línea punteada).

Figura 8

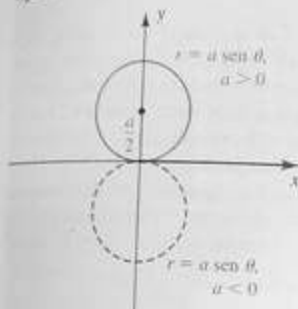
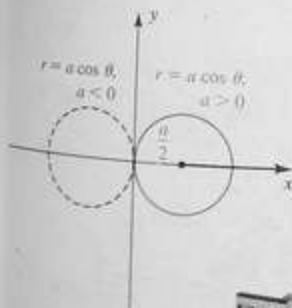


Figura 9



Si usamos el mismo método que en el ejemplo precedente, podemos demostrar que la gráfica de $r = a \cos \theta$, con $a \neq 0$, es un círculo de radio $|a|/2$ del tipo que se muestra en la figura 9.

En los ejemplos siguientes, obtenemos las gráficas de ecuaciones polares al graficar los puntos y examinar la relación entre los intervalos θ e intervalos r . Tal como has procedido en esta sección, trata de reconocer las formas de las ecuaciones polares de modo que seas capaz de trazar sus gráficas al localizar algunos puntos, si los hay.

**EJEMPLO 6** Trazado de la gráfica de una ecuación polar

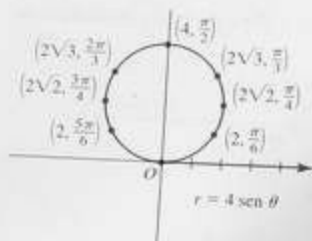
Traza la gráfica de la ecuación polar $r = 4 \operatorname{sen} \theta$.

SOLUCIÓN La demostración de que la gráfica de $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ es un círculo se proporcionó en el ejemplo 5. La tabla siguiente muestra algunas soluciones de la ecuación. En la tabla hemos incluido un tercer renglón que contiene aproximaciones de un lugar decimal para r .

(continúa)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0
r (aprox.)	0	2	2.8	3.5	4	3.5	2.8	2	0

Figura 10



Como ayuda para graficar puntos en el plano $r\theta$ que se muestra en la figura 10, hemos extendido el eje polar en la dirección negativa e introducido una línea vertical que pasa por el polo (ésta es la gráfica de la ecuación $\theta = \pi/2$). Otros puntos obtenidos si θ se hace variar desde π a 2π se encuentran en el mismo círculo. Por ejemplo, la solución $(-2, 7\pi/6)$ nos da el mismo punto que $(2, \pi/6)$; el punto correspondiente a $(-2\sqrt{2}, 5\pi/4)$ es el mismo que el obtenido de $(2\sqrt{2}, \pi/4)$; y así sucesivamente. Si dejamos que θ aumente a todos los números reales, obtenemos los mismos puntos una y otra vez debido a la periodicidad de la función seno.

Gráfica de una ecuación polar

Consideraremos algunas características de las coordenadas polares en una calculadora graficadora, usando $r = 4 \sin \theta$ del ejemplo 6.

TI-83 Plus

Cambia a modo polar

MODE ∇ (3 times) \rightarrow \rightarrow ENTER

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
2nd Horiz G-T
```

Haz una asignación r

$Y=$ 4 \sin (X,T,θ))

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1 4sin(θ)
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

TI-86

2nd MODE ∇ (4 times) \rightarrow ENTER

```
Normal Sci Eng
Float 012345678901
Radian Degree
Recto PolarC
Func 2nd Param DiffE
Dec Bin Oct Hex
Recto CylU SpherU
d/dx d/dt Der
```

GRAPH $r(\theta)=(F1)$ 4 \sin $\theta(F1)$

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1 4 sin θ
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7 F8 F9 F10 F11 F12 F13 F14 F15 F16 F17 F18 F19 F20 F21 F22 F23 F24 F25 F26 F27 F28 F29 F30 F31 F32 F33 F34 F35 F36 F37 F38 F39 F40 F41 F42 F43 F44 F45 F46 F47 F48 F49 F50 F51 F52 F53 F54 F55 F56 F57 F58 F59 F60 F61 F62 F63 F64 F65 F66 F67 F68 F69 F70 F71 F72 F73 F74 F75 F76 F77 F78 F79 F80 F81 F82 F83 F84 F85 F86 F87 F88 F89 F90 F91 F92 F93 F94 F95 F96 F97 F98 F99 F100 F101 F102 F103 F104 F105 F106 F107 F108 F109 F110 F111 F112 F113 F114 F115 F116 F117 F118 F119 F120 F121 F122 F123 F124 F125 F126 F127 F128 F129 F130 F131 F132 F133 F134 F135 F136 F137 F138 F139 F140 F141 F142 F143 F144 F145 F146 F147 F148 F149 F150 F151 F152 F153 F154 F155 F156 F157 F158 F159 F160 F161 F162 F163 F164 F165 F166 F167 F168 F169 F170 F171 F172 F173 F174 F175 F176 F177 F178 F179 F180 F181 F182 F183 F184 F185 F186 F187 F188 F189 F190 F191 F192 F193 F194 F195 F196 F197 F198 F199 F200 F201 F202 F203 F204 F205 F206 F207 F208 F209 F210 F211 F212 F213 F214 F215 F216 F217 F218 F219 F220 F221 F222 F223 F224 F225 F226 F227 F228 F229 F230 F231 F232 F233 F234 F235 F236 F237 F238 F239 F240 F241 F242 F243 F244 F245 F246 F247 F248 F249 F250 F251 F252 F253 F254 F255 F256 F257 F258 F259 F260 F261 F262 F263 F264 F265 F266 F267 F268 F269 F270 F271 F272 F273 F274 F275 F276 F277 F278 F279 F280 F281 F282 F283 F284 F285 F286 F287 F288 F289 F290 F291 F292 F293 F294 F295 F296 F297 F298 F299 F300 F301 F302 F303 F304 F305 F306 F307 F308 F309 F310 F311 F312 F313 F314 F315 F316 F317 F318 F319 F320 F321 F322 F323 F324 F325 F326 F327 F328 F329 F330 F331 F332 F333 F334 F335 F336 F337 F338 F339 F340 F341 F342 F343 F344 F345 F346 F347 F348 F349 F350 F351 F352 F353 F354 F355 F356 F357 F358 F359 F360 F361 F362 F363 F364 F365 F366 F367 F368 F369 F370 F371 F372 F373 F374 F375 F376 F377 F378 F379 F380 F381 F382 F383 F384 F385 F386 F387 F388 F389 F390 F391 F392 F393 F394 F395 F396 F397 F398 F399 F400 F401 F402 F403 F404 F405 F406 F407 F408 F409 F410 F411 F412 F413 F414 F415 F416 F417 F418 F419 F420 F421 F422 F423 F424 F425 F426 F427 F428 F429 F430 F431 F432 F433 F434 F435 F436 F437 F438 F439 F440 F441 F442 F443 F444 F445 F446 F447 F448 F449 F450 F451 F452 F453 F454 F455 F456 F457 F458 F459 F460 F461 F462 F463 F464 F465 F466 F467 F468 F469 F470 F471 F472 F473 F474 F475 F476 F477 F478 F479 F480 F481 F482 F483 F484 F485 F486 F487 F488 F489 F490 F491 F492 F493 F494 F495 F496 F497 F498 F499 F500 F501 F502 F503 F504 F505 F506 F507 F508 F509 F510 F511 F512 F513 F514 F515 F516 F517 F518 F519 F520 F521 F522 F523 F524 F525 F526 F527 F528 F529 F530 F531 F532 F533 F534 F535 F536 F537 F538 F539 F540 F541 F542 F543 F544 F545 F546 F547 F548 F549 F550 F551 F552 F553 F554 F555 F556 F557 F558 F559 F560 F561 F562 F563 F564 F565 F566 F567 F568 F569 F570 F571 F572 F573 F574 F575 F576 F577 F578 F579 F580 F581 F582 F583 F584 F585 F586 F587 F588 F589 F590 F591 F592 F593 F594 F595 F596 F597 F598 F599 F600 F601 F602 F603 F604 F605 F606 F607 F608 F609 F610 F611 F612 F613 F614 F615 F616 F617 F618 F619 F620 F621 F622 F623 F624 F625 F626 F627 F628 F629 F630 F631 F632 F633 F634 F635 F636 F637 F638 F639 F640 F641 F642 F643 F644 F645 F646 F647 F648 F649 F650 F651 F652 F653 F654 F655 F656 F657 F658 F659 F660 F661 F662 F663 F664 F665 F666 F667 F668 F669 F670 F671 F672 F673 F674 F675 F676 F677 F678 F679 F680 F681 F682 F683 F684 F685 F686 F687 F688 F689 F690 F691 F692 F693 F694 F695 F696 F697 F698 F699 F700 F701 F702 F703 F704 F705 F706 F707 F708 F709 F710 F711 F712 F713 F714 F715 F716 F717 F718 F719 F720 F721 F722 F723 F724 F725 F726 F727 F728 F729 F730 F731 F732 F733 F734 F735 F736 F737 F738 F739 F740 F741 F742 F743 F744 F745 F746 F747 F748 F749 F750 F751 F752 F753 F754 F755 F756 F757 F758 F759 F760 F761 F762 F763 F764 F765 F766 F767 F768 F769 F770 F771 F772 F773 F774 F775 F776 F777 F778 F779 F780 F781 F782 F783 F784 F785 F786 F787 F788 F789 F790 F791 F792 F793 F794 F795 F796 F797 F798 F799 F800 F801 F802 F803 F804 F805 F806 F807 F808 F809 F810 F811 F812 F813 F814 F815 F816 F817 F818 F819 F820 F821 F822 F823 F824 F825 F826 F827 F828 F829 F830 F831 F832 F833 F834 F835 F836 F837 F838 F839 F840 F841 F842 F843 F844 F845 F846 F847 F848 F849 F850 F851 F852 F853 F854 F855 F856 F857 F858 F859 F860 F861 F862 F863 F864 F865 F866 F867 F868 F869 F870 F871 F872 F873 F874 F875 F876 F877 F878 F879 F880 F881 F882 F883 F884 F885 F886 F887 F888 F889 F890 F891 F892 F893 F894 F895 F896 F897 F898 F899 F900 F901 F902 F903 F904 F905 F906 F907 F908 F909 F910 F911 F912 F913 F914 F915 F916 F917 F918 F919 F920 F921 F922 F923 F924 F925 F926 F927 F928 F929 F930 F931 F932 F933 F934 F935 F936 F937 F938 F939 F940 F941 F942 F943 F944 F945 F946 F947 F948 F949 F950 F951 F952 F953 F954 F955 F956 F957 F958 F959 F960 F961 F962 F963 F964 F965 F966 F967 F968 F969 F970 F971 F972 F973 F974 F975 F976 F977 F978 F979 F980 F981 F982 F983 F984 F985 F986 F987 F988 F989 F990 F991 F992 F993 F994 F995 F996 F997 F998 F999 F1000 F1001 F1002 F1003 F1004 F1005 F1006 F1007 F1008 F1009 F1010 F1011 F1012 F1013 F1014 F1015 F1016 F1017 F1018 F1019 F1020 F1021 F1022 F1023 F1024 F1025 F1026 F1027 F1028 F1029 F1030 F1031 F1032 F1033 F1034 F1035 F1036 F1037 F1038 F1039 F1040 F1041 F1042 F1043 F1044 F1045 F1046 F1047 F1048 F1049 F1050 F1051 F1052 F1053 F1054 F1055 F1056 F1057 F1058 F1059 F1060 F1061 F1062 F1063 F1064 F1065 F1066 F1067 F1068 F1069 F1070 F1071 F1072 F1073 F1074 F1075 F1076 F1077 F1078 F1079 F1080 F1081 F1082 F1083 F1084 F1085 F1086 F1087 F1088 F1089 F1090 F1091 F1092 F1093 F1094 F1095 F1096 F1097 F1098 F1099 F1100 F1101 F1102 F1103 F1104 F1105 F1106 F1107 F1108 F1109 F1110 F1111 F1112 F1113 F1114 F1115 F1116 F1117 F1118 F1119 F1120 F1121 F1122 F1123 F1124 F1125 F1126 F1127 F1128 F1129 F1130 F1131 F1132 F1133 F1134 F1135 F1136 F1137 F1138 F1139 F1140 F1141 F1142 F1143 F1144 F1145 F1146 F1147 F1148 F1149 F1150 F1151 F1152 F1153 F1154 F1155 F1156 F1157 F1158 F1159 F1160 F1161 F1162 F1163 F1164 F1165 F1166 F1167 F1168 F1169 F1170 F1171 F1172 F1173 F1174 F1175 F1176 F1177 F1178 F1179 F1180 F1181 F1182 F1183 F1184 F1185 F1186 F1187 F1188 F1189 F1190 F1191 F1192 F1193 F1194 F1195 F1196 F1197 F1198 F1199 F1200 F1201 F1202 F1203 F1204 F1205 F1206 F1207 F1208 F1209 F1210 F1211 F1212 F1213 F1214 F1215 F1216 F1217 F1218 F1219 F1220 F1221 F1222 F1223 F1224 F1225 F1226 F1227 F1228 F1229 F1230 F1231 F1232 F1233 F1234 F1235 F1236 F1237 F1238 F1239 F1240 F1241 F1242 F1243 F1244 F1245 F1246 F1247 F1248 F1249 F1250 F1251 F1252 F1253 F1254 F1255 F1256 F1257 F1258 F1259 F1260 F1261 F1262 F1263 F1264 F1265 F1266 F1267 F1268 F1269 F1270 F1271 F1272 F1273 F1274 F1275 F1276 F1277 F1278 F1279 F1280 F1281 F1282 F1283 F1284 F1285 F1286 F1287 F1288 F1289 F1290 F1291 F1292 F1293 F1294 F1295 F1296 F1297 F1298 F1299 F1300 F1301 F1302 F1303 F1304 F1305 F1306 F1307 F1308 F1309 F1310 F1311 F1312 F1313 F1314 F1315 F1316 F1317 F1318 F1319 F1320 F1321 F1322 F1323 F1324 F1325 F1326 F1327 F1328 F1329 F1330 F1331 F1332 F1333 F1334 F1335 F1336 F1337 F1338 F1339 F1340 F1341 F1342 F1343 F1344 F1345 F1346 F1347 F1348 F1349 F1350 F1351 F1352 F1353 F1354 F1355 F1356 F1357 F1358 F1359 F1360 F1361 F1362 F1363 F1364 F1365 F1366 F1367 F1368 F1369 F1370 F1371 F1372 F1373 F1374 F1375 F1376 F1377 F1378 F1379 F1380 F1381 F1382 F1383 F1384 F1385 F1386 F1387 F1388 F1389 F1390 F1391 F1392 F1393 F1394 F1395 F1396 F1397 F1398 F1399 F1400 F1401 F1402 F1403 F1404 F1405 F1406 F1407 F1408 F1409 F1410 F1411 F1412 F1413 F1414 F1415 F1416 F1417 F1418 F1419 F1420 F1421 F1422 F1423 F1424 F1425 F1426 F1427 F1428 F1429 F1430 F1431 F1432 F1433 F1434 F1435 F1436 F1437 F1438 F1439 F1440 F1441 F1442 F1443 F1444 F1445 F1446 F1447 F1448 F1449 F1450 F1451 F1452 F1453 F1454 F1455 F1456 F1457 F1458 F1459 F1460 F1461 F1462 F1463 F1464 F1465 F1466 F1467 F1468 F1469 F1470 F1471 F1472 F1473 F1474 F1475 F1476 F1477 F1478 F1479 F1480 F1481 F1482 F1483 F1484 F1485 F1486 F1487 F1488 F1489 F1490 F1491 F1492 F1493 F1494 F1495 F1496 F1497 F1498 F1499 F1500 F1501 F1502 F1503 F1504 F1505 F1506 F1507 F1508 F1509 F1510 F1511 F1512 F1513 F1514 F1515 F1516 F1517 F1518 F1519 F1520 F1521 F1522 F1523 F1524 F1525 F1526 F1527 F1528 F1529 F1530 F1531 F1532 F1533 F1534 F1535 F1536 F1537 F1538 F1539 F1540 F1541 F1542 F1543 F1544 F1545 F1546 F1547 F1548 F1549 F1550 F1551 F1552 F1553 F1554 F1555 F1556 F1557 F1558 F1559 F1560 F1561 F1562 F1563 F1564 F1565 F1566 F1567 F1568 F1569 F1570 F1571 F1572 F1573 F1574 F1575 F1576 F1577 F1578 F1579 F1580 F1581 F1582 F1583 F1584 F1585 F1586 F1587 F1588 F1589 F1590 F1591 F1592 F1593 F1594 F1595 F1596 F1597 F1598 F1599 F1600 F1601 F1602 F1603 F1604 F1605 F1606 F1607 F1608 F1609 F1610 F1611 F1612 F1613 F1614 F1615 F1616 F1617 F1618 F1619 F1620 F1621 F1622 F1623 F1624 F1625 F1626 F1627 F1628 F1629 F1630 F1631 F1632 F1633 F1634 F1635 F1636 F1637 F1638 F1639 F1640 F1641 F1642 F1643 F1644 F1645 F1646 F1647 F1648 F1649 F1650 F1651 F1652 F1653 F1654 F1655 F1656 F1657 F1658 F1659 F1660 F1661 F1662 F1663 F1664 F1665 F1666 F1667 F1668 F1669 F1670 F1671 F1672 F1673 F1674 F1675 F1676 F1677 F1678 F1679 F1680 F1681 F1682 F1683 F1684 F1685 F1686 F1687 F1688 F1689 F1690 F1691 F1692 F1693 F1694 F1695 F1696 F1697 F1698 F1699 F1700 F1701 F1702 F1703 F1704 F1705 F1706 F1707 F1708 F1709 F1710 F1711 F1712 F1713 F1714 F1715 F1716 F1717 F1718 F1719 F1720 F1721 F1722 F1723 F1724 F1725 F1726 F1727 F1728 F1729 F1730 F1731 F1732 F1733 F1734 F1735 F1736 F1737 F1738 F1739 F1740 F1741 F1742 F1743 F1744 F1745 F1746 F1747 F1748 F1749 F1750 F1751 F1752 F1753 F1754 F1755 F1756 F1757 F1758 F1759 F1760 F1761 F1762 F1763 F1764 F1765 F1766 F1767 F1768 F1769 F1770 F1771 F1772 F1773 F1774 F1775 F1776 F1777 F1778 F1779 F1780 F1781 F1782 F1783 F1784 F1785 F1786 F1787 F1788 F1789 F1790 F1791 F1792 F1793 F1794 F1795 F1796 F1797 F1798 F1799 F1800 F1801 F1802 F1803 F1804 F1805 F1806 F1807 F1808 F1809 F1810 F1811 F1812 F1813 F1814 F1815 F1816 F1817 F1818 F1819 F1820 F1821 F1822 F1823 F1824 F1825 F1826 F1827 F1828 F1829 F1830 F1831 F1832 F1833 F1834 F1835 F1836 F1837 F1838 F1839 F1840 F1841 F1842 F1843 F1844 F1845 F1846 F1847 F1848 F1849 F1850 F1851 F1852 F1853 F1854 F1855 F1856 F1857 F1858 F1859 F1860 F1861 F1862 F1863 F1864 F1865 F1866 F1867 F1868 F1869 F1870 F1871 F1872 F1873 F1874 F1875 F1876 F1877 F1878 F1879 F1880 F1881 F1882 F1883 F1884 F1885 F1886 F1887 F1888 F1889 F1890 F1891 F1892 F1893 F1894 F1895 F1896 F1897 F1898 F1899 F1900 F1901 F1902 F1903 F1904 F1905 F1906 F1907 F1908 F1909 F1910 F1911 F1912 F1913 F1914 F1915 F1916 F1917 F1918 F1919 F1920 F1921 F1922 F1923 F1924 F1925 F1926 F1927 F1928 F1929 F1930 F1931 F1932 F1933 F1934 F1935 F1936 F1937 F1938 F1939 F1940 F1941 F1942 F1943 F1944 F1945 F1946 F1947 F1948 F1949 F1950 F1951 F1952 F1953 F1954 F1955 F1956 F1957 F1958 F1959 F1960 F1961 F1962 F1963 F1964 F1965 F1966 F1967 F1968 F1969 F1970 F1971 F1972 F1973 F1974 F1975 F1976 F1977 F1978 F1979 F1980 F1981 F1982 F1983 F1984 F1985 F1986 F1987 F1988 F1989 F1990 F1991 F1992 F1993 F1994 F1995 F1996 F1997 F1998 F1999 F2000 F2001 F2002 F2003 F2004 F2005 F2006 F2007 F2008 F2009 F2010 F2011 F2012 F2013 F2014 F2015 F2016 F2017 F2018 F2019 F2020 F2021 F2022 F2023 F2024 F2025 F2026 F2027 F2028 F2029 F2030 F2031 F2032 F2033 F2034 F2035 F2036 F2037 F2038 F2039 F2040 F2041 F2042 F2043 F2044 F2045 F2046 F2047 F2048 F2049 F2050 F2051 F2052 F2053 F2054 F2055 F2056 F2057 F2058 F2059 F2060 F2061 F2062 F2063 F2064 F2065 F2066 F2067 F2068 F2069 F2070 F2071 F2072 F2073 F2074 F2075 F2076 F2077 F2078 F2079 F2080 F2081 F2082 F2083 F2084 F2085 F2086 F2087 F2088 F2089 F2090 F2091 F2092 F2093 F2094 F2095 F2096 F2097 F2098 F2099 F2100 F2101 F2102 F2103 F2104 F2105 F2106 F2107 F2108 F2109 F2110 F2111 F2112 F2113 F2114 F2115 F2116 F2117 F2118 F2119 F2120 F2121 F2122 F2123 F2124 F2125 F2126 F2127 F2128 F2129 F2130 F2131 F2132 F2133 F2134 F2135 F2136 F2137 F2138 F2139 F2140 F2141 F2142 F2143 F2144 F2145 F2146 F2147 F2148 F2149 F2150 F2151 F2152 F2153 F2154 F2155 F2156 F2157 F2158 F2159 F2160 F2161 F2162 F2163 F2164 F2165 F2166 F2167 F2168 F2169 F2170 F2171 F2172 F2173 F2174 F2175 F2176 F2177 F2178 F2179 F2180 F2181 F2182 F2183 F2184 F2185 F2186 F2187 F2188 F2189 F2190 F2191 F2192 F2193 F2194 F2195 F2196 F2197 F2198 F2199 F2200 F2201 F2202 F2203 F2204 F2205 F2206 F2207 F2208 F2209 F2210 F2211 F2212 F2213 F2214 F2215 F2216 F2217 F2218 F2219 F2220 F2221 F2222 F2223 F2224 F2225 F2226 F2227 F2228 F2229 F2230 F2231 F2232 F2233 F2234 F2235 F2236 F2237 F2238 F2239 F2240 F2241 F2242 F2243 F2244 F2245 F2246 F2247 F2248 F2249 F2250 F2251 F2252 F2253 F2254 F2255 F2256 F2257 F2258 F2259 F2260 F2261 F2262 F2263 F2264 F2265 F2266 F2267 F2268 F2269 F2270 F2271 F2272 F2273 F2274 F2275 F2276 F2277 F2278 F2279 F2280 F2281 F2282 F2283 F2284 F2285 F2286 F2287 F2288 F2289 F2290 F2291 F2292 F2293 F2294 F2295 F2296 F2297 F2298 F2299 F2300 F2301 F2302 F2303 F2304 F2305 F2306 F2307 F2308 F2309 F2310 F2311 F2312 F2313 F2314 F2315 F2316 F2317 F2318 F2319 F2320 F2321 F2322 F2323 F2324 F2325 F2326 F2327 F2328 F2329 F2330 F2331 F2332
```

Establece los valores de la ventana

Usaremos $\theta_{\text{máx}} = \pi$, $\theta_{\text{mín}} = 0$, porque así obtenemos el círculo. Para θ_{step} , usaremos 0.05. Un valor más pequeño como 0.01 hace lento el proceso de graficado, y uno mayor como 0.5 produce una figura burda.

WINDOW 0 2nd π 0.05 -4.5 4.5 1 -1 5 1

```

WINDOW
θmin=0
θmax=3.1415926...
θstep=.05
xmin=-4.5
xmax=4.5
xsc1=1
ymin=-1
ymax=5
ysc1=1
  
```

Grafica la función

GRAPH



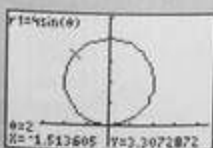
Traza la gráfica (modo rectangular)

TRACE () y ()



Evalúa la función para $\theta = 2$

2nd CALC 1 2 ENTER



2nd WINDOW(M2) 0 2nd π 0.05 -4.5 4.5 1 -1 5 1

```

WINDOW
θmin=0
θmax=3.14159265359
θstep=.05
xmin=-4.5
xmax=4.5
xsc1=1
ymin=-1
ymax=5
ysc1=1
  
```

GRAPH(F5)



TRACE(F4) () y ()



GRAPH MORE MORE

EVAL(F1) 2 ENTER



(continúa)

Cambia a coordenadas polares

2nd FORMAT > ENTER

```

RectG: Polarg
CoordOff CoordOff
GridOff GridOn
AxesOff AxesOff
LabelOff LabelOn
ExprOff ExprOff

```

GRAPH MORE FORMAT/F3
> ENTER

```

RectG: Polarg
CoordOff CoordOff
GridOn GridOn
AxesOff AxesOff
LabelOn LabelOn
ExprOff ExprOff

```

Trazo la gráfica (modo polar)

Ahora graficamos y trazamos el círculo otra vez. Observa que la calculadora muestra los valores de R y θ .

GRAPH TRACE (D) y <1>



GRAPH(F5) TRACE(F4) (D) y <1>



Elabora una tabla

A continuación analizamos una tabla de valores, fijando TblStart en 0 y ΔTbl en $\pi/12$.2nd TBLSET 0 > 2nd π + 12TABLE TBLST(F2) 0 > 2nd π = 12

```

TABLE SETUP
TblStart=0
DeltaTbl=pi/12
Indent: Auto Ask
Depend: Auto Ask

```

```

TABLE SETUP
TblStart=0
DeltaTbl=pi/12
Indent: Auto Ask

```

Compara las tablas

Ahora comparamos los valores de la tabla con los que se obtuvieron en el ejemplo 6.

2nd TABLE

TABLE(F1)

θ	r
0	0
0.2618	1.0353
0.5236	0.8660
0.7854	0.7071
1.0472	0.5298
1.309	0.3420
1.5708	0.1547
1.8326	0.0000
2.0944	-0.1547
2.3562	-0.3420
2.618	-0.5298
2.8798	-0.7071
3.1416	-0.8660
3.4034	-1.0353
3.6652	-1.2042
3.927	-1.3727
4.1888	-1.5411
4.4506	-1.7096
4.7124	-1.8779
4.9742	-2.0462
5.236	-2.2146
5.4978	-2.3829
5.7596	-2.5511
6.0214	-2.7194
6.2832	-2.8877
6.545	-3.0560
6.8068	-3.2243
7.0686	-3.3926
7.3304	-3.5609
7.5922	-3.7292
7.854	-3.8975
8.1158	-4.0658
8.3776	-4.2341
8.6394	-4.4024
8.9012	-4.5707
9.163	-4.7390
9.4248	-4.9073
9.6866	-5.0756
9.9484	-5.2439
10.2102	-5.4122
10.472	-5.5805
10.7338	-5.7488
11.0	-5.9171
11.2618	-6.0854
11.5236	-6.2537
11.7854	-6.4220
12.0472	-6.5903
12.309	-6.7586
12.5708	-6.9269
12.8326	-7.0952
13.0944	-7.2635
13.3562	-7.4318
13.618	-7.6001
13.8798	-7.7684
14.1416	-7.9367
14.4034	-8.1050
14.6652	-8.2733
14.927	-8.4416
15.1888	-8.6099
15.4506	-8.7782
15.7124	-8.9465
15.9742	-9.1148
16.236	-9.2831
16.4978	-9.4514
16.7596	-9.6197
17.0214	-9.7880
17.2832	-9.9563
17.545	-10.1246
17.8068	-10.2929
18.0686	-10.4612
18.3304	-10.6295
18.5922	-10.7978
18.854	-10.9661
19.1158	-11.1344
19.3776	-11.3027
19.6394	-11.4710
19.9012	-11.6393
20.163	-11.8076
20.4248	-11.9759
20.6866	-12.1442
20.9484	-12.3125
21.2102	-12.4808
21.472	-12.6491
21.7338	-12.8174
21.9956	-12.9857
22.2574	-13.1540
22.5192	-13.3223
22.781	-13.4906
23.0428	-13.6589
23.3046	-13.8272
23.5664	-13.9955
23.8282	-14.1638
24.09	-14.3321
24.3518	-14.5004
24.6136	-14.6687
24.8754	-14.8370
25.1372	-15.0053
25.399	-15.1736
25.6608	-15.3419
25.9226	-15.5102
26.1844	-15.6785
26.4462	-15.8468
26.708	-16.0151
26.9698	-16.1834
27.2316	-16.3517
27.4934	-16.5200
27.7552	-16.6883
28.017	-16.8566
28.2788	-17.0249
28.5406	-17.1932
28.8024	-17.3615
29.0642	-17.5298
29.326	-17.6981
29.5878	-17.8664
29.8496	-18.0347
30.1114	-18.2030
30.3732	-18.3713
30.635	-18.5396
30.8968	-18.7079
31.1586	-18.8762
31.4204	-19.0445
31.6822	-19.2128
31.944	-19.3811
32.2058	-19.5494
32.4676	-19.7177
32.7294	-19.8860
32.9912	-20.0543
33.253	-20.2226
33.5148	-20.3909
33.7766	-20.5592
34.0384	-20.7275
34.3	-20.8958
34.5618	-21.0641
34.8236	-21.2324
35.0854	-21.4007
35.3472	-21.5690
35.609	-21.7373
35.8708	-21.9056
36.1326	-22.0739
36.3944	-22.2422
36.6562	-22.4105
36.918	-22.5788
37.1798	-22.7471
37.4416	-22.9154
37.7034	-23.0837
37.9652	-23.2520
38.227	-23.4203
38.4888	-23.5886
38.7506	-23.7569
39.0124	-23.9252
39.2742	-24.0935
39.536	-24.2618
39.7978	-24.4301
40.0596	-24.5984
40.3214	-24.7667
40.5832	-24.9350
40.845	-25.1033
41.1068	-25.2716
41.3686	-25.4399
41.6304	-25.6082
41.8922	-25.7765
42.154	-25.9448
42.4158	-26.1131
42.6776	-26.2814
42.9394	-26.4497
43.2012	-26.6180
43.463	-26.7863
43.7248	-26.9546
43.9866	-27.1229
44.2484	-27.2912
44.5102	-27.4595
44.772	-27.6278
45.0338	-27.7961
45.2956	-27.9644
45.5574	-28.1327
45.8192	-28.3010
46.081	-28.4693
46.3428	-28.6376
46.6046	-28.8059
46.8664	-28.9742
47.1282	-29.1425
47.39	-29.3108
47.6518	-29.4791
47.9136	-29.6474
48.1754	-29.8157
48.4372	-29.9840
48.699	-30.1523
48.9608	-30.3206
49.2226	-30.4889
49.4844	-30.6572
49.7462	-30.8255
50.008	-30.9938
50.2698	-31.1621
50.5316	-31.3304
50.7934	-31.4987
51.0552	-31.6670
51.317	-31.8353
51.5788	-32.0036
51.8406	-32.1719
52.1024	-32.3402
52.3642	-32.5085
52.626	-32.6768
52.8878	-32.8451
53.1496	-33.0134
53.4114	-33.1817
53.6732	-33.3500
53.935	-33.5183
54.1968	-33.6866
54.4586	-33.8549
54.7204	-34.0232
54.9822	-34.1915
55.244	-34.3598
55.5058	-34.5281
55.7676	-34.6964
56.0294	-34.8647
56.2912	-35.0330
56.553	-35.2013
56.8148	-35.3696
57.0766	-35.5379
57.3384	-35.7062
57.6	-35.8745
57.8618	-36.0428
58.1236	-36.2111
58.3854	-36.3794
58.6472	-36.5477
58.909	-36.7160
59.1708	-36.8843
59.4326	-37.0526
59.6944	-37.2209
59.9562	-37.3892
60.218	-37.5575
60.4798	-37.7258
60.7416	-37.8941
61.0034	-38.0624
61.2652	-38.2307
61.527	-38.3990
61.7888	-38.5673
62.0506	-38.7356
62.3124	-38.9039
62.5742	-39.0722
62.836	-39.2405
63.0978	-39.4088
63.3596	-39.5771
63.6214	-39.7454
63.8832	-39.9137
64.145	-40.0820
64.4068	-40.2503
64.6686	-40.4186
64.9304	-40.5869
65.1922	-40.7552
65.454	-40.9235
65.7158	-41.0918
65.9776	-41.2601
66.2394	-41.4284
66.5012	-41.5967
66.763	-41.7650
67.0248	-41.9333
67.2866	-42.1016
67.5484	-42.2699
67.8102	-42.4382
68.072	-42.6065
68.3338	-42.7748
68.5956	-42.9431
68.8574	-43.1114
69.1192	-43.2797
69.381	-43.4480
69.6428	-43.6163
69.9046	-43.7846
70.1664	-43.9529
70.4282	-44.1212
70.69	-44.2895
70.9518	-44.4578
71.2136	-44.6261
71.4754	-44.7944
71.7372	-44.9627
72.0	-45.1310
72.2618	-45.2993
72.5236	-45.4676
72.7854	-45.6359
73.0472	-45.8042
73.309	-45.9725
73.5708	-46.1408
73.8326	-46.3091
74.0944	-46.4774
74.3562	-46.6457
74.618	-46.8140
74.8798	-46.9823
75.1416	-47.1506
75.4034	-47.3189
75.6652	-47.4872
75.927	-47.6555
76.1888	-47.8238
76.4506	-47.9921
76.7124	-48.1604
76.9742	-48.3287
77.236	-48.4970
77.4978	-48.6653
77.7596	-48.8336
78.0214	-49.0019
78.2832	-49.1702
78.545	-49.3385
78.8068	-49.5068
79.0686	-49.6751
79.3304	-49.8434
79.5922	-50.0117
79.854	-50.1800
80.1158	-50.3483
80.3776	-50.5166
80.6394	-50.6849
80.9012	-50.8532
81.163	-51.0215
81.4248	-51.1898
81.6866	-51.3581
81.9484	-51.5264
82.2102	-51.6947
82.472	-51.8630
82.7338	-52.0313
83.0	-52.1996
83.2618	-52.3679
83.5236	-52.5362
83.7854	-52.7045
84.0472	-52.8728
84.309	-53.0411
84.5708	-53.2094
84.8326	-53.3777
85.0944	-53.5460
85.3562	-53.7143
85.618	-53.8826
85.8798	-54.0509
86.1416	-54.2192
86.4034	-54.3875
86.6652	-54.5558
86.927	-54.7241
87.1888	-54.8924
87.4506	-55.0607
87.7124	-55.2290
87.9742	-55.3973
88.236	-55.5656
88.4978	-55.7339
88.7596	-55.9022
89.0214	-56.0705
89.2832	-56.2388
89.545	-56.4071
89.8068	-56.5754
90.0686	-56.7437
90.3304	-56.9120
90.5922	-57.0803
90.854	-57.2486
91.1158	-57.4169
91.3776	-57.5852
91.6394	-57.7535
91.9012	-57.9218
92.163	-58.0901
92.4248	-58.2584
92.6866	-58.4267
92.9484	-58.5950
93.2102	-58.7633
93.472	-58.9316
93.7338	-59.1000
94.0	-59.2683
94.2618	-59.4366
94.5236	-59.6049
94.7854	-59.7732
95.0472	-59.9415
95.309	-60.1098
95.5708	-60.2781
95.8326	-60.4464
96.0944	-60.6147
96.3562	-60.7830
96.618	-60.9513
96.8798	-61.1196
97.1416	-61.2879
97.4034	-61.4562
97.6652	-61.6245
97.927	-61.7928
98.1888	-61.9611
98.4506	-62.1294
98.7124	-62.2977
98.9742	-62.4660
99.236	-62.6343
99.4978	-62.8026
99.7596	-62.9709
100.0214	-63.1392
100.2832	-63.3075
100.545	-63.4758
100.8068	-63.6441
101.0686	-63.8124
101.3304	-63.9807
101.5922	-64.1490
101.854	-64.3173

EJEMPLO 7 Trazado de la gráfica de una ecuación polar

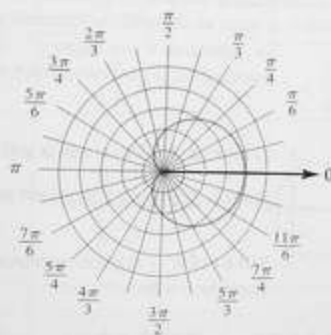
Traza la gráfica de la ecuación polar $r = 2 + 2 \cos \theta$.

SOLUCIÓN Como la función coseno decrece de 1 a -1 conforme θ varía de 0 a π , se deduce que r decrece de 4 a 0 en este intervalo de θ . En la siguiente tabla se muestran algunas soluciones de $r = 2 + 2 \cos \theta$, junto con aproximaciones de un lugar decimal para r .

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	4	$2 + \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{2}$	3	2	1	$2 - \sqrt{2}$	$2 - \sqrt{3}$	0
r (aprox.)	4	3.7	3.4	3	2	1	0.6	0.3	0

La localización de puntos de un plano $r\theta$ conduce a la mitad superior de la gráfica trazada en la figura 11. (Hemos empleado papel de gráfica de coordenadas polares, que contiene rectas que pasan por O a varios ángulos y círculos concéntricos con centros en el polo.)

Figura 11



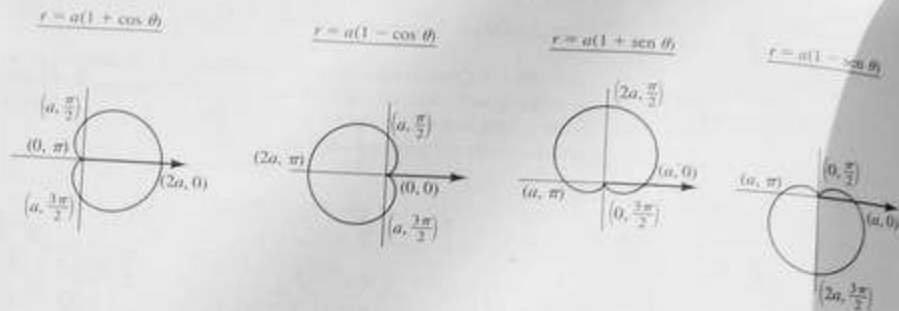
Si θ aumenta de π a 2π , entonces $\cos \theta$ aumenta de -1 a 1 y consecuentemente r aumenta de 0 a 4. La localización de puntos para $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ nos dará la mitad inferior de la gráfica.

Se puede obtener la misma gráfica si se toman otros intervalos de longitud 2π para θ .

La gráfica en forma de corazón del ejemplo 7 es un **cardioide**. En general, la gráfica de cualquiera de las ecuaciones polares de la figura 12, con $a \neq 0$, es un cardioide.

878 CAPÍTULO 11 TEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Figura 12



Si a y b no son cero, entonces las gráficas de las siguientes ecuaciones polares son caracoles o **limaçons**:

$$r = a + b \cos \theta \quad r = a + b \sin \theta$$

Observa que los caracoles especiales en los que $|a| = |b|$ son cardioides.

El empleo del intervalo $\theta \in [0, 2\pi]$ (o $[-\pi, \pi]$) suele ser suficiente para graficar ecuaciones polares. Para ecuaciones con gráficas más complejas, a veces es útil graficar mediante subintervalos de $[0, 2\pi]$ determinados por los valores de θ que hagan $r = 0$, es decir, los **valores del polo**. En el siguiente ejemplo demostraremos esta técnica.

EJEMPLO 8 Trazado de la gráfica de una ecuación polar

Traza la gráfica de la ecuación polar $r = 2 + 4 \cos \theta$.

SOLUCIÓN Primero encontramos los valores del polo si resolvemos la ecuación $r = 0$:

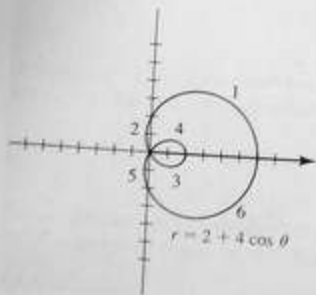
$$2 + 4 \cos \theta = 0 \quad \text{sea } r = 0$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \quad \text{despejar } \cos \theta$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \quad \text{despejar } \theta \text{ en } [0, 2\pi]$$

A continuación construimos una tabla de valores de θ de 0 a 2π , usando subintervalos determinados por los ángulos cuadrantes y los valores del polo. Los números de renglón del lado izquierdo corresponden a los números de la figura 13.

Figura 13



	θ	$\cos \theta$	$4 \cos \theta$	$r = 2 + 4 \cos \theta$
(1)	$0 \rightarrow \pi/2$	$1 \rightarrow 0$	$4 \rightarrow 0$	$6 \rightarrow 2$
(2)	$\pi/2 \rightarrow 2\pi/3$	$0 \rightarrow -1/2$	$0 \rightarrow -2$	$2 \rightarrow 0$
(3)	$2\pi/3 \rightarrow \pi$	$-1/2 \rightarrow -1/2$	$-2 \rightarrow -4$	$0 \rightarrow -2$
(4)	$\pi \rightarrow 4\pi/3$	$-1 \rightarrow -1/2$	$-4 \rightarrow -2$	$-2 \rightarrow 0$
(5)	$4\pi/3 \rightarrow 3\pi/2$	$-1/2 \rightarrow 0$	$-2 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 2$
(6)	$3\pi/2 \rightarrow 2\pi$	$0 \rightarrow 1$	$0 \rightarrow 4$	$2 \rightarrow 6$

El lector debe comprobar los números de entrada de la tabla con la figura, en especial para los renglones 3 y 4 (en los que el valor de r es negativo). La gráfica recibe el nombre de caracol con lazo interior.

En la tabla siguiente se resumen las cuatro categorías de caracoles de acuerdo con la relación entre a y b de las ecuaciones generales citadas.

Caracoles $a \pm b \cos \theta$, $a \pm b \sin \theta$ ($a > 0$, $b > 0$)

Nombre	Caracol con lazo interior	Cardioide	Caracol con una concavidad	Caracol convexo
Condición	$\frac{a}{b} < 1$	$\frac{a}{b} = 1$	$1 < \frac{a}{b} < 2$	$\frac{a}{b} \geq 2$
Gráfica específica				
Ecuación específica	$r = 2 + 4 \cos \theta$	$r = 4 + 4 \cos \theta$	$r = 6 + 4 \cos \theta$	$r = 8 + 4 \cos \theta$

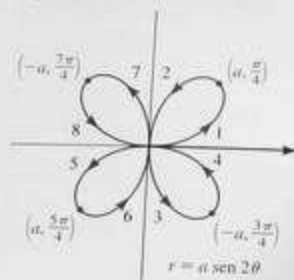
EJEMPLO 9 Trazado de la gráfica de una ecuación polar

Traza la gráfica de la ecuación polar $r = a \sin 2\theta$ para $a > 0$.

SOLUCIÓN La tabla siguiente contiene intervalos de θ y los valores correspondientes de r . Los números de renglón del lado izquierdo corresponden a los números de la figura 14.

(continúa)

Figura 14



	θ	2θ	$\text{sen } 2\theta$	$r = a \text{ sen } 2\theta$
(1)	$0 \rightarrow \pi/4$	$0 \rightarrow \pi/2$	$0 \rightarrow 1$	$0 \rightarrow a$
(2)	$\pi/4 \rightarrow \pi/2$	$\pi/2 \rightarrow \pi$	$1 \rightarrow 0$	$a \rightarrow 0$
(3)	$\pi/2 \rightarrow 3\pi/4$	$\pi \rightarrow 3\pi/2$	$0 \rightarrow -1$	$0 \rightarrow -a$
(4)	$3\pi/4 \rightarrow \pi$	$3\pi/2 \rightarrow 2\pi$	$-1 \rightarrow 0$	$-a \rightarrow 0$
(5)	$\pi \rightarrow 5\pi/4$	$2\pi \rightarrow 5\pi/2$	$0 \rightarrow 1$	$0 \rightarrow a$
(6)	$5\pi/4 \rightarrow 3\pi/2$	$5\pi/2 \rightarrow 3\pi$	$1 \rightarrow 0$	$a \rightarrow 0$
(7)	$3\pi/2 \rightarrow 7\pi/4$	$3\pi \rightarrow 7\pi/2$	$0 \rightarrow -1$	$0 \rightarrow -a$
(8)	$7\pi/4 \rightarrow 2\pi$	$7\pi/2 \rightarrow 4\pi$	$-1 \rightarrow 0$	$-a \rightarrow 0$

Debemos comprobar los números de entrada de la tabla con la figura, en especial de los renglones 3, 4, 7 y 8 (en los que el valor de r es negativo).

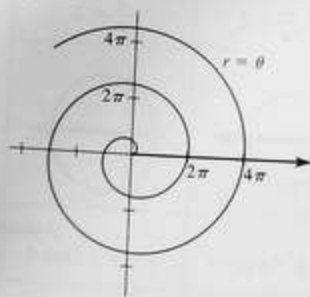
La gráfica del ejemplo 9 es una **rosa de cuatro hojas**. En general, una ecuación polar de la forma

$$r = a \text{ sen } n\theta \quad \text{o bien} \quad r = a \text{ cos } n\theta,$$

para cualquier entero positivo n mayor de 1 y cualquier número real a diferente de cero, tiene una gráfica formada por varios lazos que pasan por el origen. Si n es par, hay $2n$ lazos, y si n es impar, hay n lazos.

La gráfica de la ecuación polar $r = a\theta$ para cualquier número real a diferente de cero es una **espiral de Arquímedes**. El caso $a = 1$ se considera en el ejemplo que sigue.

Figura 15



EJEMPLO 10 Trazado de la gráfica de una espiral de Arquímedes

Traza la gráfica de la ecuación polar $r = \theta$ para $\theta \geq 0$.

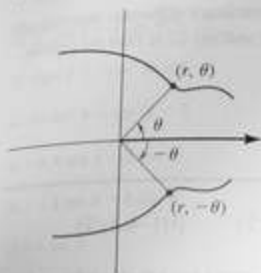
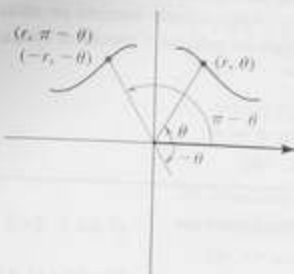
SOLUCIÓN La gráfica está formada por todos los puntos que tienen coordenadas polares de la forma $(c; c)$ para todo número real $c \geq 0$. Entonces, la gráfica contiene los puntos $(0, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, (π, π) , y así, sucesivamente. A medida que θ aumenta, r aumenta con la misma proporción y la espiral da vuelta alrededor del origen en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj, intersectando el eje polar en $0, 2\pi, 4\pi, \dots$ como se ilustra en la figura 15.

Si θ toma valores negativos, entonces a medida que θ decrece a través de valores negativos, la espiral resultante da vuelta alrededor del origen y es la imagen simétrica, con respecto al eje vertical, de la curva dibujada en la figura 15.

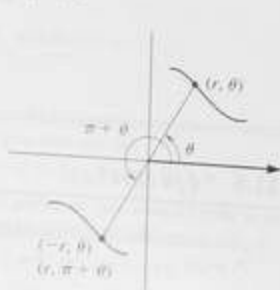
Si sobreponemos en un plano xy a un plano $r\theta$, entonces la gráfica de una ecuación polar puede ser simétrica respecto al eje x (eje polar), el eje y (recta $\theta = \pi/2$), o el origen (polo). En la figura 16 se ilustran algunas simetrías comunes. Estas simetrías se resumen en el resultado que se incluye a continuación.

Figura 16 Simetrías de las gráficas de ecuaciones polares

(a) Eje polar

(b) Recta $\theta = \pi/2$ 

(c) Polo

**Pruebas de simetría**

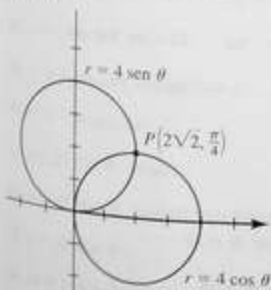
- (1) La gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica con respecto al eje polar si la sustitución de $-\theta$ por θ nos lleva a una ecuación equivalente.
- (2) La gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica con respecto a la recta vertical $\theta = \pi/2$ si la sustitución de (a) $\pi - \theta$ por θ o (b) $-r$ por r y $-\theta$ por θ nos lleva a una ecuación equivalente.
- (3) La gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica con respecto al polo si la sustitución de (a) $\pi + \theta$ por θ o (b) $-r$ por r nos lleva a una ecuación equivalente.

Para ilustrar lo anterior, como $\cos(-\theta) = \cos \theta$, la gráfica de la ecuación polar $r = 2 + 4 \cos \theta$ del ejemplo 8 es simétrica con respecto al eje polar, por la prueba 1. Como $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$, la gráfica del ejemplo 6 es simétrica con respecto a la recta $\theta = \pi/2$, por la prueba 2. La gráfica de la rosa de cuatro hojas del ejemplo 9 es simétrica con respecto al eje polar, la recta $\theta = \pi/2$, y el polo. Se pueden expresar otras pruebas para simetría, pero las que hemos citado están entre las más fáciles de aplicar.

A diferencia de la gráfica de una ecuación en x y y , la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ puede ser simétrica con respecto al eje polar, la recta $\theta = \pi/2$, o el polo sin satisfacer una de las pruebas precedentes para simetría. Esto es cierto debido a las muchas formas de especificar un punto en coordenadas polares.

Otra diferencia entre sistemas de coordenadas rectangulares y polares es que los puntos de intersección de dos gráficas no se pueden encontrar siempre al resolver simultáneamente las ecuaciones polares. Para ilustrar esto, a partir del ejemplo 6, la gráfica de $r = 4 \sin \theta$ es una circunferencia de diámetro 4 con centro en $(2, \pi/2)$ (figura 17). Análogamente, la gráfica de $r = 4 \cos \theta$ es un círculo de diámetro 4 con centro en $(2, 0)$ en el eje polar. Al referirnos a la figura 17, vemos que las coordenadas del punto de intersección $P(2\sqrt{2}, \pi/4)$ del primer cuadrante satisfacen ambas ecuaciones, pero, el origen O , que está en cada círculo, no puede encontrarse al resolver las

Figura 17



ecuaciones simultáneamente. Entonces, al buscar puntos de intersección de gráficas polares, a veces es necesario consultar las gráficas mismas, además de resolver las dos ecuaciones simultáneamente.

Otro método consiste en utilizar ecuaciones diferentes (equivalentes) para las gráficas. Consulta el ejercicio de análisis 12 al final del capítulo.

11.5 Ejercicios

- 1 ¿Qué coordenadas polares representan el mismo punto que $(3, \pi/3)$?

(a) $(3, 7\pi/3)$ (b) $(3, -\pi/3)$ (c) $(-3, 4\pi/3)$

(d) $(3, -2\pi/3)$ (e) $(-3, -2\pi/3)$ (f) $(-3, -\pi/3)$

- 2 ¿Qué coordenadas polares representan el mismo punto que $(4, -\pi/2)$?

(a) $(4, 5\pi/2)$ (b) $(4, 7\pi/2)$ (c) $(-4, -\pi/2)$

(d) $(4, -5\pi/2)$ (e) $(-4, -3\pi/2)$ (f) $(-4, \pi/2)$

Ejercicios 3 al 8: cambia las coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

3 (a) $(3, \pi/4)$ (b) $(-1, 2\pi/3)$

4 (a) $(5, 5\pi/6)$ (b) $(-6, 7\pi/3)$

5 (a) $(8, -2\pi/3)$ (b) $(-3, 5\pi/3)$

6 (a) $(4, -\pi/4)$ (b) $(-2, 7\pi/6)$

7 $(6, \arctan \frac{1}{2})$

8 $(10, \arcsin(-\frac{1}{3}))$

Ejercicios 9 al 12: cambia las coordenadas rectangulares a coordenadas polares con $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

9 (a) $(-1, 1)$ (b) $(-2\sqrt{3}, -2)$

10 (a) $(3\sqrt{3}, 3)$ (b) $(2, -2)$

11 (a) $(7, -7\sqrt{3})$ (b) $(5, 5)$

12 (a) $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ (b) $(-4, 4\sqrt{3})$

Ejercicios 13 al 26: encuentra una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación en x y y .

13 $x = -3$ 14 $y = 2$

15 $x^2 + y^2 = 16$ 16 $x^2 + y^2 = 2$

17 $y^2 = 6x$ 18 $x^2 = 8y$

19 $x + y = 3$ 20 $2y = -x + 4$

21 $2y = -x$ 22 $y = 6x$

23 $y^2 - x^2 = 4$

24 $xy = 8$

25 $(x-1)^2 + y^2 = 1$

26 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13$

Ejercicios 27 al 44: encuentra una ecuación en x y y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar. Utilízala como ayuda para trazar la gráfica en un plano $r\theta$.

27 $r \cos \theta = 5$ 28 $r \sin \theta = -2$

29 $r - 6 \sin \theta = 0$ 30 $r = 2$

31 $\theta = \pi/4$

32 $r = 4 \sec \theta$

33 $r^2(4 \sin^2 \theta - 9 \cos^2 \theta) = 36$

34 $r^2(\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta) = 16$

35. $r^2 \cos 2\theta = 1$

36. $r^2 \sin 2\theta = 4$

37. $r(\sin \theta - 2 \cos \theta) = 6$

38. $r(3 \cos \theta - 4 \sin \theta) = 12$

39. $r(\sin \theta + r \cos^2 \theta) = 1$

40. $r(r \sin^2 \theta - \cos \theta) = 3$

41. $r = 8 \sin \theta - 2 \cos \theta$

42. $r = 2 \cos \theta - 4 \sin \theta$

43. $r = \tan \theta$

44. $r = 6 \cot \theta$

Ejercicios 45 al 78: traza la gráfica de la ecuación polar.

45. $r = 5$

46. $r = -2$

47. $\theta = -\pi/6$

48. $\theta = \pi/4$

49. $r = 3 \cos \theta$

50. $r = -2 \sin \theta$

51. $r = 4 \cos \theta + 2 \sin \theta$

52. $r = 6 \cos \theta - 2 \sin \theta$

53. $r = 4(1 - \sin \theta)$

54. $r = 3(1 + \cos \theta)$

55. $r = -6(1 + \cos \theta)$

56. $r = 2(1 + \sin \theta)$

57. $r = 2 + 4 \sin \theta$

58. $r = 1 + 2 \cos \theta$

59. $r = \sqrt{3} - 2 \sin \theta$

60. $r = 2\sqrt{3} - 4 \cos \theta$

61. $r = 2 - \cos \theta$

62. $r = 5 + 3 \sin \theta$

63. $r = 4 \csc \theta$

64. $r = -3 \sec \theta$

65. $r = 8 \cos 3\theta$

66. $r = 2 \sin 4\theta$

67. $r = 3 \sin 2\theta$

68. $r = 8 \cos 5\theta$

69. $r^2 = 4 \cos 2\theta$ (lemniscata)

70. $r^2 = -16 \sin 2\theta$

71. $r = 2^{\theta}, \theta \geq 0$ (espiral)

72. $r = e^{2\theta}, \theta \geq 0$ (espiral logarítmica)

73. $r = 2\theta, \theta \geq 0$

74. $r\theta = 1, \theta > 0$ (espiral)

75. $r = 6 \sec^2(\theta/2)$

76. $r = -4 \cos^2(\theta/2)$

77. $r = 2 + 2 \sec \theta$ (conchoide)

78. $r = 1 - \csc \theta$

79. Si $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ son puntos en un plano $r\theta$, utiliza la ley de cosenos para demostrar que

$$[d(P_1, P_2)]^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1).$$

80. Demuestra que la gráfica de cada ecuación polar es un círculo y encuentra su centro y su radio.

(a) $r = a \sin \theta, a \neq 0$ (b) $r = b \cos \theta, b \neq 0$

(c) $r = a \sin \theta + b \cos \theta, a \neq 0$ y $b \neq 0$

Ejercicios 81 y 82: consulta el ejercicio 81 de la sección 6.6. Supongamos que una estación tiene dos torres emisoras ubicadas a lo largo de una línea norte-sur, y que las torres están separadas por una distancia $\frac{1}{2}\lambda$, donde λ es la longitud de onda de la señal de transmisión de la estación. Entonces, la intensidad I de la señal en la dirección θ se puede expresar por la ecuación dada, donde I_0 es la intensidad máxima de la señal.(a) Localiza I empleando coordenadas polares con $I_0 = 5$ para $\theta \in [0, 2\pi]$.

(b) Determina las direcciones en que la señal de radio tiene intensidad máxima y mínima.

81. $I = \frac{1}{2}I_0[1 + \cos(\pi \sin \theta)]$

82. $I = \frac{1}{2}I_0[1 + \cos(\pi \sin 2\theta)]$

Ejercicios 83 y 84: grafica la ecuación polar para los valores indicados de θ , y utiliza la gráfica para determinar simetrías.

83. $r = 2 \sec^2 \theta \tan^2 \theta, -\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$

84. $r = \frac{4}{1 + \sin^2 \theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Ejercicios 85 y 86: grafica las ecuaciones polares en el mismo plano coordenado, y estima los puntos de intersección de las gráficas.

85. $r = 8 \cos 3\theta, r = 4 - 2.5 \cos \theta$

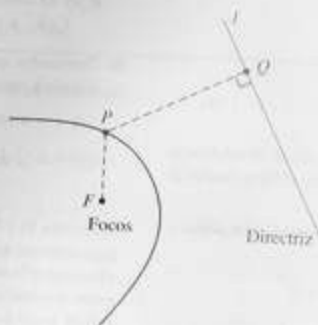
86. $r = 2 \sin^2 \theta, r = \frac{1}{2}(\theta + \cos^2 \theta)$

11.6

Ecuaciones polares de cónicas

En el teorema siguiente se combinan las definiciones de parábolas, elipses e hipérbolas en una descripción unificada de las secciones cónicas. La constante e del enunciado del teorema es la **excentricidad** de la cónica. El punto F es un **foco** de la cónica, y la línea l es una **directriz**. Posibles posiciones de F y l se ilustran en la figura 1.

Figura 1



Teorema de cónicas

Sean F un punto fijo y l una línea fija en un plano. El conjunto de todos los puntos P del plano, tales que la razón $d(P, F) / d(P, Q)$, es una constante positiva e con $d(P, Q)$ la distancia de P a l , es una sección cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$ y una hipérbola si $e > 1$.

DEMOSTRACIÓN Si $e = 1$, entonces, $d(P, F) = d(P, Q)$ y, por definición, la cónica resultante es una parábola con foco F y directriz l .

Supongamos en seguida que $0 < e < 1$. Es conveniente introducir un sistema de coordenadas polares en el plano con F como el polo y l perpendicular al eje polar en el punto $D(d, 0)$, con $d > 0$, como se ilustra en la figura 2. Si $P(r, \theta)$ es un punto del plano tal que $d(P, F) / d(P, Q) = e < 1$, entonces P está a la izquierda de l . Sea C la proyección de P sobre el eje polar. Como

$$d(P, F) = r \text{ y } d(P, Q) = d - r \cos \theta,$$

se deduce que P satisface la condición del teorema si y sólo si se cumplen las siguientes ecuaciones:

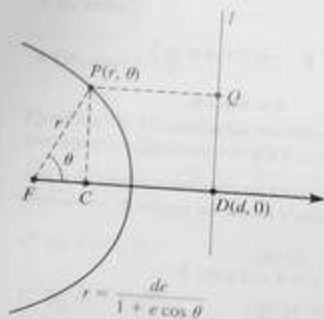
$$\frac{r}{d - r \cos \theta} = e$$

$$r = de - er \cos \theta$$

$$r(1 + e \cos \theta) = de$$

$$r = \frac{de}{1 + e \cos \theta}$$

Figura 2



Se obtienen las mismas ecuaciones si $e = 1$, pero no hay un punto (r, θ) sobre las gráficas si $1 + \cos \theta = 0$.

Una ecuación en x y y correspondiente a $r = de - er \cos \theta$ es

$$\sqrt{x^2 + y^2} = de - ex.$$

Al elevar al cuadrado ambos lados y reacomodando términos resulta

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = d^2e^2.$$

Al completar el cuadro y simplificar, se obtiene

$$\left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Finalmente, si dividimos ambos lados entre $d^2e^2/(1 - e^2)^2$ nos da una ecuación de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

con $h = -de^2/(1 - e^2)$. En consecuencia, la gráfica es una elipse con centro en el punto $(h, 0)$ en el eje x y con

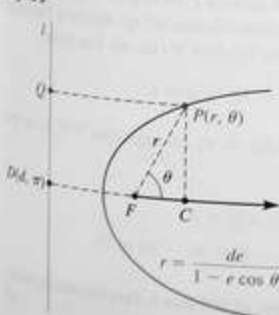
$$a^2 = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2} \quad \text{y} \quad b^2 = \frac{d^2e^2}{1 - e^2}.$$

Como

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2},$$

obtenemos $c = de^2/(1 - e^2)$ y, por tanto, $|h| = c$. Esto demuestra que F es un foco de la elipse. También se deduce que $e = c/a$. Una prueba semejante puede darse para el caso en que $e > 1$.

Figura 3

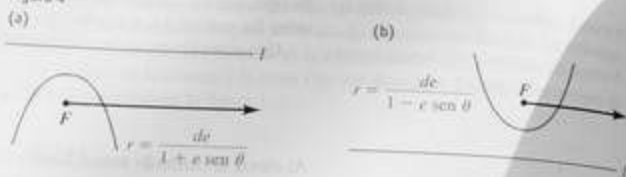


También podemos demostrar que toda cónica que no sea degenerada puede describirse por medio del enunciado del teorema sobre cónicas. Esto nos da una fórmula de secciones cónicas que es equivalente a la empleada previamente. Como el teorema incluye los tres tipos de cónicas, a veces se les considera como una definición para las secciones cónicas.

Si hubiéramos escogido el foco F a la derecha de la directriz, como se ilustra en la figura 3 (con $d > 0$), entonces hubiera resultado la ecuación $r = de/(1 - e \cos \theta)$. (Observemos el signo menos en lugar del signo más.) Hay otros cambios de signo si se deja que d sea negativa.

Si hubiéramos tomado l paralela al eje polar pasando por uno de los puntos $(d, \pi/2)$ o $(d, 3\pi/2)$, como se ilustra en la figura 4, entonces las ecuaciones correspondientes hubieran tenido $\sin \theta$ en lugar de $\cos \theta$.

Figura 4



Nuestro análisis se resume en el teorema que se incluye a continuación.

Teorema sobre ecuaciones polares de cónicas

Una ecuación polar que tenga una de las cuatro formas

$$r = \frac{de}{1 \pm e \cos \theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{de}{1 \pm e \sin \theta}$$

es una sección cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$ o una hipérbola si $e > 1$.



EJEMPLO 1 Trazado de la gráfica de una ecuación polar de una elipse
Describe y traza la gráfica de la ecuación polar

$$r = \frac{10}{3 + 2 \cos \theta}$$

SOLUCIÓN Primero dividimos entre 3 el numerador y el denominador de la fracción para obtener el término constante 1 en el denominador:

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 + \frac{2}{3} \cos \theta}$$

Esta ecuación tiene una de las formas del teorema precedente, con $e = \frac{2}{3}$. Por tanto, la gráfica es una elipse con un foco F en el polo y eje mayor a lo largo del eje polar. Encontramos los puntos finales del eje mayor si hacemos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Esto nos da los puntos $V(2, 0)$ y $V'(10, \pi)$. Por tanto,

$$2a = d(V', V) = 12, \text{ o } a = 6.$$

El centro de la elipse es el punto medio $(4, \pi)$ del segmento $V'V$. Si se usa el hecho de que $e = c/a$, obtenemos

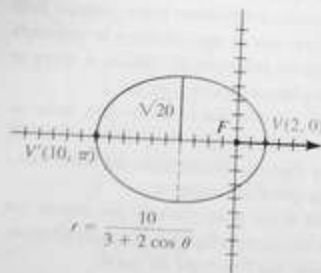
$$c = ae = 6\left(\frac{2}{3}\right) = 4.$$

Esto es

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20.$$

Entonces, $b = \sqrt{20}$. La gráfica aparece en la figura 5. Para referencia, hemos puesto un sistema coordenado xy sobre el sistema polar.

Figura 5



EJEMPLO 2 Trazado de la gráfica de una ecuación polar de una hipérbola
Describe y traza la gráfica de la ecuación polar

$$r = \frac{10}{2 + 3 \sin \theta}$$

SOLUCIÓN Para expresar la ecuación en la forma correcta, dividimos entre 2 el numerador y el denominador de la fracción.

$$r = \frac{5}{1 + \frac{3}{2} \sin \theta}$$


Entonces, $e = \frac{3}{2}$ y, por el teorema sobre ecuaciones polares de cónicas, la gráfica es una hipérbola con un foco en el polo. La expresión $\sin \theta$ nos dice que el eje transverso de la hipérbola es perpendicular al eje polar. Para hallar los vértices, hacemos $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$ en la ecuación dada. Esto nos da los puntos $V(2, \pi/2)$ y $V'(-10, 3\pi/2)$. Por tanto,

$$2a = d(V, V') = 8, \text{ o } a = 4.$$

Los puntos $(5, 0)$ y $(5, \pi)$ en la gráfica se pueden usar para trazar la rama inferior de la hipérbola. La rama superior se obtiene por simetría, como se ilustra en la figura 6. Si deseamos más precisión o más información, calculamos

$$c = ae = 4\left(\frac{3}{2}\right) = 6$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20.$$

Las asíntotas se pueden construir entonces en la forma acostumbrada. 

EJEMPLO 3 Trazado de la gráfica de una ecuación polar de una parábola

Traza la gráfica de la ecuación polar

$$r = \frac{15}{4 - 4 \cos \theta}$$

SOLUCIÓN Para obtener la forma correcta, dividimos entre 4 el numerador y el denominador:

$$r = \frac{\frac{15}{4}}{1 - \cos \theta}$$

Consecuentemente, $e = 1$ y, por el teorema sobre ecuaciones polares de cónicas, la gráfica es una parábola con foco en el polo. Podemos obtener un trazo si localizamos los puntos que corresponden a los ángulos cuadrantales indicados en la tabla siguiente.

(continúa)

Figura 6

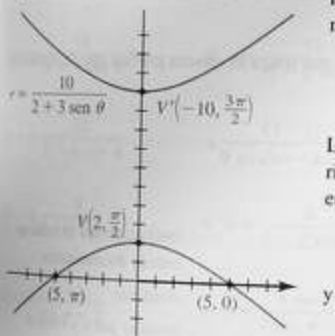
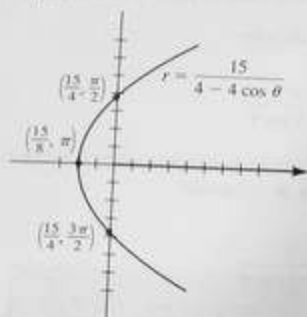


Figura 7



θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	Indefinida	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{4}$

Observamos que no hay punto sobre la gráfica correspondiente a $\theta = 0$, puesto que el denominador $1 - \cos \theta$ es 0 para ese valor. Al localizar los tres puntos y usar el hecho de que la gráfica es una parábola con foco en el polo, obtenemos el trazo de la figura 7.

Si deseamos sólo un trazo aproximado de una cónica, entonces se recomienda la técnica empleada en el ejemplo 3. Para usar este método, localizamos (si es posible) puntos correspondientes a $\theta = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$. Estos puntos, junto con el tipo de cónica (obtenido del valor de la excentricidad e), fácilmente llevan al trazo.



EJEMPLO 4 Expresiones de una ecuación polar de una cónica en términos de x y y

Encuentra una ecuación en x y y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar

$$r = \frac{15}{4 - 4 \cos \theta}$$

SOLUCIÓN

$$r(4 - 4 \cos \theta) = 15$$

$$4r - 4r \cos \theta = 15$$

$$4(\pm\sqrt{x^2 + y^2}) - 4x = 15$$

$$4(\pm\sqrt{x^2 + y^2}) = 15 + 4x$$

$$16(x^2 + y^2) = 225 + 120x + 16x^2$$

$$16y^2 = 225 + 120x$$

multiplicar por el mínimo común denominador

distribuir

sustituir por r y $r \cos \theta$

aislar el término radical

eleva al cuadrado ambos lados

simplificar

Podemos escribir la última ecuación como $x = \frac{16}{120}y^2 - \frac{225}{120}$ o, simplificada, $x = \frac{2}{15}y^2 - \frac{15}{8}$. Reconocemos esta ecuación como la de una parábola con vértice $V(-\frac{15}{8}, 0)$ y que se abre a la derecha. Su gráfica sobre un sistema coordenado xy sería el mismo que la gráfica de la figura 7.

EJEMPLO 5 Búsqueda de una ecuación polar de una cónica que satisfaga condiciones prescritas

Encuentra una ecuación polar de la cónica con un foco en el polo, excentricidad $e = \frac{1}{2}$, y directriz $r = -3 \sec \theta$.

SOLUCIÓN La ecuación $r = -3 \sec \theta$ de la directriz puede escribirse como $r \cos \theta = -3$, que es equivalente a $x = -3$ en un sistema de coordenadas

rectangulares. Esto nos da la situación ilustrada en la figura 3, con $d = 3$. Por tanto, una ecuación polar tiene una forma

$$r = \frac{de}{1 - e \cos \theta}$$

Ahora sustituimos $d = 3$ y $e = \frac{1}{2}$:

$$r = \frac{3(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2} \cos \theta} \quad \text{o lo que es equivalente,} \quad r = \frac{3}{2 - \cos \theta}$$

11.6 Ejercicios

Ejercicios 1 al 12: encuentra la excentricidad y clasifica la cónica. Traza la gráfica y marca los vértices.

$$1. r = \frac{12}{6 + 2 \sin \theta}$$

$$2. r = \frac{12}{6 - 2 \sin \theta}$$

$$3. r = \frac{12}{2 - 6 \cos \theta}$$

$$4. r = \frac{12}{2 + 6 \cos \theta}$$

$$5. r = \frac{3}{2 + 2 \cos \theta}$$

$$6. r = \frac{3}{2 - 2 \sin \theta}$$

$$7. r = \frac{4}{\cos \theta - 2}$$

$$8. r = \frac{4 \sec \theta}{2 \sec \theta - 1}$$

$$9. r = \frac{6 \csc \theta}{2 \csc \theta + 3}$$

$$10. r = \frac{8 \csc \theta}{2 \csc \theta - 5}$$

$$11. r = \frac{4 \csc \theta}{1 + \csc \theta}$$

$$12. r = \csc \theta (\csc \theta - \cot \theta)$$

Ejercicios 13 al 24: encuentra ecuaciones en x y y para las ecuaciones polares de los ejercicios 1 al 12.

Ejercicios 25 al 32: encuentra una ecuación polar de la cónica con foco en el polo que tenga la excentricidad y la ecuación de la directriz dadas.

$$25. e = \frac{1}{2}, \quad r = 2 \sec \theta$$

$$26. e = 1, \quad r \cos \theta = 5$$

$$27. e = \frac{1}{2}, \quad r \cos \theta = -3$$

$$28. e = 3, \quad r = -4 \sec \theta$$

$$29. e = 1, \quad r \sin \theta = -2$$

$$30. e = 4, \quad r = -3 \csc \theta$$

$$31. e = \frac{2}{3}, \quad r = 4 \csc \theta$$

$$32. e = \frac{1}{4}, \quad r \sin \theta = 5$$

Ejercicios 33 y 34: encuentra una ecuación polar de la parábola con foco en el polo y el vértice dado.

$$33. V\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$34. V(5, 0)$$

Ejercicios 35 y 36: una elipse tiene un foco en el polo con el centro C y el vértice V dados. Encuentra (a) la excentricidad y (b) una ecuación polar para la elipse.

$$35. C\left(3, \frac{\pi}{2}\right), V\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$36. C(2, \pi), V(1, 0)$$

37. Primera ley de Kepler La primera ley de Kepler sostiene que los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos. Para hallar una ecuación de una órbita, coloca el polo O en el centro del Sol y el eje polar a lo largo del eje mayor de la elipse (ve la figura).

(a) Demuestra que una ecuación de la órbita es

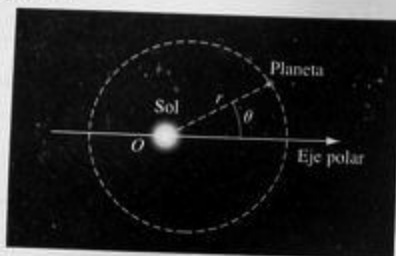
$$r = \frac{(1 - e^2)a}{1 - e \cos \theta}$$

donde e es la excentricidad y $2a$ es la longitud del eje mayor.

- (b) La distancia del perihelio r_{per} y la distancia del afelio r_{af} están definidas como las distancias mínima y máxima, respectivamente, de un planeta al Sol. Demuestra que

$$r_{\text{per}} = a(1 - e) \quad \text{y} \quad r_{\text{af}} = a(1 + e).$$

Ejercicio 37



- 38 Primera Ley de Kepler Consulta el ejercicio 37. Plutón se mueve en una órbita elíptica de excentricidad 0.249. Si la distancia del perihelio es de 29.62 UA, encuentra una ecuación polar para la órbita y estima la distancia del afelio.

Ejercicios 39 al 42: se pueden usar ecuaciones polares de cónicas para describir el movimiento de cometas. Estas trayectorias se pueden graficar empleando la ecuación polar

$$r = \frac{r_{\text{per}}(1 + e)}{1 - e \cos \theta}.$$

donde e es la excentricidad de la cónica y r_{per} es la distancia del perihelio medida en UA.

- (a) Para cada cometa, determina si su trayectoria es elíptica, parabólica o hiperbólica.
 (b) La órbita de Saturno tiene $r_{\text{per}} = 9.006$ y $e = 0.056$. Grafica el movimiento del cometa y la órbita de Saturno en la pantalla especificada.

39 Cometa Halley $r_{\text{per}} = 0.5871$, $e = 0.9673$,
 $[-36, 36, 3]$ por $[-24, 24, 3]$

40 Cometa Encke $r_{\text{per}} = 0.3317$, $e = 0.8499$,
 $[-18, 18, 3]$ por $[-12, 12, 3]$

41 Cometa 1959 III $r_{\text{per}} = 1.251$, $e = 1.003$,
 $[-18, 18, 3]$ por $[-12, 12, 3]$

42 Cometa 1973.99 $r_{\text{per}} = 0.142$, $e = 1.000$,
 $[-18, 18, 3]$ por $[-12, 12, 3]$

- 43 Órbita de la Tierra La menor distancia de la Tierra al Sol es de unas 91 405 950 millas y la mayor distancia entre ambos es de 94 505 420 millas aproximadamente. Tomando como referencia las fórmulas del ejercicio 37, encuentra fórmulas para a y e en términos de r_{per} y r_{af} .

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 11

Ejercicios 1 al 16: encuentra los vértices y focos de la cónica y traza su gráfica.

1 $y^2 = 64x$

2 $y = 8x^2 + 32x + 33$

3 $9y^2 = 144 - 16x^2$

4 $9y^2 = 144 + 16x^2$

5 $x^2 - y^2 - 4 = 0$

6 $25x^2 + 36y^2 = 1$

7 $25y = 100 - x^2$

8 $3x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 19 = 0$

9 $x^2 - 9y^2 + 8x + 90y - 210 = 0$

10 $x = 2y^2 + 8y + 3$

11 $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$

12 $4x^2 - y^2 - 40x - 8y + 88 = 0$

13 $y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$

14 $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$

15 $x^2 - 9y^2 + 8x + 7 = 0$

16 $y^2 - 2x^2 + 6y + 8x - 3 = 0$

Ejercicios 17 y 18: encuentra la ecuación estándar de una parábola con un eje vertical que satisfaga las condiciones dadas.

17 Intersecciones en $x = -10$ y -4 , intersección en $y = 80$

18 Intersecciones en $x = -11$ y 3 , pasa por $(2, 39)$

Ejercicios 19 al 28: encuentra una ecuación para la cónica que satisfaga las condiciones dadas.

19 Hipérbola, con vértices $V(0, \pm 7)$ y puntos extremos del eje conjugado $(\pm 3, 0)$

20 Parábola, con foco $F(-4, 0)$ y directriz $x = 4$

21 Parábola, con foco $F(0, -10)$ y directriz $y = 10$

22 Parábola, con vértice en el origen, simétrica al eje x y que pasa por el punto $(5, -1)$

23 Elipse, con vértices $V(0, \pm 10)$ y focos $F(0, \pm 5)$

24 Hipérbola, con focos $F(\pm 10, 0)$ y vértices $V(\pm 5, 0)$

25 Hipérbola, con vértices $V(0, \pm 6)$ y asíntotas $y = \pm 9x$

26 Elipse, con focos $F(\pm 2, 0)$ y que pasa por el punto $(2, \sqrt{2})$

27 Elipse, con excentricidad $\frac{2}{3}$ y puntos extremos de eje menor $(\pm 5, 0)$

28 Elipse, con excentricidad $\frac{3}{4}$ y focos $F(\pm 12, 0)$

29 (a) Determina A de modo que el punto $(2, -3)$ esté en la cónica $Ax^2 + 2y^2 = 4$.

(b) La cónica, ¿es una elipse o una hipérbola?

30 Si un cuadrado con lados paralelos a los ejes de coordenadas está inscrito en la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, expresa el área A del cuadrado en términos de a y b .

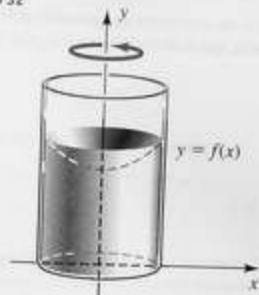
31 Encuentra la ecuación estándar del círculo que tiene centro en el foco de la parábola $y = \frac{1}{8}x^2$ y pasa por el origen.

32 Distancia focal y rapidez angular Un recipiente cilíndrico, parcialmente lleno de mercurio, se hace rotar alrededor de su eje de modo que la rapidez angular de cada sección transversal es ω radianes/s. Por física, la función f , cuya gráfica genera la superficie interna del mercurio (consulta la figura), está dada por

$$f(x) = \frac{1}{24}\omega^2 x^2 + k,$$

donde k es una constante. Determina la rapidez angular ω que resulta en una distancia focal de 2 pies.

Ejercicio 32



Ejercicios 33 al 37: encuentra una ecuación en x y y cuya gráfica contenga los puntos en la curva C . Traza la gráfica de C , e indica la orientación.

33 $x = 3 + 4t, \quad y = t - 1; \quad -2 \leq t \leq 2$

34 $x = \sqrt{-t}, \quad y = t^2 - 4; \quad t \leq 0$

35 $x = \cos^2 t - 2, \quad y = \sin t + 1; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

36 $x = \sqrt{t}, \quad y = 2^{-t}; \quad t \geq 0$

37 $x = \frac{1}{t} + 1, \quad y = \frac{2}{t} - t; \quad 0 < t \leq 4$

38 Las curvas C_1 , C_2 , C_3 y C_4 están dadas paramétricamente para t en \mathbb{R} . Traza sus gráficas y analiza sus similitudes y diferencias.

$C_1: x = t, \quad y = \sqrt{16 - t^2}$

$C_2: x = -\sqrt{16 - t}, \quad y = -\sqrt{t}$

$C_3: x = 4 \cos t, \quad y = 4 \sin t$

$C_4: x = e^t, \quad y = -\sqrt{16 - e^{2t}}$

39. Consulta las ecuaciones en (1) del ejemplo 6 en la sección 11.4. Encuentra el alcance y la altura máxima para $s = 1024$, $\alpha = 30^\circ$ y $h = 5120$.

40. Escribe dos puntos coordenados polares que representen el mismo punto $(2, \pi/4)$.

41. Cambia $(5, 7\pi/4)$ a coordenadas rectangulares.

42. Cambia $(2\sqrt{3}, -2)$ a coordenadas polares con $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

Ejercicios 43 al 46: encuentra una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación en x y y .

43. $y^2 = 4x$

44. $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$

45. $2x - 3y = 8$

46. $x^2 + y^2 = 2xy$

Ejercicios 47 al 52: encuentra una ecuación en x y y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar.

47. $r^2 = \tan \theta$

48. $r = 2 \cos \theta + 3 \sin \theta$

49. $r^2 = 4 \sin 2\theta$

50. $\theta = \sqrt{3}$

51. $r = 5 \sec \theta + 3r \sec \theta$

52. $r^2 \sin \theta = 6 \csc \theta + r \cot \theta$

Ejercicios 53 al 64: traza la gráfica de la ecuación polar.

53. $r = -4 \sin \theta$

54. $r = 8 \sec \theta$

55. $r = 3 \sin 5\theta$

56. $r = 6 - 3 \cos \theta$

57. $r = 3 - 3 \sin \theta$

58. $r = 2 + 4 \cos \theta$

59. $r^2 = 9 \sin 2\theta$

60. $2r = \theta$

61. $r = \frac{8}{1 - 3 \sin \theta}$

62. $r = 6 - r \cos \theta$

63. $r = \frac{6}{3 + 2 \cos \theta}$

64. $r = \frac{-6 \csc \theta}{1 - 2 \csc \theta}$

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 11

1. En una parábola, el segmento de recta que pasa por el foco, perpendicular al eje, y que corta a la parábola, se denomina *cuerdas focal* o *lado recto*. La distancia de la cuerda focal se denomina *ancho focal*. Encuentra una fórmula para el ancho focal w en términos de la distancia focal $|p|$.

2. En la gráfica de una hipérbola con centro en el origen O , traza un círculo con centro en el origen y radio $r = d(O, F)$, donde F denota un foco de la hipérbola. ¿Qué relación observas?

3. Un punto $P(x, y)$ está en una elipse si y sólo si

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a.$$

Si $b^2 = a^2 - c^2$, obtén una ecuación general de una elipse; es decir,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4. Un punto $P(x, y)$ está en una hipérbola si y sólo si

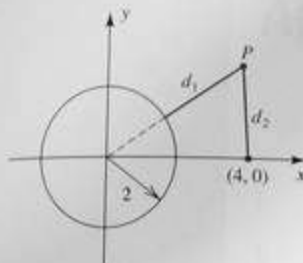
$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a.$$

Si $c^2 = a^2 + b^2$ halla una ecuación general de una hipérbola; es decir,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

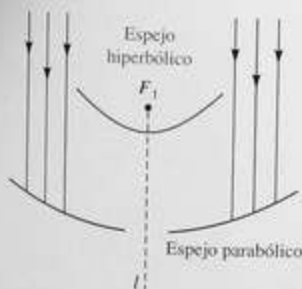
5 Un punto $P(x, y)$ está a la misma distancia de $(4, 0)$ que del círculo $x^2 + y^2 = 4$, como se ilustra en la figura. Demuestra que la colección de todos estos puntos forma una rama de hipérbola y traza su gráfica.

Ejercicio 5



6 Diseño de un telescopio. Consulta el ejercicio 64 de la sección 11.3. Supón que una ecuación de la rama superior de la hipérbola (que se muestra) es $y = \frac{a}{b} \sqrt{x^2 + b^2}$ y que una ecuación de la parábola es $y = dx^2$. Encuentra d en términos de a y b .

Ejercicio 6



7 Maximización del alcance de un proyectil Como en el ejemplo 6 de la sección 11.4, supón que se dispara un proyectil a 1024 pies/s desde una altura de 2304 pies. Calcula el ángulo que maximiza el alcance.

8 Generalización para la trayectoria de un proyectil Si $h = 0$, las ecuaciones para (1) del ejemplo 6 en la sección 11.4 se convierten en

$$x(t) = (v \cos \alpha)t, \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v \sin \alpha)t; \quad t \geq 0.$$

Demuestra que cada afirmación es verdadera.

(a) El proyectil llega a tierra cuando

$$t = \frac{2v \sin \alpha}{g}.$$

(b) El alcance r del proyectil es

$$r = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

(c) El ángulo que maximiza el alcance r es de 45° .

(d) La trayectoria del proyectil en coordenadas rectangulares es

$$y = -\frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x.$$

(e) El tiempo al que alcanza la altura máxima es

$$t = \frac{v \sin \alpha}{g}.$$

(f) La altura máxima que se alcanza es

$$y = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

9 Investigación de una figura de Lissajous Encuentra una ecuación en x y y para la curva del ejemplo 7 en la sección 11.4 dada por

$$x = \sin 2t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

10 Traza las gráficas de $r = f(\theta) = 2 + 4 \cos \theta$, $r = f(\theta - \alpha)$ y $r = f(\theta + \alpha)$ para $\alpha = \pi/4$. Intenta con tantos valores de α como sea necesario para generalizar los resultados concernientes a las gráficas de $r = f(\theta - \alpha)$ y $r = f(\theta + \alpha)$, donde $\alpha > 0$.

11 Rosas generalizadas Examina la gráfica de $r = \sin n\theta$ para valores impares de n y valores pares de n . Deriva una expresión para el ángulo de hoja (el número de grados entre valores consecutivos de polo). ¿Cuáles otras generalizaciones observas? ¿Cómo cambian las gráficas si se sustituye el seno por el coseno?

12 En la figura 17 de la sección 11.5 se muestran los círculos $r = 4 \sin \theta$ y $r = 4 \cos \theta$. Resuelve este sistema de ecuaciones para soluciones (r, θ) . Luego, encuentra ecuaciones en x y y que tengan las mismas gráficas que las ecuaciones polares. Resuelve este sistema para soluciones (x, y) , conviértelas en soluciones (r, θ) y explica por qué su respuesta al primer sistema no revela la solución en el polo.

Apéndices

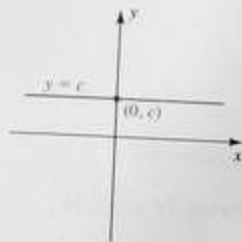
- I Gráficas comunes y sus ecuaciones
- II Resumen de transformaciones de gráficas
- III Gráficas de las funciones trigonométricas y sus inversas
- IV Valores de las funciones trigonométricas de ángulos especiales sobre una circunferencia unitaria

la figura 1, donde el símbolo \square especifica el ángulo de 90° . Al usar las longitudes a , b y c de los lados del triángulo rectángulo, obtenemos:

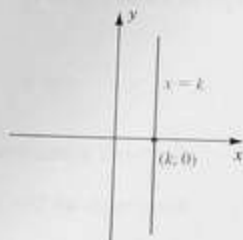
APÉNDICE I

Gráficas comunes y sus ecuaciones

(Las gráficas de las cónicas aparecen al final del libro.)



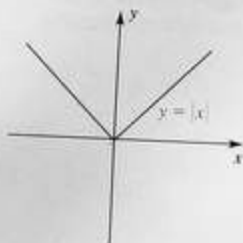
Recta horizontal; función constante



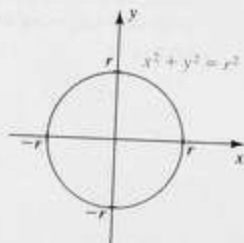
Recta vertical



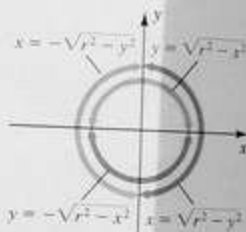
Función identidad



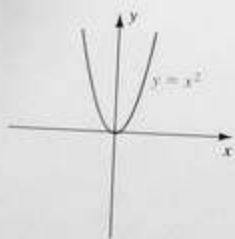
Función valor absoluto



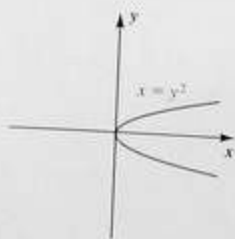
Circunferencia con centro $(0, 0)$ y radio r



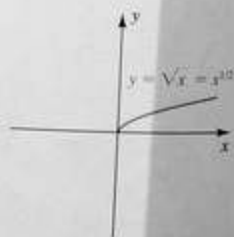
Semicírculos



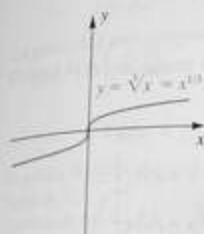
Parábola con eje vertical; función cuadrática



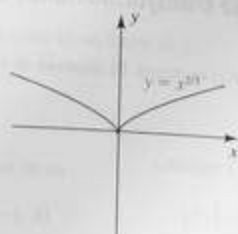
Parábola con eje horizontal



Función raíz cuadrada



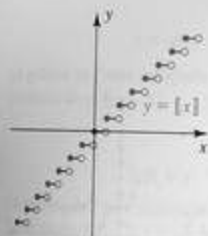
Función raíz cúbica



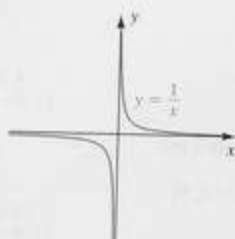
Gráfica con cúspide en el origen



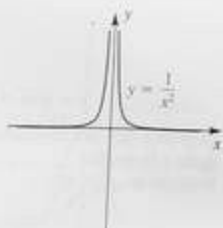
Función cúbica



Función máximo entero



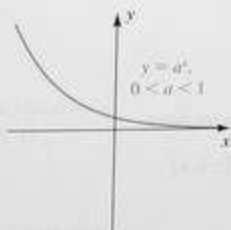
Función recíproca



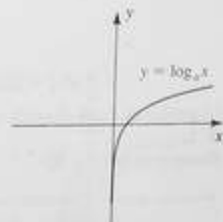
Función racional



Función de crecimiento exponencial
(incluye la función exponencial
natural)



Función de decaimiento exponencial



Función logarítmica
(incluye las funciones
logarítmicas común
y natural)

APÉNDICE II

Resumen de transformaciones de gráficas

En cada figura se muestra la gráfica de $y = f(x)$ en negro. El dominio de f es $[-1, 3]$ y la imagen de f es $[-4, 3]$.

$$y = g(x) = f(x) + 3$$

La gráfica de f está desplazada verticalmente 3 unidades hacia arriba.

Dominio de g : $[-1, 3]$ Imagen de g : $[-1, 6]$

$$y = h(x) = f(x) - 4$$

La gráfica de f está desplazada verticalmente 4 unidades hacia abajo.

Dominio de h : $[-1, 3]$ Imagen de h : $[-8, -1]$



$$y = g(x) = f(x - 3)$$

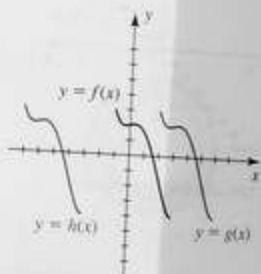
La gráfica de f está desplazada horizontalmente 3 unidades a la derecha.

Dominio de g : $[2, 6]$ Imagen de g : $[-4, 3]$

$$y = h(x) = f(x + 6)$$

La gráfica de f está desplazada horizontalmente 6 unidades a la izquierda.

Dominio de h : $[-7, -3]$ Imagen de h : $[-4, 3]$



$$y = g(x) = 2f(x) \quad (2 > 1)$$

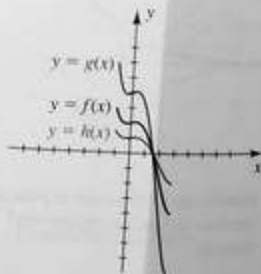
La gráfica de f está alargada verticalmente en un factor de 2.

Dominio de g : $[-1, 3]$ Imagen de g : $[-8, 6]$

$$y = h(x) = \frac{1}{2}f(x) \quad \left(\frac{1}{2} < 1\right)$$

La gráfica de f está comprimida verticalmente en un factor de 2.

Dominio de h : $[-1, 3]$ Imagen de h : $[-2, \frac{3}{2}]$

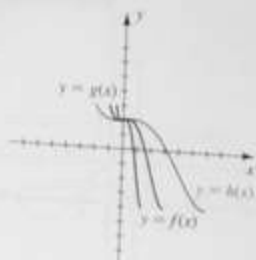


$$y = g(x) = f(2x) \quad [2 > 1]$$

La gráfica de f está comprimida horizontalmente en un factor de 2.
 Dominio de g : $[-1, 1]$ Imagen de g : $[-4, 3]$

$$y = h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) \quad \left[\frac{1}{2} < 1\right]$$

La gráfica de f está alargada horizontalmente en un factor de 2.
 Dominio de h : $[-2, 2]$ Imagen de h : $[-4, 3]$

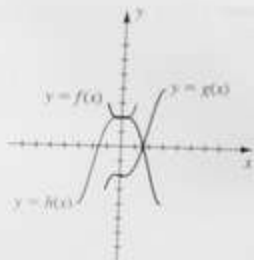


$$y = g(x) = -f(x)$$

La gráfica de f está reflejada a través del eje x .
 Dominio de g : $[-1, 1]$ Imagen de g : $[-3, 4]$

$$y = h(x) = f(-x)$$

La gráfica de f está reflejada a través del eje y .
 Dominio de h : $[-1, 1]$ Imagen de h : $[-4, 3]$

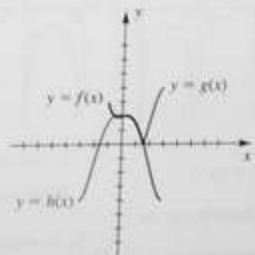


$$y = g(x) = |f(x)|$$

Refleja puntos en f con valores negativos de y en el eje x .
 Dominio de g : $[-1, 1]$ Imagen de g : $[0, 4]$

$$y = h(x) = f(|x|)$$

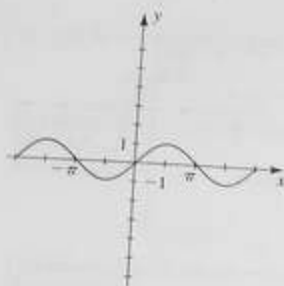
Refleja puntos en f con valores positivos de x en el eje y .
 Dominio de h : $[-1, 1]$ Imagen de h : $[-4, 3]$ a lo sumo. En este caso, la imagen es un subconjunto de $[-4, 3]$



la figura 1, donde el símbolo \square especifica el ángulo de 90° . Al usar las longitudes a , b y c de los lados AB , BC y CA respectivamente, se obtiene:

APÉNDICE III

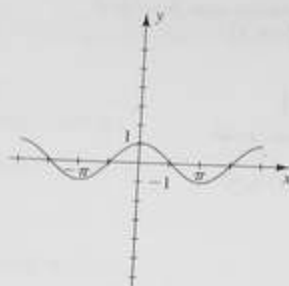
Gráficas de las funciones trigonométricas y sus inversas



$$y = \text{sen } x$$

Domínio: \mathbb{R}

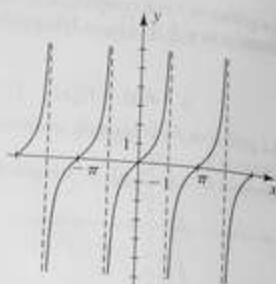
Imagen: $[-1, 1]$



$$y = \cos x$$

Domínio: \mathbb{R}

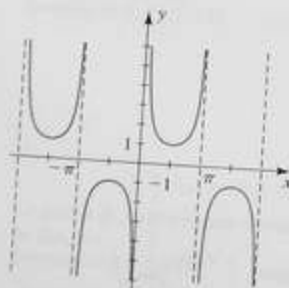
Imagen: $[-1, 1]$



$$y = \tan x$$

Domínio: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

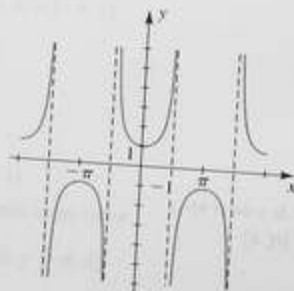
Imagen: \mathbb{R}



$$y = \csc x$$

Domínio: $x \neq \pi n$

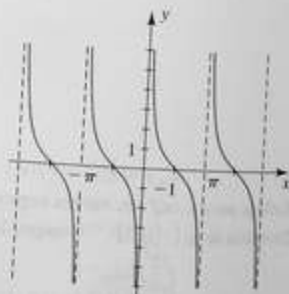
Imagen: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



$$y = \sec x$$

Domínio: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

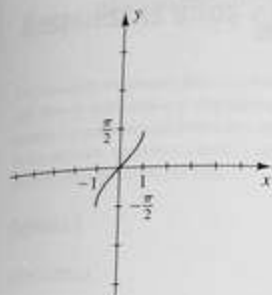
Imagen: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



$$y = \cot x$$

Domínio: $x \neq \pi n$

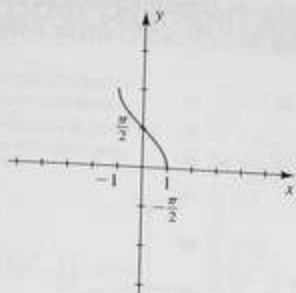
Imagen: \mathbb{R}



$$y = \text{sen}^{-1} x$$

Domínio: $[-1, 1]$

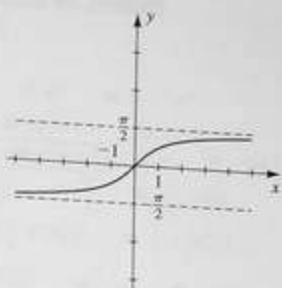
Imagem: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$$y = \cos^{-1} x$$

Domínio: $[-1, 1]$

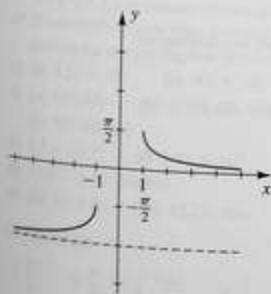
Imagem: $[0, \pi]$



$$y = \tan^{-1} x$$

Domínio: \mathbb{R}

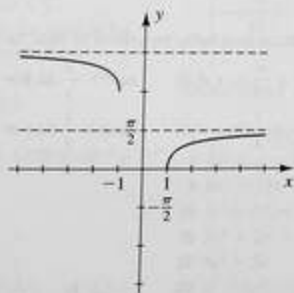
Imagem: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$y = \text{csc}^{-1} x$$

Domínio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

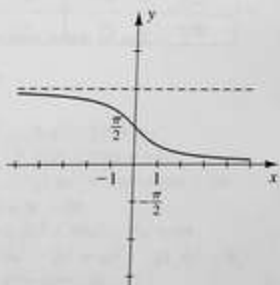
Imagem: $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$



$$y = \sec^{-1} x$$

Domínio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Imagem: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$



$$y = \cot^{-1} x$$

Domínio: \mathbb{R}

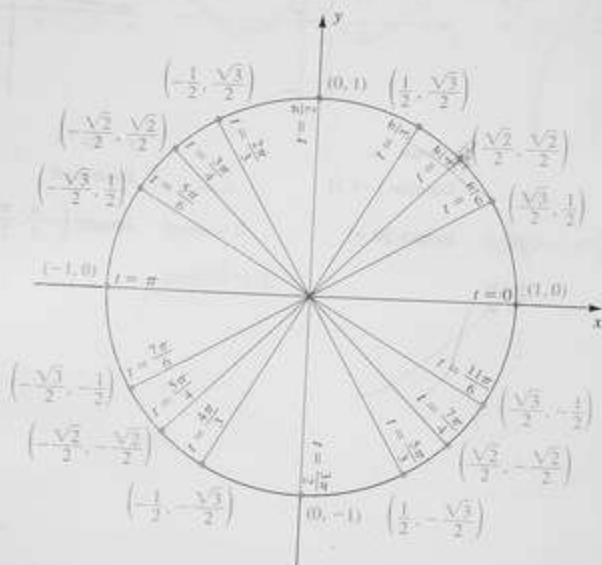
Imagem: $(0, \pi)$

la figura 1, donde el símbolo \square especifica el ángulo de 90° . Al usar las longitudes a , b y c de los lados del triángulo pueden obtenerse seis razones...

APÉNDICE IV

Valores de las funciones trigonométricas de ángulos especiales sobre una circunferencia unitaria

$$P(x, y) = P(\cos t, \sin t)$$



Usa las definiciones siguientes para hallar los valores de otras funciones trigonométricas:

$$\tan t = \frac{y}{x} \quad (\text{si } x \neq 0) \quad \cot t = \frac{x}{y} \quad (\text{si } y \neq 0)$$

$$\sec t = \frac{1}{x} \quad (\text{si } x \neq 0) \quad \csc t = \frac{1}{y} \quad (\text{si } y \neq 0)$$

Respuestas a los ejercicios seleccionados

Un Manual de soluciones para el estudiante, que acompaña a este libro de texto, está a tu disposición en la librería de tu escuela. La guía contiene soluciones detalladas para la mitad de los ejercicios, aproximadamente, y también estrategias para resolver otros ejercicios del texto.

Capítulo 1

EJERCICIOS 1.1

- 1 (a) Negativo (b) Positivo (c) Negativo

- (d) Positivo

- 3 (a) < (b) > (c) =

- 5 (a) > (b) > (c) >

- 7 (a) $x < 0$ (b) $y \geq 0$ (c) $q \leq \pi$ (d) $2 < d < 4$

- (e) $t \geq 5$ (f) $-z \leq 3$ (g) $\frac{p}{q} \leq 7$ (h) $\frac{1}{w} \geq 9$

- (i) $|x| > 7$ 9 (a) 5 (b) 3 (c) 11

- 11 (a) -15 (b) -3 (c) 11

- 13 (a) $4 - \pi$ (b) $4 - \pi$ (c) $1.5 - \sqrt{2}$

- 15 (a) 4 (b) 12 (c) 12 (d) 8

- 17 (a) 10 (b) 9 (c) 9 (d) 19 19 $|7 - x| < 5$

- 21 $|-3 - x| \geq 8$ 23 $|x - 4| \leq 3$ 25 $-x - 3$

- 27 $2 - x$ 29 $b - a$ 31 $x^2 + 4$ 33 \neq 35 $=$

- 37 \neq 39 $=$ 41 (a) 8.4652 (b) 14.1428

- 43 (a) 6.557×10^{-1} (b) 6.708×10^1

- 45 Construye un triángulo rectángulo con lados de longitud $\sqrt{2}$ y 1. La hipotenusa tendrá longitud $\sqrt{3}$. En seguida, construye un triángulo rectángulo con lados de longitudes $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$. La hipotenusa tendrá longitud $\sqrt{5}$.

- 47 El rectángulo grande tiene área $a(b + c)$. La suma de las áreas de los dos rectángulos pequeños es $ab + ac$.

- 49 (a) 4.27×10^1 (b) 9.8×10^{-5} (c) 8.1×10^4

- 51 (a) 830,000 (b) 0.000 000 000 002 9

- (c) 563 000 000

- 53 1.7×10^{-20} 55 5.87×10^{17} 57 1.678×10^{-24} g

- 59 4.1472 $\times 10^6$ cuadrados

- 61 (a) 201.6 lb (b) 32.256 tons

EJERCICIOS 1.2

- 1 $\frac{16}{81}$ 3 $\frac{9}{8}$ 5 $-\frac{47}{3}$ 7 $\frac{1}{8}$ 9 $\frac{1}{25}$ 11 $8x^6$

- 13 $\frac{6}{x}$ 15 $-2a^{14}$ 17 $\frac{9}{2}$ 19 $\frac{12u^{11}}{v^2}$ 21 $\frac{4}{xy}$

- 23 $\frac{9a^6}{x^8}$ 25 $\frac{81}{64}y^6$ 27 $\frac{a^6}{4r^3}$ 29 $\frac{20y}{x^3}$ 31 $9x^{20}y^{18}$

- 33 $3a^6$ 35 $24x^{1/3}$ 37 $\frac{1}{9a^3}$ 39 $\frac{8}{x^{3/2}}$ 41 $4x^3y^4$

- 43 $\frac{3}{x^2y^2}$ 45 1 47 x^{10} 49 $(a + b)^{20}$

- 51 $(x^2 + y^2)^{1/2}$ 53 (a) $4x\sqrt{x}$ (b) $8x\sqrt{x}$

- 55 (a) $8 - \sqrt{y}$ (b) $\sqrt{8 - y}$ 57 9 59 $-2\sqrt{2}$

- 61 $\frac{1}{2}\sqrt{4}$ 63 $\frac{3y^3}{x^2}$ 65 $\frac{2a^2}{b}$ 67 $\frac{1}{2y^2}\sqrt{6xy}$

- 69 $\frac{xy}{3}\sqrt{6y}$ 71 $\frac{x}{3}\sqrt{15x^3y^3}$ 73 $\frac{1}{2}\sqrt{20x^2y^2}$

- 75 $\frac{3x^3}{y^2}$ 77 $\frac{2x}{y^2}\sqrt{x^3y^3}$ 79 $-3n^3$ 81 $|x^2|y^3$

- 83 $x^2|y - 1|$ 85 \neq ; $(a^2)^3 = a^6 \neq a^3 \neq a^{2 \cdot 3}$

- 87 \neq ; $(ab)^{10} = a^{10}b^{10} \neq a^{10}b^1$

- 89 $=$; $\sqrt{\frac{1}{c}} = \left(\frac{1}{c}\right)^{1/2} = \frac{1^{1/2}}{c^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$

- 91 (a) 1.5518 (b) 8.5499

- 93 (a) 2.0351 (b) 3.9670 95 S232 825.78

- 97 2.82 m 99 El levantador de 120 kg

101

Estatura	Peso	Estatura	Peso
64	137	72	168
65	141	73	172
66	145	74	176
67	148	75	180
68	152	76	184
69	156	77	188
70	160	78	192
71	164	79	196

EJERCICIOS 1.3

- 1 $12x^3 - 13x + 1$ 3 $x^3 - 2x^2 + 4$

- 5 $6x^2 + x - 35$ 7 $15x^2 + 31xy + 14y^2$

- 9 $6a^2 - 13a - 12$ 11 $6x^3 + 37x^2 + 30x - 25$

- 13 $3t^4 + 5t^3 - 15t^2 + 9t - 10$

- 15 $2x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 10x - 10$

- 17 $4y^2 - 5x$ 19 $3y^2 - 2a^2 + av^2$ 21 $4x^2 - 9y^2$

- 23 $x^4 - 4y^2$ 25 $x^4 + 5x^2 - 36$

- 27 $9x^2 + 12xy + 4y^2$ 29 $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4$

- 31 $x^4 - 8x^2 + 16$ 33 $x - y$ 35 $x - y$

- 37 $x^2 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

- 39 $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

- 41 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

- 43 $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz$

R2 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

- 45 $s(r+4)$ 47 $3a^2b(b-2)$ 49 $3x^2y^2(y-3x)$
 51 $5x^2y^2(3y^2-5x+2x^2y^2)$ 53 $(8x+3)(x-7)$
 55 Irreducible 57 $(3x-4)(2x+5)$
 59 $(3x-5)(4x-3)$ 61 $(2x-5)^2$ 63 $(5z+3)^2$
 65 $(5x+2y)(9x+4y)$ 67 $(6r+5)(6r-5)$
 69 $(z^2+8w)(z^2-8w)$ 71 $x^2(x+2)(x-2)$
 73 Irreducible 75 $3(5x+4y)(5x-4y)$
 77 $(4x+3)(16x^2-12x+9)$
 79 $(4x-y^2)(16x^2+4xy^2+y^4)$
 81 $(7x+y^2)(49x^2-7xy^2+y^4)$
 83 $(5-3x)(25+15x+9x^2)$
 85 $(2x+y)(a-3b)$ 87 $3(x+3)(x-3)(x+1)$
 89 $(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$ 91 $(a^2+b^2)(a-b)$
 93 $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$
 95 $(x+2+3y)(x+2-3y)$
 97 $(y+4+x)(y+4-x)$
 99 $(y+2)(y^2-2y+4)(y-1)(y^2+y+1)$
 101 $(x^2+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$
 103 El área de I es $(x-y)x$, el área de II es $(x-y)y$,
 $A = x^2 - y^2 = (x-y)x + (x-y)y$
 $= (x-y)(x+y)$

105 (a) 1525.7; 1454.7

(b) A medida que las personas envejecen requieren menos calorías. Los coeficientes de w y h son positivos porque los individuos corpulentos precisan más calorías.

EJERCICIOS 1.4

- 1 $\frac{22}{75}$ 3 $\frac{7}{120}$ 5 $\frac{x+3}{x-4}$ 7 $\frac{y+5}{y^2+5y+25}$
 9 $\frac{4-r}{r^2}$ 11 $\frac{x}{x-1}$ 13 $\frac{a}{(a^2+4)(5a+2)}$
 15 $\frac{-3}{x+2}$ 17 $\frac{6x-7}{(3x+1)^2}$ 19 $\frac{5x^2+2}{x^3}$
 21 $\frac{4(2r+5)}{t+2}$ 23 $\frac{2(2x+3)}{3x-4}$ 25 $\frac{2x-1}{x}$
 27 $\frac{p^2+2p+4}{p-3}$ 29 $\frac{11u^2+18u+5}{u(3u+1)}$ 31 $\frac{x+5}{(x+2)^2}$
 33 $a+b$ 35 $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$ 37 $x+y$
 39 $\frac{2x^2+7x+15}{x^2+10x+7}$ 41 $\frac{3}{(x-1)(a-1)}$
 43 $2x+h-3$ 45 $-\frac{3x^2+3xh+h^2}{x^2(x+h)^3}$
 47 $\frac{-12}{(3x+3h-1)(3x-1)}$ 49 $\frac{t+10\sqrt{t}+25}{t-25}$
 51 $(9x+4y)(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})$ 53 $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{ab}+\sqrt{b^3}}{a-b}$

- 55 $\frac{1}{(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$ 57 $\frac{2}{\sqrt{2(x+h)}+1+\sqrt{2x+1}}$
 59 $\frac{-1}{\sqrt{1-x-h}+\sqrt{1-x}}$ 61 $4x^{63}-x^{103}+5x^{-103}$
 63 $x^{-1}+4x^{-3}+4x^{-5}$ 65 $\frac{1+x^2}{x^3}$ 67 $\frac{1-x^2}{x^{1/2}}$
 69 $(3x+2)^2(36x^2-37x+6)$
 71 $\frac{(2x+1)^2(8x^2+x-24)}{(x^2-4)^{1/2}}$ 73 $\frac{(3x+1)^2(39x-89)}{(2x-5)^{1/2}}$
 75 $\frac{27x^2-24x+2}{(6x+1)^3}$ 77 $\frac{4x(1-x^2)}{(x^2+2)^4}$ 79 $\frac{x^2+12}{(x^2+4)^{3/2}}$
 81 $\frac{6(3-2x)}{(4x^2+9)^{3/2}}$

x	Y_1	Y_2
1	-0.6923	-0.6923
2	-26.12	-26.12
3	8.0392	8.0392
4	5.8794	5.8794
5	5.3268	5.3268

Pueden ser iguales

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

- 1 (a) $\frac{5}{12}$ (b) $\frac{39}{20}$ (c) $\frac{13}{56}$ (d) $\frac{5}{8}$
 2 (a) $<$ (b) $>$ (c) $>$
 3 (a) $x < 0$ (b) $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ (c) $|x| \leq 4$
 4 (a) 7 (b) -1 (c) $\frac{1}{6}$ 5 (a) 5 (b) 5 (c) 7
 6 (a) No (b) No (c) Sí
 7 (a) 9.37×10^{10} (b) 4.02×10^{-6}
 8 (a) 68 000 000 (b) 0.000 73 9 $-x-3$
 10 $-(x-2)(x-3)$ 11 $\frac{-71}{9}$ 12 $\frac{1}{8}$ 13 $18a^3b^3$
 14 $\frac{3y}{r^2}$ 15 $\frac{xy^2}{9}$ 16 $\frac{b^3}{a^3}$ 17 $\frac{p^3}{2q}$ 18 c^{103}
 19 $\frac{x^2z}{y^{10}}$ 20 $\frac{16x^2}{z^5y^6}$ 21 $\frac{b^6}{a^2}$ 22 $\frac{27u^2v^{17}}{16w^{20}}$ 23 $s+t$
 24 $u+v$ 25 s 26 $\frac{y-x^2}{x^2y}$ 27 $\frac{x^3}{y^2}$
 28 $2xyz\sqrt{x^2z}$ 29 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 30 $\frac{ab}{c}\sqrt{bc}$
 31 $2x^2y\sqrt{x}$ 32 $2ab\sqrt{ac}$ 33 $\frac{1-\sqrt{t}}{t}$ 34 c^2d^4

$$35 \frac{2x}{1-x} + \frac{36}{1-x} + 2b \quad 37 \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi} \quad 38 \frac{1}{3y} \sqrt{3x^2y}$$

$$39 \frac{1-2\sqrt{x+x}}{1-x} \quad 40 \frac{\sqrt{a-\sqrt{a-2}}}{2}$$

$$41 (9x+y)(3\sqrt{x}-\sqrt{y}) \quad 42 \frac{x+6\sqrt{x}+9}{9-x}$$

$$43 x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$$

$$44 3x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x + 1 \quad 45 -x^2 + 18x + 7$$

$$46 8x^3 + 2x^2 - 43x + 35$$

$$47 3y^3 - 2y^2 - 8y^3 + 10y^2 - 3y - 12$$

$$48 15x^3 - 53x^2 - 102x - 40 \quad 49 a^4 - b^4$$

$$50 3p^2q - 2q^2 + \frac{5}{3}p \quad 51 6a^2 + 11ab - 35b^2$$

$$52 16x^4 - 24x^3 + 9x^2 \quad 53 169a^4 - 16b^3$$

$$54 a^3 - 2a^2 + a^4 \quad 55 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$$

$$56 c^3 - 3c^2d^4 + 3c^2d^4 - d^6 \quad 57 81x^4 - 72x^3y^2 + 16y^4$$

$$58 a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$59 10w(6x+7) \quad 60 2x^2y^2(r+2x)(r-2x)$$

$$61 (14x+9)(2x-1) \quad 62 (4a^2+3b^2)^2$$

$$63 (y-4z)(2w+3x) \quad 64 (2c^2+3)(c-6)$$

$$65 8(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$$

$$66 x^3(y-u)(v^2+uv+u^2)$$

$$67 (p^3+q^3)(p^2+q^2)(p+q)(p-q) \quad 68 x^2(x-4)^2$$

$$69 (x^2+1)(w^2-u^2+1) \quad 70 3(x+2)$$

$$71 \text{ Introdúcible} \quad 72 (x-7+7y)(x-7-7y)$$

$$73 (x-2)(x+2)(x^2-2x+4) \quad 74 4x^2(x^2+3x+5)$$

$$75 \frac{3x-5}{2x+1} \quad 76 \frac{r^2+rt+t^2}{r+t} \quad 77 \frac{3x+2}{x(x-2)}$$

$$78 \frac{27}{(4x-5)(10x+1)} \quad 79 \frac{5x^2-6x-20}{x(x+2)^2} \quad 80 \frac{x^3+1}{x^2+1}$$

$$81 \frac{-2x^2-x-3}{x(x+1)(x+3)} \quad 82 \frac{ab}{a+b} \quad 83 x+5$$

$$84 \frac{1}{x+3} \quad 85 (x^2+1)^{1/2}(x+5)(7x^2+15x+4)$$

$$86 \frac{25x^2+x+4}{(4x+1)^{1/2}(4-x)^{1/2}} \quad 87 2.75 \times 10^{11} \text{ células}$$

$$88 \text{ Entre } 2.94 \times 10^9 \text{ y } 3.78 \times 10^9 \text{ latidos}$$

$$89 0.54 \text{ m}^2 \quad 90 0.13 \text{ dinas-cm}$$

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 1

- 1 galón = 0.13368 pies³; 586.85 pies³
- 2 Ya sea $a = 0$ o $b = 0$
- 3 Sumar y restar 10x; $x + 5 \pm \sqrt{10x}$ son los factores.
- 4 La primera expresión se puede evaluar en $x = 1$.
- 5 Se acercan a la relación de coeficientes iniciales conforme x se agranda.

- 7 Si x es la edad y y es la estatura, demuestra que el valor final es $100x + y$.
- 8 $V_{\text{total}} = \frac{1}{3}V_{\text{max}}$

Capítulo 2

EJERCICIOS 2.1

$$1 \frac{5}{3} \quad 3 \frac{1}{2} \quad 5 \frac{26}{7} \quad 7 \frac{35}{17} \quad 9 \frac{23}{18} \quad 11 \frac{1}{40}$$

$$13 \frac{49}{4} \quad 15 \frac{4}{3} \quad 17 \frac{24}{29} \quad 19 \frac{7}{31} \quad 21 \frac{3}{61}$$

$$23 \frac{29}{4} \quad 25 \frac{31}{18} \quad 27 \text{ No hay solución.}$$

$$29 \text{ Todos los números reales excepto } \frac{1}{2}, 31 \frac{5}{9}, 33 \frac{2}{3}$$

$$35 \text{ No hay solución.} \quad 37 0 \quad 39 \text{ Todos los números reales excepto } \pm 2.$$

$$41 \text{ No hay solución.} \quad 43 \text{ No hay solución.}$$

$$45 (4x-3)^2 - 16x^2 = (16x^2 - 24x + 9) - 16x^2 = 9 - 24x$$

$$47 \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = x-3$$

$$49 \frac{3x^2+8}{x} = \frac{3x^2}{x} + \frac{8}{x} = 3x + \frac{8}{x} \quad 51 \frac{19}{3}$$

$$53 \text{ (a) Sí (b) No; 5 no es la solución de la primera ecuación.}$$

$$55 \text{ Escoge cualquier } a \text{ y } b \text{ tales que } b = \frac{5}{3}a.$$

$$57 x+1 = x+2 \quad 59 K = \frac{D-L}{E+T} \quad 61 Q = \frac{1}{M-1}$$

$$63 P = \frac{I}{rt} \quad 65 h = \frac{2A}{b} \quad 67 m = \frac{Fd^2}{gM}$$

$$69 w = \frac{P-2I}{2} \quad 71 b_1 = \frac{2A-hb_2}{h}$$

$$73 q = \frac{p(1-S)}{S(1-p)} \quad 75 q = \frac{fp}{p-f} \quad 77 (1)$$

EJERCICIOS 2.2

$$1 88 \quad 3 \$820 \quad 5 \text{ (a) 125 (b) 21}$$

$$7 180 \text{ meses (o 15 años).} \quad 9 \text{ No es posible.} \quad 11 200 \text{ niños.}$$

$$13 \frac{14}{3} \text{ de onza (oz) de una solución de glucosa al } 30\% \text{ y } \frac{7}{3} \text{ oz de agua.}$$

$$15 194.6 \text{ g de plata británica Sterling y } 5.4 \text{ g de cobre.}$$

$$17 \text{ (a) después de } 64 \text{ s. (b) } 96 \text{ m y } 128 \text{ m, respectivamente.}$$

$$19 6 \text{ mph} \quad 21 \text{ (a) } \frac{5}{9} \text{ mph (b) } 2\frac{2}{9} \text{ millas}$$

$$23 1237.5 \text{ pies}$$

$$25 \text{ (a) } 4050 \text{ pies}^2 \quad \text{(b) } 2592 \text{ pies}^2 \quad \text{(c) } 3600 \text{ pies}^2$$

$$27 \frac{19}{2} - \frac{3\pi}{8} = 8.32 \text{ pies} \quad 29 55 \text{ pies} \quad 31 36 \text{ min}$$

R4 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

33 36 min 35 27

37 (a) 40.96°F (b) 6909 pies 39 37°F

EJERCICIOS 2.3

$$1 \frac{3}{2}, \frac{4}{3} \quad 3 \frac{6}{5}, \frac{2}{3} \quad 5 \frac{9}{2}, \frac{3}{4} \quad 7 \frac{2}{3}, \frac{1}{5}$$

$$9 \frac{5}{2} \quad 11 \frac{1}{2} \quad 13 \frac{34}{5}$$

15 (a) No, -4 no es una solución de $x = 4$. (b) Sí

17 ± 13 19 $\pm \frac{3}{5}$ 21 $3 \pm \sqrt{17}$ 23 $-2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{11}$

25 (a) $\frac{81}{4}$ (b) 16 (c) ± 12 (d) ± 7

27 $-3 \pm \sqrt{2}$ 29 $\frac{3}{2} \pm \sqrt{5}$ 31 $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

33 $-2 \pm \sqrt{2}$ 35 $\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{41}$ 37 $\frac{4}{3} \pm \frac{1}{3} \sqrt{22}$

39 $\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{15}$ 41 $\frac{9}{2}$ 43 No hay soluciones reales.

45 $(x+6)(x-5)$ 47 $(2x-3)(6x+1)$

49 (a) $x = \frac{y \pm \sqrt{2y^2 - 1}}{2}$ (b) $y = -2x \pm \sqrt{8x^2 + 1}$

51 $y = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ 53 $r = \frac{-\pi h + \sqrt{\pi^2 h^2 + 2\pi A}}{2\pi}$

55 $r = r_0 \sqrt{1 - (V/V_{00})^2}$ 57 $\sqrt{150/\pi} \approx 6.9$ cm

59 (a) Después de 1 s y luego de 3 s. (b) Después de 4 s.

61 (a) 4320 m (b) 96.86°C 63 2 pies

65 12 pies por 12 pies

67 $3 + \frac{1}{2} \sqrt{14} \approx 4.9$ millas o $3 - \frac{1}{2} \sqrt{14} \approx 1.1$ milla

69 (a) $d = 100\sqrt{20t^2 + 4t + 1}$ (b) 3:30 P.M.

71 14 pulg por 27 pulg 73 7 mph 75 300 pares

77 2 pies 79 15.89 s

81 (a) 0, -4 500 000 (b) 2.13×10^{-7}

83 (a) (2) (b) 47.65°F

EJERCICIOS 2.4

1 $2 + 4i$ 3 $18 - 3i$ 5 $41 - 11i$ 7 $17 - i$

9 $21 - 20i$ 11 $-24 - 7i$ 13 25 15 $-i$

17 i 19 $\frac{3}{10} - \frac{3}{5}i$ 21 $\frac{1}{2} - i$ 23 $\frac{34}{53} + \frac{40}{53}i$

25 $\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$ 27 $-142 - 65i$ 29 $-2 - 14i$

31 $-\frac{44}{113} + \frac{95}{113}i$ 33 $\frac{21}{2}i$ 35 $x = 4, y = -1$

37 $x = 3, y = -4$ 39 $3 \pm 2i$ 41 $-2 \pm 3i$

43 $\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{55}i$ 45 $-\frac{1}{8} \pm \frac{1}{8} \sqrt{47}i$

47 $-5, \frac{5}{2} \pm \frac{5}{2} \sqrt{3}i$ 49 $\pm 4, \pm 4i$ 51 $\pm 2i, \pm \frac{3}{2}i$

53 $0, -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{7}i$

55 $z + w = (a + bi) + (c + di)$
 $= (a + c) + (b + d)i = (a + c) - (b + d)i$
 $= (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$

57 $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di)$
 $= (ac - bd) + (ad + bc)i$
 $= (ac - bd) - (ad + bc)i$
 $= ac - adi - bd - bci$
 $= a(c - di) - b(d + ci)$
 $= (a - bi) \cdot (c - di) = \bar{z} \cdot \bar{w}$

59 Si $\bar{z} = z$, entonces $a - bi = a + bi$ y por tanto $-bi = bi$, o bien $2bi = 0$. En consecuencia $b = 0$ y $z = a$ es real. Por el contrario, si z es real, entonces $b = 0$ y de ahí $\bar{z} = a + 0i = a - 0i = a + 0i = z$.

EJERCICIOS 2.5

1 -15, 7 3 $-\frac{2}{3}, 2$ 5 No hay solución. 7 $\pm \frac{2}{3}, 2$

9 $\pm \frac{1}{2} \sqrt{6}, -\frac{5}{2}, 0$ 11 0, 25 13 $-\frac{57}{5}$ 15 $\frac{9}{5}$

17 $\pm \frac{1}{2} \sqrt{62}$ 19 6 21 6 23 5, 7 25 -3

27 -1 29 $-\frac{5}{4}$ 31 3 33 0, 4 35 $\pm 3, \pm 4$

37 $\pm \frac{1}{10} \sqrt{70 \pm 10\sqrt{29}}$ 39 $\pm 2, \pm 3$ 41 $\frac{8}{27}, -8$

43 $\frac{25}{4}, \frac{16}{9}$ 45 $-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}$ 47 $\frac{5}{2}$ 49 0, 4.096

51 (a) 8 (b) ± 8 (c) No hay soluciones reales. (d) 625 (e) No hay soluciones reales.

53 $l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$ 55 $h = \frac{1}{\pi r} \sqrt{S^2 - \pi^2 r^2}$ 57 $h \approx 97\%$ de L

59 9.16 pies/s 61 \$4.00 63 $2\sqrt{\frac{432}{\pi}} \approx 10.3$ cm

65 53.4%

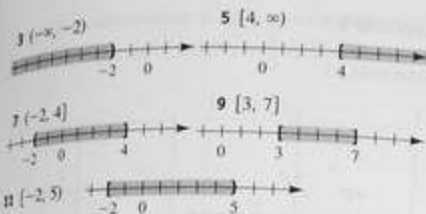
67 Hay dos rutas posibles, correspondientes a $x \approx 0.6743$ millas y $x \approx 2.2887$ millas.

69 (a) (2) (b) 860 min 71 $3.7 \times 3.7 \times 1.8$

EJERCICIOS 2.6

1 (a) $-2 < 2$ (b) $-11 < -7$ (c) $-\frac{7}{3} < -1$

(d) $1 < \frac{7}{3}$



11 $[-2, 5]$ 12 $-5 < x \leq 8$ 13 $-4 \leq x \leq -1$ 14 $x \geq 4$
 15 $x < -5$ 16 $\left(\frac{16}{3}, \infty\right)$ 17 $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right]$
 18 $(12, \infty)$ 19 $[-6, \infty)$ 20 $(1, 6)$ 21 $[9, 19]$

22 $\left(-\frac{26}{3}, \frac{16}{3}\right]$ 23 $(6, 12]$ 24 $\left(-\infty, \frac{8}{53}\right]$
 25 $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$ 26 $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$ 27 $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$
 28 Todos los números reales excepto 1. 29 $(-3, 3)$
 30 $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$ 31 $(-3.01, -2.99)$

32 $(-\infty, -2.1] \cup [-1.9, \infty)$ 33 $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
 34 $\left[\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right]$ 35 $(-\infty, \infty)$ 36 $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$
 37 $\left(-\infty, -\frac{8}{3}\right] \cup [4, \infty)$ 38 $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right) \cup \left(\frac{13}{4}, \infty\right)$
 39 $(-4, 4)$ 40 $(-2, 1) \cup (3, 6)$

41 (a) $-8, -2$ (b) $-8 < x < -2$
 42 $(-\infty, -8) \cup (-2, \infty)$
 43 $|w - 148| \leq 2$ 44 $5 < |T_1 - T_2| < 10$
 45 $66 \leq F \leq 104$ 46 $R \geq 11$ 47 $4 \leq p < 6$
 48 $6\frac{2}{3}$ años 49 (a) 5 pies 8 pulg. (b) $65.52 \leq h \leq 66.48$

EJERCICIOS 2.7

1 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 2 $[-2, 1] \cup [4, \infty)$ 3 $(-2, 3)$

4 $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$ 5 $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup [1, \infty)$

6 $(2, 4)$ 7 $(-4, 4)$ 8 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$

9 $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{9}{16}, \infty\right)$ 10 $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

11 $(-2, 2) \cup [2, \infty)$ 12 $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup \{0\}$

13 $(-2, 0) \cup (0, 1]$ 14 $(-2, 2] \cup (5, \infty)$

15 $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$ 16 $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right)$

33 $(-\infty, -1) \cup \left(2, \frac{7}{2}\right]$ 34 $\left(-1, \frac{2}{3}\right) \cup [4, \infty)$

35 $\left(1, \frac{5}{3}\right) \cup [2, 5]$ 36 $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

37 $[0, 2] \cup [3, 5]$ 38 $\frac{1}{2} s$ 39 $0 \leq v < 30$

40 $0 < S < 4000$ 41 Altura $> 25,600$ km

42 $70.5 \leq V \leq 81.4$ 43 $(-3, -2) \cup (2, 4)$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

1 $\frac{5}{6}$ 2 5 3 -32 4 No hay solución.

5 Toda $x > 0$ 6 -4, $\frac{3}{2}$ 7 $-\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \sqrt{19}$

8 $\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{29}$ 9 $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{21}$ 10 $\pm \frac{5}{2}, \pm \sqrt{2}$

11 -27, 125 12 $\pm \frac{1}{2} \sqrt{7}, -\frac{2}{5}$ 13 $\frac{1}{5} \pm \frac{1}{5} \sqrt{14}i$

14 $-\frac{1}{6} \pm \frac{1}{6} \sqrt{71}i$ 15 $\pm \frac{1}{2} \sqrt{14}i, \pm \frac{2}{3} \sqrt{3}i$

16 $\pm \frac{1}{2} \sqrt{6} \pm 2\sqrt{5}$ 17 $-\frac{3}{2}, 2$ 18 -5, 4

19 $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}$ 20 $\frac{13}{4}$ 21 2 22 -3, 1 23 5

24 ± 8 25 $2 \pm \sqrt{3}$ 26 $-5 \pm \sqrt{13}i$ 27 3

28 $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ 29 $\left(-\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)$ 30 $\left[\frac{13}{23}, \infty\right)$

31 $(-\infty, -\frac{3}{10})$ 32 $(-7, \frac{7}{2})$

33 $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$ 34 $[0, 6]$

35 $(-\infty, \frac{11}{3}) \cup [7, \infty)$ 36 $(2, 4) \cup (8, 10)$

37 $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup \left(\frac{2}{5}, \infty\right)$ 38 $[-2, 5]$

39 $(-\infty, -2) \cup \{0\} \cup [3, \infty)$ 40 $(-3, -1) \cup (-1, 2]$

41 $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (2, 9)$ 42 $(-\infty, -5) \cup [-1, 5)$

43 $(1, \infty)$ 44 $(0, 1) \cup (2, 3)$ 45 $C = \frac{2}{p + n - 1}$

46 $D = \frac{CB^3}{(A + E)^3}$ 47 $r = \sqrt{\frac{3V}{4\pi}}$

48 $R = \sqrt{\frac{8FVL}{\pi P}}$ 49 $h = R \pm \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - c^2}$

50 $r = \frac{-mhR + \sqrt{12\pi hV - 3\pi^2 h^2 R^2}}{2\pi h}$ 51 $15 + 2i$

R6 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

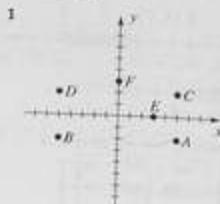
- 52 $-28 + 6i$ 53 $-55 + 48i$ 54 $\frac{9}{85} + \frac{2}{85}i$
 55 $\frac{9}{53} - \frac{48}{53}i$ 56 $-2 - 5i$ 57 56
 58 $R_2 = \frac{10}{3}$ ohms 59 11.055% 60 60.3 g
 61 6 oz de verduras y 4 oz de carne.
 62 315.8 g de alcohol etílico y 84.2 g de agua.
 63 80 gal de solución al 20% y 40 gal de solución al 50%.
 64 75 mi 65 2 66 64 mph
 67 $\frac{640}{11} \approx 58.2$ mph 68 1 hr 40 min 69 165 mi
 70 $10 - 5\sqrt{3} \approx 1.34$ mi 71 $3\sqrt{5} - 6 \approx 0.71$ micras
 72 (a) $d = \sqrt{2900r^2 - 200r + 4}$
 (b) $t = \frac{5 + 2\sqrt{19603}}{145} \approx 1.97$, o sea aproximadamente 11:58 A.M.
 73 Hay dos arreglos: 40 pies \times 25 pies y 50 pies \times 20 pies.
 74 (a) $2\sqrt{2}$ pies (b) 2 pies 75 12 pies por 48 pies
 76 10 pies por 4 pies 77 Después de $7\frac{2}{3}$ años 78
 4 $\leq p \leq 8$
 79 Más de \$100 000 80 $T > 279.57$ K
 81 $\frac{\pi}{5} \sqrt{10} \leq T \leq \frac{2\pi}{7} \sqrt{5}$
 82 $v = \frac{626.4}{\sqrt{6472}} \approx 7.786$ km/s 83 $20 \leq w \leq 25$
 84 36 a 38 árboles/acres 85 \$320 a \$340 86 (3)

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 2

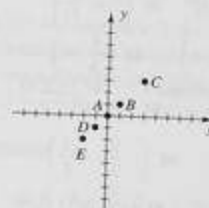
- 1 No 2 $\frac{-b}{2a}$
 3 (a) $\frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}i$ (b) Si
 (c) a y b no pueden ser ambas 0.
 5 $a > 0$, $D \leq 0$; $x \in \mathbb{R}$;
 $a > 0$, $D > 0$; $(-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$;
 $a < 0$, $D < 0$; $\{ \}$;
 $a < 0$, $D = 0$; $x = \frac{-b}{2a}$;
 $a < 0$, $D > 0$; $[x_1, x_2]$
 6 (a) 11 006 pies (b) $h = \frac{1}{6}(2497D - 497G - 64\ 000)$
 8 $1/10^{100}$, $cx - 2/e$ debe ser no negativo.

Capítulo 3

EJERCICIOS 3.1



- 3 La recta que biseca los cuadrantes I y III.



- 5 $A(3, 3)$, $B(-3, 3)$, $C(-3, -3)$, $D(3, -3)$, $E(3, 0)$, $F(0, 3)$
 7 (a) La recta paralela al eje y que corta el eje x en $(-2, 0)$.
 (b) La recta paralela al eje x que corta el eje y en $(0, 3)$.
 (c) Todos los puntos sobre el eje y y a la derecha de éste.
 (d) Todos los puntos de los cuadrantes I y III.
 (e) Todos los puntos abajo del eje x .
 (f) Todos los puntos sobre el eje y .

9 (a) $\sqrt{29}$ (b) $\left(5, -\frac{1}{2}\right)$

11 (a) $\sqrt{13}$ (b) $\left(-\frac{7}{2}, -1\right)$

13 (a) 4 (b) $(5, -3)$

15 $d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2$; área = 28

17 $d(A, B) = d(B, C) = d(C, D) = d(D, A)$ y
 $d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2$

19 $(13, -28)$ 21 $d(A, C) = d(B, C) = \sqrt{145}$

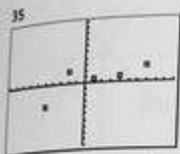
23 $5x + 2y = 3$

25 $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$; un círculo de radio 5 con centro en el origen.

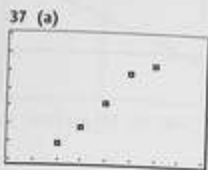
27 $(0, 3 + \sqrt{11})$, $(0, 3 - \sqrt{11})$ 29 $(-2, -1)$

31 $a < \frac{2}{5}$ o $a > 4$

- 33 Sea M el punto medio de la hipotenusa. Demuestra que:
 $d(A, M) = d(B, M) = d(O, M) = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$.



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$



[1988, 1996] por
 $[54 \times 10^6, 61 \times 10^6, 10^6]$

(b) El número es creciente.

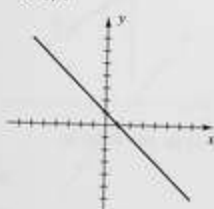
EXERCICIOS 3.2

Ejercicios 1 al 20: se indica dónde corta(n) el eje x y a continuación dónde corta(n) el eje y .

1 1.5; -3



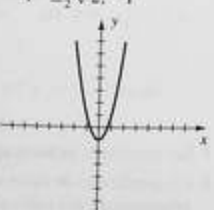
3 1; 1



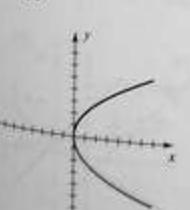
5 0; 0



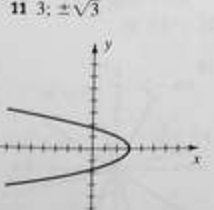
7 $\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$; -1



9 0; 0



11 3; $\pm\sqrt{3}$



13 0; 0



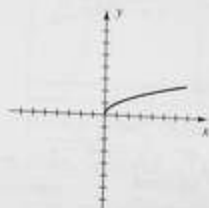
15 2; -8



17 0; 0



19 16; -4



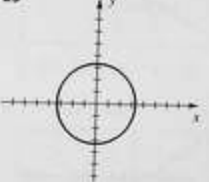
21 (a) 5, 7

(b) 9, 11

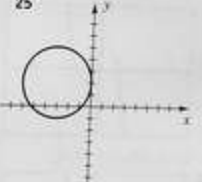
(c) 13



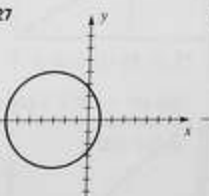
23



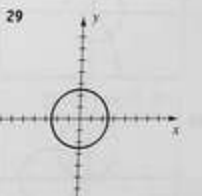
25



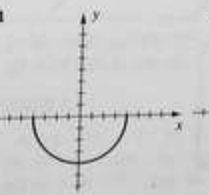
27



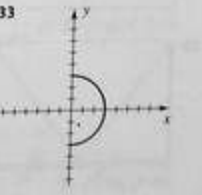
29



31



33



la figura 1, donde el símbolo \perp especifica el ángulo de 90° . Al usar las longitudes a , b y c de los lados del triángulo pueden obtenerse \cos θ .

R8 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

35 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

37 $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = 5$

39 $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 41$

41 $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 9$

43 $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$

45 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 34$

47 $C(2, -3); r = 7$

49 $C(0, -2); r = 11$

51 $C(3, -1); r = \frac{1}{2}\sqrt{70}$

53 $C(-2, 1); r = 0$ (un punto)

55 No es una circunferencia, porque r^2 no puede ser igual a -2 .

57 $y = \sqrt{36-x^2}; y = -\sqrt{36-x^2}; x = \sqrt{36-y^2}; x = -\sqrt{36-y^2}$

59 $y = -1 + \sqrt{49-(x-2)^2}; y = -1 - \sqrt{49-(x-2)^2}; x = 2 + \sqrt{49-(y+1)^2}; x = 2 - \sqrt{49-(y+1)^2}$

61 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4^2$

63 $y = -\sqrt{4-x^2}$

65 (a) Dentro (b) Sobre (c) Fuera

67 (a) 2 (b) $\pm \sqrt{5}$

69 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$

71 $\sqrt{5}$

73 $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$

75 $(-1, 0) \cup (0, 1)$

77 (2)

79 $-1.2, 0.5, 1.6$

81 $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

(0.6, 0.8), (-0.6, -0.8)

83 $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

(0.999, 0.968), (0.251, 0.032)

85 $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

[0, 4] por [0, 4]

87 (a) 1126 pies/s (b) -42°C

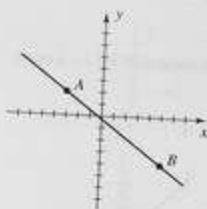


$[-50, 50, 10]$ por $[900, 1200, 100]$

EJERCICIOS 3.3

1 $m = -\frac{3}{4}$

3 $m = 0$



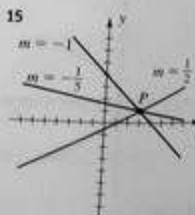
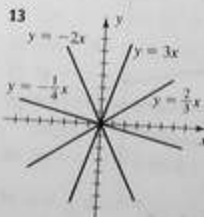
5 m no está definida.



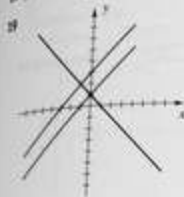
7 Las pendientes de lados opuestos son iguales.

9 Las pendientes de lados opuestos son iguales y las pendientes de dos lados adyacentes son recíprocas de signo contrario.

11 $(-12, 0)$



$$17 \ y + 3 = \frac{5}{4}(x - 2)$$



$$21 \ (a) \ x = 5 \quad (b) \ y = -2 \quad 23 \ 4x + y = 17$$

$$25 \ 3x + y = 12 \quad 27 \ 11x + 7y = 9$$

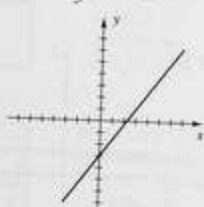
$$29 \ 5x - 2y = 18 \quad 31 \ 5x + 2y = 29$$

$$33 \ y = \frac{3}{4}x - 3 \quad 35 \ y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

$$37 \ 5x - 7y = -15 \quad 39 \ y = -x$$

$$41 \ m = \frac{2}{3}, b = 5$$

$$43 \ m = \frac{4}{3}, b = -3$$



$$45 \ (a) \ y = 3 \quad (b) \ y = -\frac{1}{2}x \quad (c) \ y = -\frac{3}{2}x + 1$$

$$(d) \ y + 2 = -(x - 3)$$

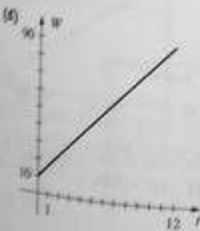
$$47 \ \frac{x}{3/2} + \frac{y}{-3} = 1 \quad 49 \ (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 49$$

51 Aproximadamente 23 semanas.

53 (a) 25.2 tons (b) Hasta de 3.4 tons.

$$55 \ (a) \ y = \frac{5}{14}x \quad (b) \ 58$$

$$57 \ (a) \ w = \frac{20}{3}t + 10 \quad (b) \ 50 \text{ lb} \quad (c) \ 9 \text{ años}$$



$$59 \ H = -\frac{8}{3}T + \frac{7520}{3}$$

$$61 \ (a) \ T = 0.032r + 13.5 \quad (b) \ 16.22^\circ\text{C}$$

$$63 \ (a) \ E = 0.55R + 3600 \quad (b) \ P = 0.45R - 3600$$

$$(c) \ \$8000$$

$$65 \ (a) \ \text{Si; la criatura en } x = 3. \quad (b) \ \text{No}$$

$$67 \ 34.95 \text{ mph} \quad 69 \ a = 0.321; b = -0.9425$$

$$71 \ (-19, 13)$$



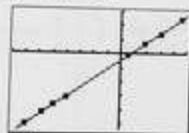
$$[-30, 3, 2] \text{ por } [-2, 20, 2]$$

73 $(-0.8, -0.6), (4.8, -3.4), (2, 5)$; triángulo rectángulo isósceles.



$$[-15, 15] \text{ por } [-10, 10]$$

$$75 \ y = 3.2x - 2.6$$



$$[-8, 5] \text{ por } [-27, 15, 5]$$

$$77 \ (b) \ y = 55x - 108 \ 685$$



$$[1980, 1988] \text{ por } [300, 625, 100]$$

$$(c) \ \$435 \ 000; \$1 \ 040 \ 000$$

EJERCICIOS 3.4

$$1 \ -6, -4, -24 \quad 3 \ -12, -22, -36$$

$$5 \ (a) \ 5a - 2 \quad (b) \ -5a - 2 \quad (c) \ -5a + 2$$

$$(d) \ 5a + 5b - 2 \quad (e) \ 5a + 5b - 4 \quad (f) \ 5$$

R10 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

- 7 (a) $-a^2 + 4$ (b) $-a^2 + 4$ (c) $a^2 - 4$
(d) $-a^2 - 2ah - h^2 + 4$ (e) $-a^2 - h^2 + 8$
(f) $-2a - h$

- 9 (a) $a^2 - a + 3$ (b) $a^2 + a + 3$ (c) $-a^2 + a - 3$
(d) $a^2 + 2ah + h^2 - a - h + 3$
(e) $a^2 + h^2 - a - h + 6$ (f) $2a + h - 1$

- 11 (a) $\frac{4}{a^2}$ (b) $\frac{1}{4a^2}$ (c) $4a$ (d) $2a$

- 13 (a) $\frac{2a}{a^2 + 1}$ (b) $\frac{a^2 + 1}{2a}$ (c) $\frac{2\sqrt{a}}{a + 1}$
(d) $\frac{\sqrt{2a^2 + 2a}}{a^2 + 1}$

- 15 La gráfica corresponde a una función porque pasa la prueba de la recta vertical.

- 17 $D = [-4, 1] \cup [2, 4]$; $R = [-3, 3]$

- 19 (a) $[-3, 4]$ (b) $[-2, 2]$ (c) 0 (d) $-1, \frac{1}{2}, 2$
(e) $\left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (2, 4]$

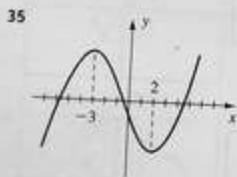
- 21 $\left[-\frac{7}{2}, \infty\right)$ 23 $[-3, 3]$

- 25 Todos los números reales excepto $-2, 0$, y 2

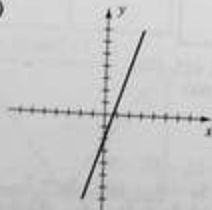
- 27 $\left[\frac{3}{2}, 4\right) \cup (4, \infty)$ 29 $(2, \infty)$ 31 $[-2, 2]$

- 33 (a) $D = [-5, -3] \cup (-1, 1] \cup (2, 4]$
 $R = \{-3\} \cup [-1, 4]$

- (b) Creciente en $[-4, -3] \cup [3, 4]$;
decreciente en $[-5, -4] \cup (2, 3]$;
es constante en $(-1, 1]$

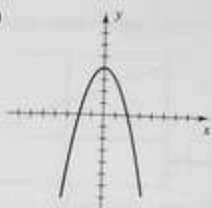


37 (a)



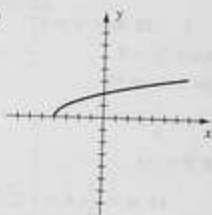
- (b) $D = (-\infty, \infty)$,
 $R = (-\infty, \infty)$
(c) Creciente en
 $(-\infty, \infty)$

39 (a)



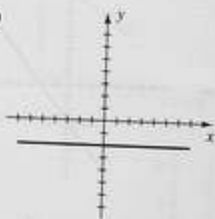
- (b) $D = (-\infty, \infty)$,
 $R = (-\infty, 4]$
(c) Creciente en
 $(-\infty, 0]$,
decreciente en
 $[0, \infty)$

41 (a)



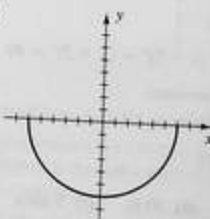
- (b) $D = [-4, \infty)$,
 $R = [0, \infty)$
(c) Creciente en
 $[-4, \infty)$

43 (a)



- (b) $D = (-\infty, \infty)$,
 $R = \{-2\}$
(c) Constante en
 $(-\infty, \infty)$

45 (a)



- (b) $D = [-6, 6]$,
 $R = [-6, 0]$
(c) Decreciente en
 $[-6, 0]$,
creciente en
 $[0, 6]$

47 $h + 1$

49 $2x + h$ 51 $\frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{a-3}}$

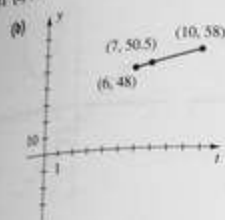
53 $f(x) = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ 55 Sí 57 No 59 Sí

61 No 63 No 65 $V(x) = 4x(15 - x)(10 - x)$

67 (a) $y(x) = \frac{500}{x}$ (b) $C(x) = 300x + \frac{100\,000}{x} - 600$

69 $S(h) = 6h - 50$

11 (a) $y(t) = 2.5t + 33$

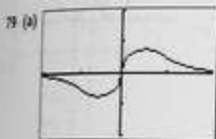

 El aumento anual
en estatura

(c) 58 pulg

12 $d(t) = 2\sqrt{t^2 + 2500}$

13 (a) $y(h) = \sqrt{h^2 + 2hr}$ (b) 1280.6 m

14 $d(x) = \sqrt{90400 + x^2}$



(b) $[-0.75, 0.75]$

 (c) Decreciente en
 $[-2, -0.55]$ y
creciente en
 $[0.55, 2]$

15 $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$



(b) $[-1.03, 1]$

 (c) Creciente en
 $[-0.7, 0]$ y en
 $[1.06, 1.4]$,
decreciente
en $[0, 1.06]$

16 $[-0.7, 1.4, 0.5]$ por $[-1.1, 1]$

 17 (a) 8 (b) ± 8 (c) No hay soluciones reales. (d) 625
(e) No hay soluciones reales.

18 (a) 5985 (b) A lo sumo 95.

19 (a) $f(x) = \frac{2857}{3}x - \frac{5636795}{3}$



[1994, 2005, 5] por [10 000, 30 000, 10 000]

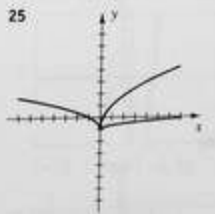
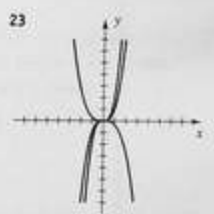
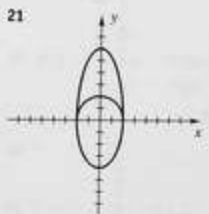
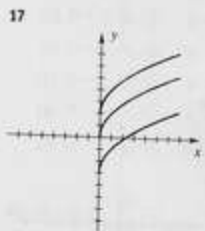
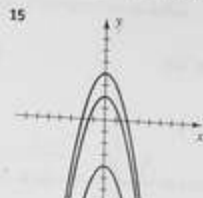
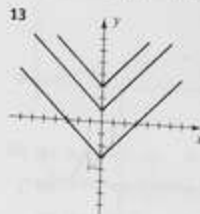
(b) Aumento promedio en el precio pagado por un auto nuevo.

(c) 1999

EJERCICIOS 3.5

1 $f(-2) = 7, g(-2) = 6$

3 Impar 5 Par 7 Ninguno 9 Par 11 Impar



27 $(-2, 4)$ 29 $(7, -3)$ 31 $(6, 2)$

 33 La gráfica de f está desplazada 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba.

 35 La gráfica de f está reflejada con respecto al eje y y desplazada 2 unidades hacia abajo.

R12 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS.

37 La gráfica de f está comprimida verticalmente por un factor de 2 y reflejada con respecto al eje x .

39 La gráfica de f está alargada horizontalmente por un factor de 3, comprimida verticalmente por un factor de 2 y reflejada con respecto al eje x .

41 (a)



(b)



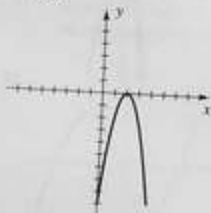
(c)



(d)



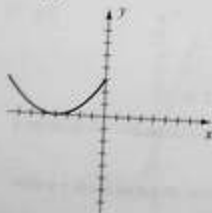
(e)



(f)



(g)



(h)



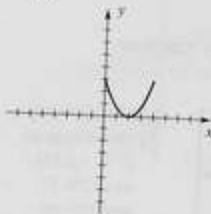
(i)



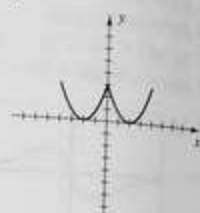
(j)



(k)



(l)

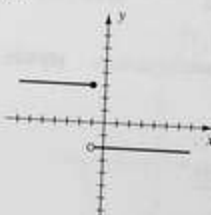


43 (a) $y = f(x + 9) + 1$ (b) $y = -f(x)$

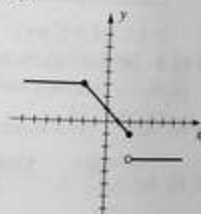
(c) $y = -f(x + 7) - 1$

45 (a) $y = f(x + 4)$ (b) $y = f(x) + 1$ (c) $y = f(-x)$

47



49



51



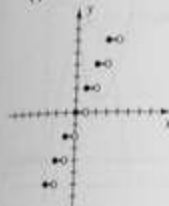
51 (a)



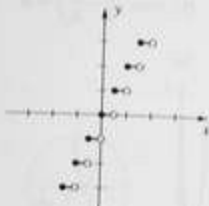
(b)



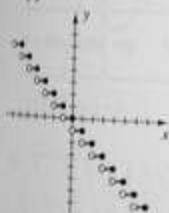
(c)



(d)



(e)

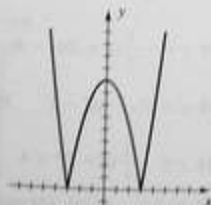


55 Si $x > 0$, dos puntos diferentes de la gráfica tienen la misma coordenada x .

57



59



61



$$63 \text{ (a) } D = [-2, 6], \quad R = [-16, 8]$$

$$\text{(b) } D = [-4, 12], \quad R = [-4, 8]$$

$$\text{(c) } D = [1, 9], \quad R = [-3, 9]$$

$$\text{(d) } D = [-4, 4], \quad R = [-7, 5]$$

$$\text{(e) } D = [-6, 2], \quad R = [-4, 8]$$

$$\text{(f) } D = [-2, 6], \quad R = [-8, 4]$$

$$\text{(g) } D = [-6, 6], \quad R = [-4, 8]$$

$$\text{(h) } D = [-2, 6], \quad R = [0, 8]$$

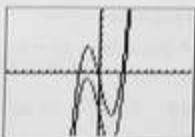
$$65 \quad T(x) = \begin{cases} 0.15x & \text{si } 0 \leq x \leq 20\,000 \\ 0.20x - 1000 & \text{si } x > 20\,000 \end{cases}$$

$$67 \quad R(x) = \begin{cases} 1.20x & \text{si } 0 \leq x \leq 10\,000 \\ 1.50x - 3000 & \text{si } 10\,000 < x \leq 15\,000 \\ 1.80x - 7500 & \text{si } x > 15\,000 \end{cases}$$

$$69 \quad (-3, 12, 22)$$

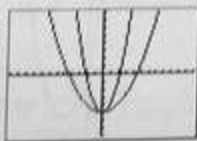
$$71 \quad (-\infty, -3) \cup (-3, 1.87) \cup (4.13, \infty)$$

73



$$[-12, 12] \text{ por } [-8, 8]$$

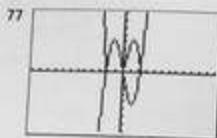
75



$$[-12, 12] \text{ por } [-8, 8]$$

la figura 1, donde el símbolo $\overline{\quad}$ especifica el ángulo de 90° . Al usar las longitudes a , b y c de los lados del triángulo pueden obtenerse seis razones.

R14 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS



$[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

79 (a) 194.80, 234.80

(b) $C_1(x) = \begin{cases} 119.80 & \text{si } 0 \leq x \leq 200 \\ 119.80 + 0.25(x - 200) & \text{si } x > 200 \end{cases}$

$C_2(x) = 159.8 + 0.15x$ para $x \geq 0$

(c)

x	Y_1	Y_2
100	119.8	174.8
200	119.8	189.8
300	144.8	204.8
400	169.8	219.8
500	194.8	234.8
600	219.8	249.8
700	244.8	264.8
800	269.8	279.8
900	294.8	294.8
1000	319.8	309.8
1100	344.8	324.8
1200	369.8	339.8

(d) I si $x \in [0, 900)$, II si $x \geq 900$

EJERCICIOS 3.6

1 $y = a(x + 3)^2 + 1$ 3 $y = ax^2 - 3$

5 $f(x) = -(x + 2)^2 - 4$ 7 $f(x) = 2(x - 3)^2 + 4$

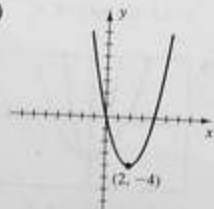
9 $f(x) = -3(x + 1)^2 - 2$

11 $f(x) = -\frac{3}{4}(x - 6)^2 - 7$

13 (a) 0, 4

(b) Mín: $f(2) = -4$

(c)



15 (a) $-\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3}$

(b) Máx: $f\left(\frac{11}{24}\right) = \frac{841}{48}$

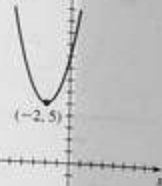
(c)



19 (a) Ninguno

(b) Mín: $f(-2) = 5$

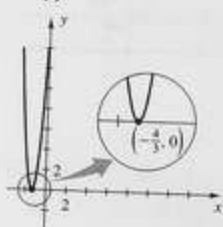
(c)



17 (a) $-\frac{4}{3}$

(b) Mín: $f\left(-\frac{4}{3}\right) = 0$

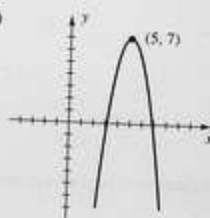
(c)



21 (a) $5 \pm \frac{1}{2} \sqrt{14} \approx 6.87, 3.13$

(b) Máx: $f(5) = 7$

(c)



23 $y = \frac{1}{8}(x - 4)^2 - 1$ 25 $y = -\frac{4}{9}(x + 2)^2 + 4$

27 $y = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 4)$

29 $y = 3(x - 0)^2 - 2$ 31 $y = -\frac{5}{9}(x - 3)^2 + 5$

33 $y = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 + 4$ 35 6.125 37 24.72 km

39 10.5 lb 41 (a) 424 pies (b) 100 pies 43 20 y 20

45 (a) $y(x) = 250 - \frac{3}{4}x$ (b) $A(x) = x\left(250 - \frac{3}{4}x\right)$

(c) $166\frac{2}{3}$ pies por 125 pies

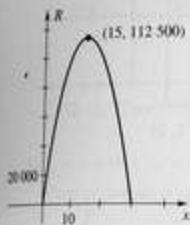
47 $y = \frac{4}{27}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + 3$

48 (a) $y = \frac{1}{500}x^2 + 10$ (b) 282 pies 51 2 pies

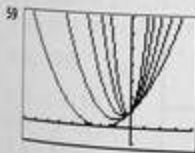
53 500 pares

55 (a) $R(x) = 500x(30 - x)$

(b) \$15


 (-0.57, 0.64),
(0.02, -0.27),
(0.81, -0.41)

[-3, 3] por [-2, 2]


 Valores más pequeños de a producen una parábola más ancha; valores más grandes de a dan lugar a una parábola más angosta.

[-8, 4] por [-1, 7]

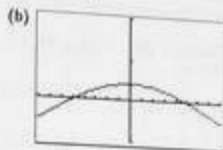
56 (b) $f(x) = 0.17(x - 7)^2 + 0.8$



[0.5, 12] por [0, 8]

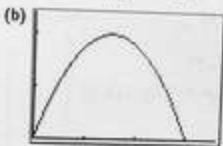
(c) 2.33 pulg

63 (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{25}x + 80 & \text{si } -800 \leq x < -500 \\ \frac{1}{6250}x^2 + 40 & \text{si } -500 \leq x \leq 500 \\ -\frac{4}{25}x + 80 & \text{si } 500 \leq x \leq 800 \end{cases}$



[-800, 800, 100] por [-100, 200, 100]

65 (a) $f(x) = \frac{4}{225}x^2 + \frac{8}{3}x$



[0, 180, 50] por [0, 120, 50]



[0, 600, 50] por [0, 400, 50]

 El valor de k afecta tanto la altura como la distancia recorrida en un factor de $\frac{1}{k}$.

EJERCICIOS 3.7

1 (a) 15 (b) -3 (c) 54 (d) $\frac{2}{3}$

3 (a) $3x^2 + 1; 3 - x^2; 2x^4 + 3x^2 - 2; \frac{x^2 + 2}{2x^2 - 1}$

(b) R (c) Todos los números reales excepto $\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$

5 (a) $2\sqrt{x+5}; 0; x+5; 1$ (b) $[-5, \infty)$ (c) $(-5, \infty)$

7 (a) $\frac{3x^2 + 6x}{(x-4)(x+5)}; \frac{x^2 + 14x}{(x-4)(x+5)}; \frac{2x^2}{2(x+5)}$
 $\frac{x-4}{x-4}$

R16 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

(b) Todos los números reales excepto -5 y 4 .

(c) Todos los números reales excepto -5 , 0 y 4 .

9 (a) $-2x^2 - 1$ (b) $-4x^2 + 4x - 1$ (c) $4x - 3$
(d) $-x^4$

11 (a) $6x + 9$ (b) $6x - 8$ (c) -3 (d) 10

13 (a) $75x^2 + 4$ (b) $15x^2 + 20$ (c) 304 (d) 155

15 (a) $8x^2 - 2x - 5$ (b) $4x^2 + 6x - 9$ (c) 31
(d) 45

17 (a) $8x^3 - 20x$ (b) $128x^3 - 20x$ (c) -24
(d) 3396

19 (a) 7 (b) -7 (c) 7 (d) -7

21 (a) $x + 2 - 3\sqrt{x+2}$; $[-2, \infty)$

(b) $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$; $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

23 (a) $3x - 4$; $[0, \infty)$

(b) $\sqrt{3x^2 - 12}$; $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

25 (a) $\sqrt{x+5} - 2$; $[-1, \infty)$

(b) $\sqrt{x-2} + 5$; $[2, \infty)$

27 (a) $\sqrt{3 - \sqrt{x^2 - 16}}$; $[-5, -4] \cup [4, 5]$

(b) $\sqrt{-x-13}$; $(-\infty, -13]$

29 (a) $x; \mathbb{R}$ (b) $x; \mathbb{R}$

31 (a) $\frac{1}{x^2}$; todos los números reales diferentes de cero.

(b) $\frac{1}{x^4}$; todos los números reales diferentes de cero.

33 (a) $\frac{1}{5-x}$; todos los números reales excepto 4 y 5 .

(b) $\frac{-2x+5}{-3x+7}$; todos los números reales excepto 2 y $\frac{7}{3}$.

35 $-3 \pm \sqrt{2}$

37 (a) 5 (b) 6 (c) 6 (d) 5 (e) No es posible.

39 $20\sqrt{x^2+1}$ 41 Impar 43 31.26

45 $A(t) = 36\pi t^2$ 47 $r(t) = 9\sqrt[3]{t}$

49 $h(t) = 5\sqrt{t^2 + 8t}$

51 $d(t) = \sqrt{90400 + (500 + 150t)^2}$

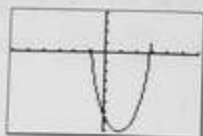
Ejercicios 53 al 60: las respuestas no son únicas.

53 $u = x^2 + 3x$, $y = u^{1/3}$ 55 $u = x - 3$, $y = u^{-4}$

57 $u = x^4 - 2x^2 + 5$, $y = u^2$

59 $u = \sqrt{x+4}$, $y = \frac{u-2}{u+2}$ 61 5×10^{-11}

63 (a) $Y_1 = x$, grafica $Y_1 = -2Y_1$



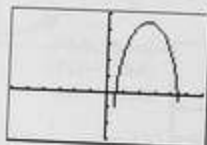
$[-12, 12, 2]$ por $[-16, 8, 2]$

(b) $Y_1 = 0.5x$, grafica Y_1



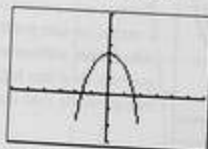
$[-12, 12, 2]$ por $[-16, 8, 2]$

(c) $Y_1 = x - 3$, grafica $Y_1 = Y_1 + 1$



$[-12, 12, 2]$ por $[-6, 10, 2]$

(d) $Y_1 = x + 2$, grafica $Y_1 = Y_1 - 3$



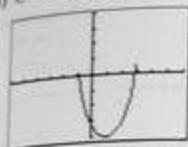
$[-12, 12, 2]$ por $[-6, 10, 2]$

(e) $Y_1 = -x$, grafica Y_1



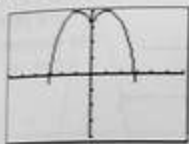
$[-12, 12, 2]$ por $[-8, 8, 2]$

(f) $Y_1 = x$, grafica $Y_2 = -Y_1$



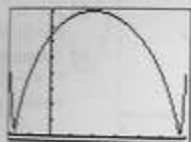
$$[-12, 12, 2] \text{ por } [-8, 8, 2]$$

(g) $Y_1 = \text{abs } x$, grafica Y_2



$$[-12, 12, 2] \text{ por } [-8, 8, 2]$$

(h) $Y_1 = x$, grafica $Y_2 = \text{abs } Y_1$



$$[-2, 6] \text{ por } [0, 8]$$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

1 Los puntos de los cuadrantes II y IV

2 $d(A, B)^2 + d(A, C)^2 = d(B, C)^2$; área = 10

3 (a) $\sqrt{265}$ (b) $\left(-\frac{13}{2}, 1\right)$ (c) $(-11, -23)$

4 $(0, 1), (0, 11)$ 5 $-2 < a < 1$

6 $(x-7)^2 + (y+4)^2 = 149$

7 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 169$

8 $x = -2 - \sqrt{9-y^2}$ 9 $\frac{11}{19}$

 10 La pendiente de AD y BC es $\frac{2}{3}$

11 (a) $18x + 6y = 7$ (b) $2x - 6y = 3$

12 $y = \frac{8}{3}x + 8$ 13 $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 81$

14 $x + y = -3$ 15 $5x - y = 23$

16 $2x - 3y = 5$ 17 $C(0, 6); r = \sqrt{5}$

18 $C(-3, 2); r = \frac{1}{2}\sqrt{13}$

19 (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) 0 (d) $\frac{x}{\sqrt{3-x}}$

(e) $\frac{x}{\sqrt{x+3}}$ (f) $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}$ (g) $\frac{x^2}{x+3}$

20 Positivo 21 Positivo

22 (a) $\left[\frac{4}{3}, \infty\right); [0, \infty)$

 (b) Todos los números reales excepto $-3; (0, \infty)$

23 $-2a - h + 1$ 24 $\frac{1}{(a+h+2)(a+2)}$

25 $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$

26 (a) Impar (b) Ninguno (c) Par

 Ejercicios 27 al 40: se muestra(n) los puntos donde corta x , seguidos de los puntos donde corta y .

 27 -5 ; ninguno.


28 Ninguno; 3.5



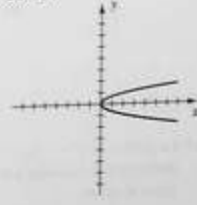
29 1.6; 4


 30 $4; -\frac{4}{3}$


31 0; 0



32 0; 0



la figura 1, donde el símbolo \square especifica el ángulo de 90° . Al usar las longitudes a , b y c de los lados del triángulo pueden obtenerse seis razones.

R18 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

33 1; 1



34 1; -1

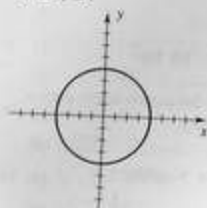


43 (a)

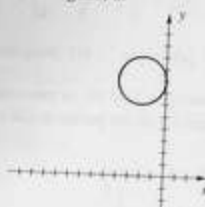


- (b) $D = \mathbb{R}; R = \mathbb{R}$
(c) Decreciente en $(-\infty, \infty)$

35 $\pm 4; \pm 4$



36 Ninguno; 8.

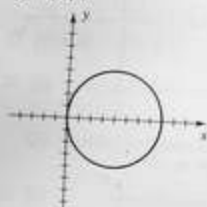


44 (a)

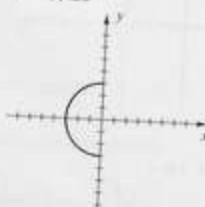


- (b) $D = \mathbb{R}; R = \{1000\}$
(c) Constante en $(-\infty, \infty)$

37 0; 8; 0



38 -3; ± 3

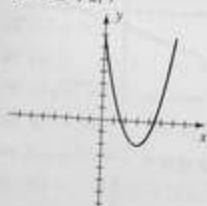


45 (a)

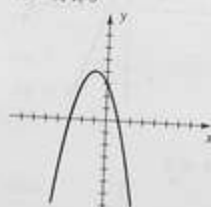


- (b) $D = \mathbb{R}; R = [0, \infty)$
(c) Decreciente en $(-\infty, -3]$, creciente en $[-3, \infty)$

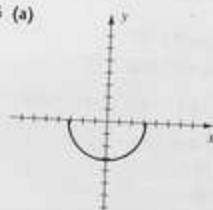
39 $3 \pm \sqrt{2}; 7$



40 -3; 1; 3



46 (a)

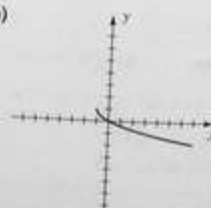


- (b) $D = (-\sqrt{10}, \sqrt{10}); R = \{-\sqrt{10}, 0\}$
(c) Decreciente en $[-\sqrt{10}, 0]$, creciente en $[0, \sqrt{10}]$

41 $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$

42 La gráfica de $y = -f(x - 2)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada 2 unidades a la derecha y reflejada con respecto al eje x .

47 (a)



- (b) $D = [-1, \infty); R = (-\infty, 1]$
(c) Decreciente en $[-1, \infty)$

48 (a)

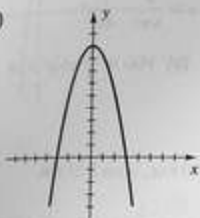


(b) $D = (-\infty, 2]$

$R = [0, \infty)$

 (c) Decreciente en $(-\infty, 2]$

49 (a)

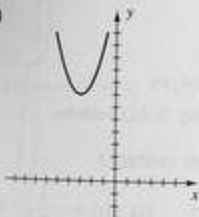


(b) $D = \mathbb{R}$

$R = (-\infty, 9]$

 (c) Creciente en $(-\infty, 0]$,
decreciente en $[0, \infty)$

50 (a)

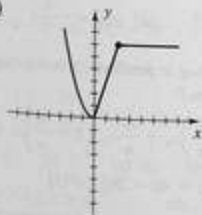


(b) $D = \mathbb{R}$

$R = [7, \infty)$

 (c) Decreciente en $(-\infty, -3]$,
creciente en $[-3, \infty)$

51 (a)



(b) $D = \mathbb{R}$

$R = [0, \infty)$

 (c) Decreciente en $(-\infty, 0]$,
creciente en $[0, 2]$, constante en $[2, \infty)$

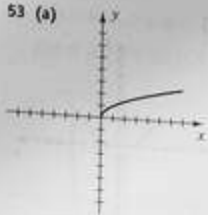
52 (a)



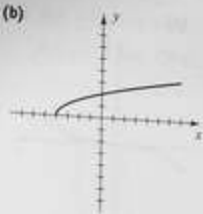
(b) $D = \mathbb{R}$; $R = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$

 (c) Constante en $[n, n+1)$, donde n es cualquier entero.

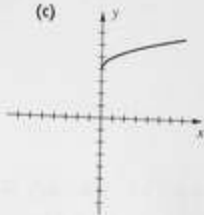
53 (a)



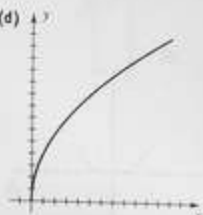
(b)



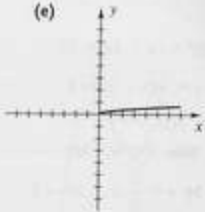
(c)



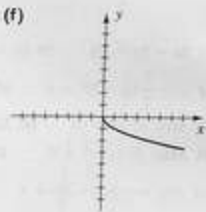
(d)



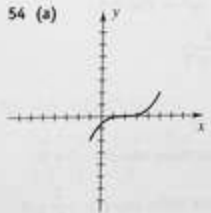
(e)



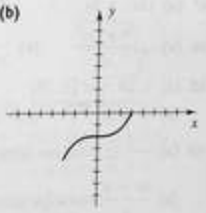
(f)



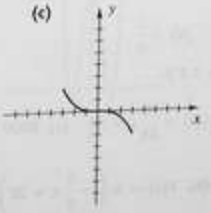
54 (a)



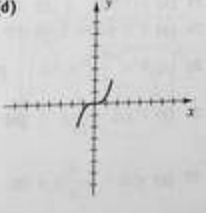
(b)



(c)



(d)



R20 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

(e)



(f)



(g)



55 $2x - 5y = 10$ 56 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$

57 $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 4$ 58 $y = -|x-2| - 1$

59 Mín: $f(-3) = 4$ 60 Máx: $f(5) = -7$

61 Máx: $f(-1) = -37$ 62 Mín: $f(4) = -108$

63 $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$ 64 $y = \frac{3}{2}(x-3)^2 - 2$

65 (a) $[0, 2]$ (b) $(0, 2]$ 66 (a) -1 (b) $\sqrt{13}$

67 (a) $18x^2 + 9x - 1$ (b) $6x^2 - 15x + 5$

68 (a) $\sqrt{\frac{3+2x^2}{x^2}}$ (b) $\frac{1}{3x+2}$

69 (a) $\sqrt{28-x}; [3, 28]$
(b) $\sqrt{\sqrt{25-x^2}-3}; [-4, 4]$

70 (a) $\frac{1}{x+3}$; todos los números reales excepto -3 y 0 .

(b) $\frac{6x+4}{x}$; todos los números reales excepto $-\frac{2}{3}$ y 0 .

71 $u = x^2 - 5x$, $y = \sqrt{u}$ 72 Entre 36.1 pies y 60.1 pies.

73 (a) 245 pies (b) 2028

74 (a) $V = 6000r + 89\,000$ (b) $2\frac{1}{3}$

75 (a) $F = \frac{9}{5}C + 32$ (b) 1.8°F

76 (a) $C_1(x) = \frac{1}{16}x$ (b) $C_2(x) = \frac{5}{88}x + 50$ (c) 8800

77 (a) $y(x) = -\frac{4}{5}x + 20$ (b) $V(x) = 4x\left(-\frac{4}{5}x + 20\right)$

78 $C(r) = \frac{3\pi(r^2 + 16)}{10r}$

79 (a) $V = 10t$

(b) $V = 200h^2$ para $0 \leq h \leq 6$;

$V = 7200 + 3200(h-6)$ para $6 < h \leq 9$

(c) $h = \sqrt{\frac{r}{20}}$ para $0 \leq r \leq 720$; $h = 6 + \frac{r-720}{320}$ para $720 < r \leq 1680$

80 (a) $r = \frac{1}{2}x$ (b) $y = \frac{5}{4\pi} - \frac{1}{48}x^2$

81 (a) $y(h) = \frac{bh}{a-b}$ (b) $V(h) = \frac{1}{3}\pi b(a^2 + ab + b^2)$

(c) $\frac{200}{7\pi} \approx 9.1$ pies

82 $\frac{18}{13}$ h después de la 1:00 P.M., o sea 2:23 P.M.

83 El radio del semicírculo es $\frac{1}{8\pi}$ m; la longitud del rectángulo es $\frac{1}{8}$ de m.

84 (a) 1 s (b) 4 pies

(c) En la Luna 6 s y 24 pies.

85 (a) (87.5, 17.5) (b) 30.625 unidades.

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 3

2 (a) $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$ (b) $g(x) = -\frac{1}{2}x - 3$

(c) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 7$ (d) $g(x) = -\frac{1}{2}x$

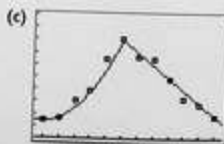
4 $2ax + ah + b$ 5 m_{PT} : la pendiente de la recta tangente en P .

6 $R(x_1, y_1) = \left(\left(1 - \frac{m}{n}\right)x_1 + \frac{m}{n}x_2, \left(1 - \frac{m}{n}\right)y_1 + \frac{m}{n}y_2 \right)$

7 $h = -ad^2$ 8 $f(x) = 40 - 20[-x/15]$

9 $x = \frac{0.4996 + \sqrt{(-0.4996)^2 - 4(0.0833)(3.549 - D)}}{2(0.0833)}$

10 (b) $f(x) = \begin{cases} 0.132(x-1)^2 + 0.7 & \text{si } 1 \leq x \leq 6 \\ -0.517x + 7.102 & \text{si } 6 < x \leq 12 \end{cases}$



[0.5, 12.5, 0.5] por [0, 5]

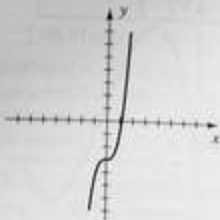
Capítulo 4

EXERCICIOS 4.1

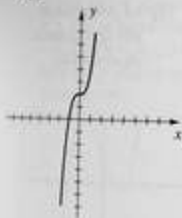
1 (a)



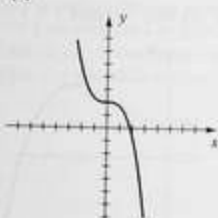
(b)



3 (a)



(b)



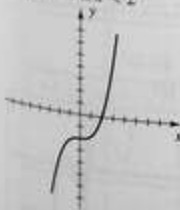
$$5 \quad f(3) = -2 < 0, f(4) = 10 > 0$$

$$7 \quad f(2) = 5 > 0, f(3) = -5 < 0$$

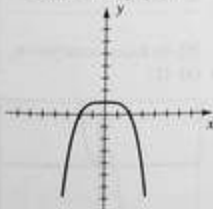
$$9 \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{32} > 0, f(-1) = -1 < 0$$

11 (a) C (b) D (c) B (d) A

$$13 \quad f(x) > 0 \text{ si } x > 2, \\ f(x) < 0 \text{ si } x < 2$$

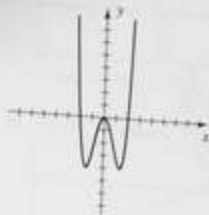


$$15 \quad f(x) > 0 \text{ si } |x| < 2, \\ f(x) < 0 \text{ si } |x| > 2$$



$$17 \quad f(x) > 0 \text{ si } |x| > 2,$$

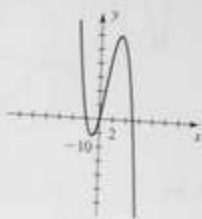
$$f(x) < 0 \text{ si } 0 < |x| < 2$$



$$19 \quad f(x) > 0 \text{ si } x < -2 \text{ o}$$

$$0 < x < 5, f(x) < 0 \text{ si}$$

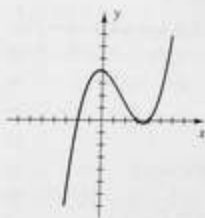
$$-2 < x < 0 \text{ o } x > 5$$



$$21 \quad f(x) > 0 \text{ si } -2 < x < 3$$

$$0 < x < 4, f(x) < 0 \text{ si}$$

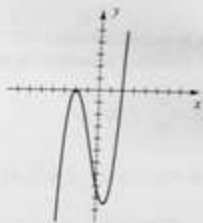
$$x < -2 \text{ o } 3 < x < 4$$



$$23 \quad f(x) > 0 \text{ si } x > 2,$$

$$f(x) < 0 \text{ si } x < -2$$

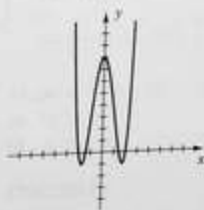
$$\text{o } |x| < 2$$



$$25 \quad f(x) > 0 \text{ si } |x| > 2 \text{ o}$$

$$|x| < \sqrt{2}, f(x) < 0 \text{ si}$$

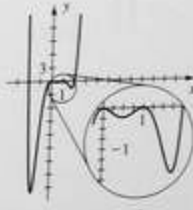
$$\sqrt{2} < |x| < 2$$



$$27 \quad f(x) > 0 \text{ si } |x| > 2,$$

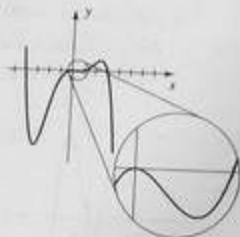
$$f(x) < 0 \text{ si } |x| < 2,$$

$$x \neq 0, x \neq 1$$



R22 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

29



31 (a)



(b) $-abc$ (c) $(-\infty, a) \cup (b, c)$ (d) $[a, b] \cup [c, \infty)$

33 Si n es par, entonces $(-x)^n = x^n$ y de aquí que $f(-x) = f(x)$, por tanto f es una función par.

35 $-\frac{4}{3}$ 37 ± 4

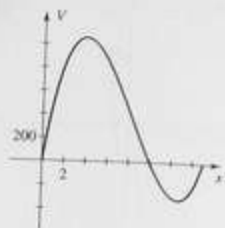
39 $P(x) > 0$ en $(-\frac{1}{3}\sqrt{15}, 0)$ y $(\frac{1}{3}\sqrt{15}, \infty)$;

$P(x) < 0$ en $(-\infty, -\frac{1}{3}\sqrt{15})$ y $(0, \frac{1}{3}\sqrt{15})$



41 (b) $V(x) > 0$ en $(0, 10)$ y $(15, \infty)$; los valores permisibles para x están en $(0, 10)$.

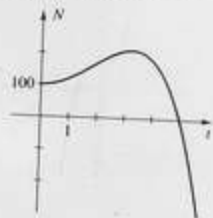
43 (a) $T > 0$ para $0 < t < 12$; $T < 0$ para $12 < t < 24$



(c) $T(6) = 32.4 > 32$, $T(7) = 29.75 < 32$

45 (a) $N(t) > 0$ para $0 < t < 5$

(b) La población se extingue después de cinco años.



47 (a)

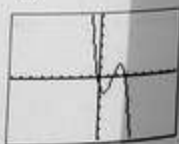
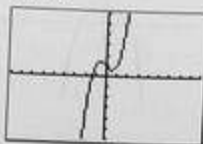
x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$k(x)$
-60	25 920 000	25 902 001	25 937 999	26 135 880
-40	5 120 000	5 112 001	5 127 999	5 183 920
-20	320 000	318 001	321 999	327 960
20	320 000	318 001	321 999	312 040
40	5 120 000	5 112 001	5 127 999	5 056 080
60	25 920 000	25 902 001	25 937 999	25 704 120

(b) Se hacen semejantes.

49 (a) (1)

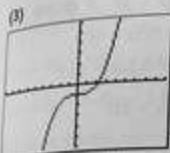
(c) $2x^2$

(2)

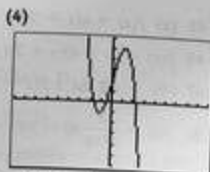


$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

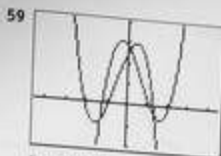
$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$



[-9, 9] por [-6, 6]



[-9, 9] por [-6, 6]



[-4.5, 4.5] por [-2, 4]

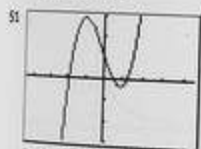
 (-1.29, -0.77),
 (0.085, 2.66),
 (1.36, -0.42)

 (b) (1) A medida que x se aproxima a ∞ , $f(x)$ se acerca a ∞ ; conforme x se aproxima a $-\infty$, $f(x)$ lo hace a $-\infty$.

 (2) A medida que x se aproxima a ∞ , $f(x)$ se aproxima a $-\infty$; a medida que x se acerca a $-\infty$, $f(x)$ se aproxima a ∞ .

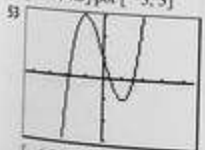
 (3) A medida que x se aproxima a ∞ , $f(x)$ lo hace a ∞ ; a medida que x se acerca a $-\infty$, $f(x)$ se aproxima a $-\infty$.

 (4) A medida que x se aproxima a ∞ , $f(x)$ se aproxima a $-\infty$; a medida que x se aproxima a $-\infty$, $f(x)$ se acerca a ∞ .

 (c) Para la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a > 0$, $f(x)$ se aproxima a ∞ a medida que x se acerca a ∞ y $f(x)$ se aproxima a $-\infty$ a medida que x se acerca a $-\infty$. Con $a < 0$, $f(x)$ se acerca a $-\infty$ conforme x lo hace a ∞ y $f(x)$ se aproxima a ∞ a medida que x se acerca a $-\infty$.


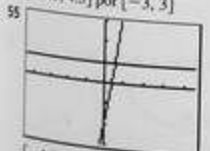
[-4.5, 4.5] por [-3, 3]

-1.89, 0.49, 1.20

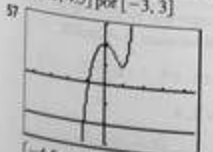


[-4.5, 4.5] por [-3, 3]

-1.88, 0.35, 1.53



[-4.5, 4.5] por [-3, 3]

 (0.56, ∞)


[-4.5, 4.5] por [-3, 3]

 (-1.10, ∞)

59 (a) Ha aumentado.



[1975, 1995] por [20, 40]

(b) 1992

EJERCICIOS 4.2

1 $2x^2 - x + 3$; $4x - 3$ 3 $\frac{3}{2}x$; $\frac{1}{2}x - 4$

5 0; $7x + 2$ 7 $\frac{9}{2}$; $\frac{53}{2}$ 9 26 11 7

13 $f(-3) = 0$ 15 $f(-2) = 0$ 17 $x^3 - 3x^2 - 10x$

19 $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$

21 $2x^2 + x + 6$; 7

23 $x^2 - 3x + 1$; -8

25 $3x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x + 36$; -65

27 $4x^3 + 2x^2 - 4x - 2$; 0

29 73 31 -0.0444

33 $8 + 7\sqrt{3}$

35 $f(-2) = 0$ 37 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

39 3, 5 41 $f(x) > 0$ 43 -14

45 Si $f(x) = x^n - y^n$ y n es par, entonces $f(-y) = 0$.

47 (a) $V = \pi x^2(6 - x)$

(b) $\left(\frac{1}{2}(5 + \sqrt{45}), \frac{1}{2}(7 - \sqrt{45})\right)$

49 (a) $A = 8x - 2x^3$ (b) $\sqrt{13} - 1 \approx 2.61$

51 -9.55

53 -0.75, 1.96

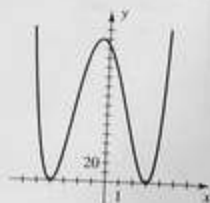
EJERCICIOS 4.3

1 $-4x^3 + 16x^2 - 4x - 24$ 3 $3x^3 + 3x^2 - 36x$

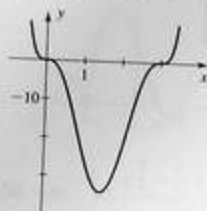
5 $-2x^3 + 6x^2 - 8x + 24$

R24 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

7 $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 24x + 144$



9 $3x^6 - 27x^3 + 81x^0 - 81x^3$



11 $f(x) = \frac{7}{9}(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-3)$

13 $f(x) = -1(x-1)^2(x-3)$

15 $-\frac{2}{3}$ (multiplicidad 1); 0 (multiplicidad 2);

$\frac{5}{2}$ (multiplicidad 3).

17 $-\frac{3}{2}$ (multiplicidad 2); 0 (multiplicidad 3).

19 -4 (multiplicidad 3); -3 (multiplicidad 2);
3 (multiplicidad 5).

21 $\pm 4i, \pm 3$ (cada uno de multiplicidad 1).

23 $f(x) = (x+3)^2(x+2)(x-1)$

25 $f(x) = (x-1)^3(x+1)$

Ejercicios 27 al 34: los tipos de posibles soluciones aparecen en el orden positivo, negativo, no real complejo.

27 3, 0, 0 o 1, 0, 2 29 0, 1, 2

31 2, 2, 0; 2, 0, 2; 0, 2, 2; 0, 0, 4

33 2, 3, 0; 2, 1, 2; 0, 3, 2; 0, 1, 4

35 Superior, 5; inferior, -2. 37 Superior, 2; inferior, -2.

39 Superior, 3; inferior, -3.

41 $f(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2(x-1)(x-2)^2$

43 (a) $f(x) = a(x+3)^2(x+1)(x-2)^2$ (b) 108

45 $f(x) = (x+4)(x+2)(x-1.5)^2(x-3)$

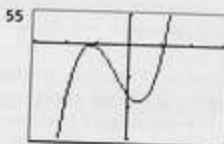
47 No 49 Sí: $1.5(x-2)(x-5.2)(x-10.1)$

51 $f(t) = \frac{5}{3528}t(t-5)(t-19)(t-24)$



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

Conforme aumenta la multiplicidad, la gráfica se hace más horizontal en (0.5, 0).



$[-3, 3]$ por $[-3, 1]$

-1.2 (multiplicidad 2);
1.1 (multiplicidad 1).

57 2007 (cuando $t = 27.1$)

59 (a) (3)



$[0.5, 12.5]$ por $[-30, 50, 5]$

(b) $4 \leq x \leq 5$ y $10 \leq x \leq 11$

(c) 4.02, 10.53

61 7.64 cm 63 12 cm

EJERCICIOS 4.4

1 $x^2 - 6x + 13$ 3 $(x-2)(x^2 + 4x + 29)$

5 $x(x+1)(x^2 - 6x + 10)$

7 $(x^2 - 8x + 25)(x^2 + 4x + 5)$

9 $x(x^2 + 4)(x^2 - 2x + 2)$

Ejercicios del 11 al 14: demuestra que ninguna de las posibles raíces racionales indicada satisface la ecuación.

11 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ 13 $\pm 1, \pm 2$ 15 $-2, -1, 4$

17 $-3, 2, \frac{5}{2}$ 19 $-7, \pm\sqrt{2}, 4$

21 $-3, -\frac{2}{3}, 0$ (multiplicidad 2), $\frac{1}{2}$

$$23 \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \pm \frac{3}{4} \sqrt{9}i$$

$$25 f(x) = (3x + 2)(2x - 1)(x - 1)^2(x - 2)$$

$$27 f(x) = 2(x + 0.9)(x - 1.1)(x - 12.5)$$

29 No. Si i es una raíz, entonces $-i$ también es una raíz; por tanto, el polinomio tendría factores $x - 1$, $x + 1$, $x - i$, $x + i$ por consiguiente sería de grado mayor que 3.

31 Puesto que n es impar y se presentan ceros complejos no reales en pares conjugados para polinomios con coeficientes reales, debe haber por lo menos un cero real.

33 (a) Las dos cajas corresponden a $x = 5$ y $x = 5(2 - \sqrt{2})$.

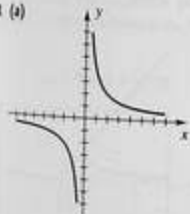
(b) La caja corresponde a $x = 5$.

35 (c) En pies: 5, 12 y 13 37 (b) 4 pies

39 Ninguno 41 -1.2, 0.8, $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 43 10 200 m

EJERCICIOS 4.5

1 (a)



(b) D = todos los números reales diferentes de cero; $R = D$

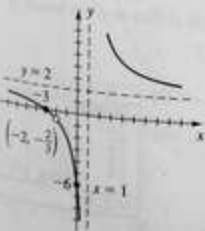
(c) Decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$

3 AV: $x = 3$;

AH: $y = -2$;

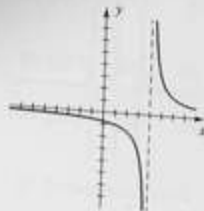
huecos: $(6, -\frac{22}{3})$

5

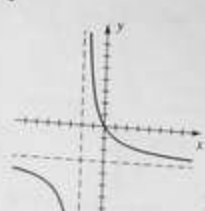


$$f(x) = \frac{2(x+3)(x+2)}{(x-1)(x+2)}$$

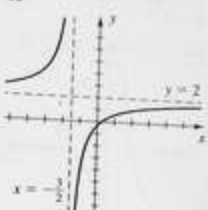
7



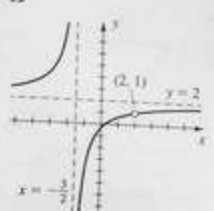
9



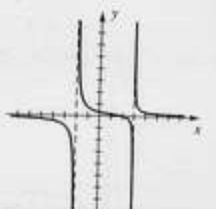
11



13



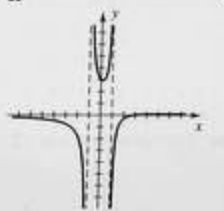
15



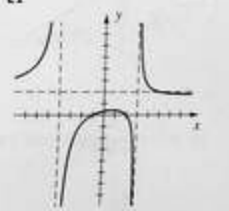
17



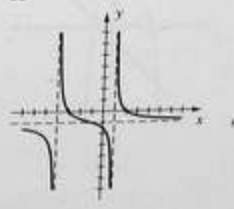
19



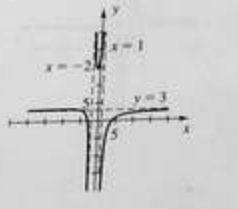
21



23



25



R26 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

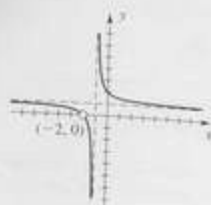
27



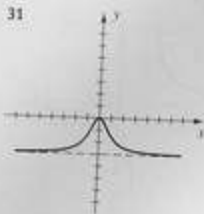
29



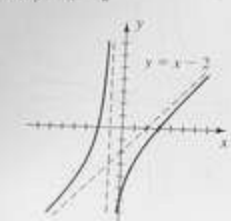
43 $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ para $x \neq -2$



31



33 $y = x - 2$



45 $f(x) = \frac{3-x}{x-4}$ 47 $f(x) = \frac{6x^2 - 6x - 12}{x^2 - 7x + 6}$

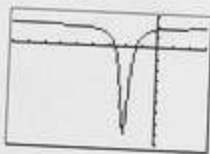
49 (a) $h = \frac{16}{(r+0.5)^2} - 1$ (b) $V(r) = \pi r^2 h$
(c) Excluye $r \leq 0$ y $r \geq 3.5$.

51 (a) $V(t) = 50 + 5t$, $A(t) = 0.5t$ (b) $\frac{t}{10t + 100}$
(c) Conforme $t \rightarrow \infty$, $c(t) \rightarrow 0.1$ lb del sal por galón.

53 (a) $0 < S < 4000$ (b) 4500 (c) 2000
(d) Un aumento de 125% en S produce sólo un 12.5% de incremento en R .

55 Ninguno

57 $x = 0.999$



$[-9, 3]$ por $[-9, 3]$ $[0.7, 1.3, 0.1]$ por $[0.8, 1.2, 0.1]$

59 (a) La gráfica de g es la recta horizontal $y = 1$ con huecos en $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

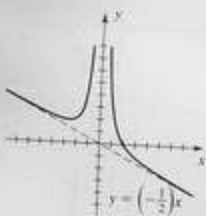
(b) La gráfica de h es la gráfica de p con huecos en $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

61 (a) $y = \frac{132 - 48x}{x - 4}$

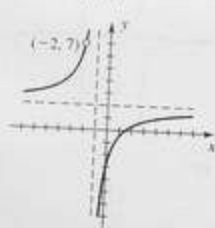
(b)

X	Y1
2	2
2.5	2.5
3	3
3.5	3.5
4	4
4.5	4.5
5	5
5.5	5.5
6	6
6.5	6.5
7	7
7.5	7.5
8	8
8.5	8.5
9	9
9.5	9.5
10	10
10.5	10.5
11	11
11.5	11.5
12	12
12.5	12.5
13	13
13.5	13.5
14	14
14.5	14.5
15	15
15.5	15.5
16	16
16.5	16.5
17	17
17.5	17.5
18	18
18.5	18.5
19	19
19.5	19.5
20	20
20.5	20.5
21	21
21.5	21.5
22	22
22.5	22.5
23	23
23.5	23.5
24	24
24.5	24.5
25	25
25.5	25.5
26	26
26.5	26.5
27	27
27.5	27.5
28	28
28.5	28.5
29	29
29.5	29.5
30	30
30.5	30.5
31	31
31.5	31.5
32	32
32.5	32.5
33	33
33.5	33.5
34	34
34.5	34.5
35	35
35.5	35.5
36	36
36.5	36.5
37	37
37.5	37.5
38	38
38.5	38.5
39	39
39.5	39.5
40	40
40.5	40.5
41	41
41.5	41.5
42	42
42.5	42.5
43	43
43.5	43.5
44	44
44.5	44.5
45	45
45.5	45.5
46	46
46.5	46.5
47	47
47.5	47.5
48	48
48.5	48.5
49	49
49.5	49.5
50	50
50.5	50.5
51	51
51.5	51.5
52	52
52.5	52.5
53	53
53.5	53.5
54	54
54.5	54.5
55	55
55.5	55.5
56	56
56.5	56.5
57	57
57.5	57.5
58	58
58.5	58.5
59	59
59.5	59.5
60	60
60.5	60.5
61	61
61.5	61.5
62	62
62.5	62.5
63	63
63.5	63.5
64	64
64.5	64.5
65	65
65.5	65.5
66	66
66.5	66.5
67	67
67.5	67.5
68	68
68.5	68.5
69	69
69.5	69.5
70	70
70.5	70.5
71	71
71.5	71.5
72	72
72.5	72.5
73	73
73.5	73.5
74	74
74.5	74.5
75	75
75.5	75.5
76	76
76.5	76.5
77	77
77.5	77.5
78	78
78.5	78.5
79	79
79.5	79.5
80	80
80.5	80.5
81	81
81.5	81.5
82	82
82.5	82.5
83	83
83.5	83.5
84	84
84.5	84.5
85	85
85.5	85.5
86	86
86.5	86.5
87	87
87.5	87.5
88	88
88.5	88.5
89	89
89.5	89.5
90	90
90.5	90.5
91	91
91.5	91.5
92	92
92.5	92.5
93	93
93.5	93.5
94	94
94.5	94.5
95	95
95.5	95.5
96	96
96.5	96.5
97	97
97.5	97.5
98	98
98.5	98.5
99	99
99.5	99.5
100	100

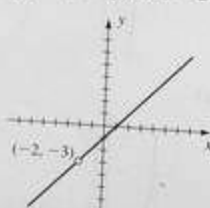
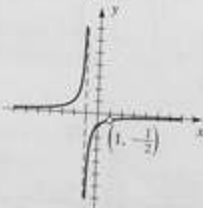
35 $y = \frac{1}{2}x$

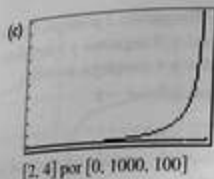


37 $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ para $x \neq -2$



39 $f(x) = \frac{-1}{x+1}$ para $x \neq -1$ 41 $f(x) = x - 1$ para $x \neq -2$





[2, 4] por [0, 1000, 100]

(d) $x = 4$

(e) Sin importar el número de horas crédito adicionales obtenidas en 4.0, no es posible alcanzar una calificación punto promedio (CPP) acumulativa de 4.0.

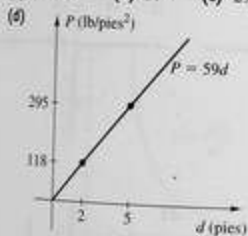
EJERCICIOS 4.6

1 $a = kv$, $k = \frac{2}{5}$ 3 $r = k\frac{x}{t}$, $k = -14$

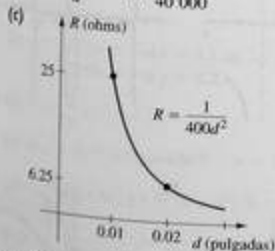
5 $y = k\frac{x^2}{z}$, $k = 27$ 7 $z = kx^2y^3$, $k = \frac{2}{49}$

9 $y = k\frac{x}{z}$, $k = 36$ 11 $y = k\frac{\sqrt{x}}{z^2}$, $k = \frac{40}{3}$

13 (a) $P = kd$ (b) 59 (c) 295 lb/pies²



15 (a) $R = k\frac{1}{d^2}$ (b) $\frac{1}{40000}$



(d) $\frac{50}{9}$ ohms

17 (a) $P = k\sqrt{t}$ (b) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ (c) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ sec

19 (a) $T = kd^{1/2}$ (b) $\frac{365}{(93)^{1/2}}$ (c) 223.2 días

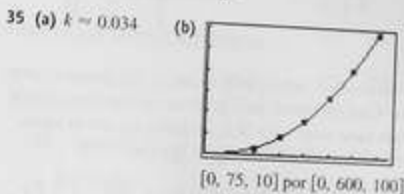
21 (a) $V = k\sqrt{L}$ (b) $\frac{7}{2}\sqrt{2}$ (c) 60.6 mi/hr

23 (a) $W = kh^3$ (b) $\frac{25}{27}$ (c) 154 lb

25 (a) $F = kPr^4$ (b) Más o menos 2.05 veces más fuerte.

27 Se incrementa 250%. 29 d se multiplica por 9.

31 $y = 1.2x$ 33 $y = \frac{10.1}{x^2}$

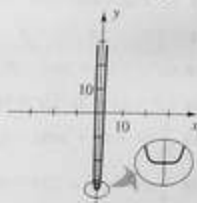


[0, 75, 10] por [0, 600, 100]

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

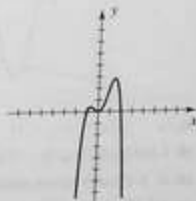
1 $f(x) > 0$ si $x > -2$,
 $f(x) < 0$ si $x < -2$

2 $f(x) > 0$ si $x < -\sqrt[3]{32}$
 $0 < x < \sqrt[3]{32}$, $f(x) < 0$
si $-\sqrt[3]{32} < x < \sqrt[3]{32}$



3 $f(x) > 0$ si $-2 < x < 1$
 $0 < x < 3$, $f(x) < 0$
si $x < -2$ o $x > 3$

4 $f(x) > 0$ si $-1 < x < 0$
 $0 < x < 2$,
 $f(x) < 0$ si $x < -1$
o $x > 2$



la figura 1, donde el símbolo $\hat{}$ especifica el ángulo de 90° . Al usar las longitudes a , b y c de los lados del triángulo pueden obtenerse seis razones.

R28 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS.

5. $f(x) > 0$ si $-4 < x < 0$
 $0 < x < 2$, $f(x) < 0$ si
 $x < -4$ o $0 < x < 2$
6. $f(x) > 0$ si $-4 < x < -2$,
 $0 < x < 2$, o $x > 4$,
 $f(x) < 0$ si $x < -4$,
 $-2 < x < 0$, o $2 < x < 4$



7. $f(0) = -9 < 100$ y $f(10) = 561 > 100$. Por el teorema del valor intermedio para funciones polinómicas, f toma todo valor entre -9 y 561 ; por tanto, hay por lo menos un número real a en $[0, 10]$ tal que $f(a) = 100$.

8. Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$, $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -4 < 0$. Por el teorema del valor intermedio para funciones polinómicas, f toma todo valor entre -4 y 1 ; en consecuencia, hay por lo menos un número real a en $[0, 1]$ tal que $f(a) = 0$.

9. $3x^2 + 2$; $-21x^2 + 5x - 9$ 10. $4x - 1$; $2x - 1$

11. -132 12. $f(3) = 0$

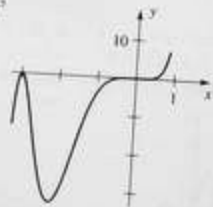
13. $6x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 52x + 104$; -200

14. $2x^2 + (5 + 2\sqrt{2})x + (2 + 5\sqrt{2})$; $11 + 2\sqrt{2}$

15. $\frac{2}{41}(x^2 + 6x + 34)(x + 1)$

16. $\frac{1}{4}x(x^2 - 2x + 2)(x - 3)$

17. $x^7 + 6x^5 + 9x^3$



18. $(x - 2)^3(x + 3)(x - 1)$

19. 1 (multiplicidad 5); -3 (multiplicidad 1).

20. $0, \pm i$ (todos tienen multiplicidad 2).

21. (a) Ya sea 3 positivos y 1 negativo o 1 positivo, 1 negativo, y 2 complejos no reales.

- (b) Cota superior, 3; cota inferior, -1 .

22. (a) Ya sea 2 positivos y 3 negativos; 2 positivos, 1 negativo y 2 complejos no reales; 3 negativos y 2 complejos no reales o 1 negativo y 4 complejos no reales.

- (b) Cota superior, 2; cota inferior, -3 .

23. Como sólo hay potencias pares, $7x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 10 \approx 10$ para todo número real x .

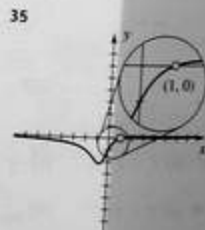
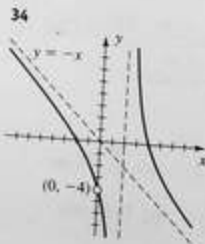
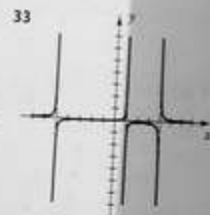
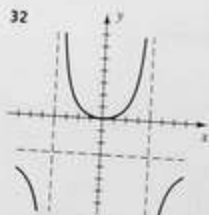
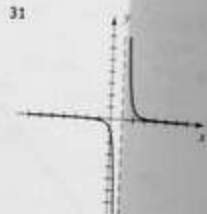
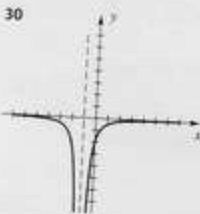
24. $-3, -2, -2 \pm i$ 25. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$ 26. $\pm\sqrt{6}, \pm i$

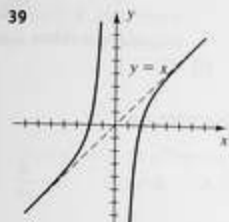
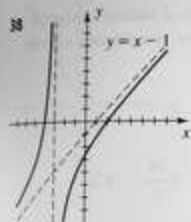
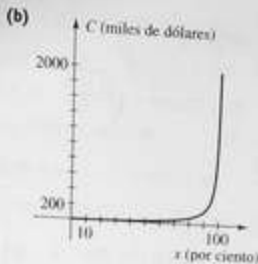
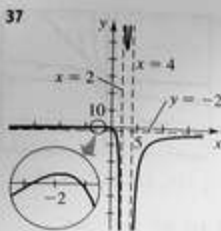
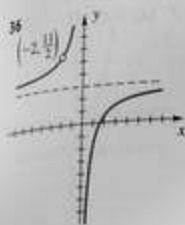
27. $f(x) = -\frac{1}{6}(x + 2)^2(x - 1)^2(x - 3)$

28. $f(x) = \frac{1}{16}(x + 3)^2x^2(x - 3)^2$

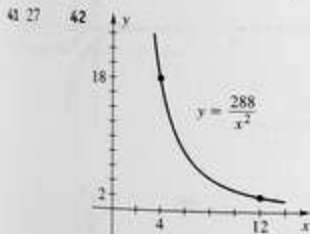
29. AV: $x = 5$; AH: $y = \frac{4}{3}$; intersección $x = 1$

intersección $y = \frac{4}{15}$; hueco: $\left(-2, \frac{4}{7}\right)$





40 $f(x) = \frac{3(x-5)(x-2)}{2(x+3)(x-2)}$ o $f(x) = \frac{3x^2 - 21x + 30}{2x^2 + 2x - 12}$



43 (a) $\frac{1}{15\,000}$

(b) $y = 0.9754 < 1$ si $x = 6.1$, $y = 1.0006 > 1$ si $x = 6.2$

44 (a) $V = \frac{1}{4\pi}x(l^2 - x^2)$

(b) Si $x > 0$, $V > 0$ cuando $0 < x < l$.

45 $t = 4$ (10:00 A.M.) y $t = 16 - 4\sqrt{6} \approx 6.2020$ (12:12 P.M.)

46 $\sqrt{5} < t < 4$

47 (a) $R = k$

(b) k es la rapidez máxima a la que el hígado puede eliminar alcohol del torrente sanguíneo.

48 (a) $C(100) = \$2\,000\,000.00$ y $C(90) \approx \$163\,636.36$

49 375 50 10 125 watts

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 4

2 Sí 4 No 5 $n + 1$ 7 $f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x - 1)}{(x^2 + 1)(x - 2)}$

8 (a) No

(b) Sí, cuando $x = \frac{cd - af}{ae - bd}$, siempre que el denominador no sea cero.

9 $f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{81 - x^2}}$. Las asíntotas verticales son $x = \pm 9$.

Las asíntotas horizontales de f son $y = \pm 9$.

10 El segundo entero.

11 (a) \$1476

(b) No es válido para valores de alta confiabilidad.

Capítulo 5

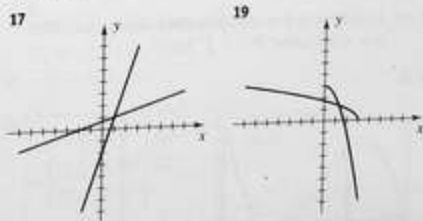
EJERCICIOS 5.1

1 (a) 4 (b) No es posible.

3 (a) Sí (b) No (c) No es una función.

5 Sí 7 No 9 Sí 11 No 13 No 15 Sí

Ejercicios 17 al 20: demuestra que $f(g(x)) = x = g(f(x))$.



21 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty); (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

23 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty); (-\infty, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$

R30 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

$$25 \quad f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$$

$$27 \quad f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3x}$$

$$29 \quad f^{-1}(x) = \frac{5x+2}{2x-3}$$

$$31 \quad f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{2-x}{3}}$$

$$33 \quad f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+5}{2}}$$

$$35 \quad f^{-1}(x) = 3 - x^2, x \geq 0$$

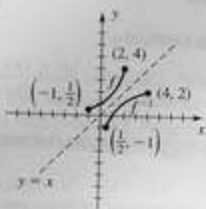
$$37 \quad f^{-1}(x) = (x-1)^3$$

$$39 \quad f^{-1}(x) = x$$

$$41 \quad f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+9}$$

$$43 \quad (a) \quad 3 \quad (b) \quad -1 \quad (c) \quad 5$$

45 (a)



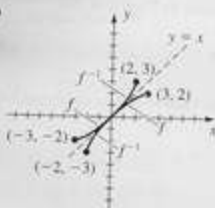
$$(b) \quad D = [-1, 2]$$

$$R = \left[\frac{1}{2}, 4 \right]$$

$$(c) \quad D_1 = \left[\frac{1}{2}, 4 \right]$$

$$R_1 = [-1, 2]$$

47 (a)



$$(b) \quad D = [-3, 3]$$

$$R = [-2, 2]$$

$$(c) \quad D_1 = [-2, 2]$$

$$R_1 = [-3, 3]$$

49 (a) Como f es biunívoca, existe una inversa;

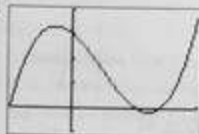
$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

(b) No; no es biunívoca.

51 (c) La gráfica de f es simétrica alrededor de la recta $y = x$; por tanto, $f(x) = f^{-1}(x)$.

53 Si

55



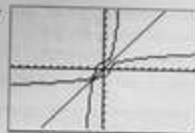
$[-1, 2]$ por $[-1, 4]$

$$(a) \quad [-0.27, 1.22]$$

$$(b) \quad [-0.20, 3.31];$$

$$[-0.27, 1.22]$$

57



$$f^{-1}(x) = x^2 + 1$$

$[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

59 (a) 805 pies³/min

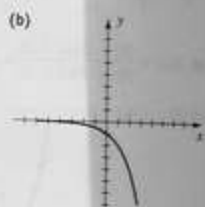
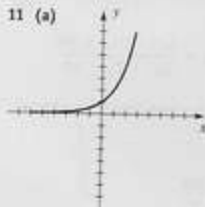
(b) $V^{-1}(x) = \frac{1}{35}x$. Dada una circulación de aire de x pies³/min, $V^{-1}(x)$ calcula el número máximo de personas que deben estar en el restaurante a la vez.

(c) 67

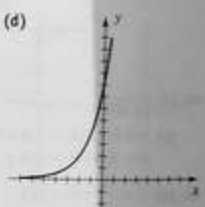
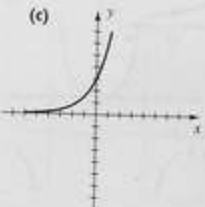
EJERCICIOS 5.2

$$1 \quad 5 \quad 3 \quad -1, 3 \quad 5 \quad \frac{4}{99} \quad 7 \quad \frac{18}{5} \quad 9 \quad 3$$

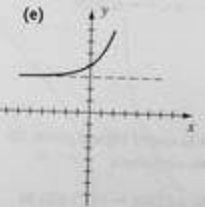
11 (a)



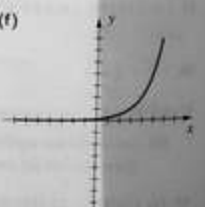
(c)

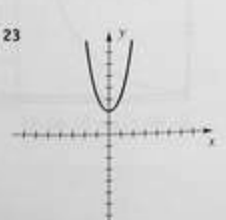
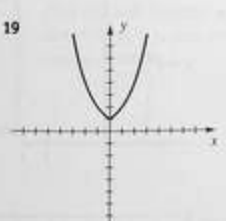
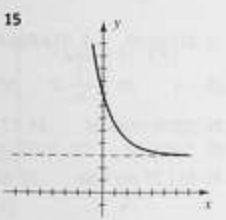
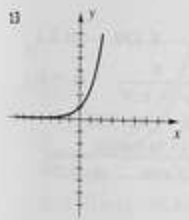
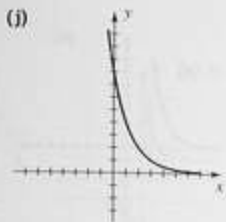
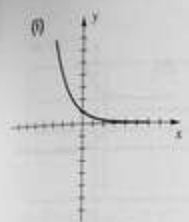
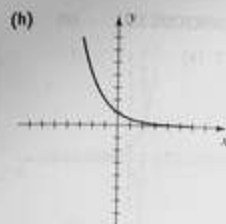
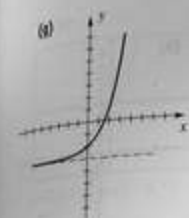


(e)



(f)





25 $f(x) = 2(\frac{1}{2})^x$ 27 $f(x) = 2(\frac{1}{2})^x - 3$

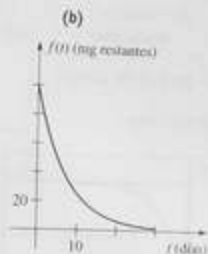
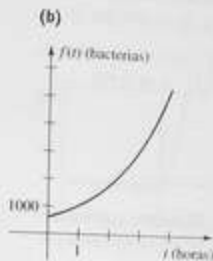
29 $f(x) = 8(\frac{1}{2})^x$ 31 $f(x) = 180(1.5)^x + 32$

33 (a) 90 (b) 59 (c) 35

35 (a) 1039; 3118; 5400

37 (a) 50 mg; 25 mg;

$\frac{25}{2} \sqrt{2} \approx 17.7$ mg



39 $\frac{1}{1600}$

41 (a) \$1010.00 (b) \$1061.52 (c) \$1126.83

(d) \$10 892.55

43 (a) \$7800 (b) \$4790 (c) \$2942

45 \$161 657 351 965.80

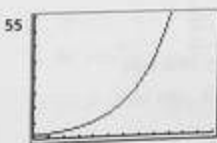
47 (a) Examina la curva formada por el valor y en el año n .

(b) Resuelve $x = (1 - a)^y y_0$ para a .

49 (a) \$925.75 (b) \$243 270

51 \$6346.40

53 (a) 180.1206 (b) 20.9758 (c) 7.3639



$[0, 60, 5]$ por $[0, 40, 5]$

57 -1.02, 2.14, 3.62

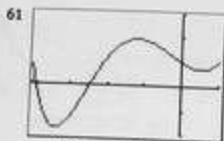


$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

(a) 26.13 (b) 8.50

(a) No biunívoca.
(b) 0

R32 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS



$[-4, 1]$ por $[-2, 3]$

- (a) Creciente: $[-3.37, -1.19] \cup [0.52, 1]$;
decreciente: $[-4, -3.37] \cup [-1.19, 0.52]$

(b) $[-1.79, 1.94]$

63 6.58 años



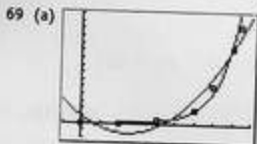
El número máximo de ventas se aproxima a k .

$[0, 7.5]$ por $[0, 5]$



Después de unos 32.8 años aproximadamente.

$[0, 40, 10]$ por $[0, 200\ 000\ 50\ 000]$



$[-10, 90, 10]$ por $[-200, 1500, 100]$

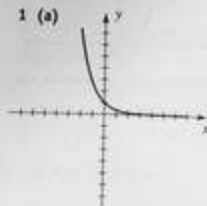
- (b) La función exponencial f . (c) 1989

71 $y = 0.03(1.0588)^x$; 58¢

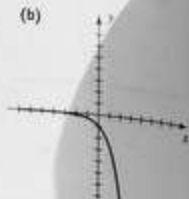
- 73 (a) \$746 648.43; \$1 192 971 (b) 12.44%
(c) Exponencial; polinomial.

EJERCICIOS 5.3

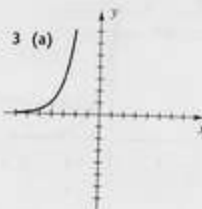
1 (a)



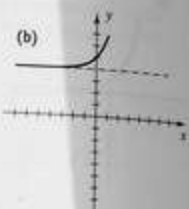
(b)



3 (a)



(b)



5 \$1510.59 7 \$13 806.92 9 13% 11 3, 4

13 -1 15 $-\frac{3}{4}, 0$ 17 $\frac{4}{(e^1 + e^{-1})^2}$ 19 27.43 g

21 280.0 millones 23 13.5% 25 5610

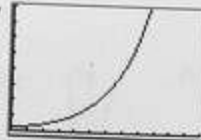
27 7.44 pulg 29 75.77 cm; 15.98 cm/año

31 \$11.25 por hora 33 (a) 7.19% (b) 7.25%

35



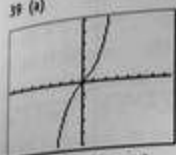
37



$[0, 60, 5]$ por $[0, 40, 5]$

(a) 29.96 (b) 8.15

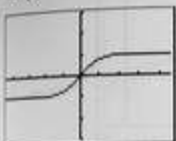
38 (a)


 $[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$

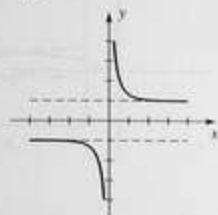
(b)



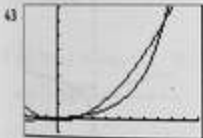
41 (a)


 $[-4.5, 4.5]$ por $[-3, 3]$

(b)



43


 $[-3, 11]$ por $[-10, 80, 10]$
 $-1.04, 2.11, 8.51$

45


 $[0, 4.5]$ por $[0, 3]$

$f(x)$ está más próxima a e^x si $x = 0$; $g(x)$ es más cercana a e^x si $x = 1$.

47

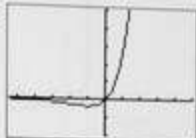

 $[-2, 2.5]$ por $[-1, 2]$
 $0.11, 0.79, 1.13$

49


 $y = 2.71 \approx e$
 $[0, 200, 50]$ por $[0, 8]$

51 0.567

53

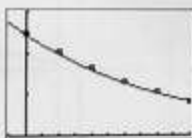


Creciente en $[-1, \infty)$;
decreciente en $(-\infty, -1]$

 $[-5.5, 5]$ por $[-2, 5]$

 55 (a) A medida que h aumenta, C disminuye.

 (b) Conforme y aumenta, C disminuye.

 57 (a) $f(x) = 1.225e^{-0.0001085x}$

 $[-1000, 10\ 000, 1000]$ por $[0, 1.5, 0.5]$

(b) 0.885, 0.461

EJERCICIOS 5.4

 1 (a) $\log_4 64 = 3$ (b) $\log_5 \frac{1}{64} = -3$

 (c) $\log_2 x = r$ (d) $\log_3 (4 - t) = x$

 (e) $\log_5 \frac{a+b}{a} = 7t$ (f) $\log_{10} (5.3) = t$

 3 (a) $2^5 = 32$ (b) $3^{-5} = \frac{1}{243}$ (c) $x^0 = x$

 (d) $3^5 = (x+2)$ (e) $2^{3x+4} = m$ (f) $b^{50} = 512$

 5 $t = 3 \log_2 \frac{5}{2}$ 7 $t = \log_2 \left(\frac{H-K}{C} \right)$

 9 $t = \frac{1}{C} \log_2 \left(\frac{A-D}{B} \right)$

 11 (a) $\log 100\ 000 = 5$ (b) $\log 0.001 = -3$

 (c) $\log (y+1) = x$ (d) $\ln p = 7$

 (e) $\ln (3-x) = 2t$

 13 (a) $10^{50} = x$ (b) $10^{50} = x$ (c) $e^{0.1} = x$

 (d) $e^{4+3x} = w$ (e) $e^{10} = z - 2$

R34 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS.

15 (a) 0 (b) 1 (c) No es posible. (d) 2 (e) 8

(f) 3 (g) -2

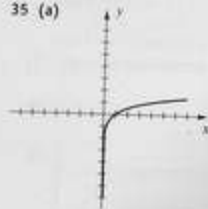
17 (a) 3 (b) 5 (c) 2 (d) -4 (e) 2

(f) -3 (g) $3e^2$

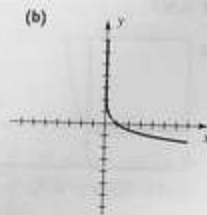
19 4 21 No hay solución. 23 -1, -2 25 13

27 27 29 $\pm \frac{1}{e}$ 31 3 33 3

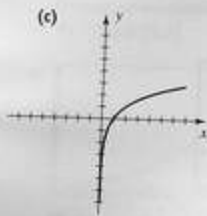
35 (a)



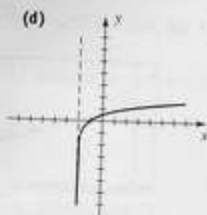
(b)



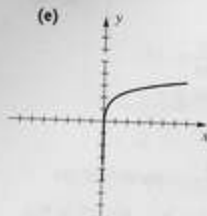
(c)



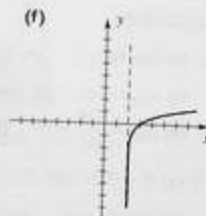
(d)



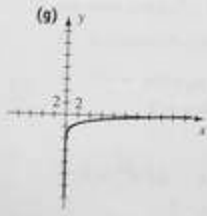
(e)



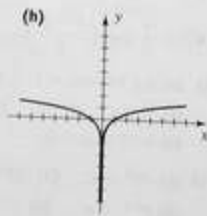
(f)



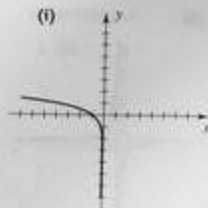
(g)



(h)



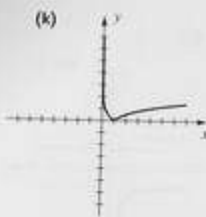
(i)



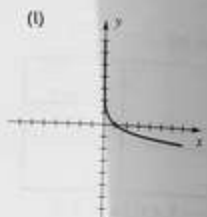
(j)



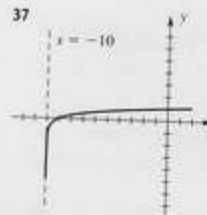
(k)



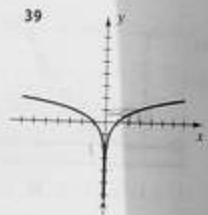
(l)



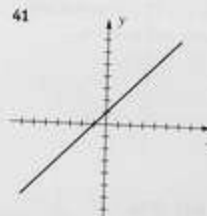
37



39



41



43 $f(x) = \log_2 x$

45 $f(x) = -F(x)$ 47 $f(x) = F(x - 2)$

49 $f(x) = F(x) + 1$

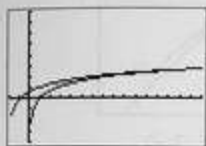
51 (a) 4240 (b) 8.85 (c) 0.0237 (d) 9.97

(e) 1.05 (f) 0.202

53 $f(x) = 1000e^{-0.05x}$; 4.88% 55 $t = -1600 \log_2 \left(\frac{q}{q_0} \right)$

57 $t = \frac{L}{R} \ln \left(\frac{I}{20} \right)$ 59 (a) 2 (b) 4 (c) 5

- 61 (a) 10 (b) 30 (c) 40 **63** En el año 2079.
 65 (a) $W = 2.4e^{1.00t}$ (b) 37.92 kg
 67 (a) 10 007 pies (b) 18 004 pies
 69 (a) 305.9 kg (b) (1) 20 años (2) 19.8 años
 71 10.1 mi **73** $2^{1.00} = 1.09$
75 (a) En promedio las personas caminan más rápido en grandes ciudades.
 (b) 570 000
77 (a) 8.4877 (b) -0.0601
79 1.763 **81** (0, 14.90]

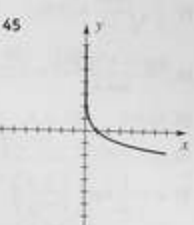
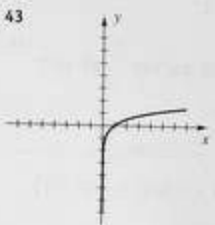
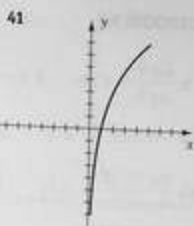
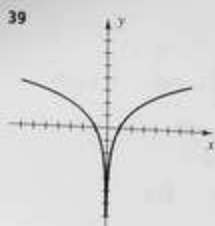
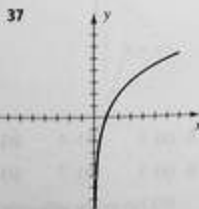


$[-2, 16]$ por $[-4, 8]$

- 83** (a) 30% (b) 3.85

EJERCICIOS 5.5

- 1 (a) $\log_4 x + \log_4 z$ (b) $\log_4 y - \log_4 x$
 (c) $\frac{1}{3} \log_4 z$
 3 $3 \log_4 x + \log_4 w - 2 \log_4 y - 4 \log_4 z$
 5 $\frac{1}{3} \log z - \log x - \frac{1}{2} \log y$
 7 $\frac{7}{4} \ln x - \frac{5}{4} \ln y - \frac{1}{4} \ln z$
 9 (a) $\log_3 (5xy)$ (b) $\log_3 \frac{2z}{x}$ (c) $\log_3 y^5$
 11 $\log_5 \frac{x^2 \sqrt{x-2}}{(2x+3)^3}$ **13** $\log \frac{y^{100}}{x^2}$ **15** $\ln x$ **17** $\frac{7}{2}$
 19 $5\sqrt{3}$ **21** No hay solución. **23** -7 **25** 1
 27 -2 **29** $\frac{-1 + \sqrt{65}}{2}$ **31** $-1 + \sqrt{1+c}$
33 $3 + \sqrt{10}$
35

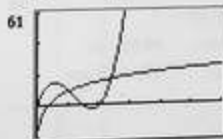


- 47** $f(x) = \log_2 x^2$ **49** $f(x) = \log_2 (8x)$ **51** $\infty + 7$

- 53** $y = \frac{b}{x^4}$ **55**



- 57** (a) 0 (b) $R(2x) = R(x) + a \log 2$ **59** 0.29 cm



$(0, 1.02] \cup [2.40, \infty)$

$[0, 6]$ por $[-1, 3]$

- 63** 1.41, 6.59



- (a)** Creciente en $[0.2, 0.63]$ y $[6.87, 16]$; decreciente en $[0.63, 6.87]$
(b) 4.61; -3.31

$[0.2, 16, 2]$ por $[-4.77, 5.77]$

- 67** 6.94 **69** 115 m

R36 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

EJERCICIOS 5.6

$$1 \frac{\log 8}{\log 5} = 1.29 \quad 3 \frac{\log 5}{\log 3} = 2.54 \quad 5 \frac{\log 11}{\log 3} = 1.1133$$

$$7 -0.7325 \quad 9 \frac{\log(2/81)}{\log 24} = -1.16$$

$$13 \frac{\log(8/25)}{\log(4/5)} = 5.11 \quad 15 -3 \quad 17 5$$

$$19 \frac{2}{3} \sqrt{\frac{101}{11}} = 2.02 \quad 21 1, 2$$

$$23 \frac{\log(4 + \sqrt{19})}{\log 4} = 1.53 \quad 25 1 \text{ o } 100 \quad 27 10^{100}$$

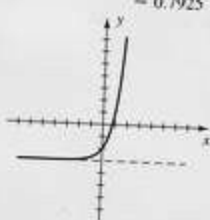
$$29 10\,000 \quad 31 \ln 3 \quad 33 7$$

$$35 x = \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

$$37 x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \quad 39 x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$41 x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

$$43 \text{ Intersección en } y = \log_2 3 \approx 1.5850 \quad 45 \text{ Intersección en } x = \log_4 3 \approx 0.7925$$



$$47 \text{ (a) } 2.2 \quad \text{(b) } 5 \quad \text{(c) } 8.3$$

$$49 \text{ Básico si } \text{pH} > 7, \text{ ácido si el } \text{pH} < 7.$$

$$51 \text{ 11.58 años} \approx 11 \text{ años 7 meses.} \quad 53 \text{ 86.4 m}$$

$$55 \text{ (a) } A \text{ (mg en la sangre)} \quad \text{(b) } 6.58 \text{ min}$$



$$57 \text{ (a) } t = \frac{\log(F/F_0)}{\log(1-m)} \quad \text{(b) Después de 13 863 generaciones.}$$

$$59 \text{ (a) 4.28 pies} \quad \text{(b) 24.8 años} \quad 61 \frac{\ln(25/6)}{\ln(200/35)} \approx 0.82$$

$$63 \text{ La sospecha es correcta.}$$

$$65 \text{ La sospecha es incorrecta.} \quad 67 -0.5764$$

$$69 \text{ Ninguno}$$

$$71 \text{ 1.37, 9.94}$$



$$[-1, 17] \text{ por } [-1, 11]$$



$$[-5, 10] \text{ por } [-8, 2]$$

$$73 \text{ (a) } (-\infty, -0.32) \cup (1.52, 6.84)$$

$$75 \text{ (4)} \quad 77 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$79 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$81 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$83 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$85 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$87 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$89 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$91 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$93 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$95 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$97 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$99 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$101 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$103 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$105 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$107 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$109 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$111 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$113 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$115 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$117 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$119 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$121 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$123 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$125 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$127 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$129 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$131 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$133 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$135 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$137 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$139 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$141 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$143 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$145 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$147 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$149 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$151 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$153 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$155 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$157 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$159 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$161 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$163 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$165 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$167 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$169 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$171 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$173 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$175 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$177 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$179 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$181 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$183 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$185 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$187 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$189 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$191 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$193 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$195 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$197 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$199 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$201 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$203 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$205 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$207 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$209 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$211 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$213 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$215 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$217 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$219 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$221 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$223 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$225 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$227 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$229 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$231 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$233 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$235 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$237 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$239 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$241 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$243 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$245 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$247 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$249 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$251 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$253 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$255 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$257 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$259 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$261 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$263 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$265 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$267 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$269 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$271 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$273 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$275 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$277 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$279 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$281 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$283 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$285 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$287 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$289 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$291 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$293 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$295 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$297 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$299 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$301 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$303 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$305 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$307 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$309 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$311 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$313 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$315 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$317 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$319 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$321 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$323 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$325 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$327 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$329 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$331 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$333 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$335 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$337 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$339 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$341 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$343 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$345 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$347 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

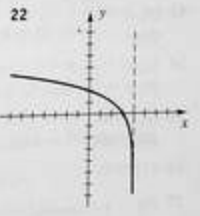
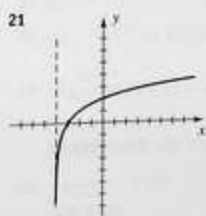
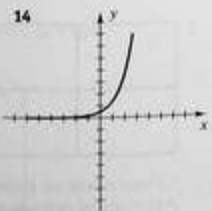
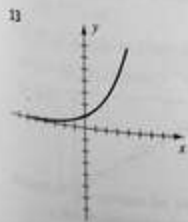
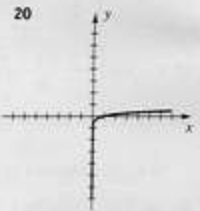
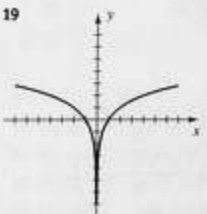
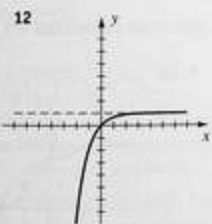
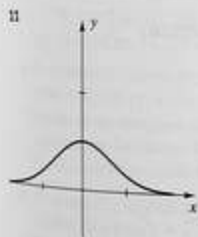
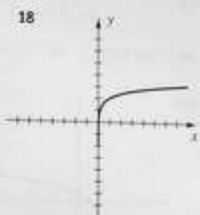
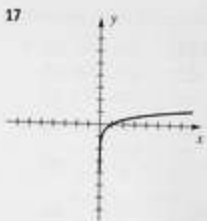
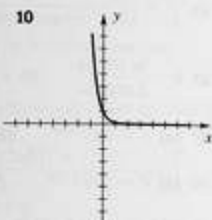
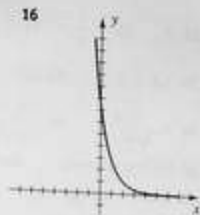
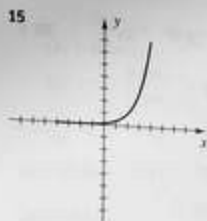
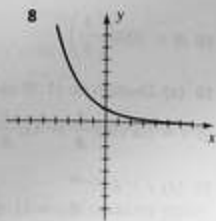
$$349 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$351 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$353 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$355 \text{ (a) 1998} \quad \text{(b) 1998}$$

$$357 \text{ (a) 1998}$$



- 23 (a) -4 (b) 0 (c) 1 (d) 4 (e) 6 (f) 8
 (g) $\frac{1}{2}$
 24 (a) $\frac{1}{3}$ (b) 0 (c) 1 (d) 5 (e) 1 (f) 25
 (g) $\frac{1}{3}$

R38 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

25 0 26 $-\frac{6}{5}$ 27 9 28 9 29 $\frac{33}{47}$ 30 1

31 $-1 + \sqrt{3}$ 32 99 33 $5 - \frac{\log 6}{\log 2}$

34 $\pm \sqrt{\frac{\log 7}{\log 3}}$ 35 $\frac{\log(3/8)}{\log(32/9)}$ 36 1 37 $\frac{1}{4}, 1, 4$

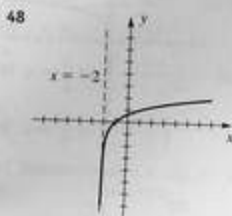
38 No hay solución. 39 $\sqrt{3}$ 40 2 41 0, ± 1

42 $\ln 2$ 43 (a) -3, 2 (b) 2

44 (a) 8 (b) ± 4

45 $4 \log x + \frac{2}{3} \log y - \frac{1}{3} \log z$

46 $-\log(xy^2)$ 47 $f(x) = 6\left(\frac{4}{3}\right)^x$



49 $x = \log\left(\frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}\right)$

50 Si $y < 0$, entonces $x = \log\left(\frac{1 - \sqrt{1+4y^2}}{2y}\right)$

Si $y > 0$, entonces $x = \log\left(\frac{1 + \sqrt{1+4y^2}}{2y}\right)$

51 (a) 1.89 (b) 78.3 (c) 0.472

52 (a) 0.924 (b) 0.00375 (c) 6.05

53 (a) $D = (-1, \infty)$, $R = \mathbb{R}$

(b) $y = 2^x - 1$, $D = \mathbb{R}$, $R = (-1, \infty)$

54 (a) $D = \mathbb{R}$, $R = (-2, \infty)$

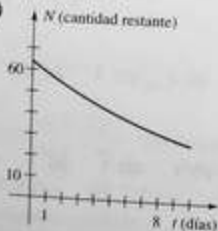
(b) $y = 3 - \log_2(x+2)$, $D = (-2, \infty)$, $R = \mathbb{R}$

55 (a) 2000

(b) $2000(3^{1/6}) \approx 2401$; $2000(3^{1/2}) = 3464$; 6000

56 $\$1125.51$

57 (a) N (cantidad restante) (b) 8 días



58 $N = 1000\left(\frac{3}{5}\right)^{at}$

59 (a) Después de 11.39 años. (b) 6.30 años 60 3.16%

61 $t = (\ln 100) \frac{L}{R} \approx 4.6 \frac{L}{R}$

62 (a) $I = I_0 10^{0.1\alpha}$

(b) Examine $f(\alpha + 1)$, donde $f(\alpha)$ es la intensidad correspondiente a α decibeles.

63 $t = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{a-L}{ab}\right)$ 64 $A = 10^{0.0005(102.3)} - 3000$

65 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{10^{0.0005(102.3)} - 3000}{10^{0.0005(102.3)} - 34000}$ 66 26 615.9 m^2

67 $h = \frac{\ln(29/p)}{0.000034}$ 68 $v = a \ln\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)$

69 (a) $n = 10^{1.7-0.98}$ (b) 12 589; 1585; 200

70 (a) $E = 10^{31.4+1.58}$ (b) 10^{21} ergs 71 110 días

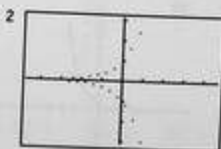
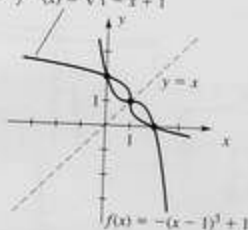
72 86.8 cm; 9.715 cm/año 73 $t = -\frac{L}{R} \ln\left(\frac{V-Rt}{V}\right)$

74 (a) 26 749 años (b) 30% 75 21.00 años

76 3196 años

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 5

1 (a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x} + 1$



La base a debe ser positiva, de tal manera que la función $f(x) = a^x$ esté definida para todos los valores de x .

- 1 (a) La gráfica se aplana.

$$(b) y = \frac{101}{2}(e^{x/10} + e^{-x/10}) - 71$$

- 4 7.16 años

- 5 (a) Superficie: primero toma el logaritmo natural de ambos lados.

$$(b) 2.50 \text{ y } 2.97$$

- (c) Advierte que $f(x) = \frac{1}{x}$. Cualquier recta horizontal

$y = k$, con $0 < k < \frac{1}{e}$, contará la gráfica en los puntos

$$\left(x_1, \frac{\ln x_1}{x_1}\right) \text{ y } \left(x_2, \frac{\ln x_2}{x_2}\right), \text{ donde } 1 < x_1 < x_2 \text{ y } x_2 > e.$$

- 6 (a) La diferencia está en el compuesto.

- (b) Más cerca de la gráfica de la segunda función.

$$(c) 29 \text{ y } 8.2; 29.61 \text{ y } 8.18$$

- 7 Superficie: compruebe las restricciones para las leyes de logaritmos.

$$8 (a) U = P \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} = \frac{12M[(1 + r/12)^{12} - 1]}{r}$$



$$[0, 35, 5] \text{ por } [0, 100, 000, 10, 000]$$

$$(c) \$84,076.50; 24,425 \text{ años}$$

- 9 $(-0.9999011, 0.00999001), (-0.0001, 0.01)$.

Los valores de las funciones exponenciales (con base > 1) son mayores que los valores de las funciones polinomiales (con término inicial positivo) para valores muy grandes de x .

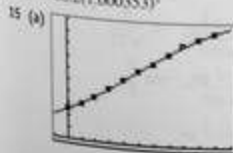
- 10 (x, x) con $x = 0.44230443, 4.1770774$ y $5,033.6647$. Los valores de y para $y = x$ serán finalmente mayores que los valores de $y = (\ln x)^x$.

$$11 8.447(177\%); \$1,025,156.25$$

- 12 (a) 3.5 sismos = 1 bomba, 425 bombas = 1 erupción
(b) 9.22; no

- 13 27 de marzo de 2009; alrededor de 9.05%.

$$14 y = 68.2(1.000353)^x$$



$$[-10, 110, 10] \text{ por } [0, 10^6, 10^7]$$

- (b) Logístico

$$(c) y = \frac{1.1355 \times 10^{10}}{1 + 3.5670e^{-0.0001x}}; \text{ consulte la gráfica del inciso (a).}$$

$$(d) 1.1355 \times 10^{10}$$

$$16 e^x, \text{ con } b = \frac{11 \ln 5 - \ln 7}{\ln 35}$$

Capítulo 6

EJERCICIOS 6.1

Ejercicios 1 al 4: las respuestas no son únicas.

$$1 (a) 480^\circ, 840^\circ, -240^\circ, -600^\circ$$

$$(b) 495^\circ, 855^\circ, -225^\circ, -585^\circ$$

$$(c) 330^\circ, 690^\circ, -390^\circ, -750^\circ$$

$$3 (a) 260^\circ, 980^\circ, -100^\circ, -460^\circ$$

$$(b) \frac{17\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$$

$$(c) \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}$$

$$5 (a) 84^\circ 42' 26'' (b) 57.5^\circ$$

$$7 (a) 131^\circ 8' 23'' (b) 43.58^\circ$$

$$9 (a) \frac{5\pi}{6} (b) -\frac{\pi}{3} (c) \frac{5\pi}{4}$$

$$11 (a) \frac{5\pi}{2} (b) \frac{2\pi}{5} (c) \frac{5\pi}{9}$$

$$13 (a) 120^\circ (b) 330^\circ (c) 135^\circ$$

$$15 (a) -630^\circ (b) 1260^\circ (c) 20^\circ$$

$$17 114^\circ 35' 30'' 19 286^\circ 28' 44'' 21 37.6833^\circ$$

$$23 115.4408^\circ 25 63^\circ 10' 8'' 27 310^\circ 37' 17''$$

$$29 2.5 \text{ cm}$$

$$31 (a) 2\pi = 6.28 \text{ cm} (b) 8\pi = 25.13 \text{ cm}^2$$

$$33 (a) 1.75; \frac{315}{\pi} = 100.27^\circ (b) 14 \text{ cm}^2$$

$$35 (a) \frac{20\pi}{9} = 6.98 \text{ m} (b) \frac{80\pi}{9} = 27.93 \text{ m}^2$$

$$37 \text{ En millas: (a) 4189 (b) 3142 (c) 2094}$$

$$(d) 698 (e) 70$$

$$39 \frac{1}{8} \text{ radian} = 7^\circ 10' 41 37.1^\circ$$

$$43 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$45 (a) 80\pi \text{ rad/min} (b) \frac{100\pi}{3} = 104.72 \text{ pies/min}$$

$$47 (a) 400\pi \text{ rad/min} (b) 38 \text{ cm/s} (c) 380 \text{ rpm}$$

$$(d) S(t) = \frac{1140}{t}; \text{ inversamente}$$

$$49 (a) \frac{21\pi}{8} = 8.25 \text{ pies} (b) \frac{2}{3} \text{ ft}$$

$$51 \text{ Largo } 53 192.08 \text{ rev/min}$$

R40 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

EJERCICIOS 6.2

1 (a) B (b) D (c) A (d) C (e) E

Nota: las respuestas están en el orden *sen*, *cos*, *tan*, *cot*, *sec*, *csc* para cualquier ejercicio que requiera los valores de las seis funciones trigonométricas.

$$3 \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}$$

$$5 \frac{2}{5}, \frac{\sqrt{21}}{5}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{5}{2}, \frac{5}{\sqrt{21}}, \frac{5}{2}$$

$$7 \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}, \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$$

$$9 \frac{b}{c}, \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c}, \frac{h}{\sqrt{c^2-b^2}}, \frac{b}{b}, \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{b}, \frac{c}{\sqrt{c^2-b^2}}$$

$$11 x = 8; y = 4\sqrt{3} \quad 13 x = 7\sqrt{2}; y = 7$$

$$15 x = 4\sqrt{3}; y = 4$$

$$17 \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4} \quad 19 \frac{5}{13}, \frac{12}{13}, \frac{5}{12}, \frac{12}{5}, \frac{13}{5}, \frac{13}{12}$$

$$21 \frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{5}, \frac{6}{5}, \frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$23 200\sqrt{3} = 346.4 \text{ pies} \quad 25 192 \text{ pies} \quad 27 1.02 \text{ m}$$

$$29 \text{ (a) } 0.6691 \quad \text{(b) } 0.2250 \quad \text{(c) } 1.1924 \quad \text{(d) } -1.0154$$

$$31 \text{ (a) } 4.0572 \quad \text{(b) } 1.0323 \quad \text{(c) } -0.6335 \quad \text{(d) } 4.3813$$

$$33 \text{ (a) } 0.5 \quad \text{(b) } -0.9880 \quad \text{(c) } 0.9985 \quad \text{(d) } -1$$

$$35 \text{ (a) } -1 \quad \text{(b) } -4$$

$$37 \text{ (a) } 5 \quad \text{(b) } 5$$

$$39 1 - \sin \theta \cos \theta \quad 41 \sin \theta$$

$$43 \cot \theta = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta} \quad 45 \sec \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$$

$$47 \sin \theta = \frac{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}{\sec \theta}$$

Ejercicios 49 al 70: se proporcionan comprobaciones características.

$$49 \cos \theta \sec \theta = \cos \theta (1/\cos \theta) = 1$$

$$51 \sin \theta \csc \theta = \sin \theta (1/\sin \theta) = \sin \theta / \sin \theta = \tan \theta$$

$$53 \frac{\csc \theta}{\sec \theta} = \frac{1/\sin \theta}{1/\cos \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$

$$55 (1 + \cos 2\theta)(1 - \cos 2\theta) = 1 - \cos^2 2\theta = \sin^2 2\theta$$

$$57 \cos^2 \theta (\sec^2 \theta - 1) = \cos^2 \theta (\tan^2 \theta) \\ = \cos^2 \theta \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \sin^2 \theta$$

$$59 \frac{\sin(\theta/2)}{\csc(\theta/2)} + \frac{\cos(\theta/2)}{\sec(\theta/2)} = \frac{\sin(\theta/2)}{1/\sin(\theta/2)} + \frac{\cos(\theta/2)}{1/\cos(\theta/2)} \\ = \sin^2(\theta/2) + \cos^2(\theta/2) = 1$$

$$61 (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) = 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \\ = \frac{1}{\sec^2 \theta}$$

$$63 \sec \theta - \cos \theta = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \\ = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \sin \theta = \tan \theta \sin \theta$$

$$65 (\cot \theta + \csc \theta)(\tan \theta - \sec \theta) \\ = \cot \theta \tan \theta - \cot \theta \sec \theta + \csc \theta \tan \theta \\ - \csc \theta \sec \theta \\ = \frac{1}{\tan \theta} \tan \theta - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\cos \theta} \\ = 1 - \cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} - 1 = -\cos \theta + \sec \theta \\ = \sec \theta - \cos \theta$$

$$67 \sec^2 3\theta \csc^2 3\theta = (1 + \tan^2 3\theta)(1 + \cot^2 3\theta) \\ = 1 + \tan^2 3\theta + \cot^2 3\theta + 1 \\ = \sec^2 3\theta + \csc^2 3\theta$$

$$69 \log \csc \theta = \log \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) = \log 1 - \log \sin \theta \\ = 0 - \log \sin \theta = -\log \sin \theta$$

$$71 -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{3}$$

$$73 -\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{\sqrt{29}}{2}, -\frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$75 \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}, -4, -\frac{1}{4}, -\sqrt{17}, \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$77 \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}$$

$$79 -\frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}, \frac{7}{2}, \frac{2}{7}, -\frac{\sqrt{53}}{2}, -\frac{\sqrt{53}}{7}$$

Nota: I significa indefinida.

$$81 \text{ (a) } 1, 0, 1, 0, 1, 1 \quad \text{(b) } 0, 1, 0, 1, 1, 1 \\ \text{(c) } -1, 0, 1, 0, 1, -1 \quad \text{(d) } 0, -1, 0, 1, -1, 1$$

$$83 \text{ (a) IV (b) III (c) II (d) III}$$

$$85 \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{3}$$

$$87 -\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, -\frac{5}{12}, -\frac{12}{5}, \frac{13}{12}, -\frac{13}{5}$$

$$89 -\frac{\sqrt{8}}{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt{8}, \frac{1}{\sqrt{8}}, -3, -\frac{3}{\sqrt{8}}$$

$$91 \frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4}, -\sqrt{15}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, -4, \frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$93 -\tan \theta \quad 95 \sec \theta \quad 97 -\sec \frac{\theta}{2}$$

EJERCICIOS 6.3

- 1 $\frac{8}{17}, \frac{15}{17}, \frac{8}{15}, \frac{15}{8}, \frac{17}{15}, \frac{17}{8}$
 3 $\frac{7}{25}, \frac{24}{25}, \frac{7}{24}, \frac{24}{7}, \frac{25}{24}, \frac{25}{7}$
 5 (a) $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ (b) $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$
 (c) $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ (d) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
 7 (a) $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ (b) $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$
 (c) $\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$ (d) $\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

Nota: I significa indefinida.

- 9 (a) (1, 0); 0, 1, 0, 1, 1, 1
 (b) (-1, 0); 0, -1, 0, 1, -1, 1
 11 (a) (0, -1); -1, 0, 1, 0, 1, -1
 (b) (0, 1); 1, 0, 1, 0, 1, 1
 13 (a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$
 (b) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$
 15 (a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}$
 (b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$
 17 (a) -1 (b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) -1
 19 (a) 1 (b) -1 (c) 1

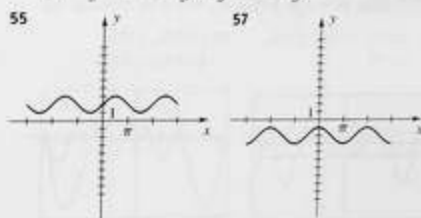
Ejercicios 21 al 26: se proporcionan comprobaciones características.

$$\begin{aligned}
 21 \quad \sin(-x) \sec(-x) &= (-\sin x) \sec x \\
 &= (-\sin x)(1/\cos x) \\
 &= -\tan x \\
 23 \quad \frac{\cos(-x)}{\csc(-x)} &= \frac{-\cos x}{\cos x/\sin x} = \cos x \\
 25 \quad \frac{1}{\cos(-x)} - \tan(-x) \sin(-x) \\
 &= \frac{1}{\cos x} - (-\tan x)(-\sin x) \\
 &= \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \sin x \\
 &= \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x
 \end{aligned}$$

- 27 (a) 0 (b) -1 29 (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) -1
 31 (a) 1 (b) $-\infty$ 33 (a) -1 (b) $-\infty$
 35 (a) ∞ (b) $\sqrt{2}$ 37 (a) $-\infty$ (b) 1
 39 $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ 41 $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$ 43 0, $2\pi, 4\pi$
 45 $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$ 47 $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 49 0, π
 51 (a) $-\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
 (b) $-\frac{11\pi}{6} < x < -\frac{7\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$
 (c) $-2\pi \leq x < -\frac{11\pi}{6}$ y $-\frac{7\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ y

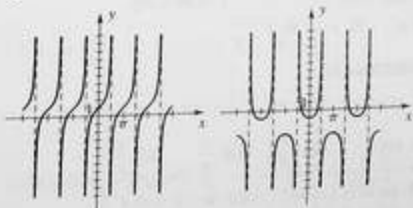
$$\frac{5\pi}{6} < x \leq 2\pi$$

- 53 (a) $-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$
 (b) $-2\pi \leq x < -\frac{4\pi}{3}$ y $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$
 $\frac{4\pi}{3} < x \leq 2\pi$
 (c) $-\frac{4\pi}{3} < x < -\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$



59

61



$$63 \text{ (a) } \left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right], \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right], \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

(b) $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

- 65 (a) La función tangente aumenta en todos los intervalos en los que está definida. Entre -2π y 2π , estos

intervalos son $\left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right], \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right],$

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

- (b) La función tangente nunca es decreciente en un intervalo donde está definida.

69 (a) -0.8 (b) -0.9 (c) 0.5, 2.6

71 (a) -0.7 (b) 0.4 (c) 2.2, 4.1

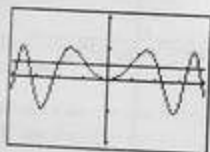
73 (a)

Hora	T	H	Hora	T	H
12 A.M.	60	60	12 P.M.	60	60
3 A.M.	52	74	3 P.M.	68	46
6 A.M.	48	80	6 P.M.	72	40
9 A.M.	52	74	9 P.M.	68	46

- (b) Máx: 72°F a las 6:00 P.M., 80% a las 6:00 A.M.;
mín: 48°F a las 6:00 A.M., 40% a las 6:00 P.M.

75 $\pm 0.72, \pm 1.62, \pm 2.61,$
 ± 2.98

77 $(\pm 2.03, 1.82);$
 $(\pm 4.91, -4.81)$



$[-\pi, \pi, \pi/4]$ por
 $[-2.09, 2.09]$



$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por
 $[-5.19, 3.19]$

79 0 81 83 1

EJERCICIOS 6.4

1 (a) 60° (b) 20° (c) 22° (d) 60°

3 (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

5 (a) $\pi - 3 \approx 8.1^\circ$ (b) $\pi - 2 \approx 65.4^\circ$

(c) $2\pi - 5.5 \approx 44.9^\circ$ (d) $32\pi - 100 \approx 30.4^\circ$

7 (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 9 (a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

11 (a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (b) $-\sqrt{3}$ 13 (a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (b) $\sqrt{3}$

15 (a) -2 (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 17 (a) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) 2

19 (a) 0.958 (b) 0.778 21 (a) 0.387 (b) 0.472

23 (a) 2.650 (b) 3.179 25 (a) 30.46° (b) 30°27'

27 (a) 74.88° (b) 74°53'

29 (a) 24.94° (b) 24°57'

31 (a) 76.38° (b) 76°23'

33 (a) 0.9899 (b) -0.1097 (c) -0.1425
(d) 0.7907 (e) -11.2493 (f) 1.3677

35 (a) 214.3°, 325.7° (b) 41.5°, 318.5°
(c) 70.3°, 250.3° (d) 133.8°, 313.8°
(e) 153.6°, 206.4° (f) 42.3°, 137.7°

37 (a) 0.43, 2.71 (b) 1.69, 4.59 (c) 1.87, 5.01
(d) 0.36, 3.50 (e) 0.96, 5.32 (f) 3.35, 6.07

39 0.28 cm

- 41 (a) El máximo ocurre cuando el Sol se levanta por el oriente.

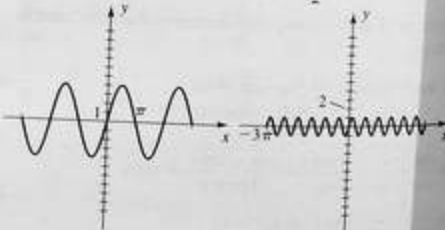
(b) $\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 35\%$

43 $(9, 9\sqrt{3})$

EJERCICIOS 6.5

1 (a) 4, 2 π

(b) 1, $\frac{\pi}{2}$



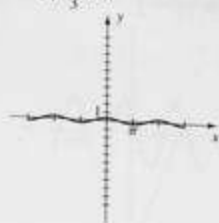
(c) $\frac{1}{4} \cdot 2\pi$



(d) $1, 8\pi$



(c) $\frac{1}{3} \cdot 2\pi$



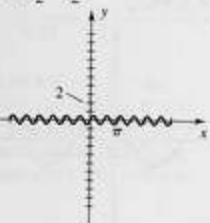
(d) $1, 6\pi$



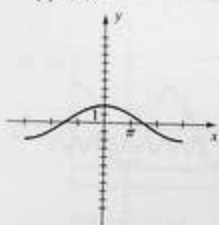
(e) $2, 8\pi$



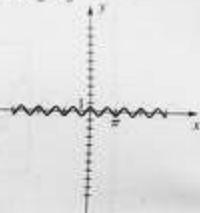
(f) $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$



(e) $2, 6\pi$



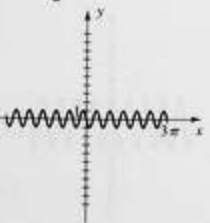
(f) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3}$



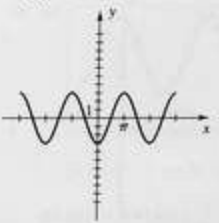
(g) $4, 2\pi$



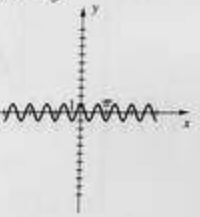
(h) $1, \frac{\pi}{2}$



(g) $3, 2\pi$



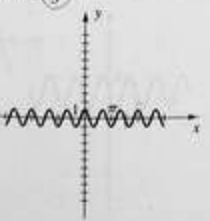
(h) $1, \frac{2\pi}{3}$



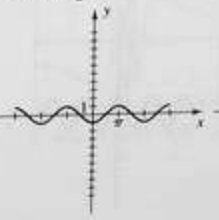
3 (a) $3, 2\pi$



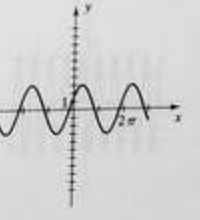
(b) $1, \frac{2\pi}{3}$



5 1, $2\pi, \frac{\pi}{2}$



7 3, $2\pi, -\frac{\pi}{6}$

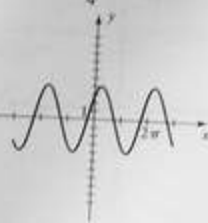


R44 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

9 $1, 2\pi, \frac{\pi}{2}$



11 $4, 2\pi, \frac{\pi}{4}$



25 $\frac{1}{2}, 1, 0$



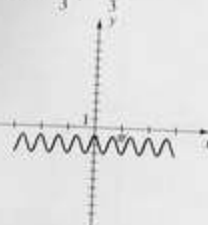
27 $5, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$



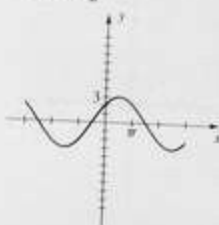
13 $1, \pi, \frac{\pi}{2}$



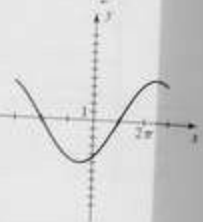
15 $1, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$



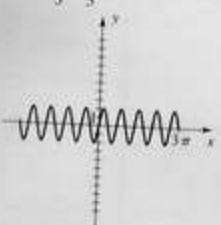
29 $3, 4\pi, \frac{\pi}{2}$



31 $5, 6\pi, \frac{\pi}{2}$



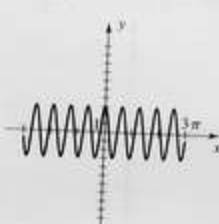
17 $2, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$



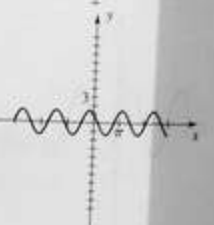
19 $1, 4\pi, \frac{2\pi}{3}$



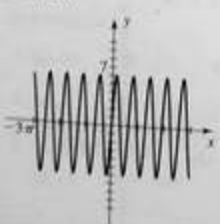
33 $3, 2, -4$



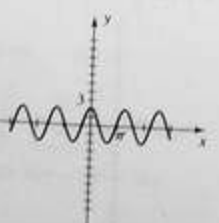
35 $\sqrt{2}, 4, \frac{1}{2}$



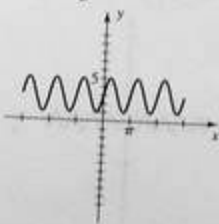
21 $6, 2, 0$



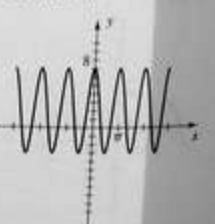
23 $2, 4, 0$



37 $2, \pi, \frac{\pi}{2}$



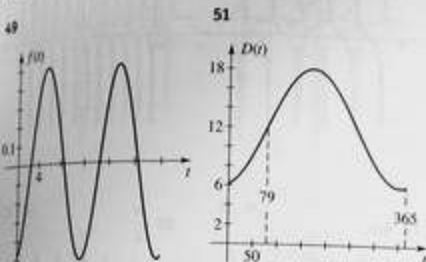
39 $5, \pi, -\pi$



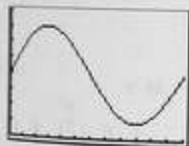
41 (a) $4, 2\pi, -\pi$ (b) $y = 4 \sin(x + \pi)$

43 (a) $2, 4, -3$ (b) $y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right)$

45 4π 47 $a = 8, b = 4\pi$



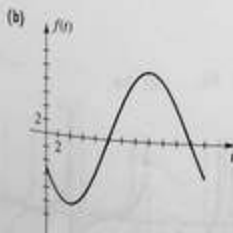
53 La temperatura es de 20°F a las 9:00 A.M. ($t = 0$).
Aumenta a un máximo de 35°F a las 3:00 P.M. ($t = 6$)
y después disminuye a 20°F a las 9:00 P.M. ($t = 12$).
Continúa descendiendo hasta un mínimo de 5°F a las
3:00 A.M. ($t = 18$). Luego sube a 20°F a las 9:00 A.M.
($t = 24$).



$[0, 24, 2]$ por $[0, 40, 5]$

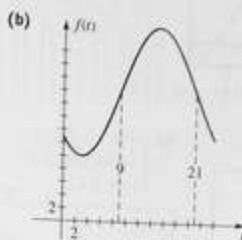
55 (a) $f(t) = 10 \sin\left[\frac{\pi}{12}(t - 10)\right] + 0$, con $a = 10$,

$$b = \frac{\pi}{12}, c = -\frac{5\pi}{6}, d = 0$$



57 (a) $f(t) = 10 \sin\left[\frac{\pi}{12}(t - 9)\right] + 20$, con $a = 10$,

$$b = \frac{\pi}{12}, c = -\frac{3\pi}{4}, d = 20$$



$[0.5, 24.5, 5]$ por $[-1, 8]$

(b) $P(t) = 2.95 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) + 3.15$



$[0.5, 24.5, 5]$ por $[0, 20, 2]$

(b) $D(t) = 6.42 \sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{2\pi}{3}\right) + 12.3$

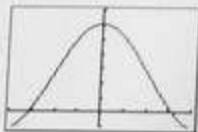
63 Cuando $x \rightarrow 0^-$ o cuando $x \rightarrow 0^+$, y oscila entre -1 y 1
y no se aproxima a un valor único.



$[-2, 2, 0.5]$ por $[-1.33, 1.33, 0.5]$

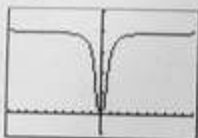
R46 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

65 Cuando $x \rightarrow 0^-$ o cuando $x \rightarrow 0^+$, y parece aproximarse a 2.



$[-2.2, 2.05]$ por $[-0.33, 2.33, 0.33]$

67 $y = 4$



$[-20, 20, 2]$ por $[-1, 5]$

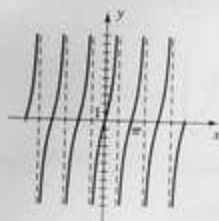
69 $[-\pi, -1.63] \cup$
 $[-0.45, 0.61] \cup$
 $[1.49, 2.42]$



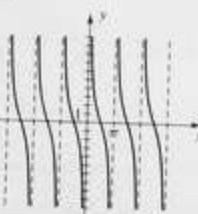
$[-\pi, \pi, \pi/4]$ por $[-2.09, 2.09]$

EJERCICIOS 6.6

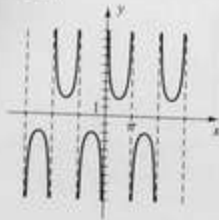
1 π



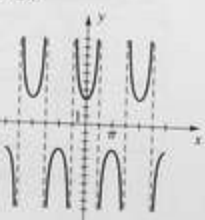
3 π



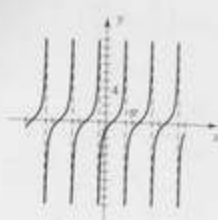
5 2π



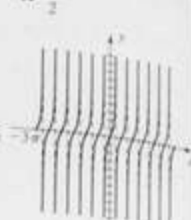
7 2π



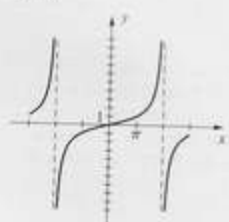
9 π



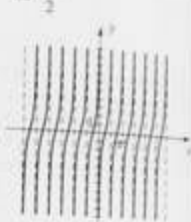
11 $\frac{\pi}{2}$



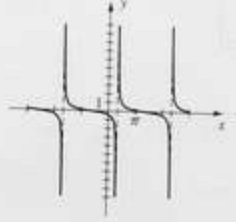
13 4π



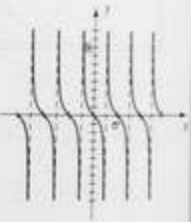
15 $\frac{\pi}{2}$



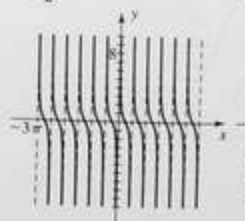
17 2π



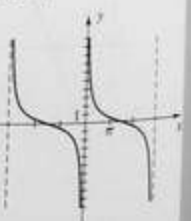
19 π

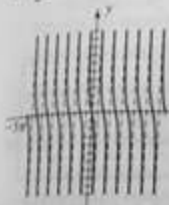
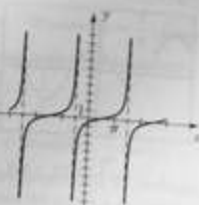
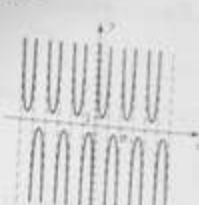
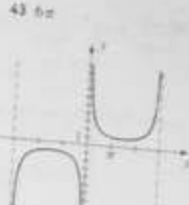
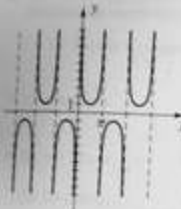
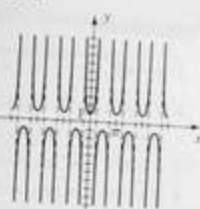
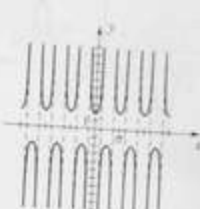
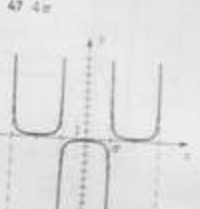
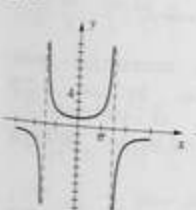
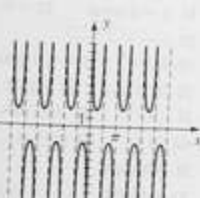
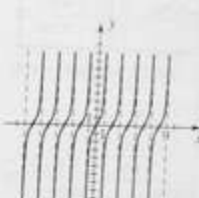
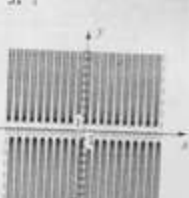
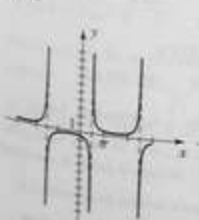
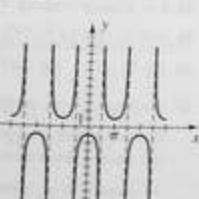


21 $\frac{\pi}{2}$



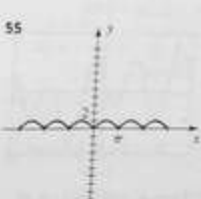
23 3π



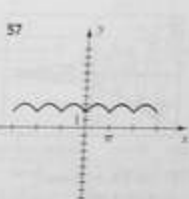
25 $\frac{\pi}{2}$

 27 2π

 41 π

 43 6π

 29 2π

 31 π

 45 π

 47 4π

 33 6π

 35 π

 49 2

 51 1

 37 4π

 39 2π


53 $y = -\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

55



57



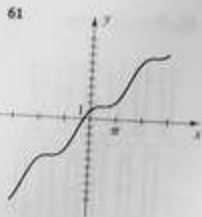
la figura 1, donde el símbolo \lceil especifica el ángulo de 90° . Al usar las longitudes a , b y c de los lados del triángulo pueden obtenerse seis

R48 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

59



61

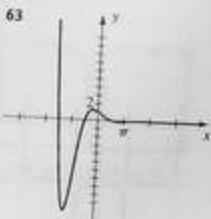
77 $[-0.70, 0.12]$ 

79 $[-\pi, -1.31] \cup$
 $[0.11, 0.95] \cup$
 $[2.39, \pi]$

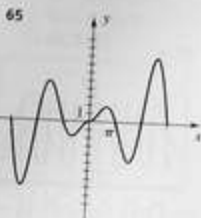


$[-2, 2]$ por $[-1.33, 1.33]$

63



65

81 (a) I_0 (b) $0.044I_0$

(c) $0.603I_0$ por $[-2.09, 2.09]$

83 (a) $A_0 e^{-\alpha t}$ (b) $\frac{\alpha}{k} \hat{z}_0$ (c) $\frac{\ln 2}{\alpha}$

EJERCICIOS 6.7

$$1 \beta = 60^\circ, a = \frac{20}{3}\sqrt{3}, c = \frac{40}{3}\sqrt{3}$$

$$3 \alpha = 45^\circ, a = b = 15\sqrt{2}$$

$$5 \alpha = \beta = 45^\circ, c = 5\sqrt{2}$$

$$7 \alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ, a = 15$$

$$9 \beta = 53^\circ, a = 18, c = 30$$

$$11 \alpha = 18^\circ 9', a = 78.7, c = 252.6$$

$$13 \alpha = 29^\circ, \beta = 61^\circ, c = 51$$

$$15 \alpha = 69^\circ, \beta = 21^\circ, a = 5.4$$

$$17 b = c \cos \alpha$$

$$19 a = b \cot \beta \quad 21 c = a \csc \alpha$$

$$23 b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$25 250\sqrt{3} + 4 \approx 437 \text{ pies} \quad 27 28 800 \text{ pies} \quad 29 160 \text{ m}$$

$$31 9659 \text{ pies} \quad 33 \text{ (a) } 58 \text{ pies} \quad \text{(b) } 27 \text{ pies} \quad 35 51^\circ 20'$$

$$37 16.3^\circ \quad 39 2063 \text{ pies} \quad 41 1 459 379 \text{ pies}^2$$

$$43 21.8^\circ \quad 45 20.2 \text{ m} \quad 47 29.7 \text{ km} \quad 49 3944 \text{ mi}$$

$$51 126 \text{ mph}$$

$$53 \text{ (a) } 45\%$$

(b) Cada satélite tiene un intervalo de señal de más de 120° .

$$55 h = d \sin \alpha + c \quad 57 h = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

$$59 h = d(\tan \beta - \tan \alpha)$$

$$61 N70^\circ E; N40^\circ O; S15^\circ O; S25^\circ E$$

$$63 \text{ (a) } 55 \text{ mi} \quad \text{(b) } S63^\circ E \quad 65 324 \text{ mi}$$

$$67 \text{ Amplitud, } 10 \text{ cm; periodo, } \frac{1}{3} \text{ s; frecuencia, } 3 \text{ osc/s}$$

El punto está en el origen en $t = 0$. Se mueve hacia arriba con rapidez decreciente y alcanza el punto de coordenada

10 cuando $t = \frac{1}{12}$. Después invierte la dirección y se mueve hacia abajo, acelerando hasta llegar al origen

67



69

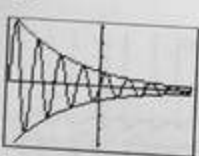


$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$

71

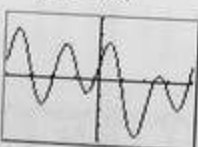


$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$

73 $e^{-\alpha t}$ 

$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por
 $[-4.19, 4.19]$

75 $(-2.76, 3.09);$
 $(1.23, -3.68)$



$[-\pi, \pi, \pi/4]$ por $[-4, 4]$

cuando $t = \frac{1}{6}$. Continúa hacia abajo desacelerando y llega al punto de coordenada -10 cuando $t = \frac{1}{4}$. Luego invierte la dirección y se mueve acelerando hacia arriba, regresando al origen cuando $t = \frac{1}{3}$.

- 69 Amplitud, 4 cm; periodo, $\frac{4}{3}$ s; frecuencia, $\frac{3}{4}$ osc/s.

El movimiento se parece al del ejercicio 67; sin embargo, el punto inicia 4 unidades arriba del origen y se mueve hacia abajo llegando al origen cuando $t = \frac{1}{3}$ y al punto de coordenada -4 cuando $t = \frac{2}{3}$. Después invierte la dirección y se mueve hacia arriba, llegando al origen cuando $t = 1$ y después a su punto de partida cuando $t = \frac{4}{3}$.

$$71 d = 5 \cos \frac{2\pi}{3} t$$

$$73 (a) y = 25 \cos \frac{\pi}{15} t$$

$$(b) 324\,000 \text{ pies}$$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

$$1 \frac{11\pi}{6}, \frac{9\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$$

$$2 810^\circ, -120^\circ, 315^\circ, 900^\circ, 36^\circ$$

$$3 (a) 0.1 \quad (b) 0.2 \text{ m}^2$$

$$4 (a) \frac{35\pi}{12} \text{ cm} \quad (b) \frac{175\pi}{16} \text{ cm}^2$$

$$5 \frac{200\pi}{3}, 90\pi \quad 6 \frac{100\pi}{3}, \frac{105\pi}{4}$$

$$7 x = 6\sqrt{3}; y = 3\sqrt{3} \quad 8 x = \frac{7}{2}\sqrt{2}; y = \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

$$9 \tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1} \quad 10 \cot \theta = \sqrt{\csc^2 \theta - 1}$$

Ejercicios 11 al 20: se presentan comprobaciones características.

$$11 \begin{aligned} \sin \theta (\csc \theta - \sin \theta) &= \sin \theta \csc \theta - \sin^2 \theta \\ &= 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 \cos \theta (\tan \theta + \cot \theta) &= \cos \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \cos \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \sin \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} = \csc \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 (\cos^2 \theta - 1)(\tan^2 \theta + 1) &= (\cos^2 \theta - 1)(\sec^2 \theta) \\ &= \cos^2 \theta \sec^2 \theta - \sec^2 \theta \\ &= 1 - \sec^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14 \frac{\sec \theta - \cos \theta}{\tan \theta} &= \frac{\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\cos \theta}} = \sec \theta \end{aligned}$$

$$15 \frac{1 + \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\tan^2 \theta} + \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} = \cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

$$\begin{aligned} 16 \frac{\sec \theta + \csc \theta}{\sec \theta - \csc \theta} &= \frac{\frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta}}{\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta}} = \frac{\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta \sin \theta}}{\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta \sin \theta}} \\ &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17 \frac{\cot \theta - 1}{1 - \tan \theta} &= \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - 1}{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta}}{\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{(\cos \theta - \sin \theta) \cos \theta}{(\cos \theta - \sin \theta) \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18 \frac{1 + \sec \theta}{\tan \theta + \sec \theta} &= \frac{1 + \frac{1}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta}} = \frac{\frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta}} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} = \csc \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19 \frac{\tan(-\theta) + \cot(-\theta)}{\tan \theta} &= \frac{-\tan \theta - \cot \theta}{\tan \theta} = -\frac{\tan \theta}{\tan \theta} - \frac{\cot \theta}{\tan \theta} \\ &= -1 - \cot^2 \theta = -(1 + \cot^2 \theta) \\ &= -\csc^2 \theta \end{aligned}$$

R50 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

$$\begin{aligned}
 20 \quad \frac{1}{\csc(-\theta)} - \frac{\cot(-\theta)}{\sec(-\theta)} &= \frac{1}{-\csc \theta} - \frac{-\cot \theta}{\sec \theta} \\
 &= \sin \theta + \frac{\cos \theta / \sin \theta}{1/\cos \theta} \\
 &= \sin \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta} \\
 &= \frac{1}{\sin \theta} = \csc \theta
 \end{aligned}$$

$$21 \quad \frac{\sqrt{33}}{7}, \frac{4}{7}, \frac{\sqrt{33}}{4}, \frac{4}{\sqrt{33}}, \frac{7}{4}, \frac{7}{\sqrt{33}}$$

$$22 \quad (a) \quad -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{4}$$

$$(b) \quad \frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$(c) \quad -1, 0, 1, 0, 1, -1$$

$$23 \quad (a) \text{ II} \quad (b) \text{ III} \quad (c) \text{ IV}$$

$$24 \quad (a) \quad -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{4}$$

$$(b) \quad \frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$25 \quad (-1, 0); (0, -1); (0, 1); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); (1, 0); \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$26 \quad \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right); \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right); \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right); \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$27 \quad (a) \quad \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8} \quad (b) \quad 65^\circ, 43^\circ, 8^\circ$$

$$28 \quad (a) \quad 1, 0, 1, 0, 1, 1$$

$$(b) \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$$

$$(c) \quad 0, 1, 0, 1, 1, 1$$

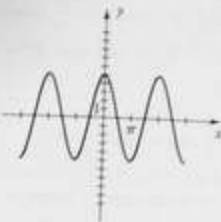
$$(d) \quad -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, -2$$

$$29 \quad (a) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (b) \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (c) \quad -\frac{1}{2} \quad (d) \quad -2$$

$$(e) \quad -1 \quad (f) \quad \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$30 \quad 310.5^\circ \quad 31 \quad 1.2206; 4.3622 \quad 32 \quad 52.44^\circ; 307.56^\circ$$

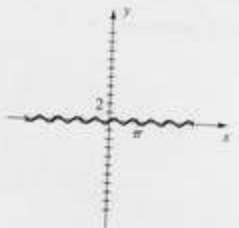
$$33 \quad 5, 2\pi$$



$$34 \quad \frac{2}{3}, 2\pi$$



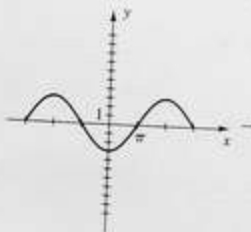
$$35 \quad \frac{1}{3}, \frac{2\pi}{3}$$



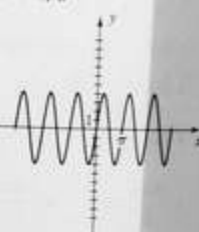
$$36 \quad \frac{1}{2}, 6\pi$$



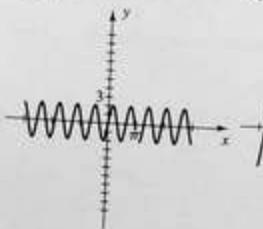
$$37 \quad 3, 4\pi$$



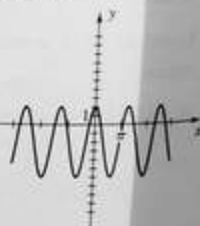
$$38 \quad 4, \pi$$



$$39 \quad 2, 2$$



$$40 \quad 4, 4$$



41 (a) 1.43, 2 (b) $y = 1.43 \sin \pi x$

42 (a) 3.27, 3π (b) $y = -3.27 \sin \frac{2}{3}x$

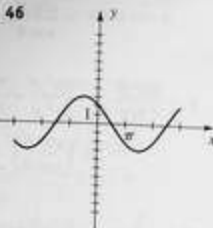
43 (a) $3, \frac{4\pi}{3}$ (b) $y = -3 \cos \frac{3}{2}x$

44 (a) 2, 4 (b) $y = 2 \cos \frac{\pi}{2}x$

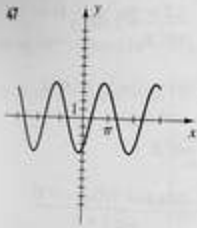
45



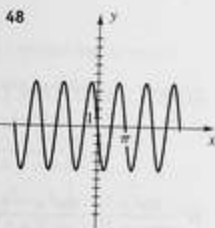
46



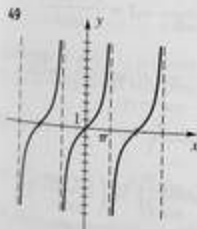
47



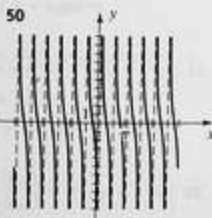
48



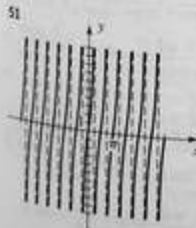
49



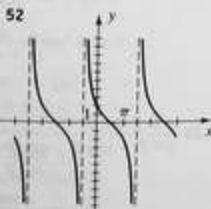
50



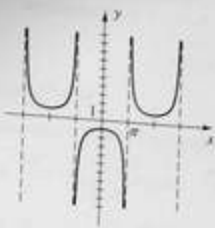
51



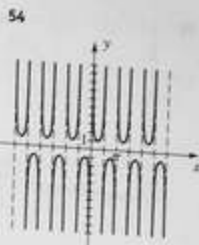
52



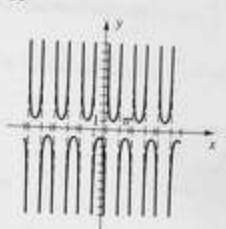
53



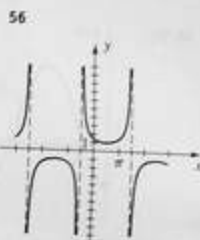
54



55



56



57 $\alpha = 30^\circ, a = 23, c = 46$

58 $\beta = 35^\circ 20', a = 310, c = 380$

59 $\alpha = 68^\circ, \beta = 22^\circ, c = 67$

60 $\alpha = 13^\circ, \beta = 77^\circ, b = 40$

61 (a) $\frac{109\pi}{6}$ (b) 440.2 62 1048 pies

63 0.093 mi/s 64 52°

65 Aproximadamente 67 900 000 mi.

66 $\frac{6\pi}{5}$ radianes = 216° 67 250 pies

68 (a) 231.0 pies (b) 434.5 69 (b) 2 mi

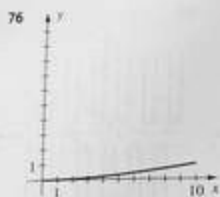
70 (a) $T = h + d(\cos \alpha \tan \theta - \sin \alpha)$ (b) 22.54 pies

71 (a) $\frac{2\pi}{3} \sqrt{3} = 14.43$ pies-candelas (b) 37.47°

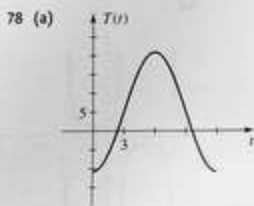
72 (b) 4.69 73 (a) 74.05 pulg (b) 24.75 pulg

74 (a) $S = 4a^2 \sin \theta$ (b) $V = \frac{4}{3} a^3 \sin^2 \theta \cos \theta$

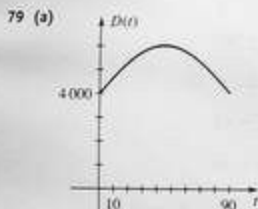
75 (a) $h = R \sec \frac{x}{R} - R$ (b) $h = 1650$ pies



$$77 \ y = 98.6 + (0.3) \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{11\pi}{12}\right)$$



$$78 \text{ (a) } T(t) \quad \text{(b) } 20.8^\circ\text{C en julio 1.}$$



$$79 \text{ (a) } D(t) \quad \text{(b) } 45 \text{ días en el verano.}$$

- 80 (a) El corcho tiene un movimiento armónico simple.
(b) $1 \leq t \leq 2$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

- 3 Ninguno.
5 Los valores de y_1 , y_2 y y_3 están muy próximos unos de otros cerca de $x = 0$.
6 (a) $x \approx -0.4161$, $y \approx 0.9093$
(b) $x \approx -0.8838$, $y \approx -0.4678$
7 (a) $x \approx 1.8415$, $y \approx -0.5403$
(b) $x \approx -1.2624$, $y \approx 0.9650$
8 (a) $\frac{500\pi}{3}$ rad/s (b) $D(t) = 5 \cos\left(\frac{500\pi}{3}t\right) + 18$
(c) 10 revoluciones.

Capítulo 7

EJERCICIOS 7.1

Ejercicios 1 al 50: se presentan comprobaciones características para los ejercicios 1, 5, 9, ..., 49.

$$1 \quad \csc \theta - \sec \theta = \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\sin \theta} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta} \\ = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \theta = \cot \theta \cos \theta$$

$$5 \quad \frac{\csc^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\csc^2 \theta}{\sec^2 \theta} = \frac{1/\sin^2 \theta}{1/\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ = \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2 = \cot^2 \theta$$

$$9 \quad \frac{1}{1 - \cos \gamma} + \frac{1}{1 + \cos \gamma} = \frac{1 + \cos \gamma + 1 - \cos \gamma}{1 - \cos^2 \gamma} \\ = \frac{2}{\sin^2 \gamma} = 2 \csc^2 \gamma$$

$$13 \quad \csc^4 t - \cot^4 t = (\csc^2 t + \cot^2 t)(\csc^2 t - \cot^2 t) \\ = (\csc^2 t + \cot^2 t)(1) \\ = \csc^2 t + \cot^2 t$$

$$17 \quad \frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x + 1} = \frac{(\sec x + 1)(\sec x - 1)}{\sec x + 1} \\ = \sec x - 1 = \frac{1}{\cos x} - 1 = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$$

$$21 \quad \sec^4 r - \cos^4 r = (\sec^2 r - \cos^2 r)(\sec^2 r + \cos^2 r) \\ = (\sec^2 r - \cos^2 r)(1) \\ = \sec^2 r - \cos^2 r$$

$$25 \quad (\sec t + \tan t)^2 = \left(\frac{1}{\cos t} + \frac{\sin t}{\cos t}\right)^2 = \left(\frac{1 + \sin t}{\cos t}\right)^2 \\ = \frac{(1 + \sin t)^2}{\cos^2 t} = \frac{(1 + \sin t)^2}{1 - \sin^2 t} \\ = \frac{(1 + \sin t)^2}{(1 + \sin t)(1 - \sin t)} = \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}$$

$$29 \quad \frac{1 + \csc \beta}{\cos \beta + \cos \beta} = \frac{1 + \frac{1}{\sin \beta}}{\frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \cos \beta} = \frac{\frac{1 + \sin \beta}{\sin \beta}}{\frac{\cos \beta + \cos \beta \sin \beta}{\sin \beta}} \\ = \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta(1 + \sin \beta)} = \frac{1}{\cos \beta} = \sec \beta$$

$$\begin{aligned}
 33 \text{ LD } &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} \\
 &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\
 &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\
 &= \text{LS}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 37 \frac{1}{\tan \beta + \cot \beta} &= \frac{1}{\frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}{\cos \beta \sin \beta}} \\
 &= \sin \beta \cos \beta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 41 \text{ LD } &= \sec^4 \phi - 4 \tan^2 \phi = (\sec^2 \phi)^2 - 4 \tan^2 \phi \\
 &= (1 + \tan^2 \phi)^2 - 4 \tan^2 \phi \\
 &= 1 + 2 \tan^2 \phi + \tan^4 \phi - 4 \tan^2 \phi \\
 &= 1 - 2 \tan^2 \phi + \tan^4 \phi \\
 &= (1 - \tan^2 \phi)^2 = \text{LS}
 \end{aligned}$$

$$45 \log 10^{a^x} = \log_{10} 10^{a^x} = \tan t, \text{ porque } \log_a a^x = x.$$

$$\begin{aligned}
 49 \ln |\sec \theta + \tan \theta| &= \ln \left| \frac{(\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta)}{\sec \theta - \tan \theta} \right| \\
 &= \ln \left| \frac{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta}{\sec \theta - \tan \theta} \right| \\
 &= \ln \left| \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} \right| \\
 &= \ln |1| - \ln |\sec \theta - \tan \theta| \\
 &= -\ln |\sec \theta - \tan \theta|
 \end{aligned}$$

Ejercicios 51 al 62: se presenta un valor característico de t o de θ y la desigualdad resultante.

$$51 \pi - 1 \neq 1 \quad 53 \frac{3\pi}{2}, 1 \neq -1 \quad 55 \frac{\pi}{4}, 2 \neq 1$$

$$57 \pi - 1 \neq 1 \quad 59 \frac{\pi}{4}, \cos \sqrt{2} \neq 1$$

$$61 \text{ No es una identidad.} \quad 63 \text{ Es una identidad.}$$

$$65 a^2 \cos^2 \theta \quad 67 a \tan \theta \sec \theta \quad 69 a \sec \theta$$

$$71 \frac{1}{a} \cos^2 \theta \quad 73 a \tan \theta \quad 75 a^2 \sec^2 \theta \tan \theta$$

$$\begin{aligned}
 77 \text{ La gráfica de } f \text{ parece ser la de } y = g(x) = -1. \\
 \frac{\sin^2 x - \sec^2 x}{(1 - \sec^2 x) \cos^4 x} &= \frac{\sin^2 x (1 - \sec^2 x)}{-\tan^2 x \cos^4 x} \\
 &= \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{-(\sin^2 x / \cos^2 x) \cos^4 x} \\
 &= \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{-\sin^2 x \cos^2 x} = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 79 \text{ La gráfica de } f \text{ parece ser la de } y = g(x) = \cos x. \\
 \sec x (\sin x \cos x + \cos^2 x) - \sin x \\
 = \sec x \cos x (\sin x + \cos x) - \sin x \\
 = (\sin x + \cos x) - \sin x = \cos x
 \end{aligned}$$

EJERCICIOS 7.2

Ejercicios 1 al 34: n representa cualquier entero.

$$1 \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \quad 3 \frac{\pi}{3} + \pi n$$

$$5 \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$$

$$7 \text{ No tiene solución porque } \frac{\pi}{2} > 1.$$

$$9 \text{ Toda } \theta \text{ excepto } \theta = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

$$11 \frac{\pi}{12} + \pi n, \frac{11\pi}{12} + \pi n \quad 13 \frac{\pi}{2} + 3\pi n$$

$$15 -\frac{\pi}{12} + 2\pi n, \frac{7\pi}{12} + 2\pi n$$

$$17 \frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{7\pi}{12} + \pi n \quad 19 \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$$

$$21 \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n \quad 23 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

$$25 \frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{2\pi}{3} + \pi n \quad 27 \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$$

$$29 \frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{5\pi}{6} + \pi n \quad 31 \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$$

$$33 \frac{\pi}{12} + \pi n, \frac{5\pi}{12} + \pi n \quad 35 e^{i(\pi/2) + \pi n}$$

$$37 \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8} \quad 39 \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$41 \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \quad 43 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$45 \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \quad 47 \text{ No hay solución.} \quad 49 \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$$

$$51 0, \frac{\pi}{2} \quad 53 \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

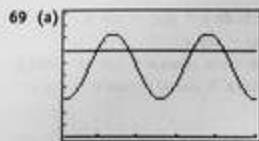
$$55 \text{ Toda } \alpha \text{ en } [0, 2\pi) \text{ excepto } 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

$$57 \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \quad 59 \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$61 15^\circ 30', 164^\circ 30' \quad 63 135^\circ, 315^\circ, 116^\circ 30', 296^\circ 30'$$

$$65 41^\circ 50', 138^\circ 10', 194^\circ 30', 345^\circ 30' \quad 67 10$$

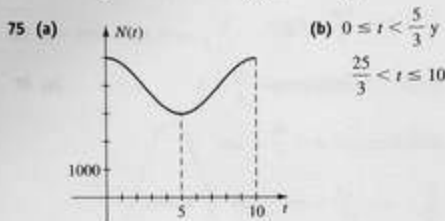
R54 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS



[1, 25, 5] por [0, 100, 10]

(b) Julio: 83°F; Oct.: 56.5°F (c) De mayo a septiembre.

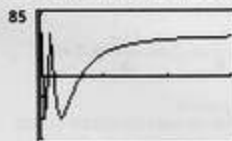
71 $t = 3.50$ y $t = 8.50$ 73 (a) 3.29 (b) 4



77 $A\left(-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), B\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right),$
 $C\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), D\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

79 $\frac{7}{360}$ 81 $[0, 1.27] \cup [5.02, 2\pi]$

83 $(0.39, 1.96) \cup (2.36, 3.53) \cup (5.11, 5.50)$



[0, 3] por [-1.5, 1.5, 0.5]

(a) 0.6366 (b) Tiende a $y = 1$.

(c) Una infinidad de ceros.

87 5.400 89 3.619

91 -1.48, 1.08 93 ± 1.00

95 $\pm 0.64, \pm 2.42$ 97 (a) 37.6° (b) 52.5°

EJERCICIOS 7.3

1 (a) $\cos 43^\circ 23'$ (b) $\sin 16^\circ 48'$ (c) $\cot \frac{\pi}{3}$

(d) $\csc 72.72^\circ$

3 (a) $\sin \frac{3\pi}{20}$ (b) $\cos \left(\frac{2\pi-1}{4}\right)$ (c) $\cot \left(\frac{\pi-2}{2}\right)$

(d) $\sec \left(\frac{\pi}{2} - 0.53\right)$

5 (a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

7 (a) $\sqrt{3} + 1$ (b) $-2 - \sqrt{3}$

9 (a) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

11 $\cos 25^\circ$ 13 $\sin (-5^\circ)$ 15 $\sin (-5)$

17 (a) $\frac{77}{85}$ (b) $\frac{36}{85}$ (c) 1

19 (a) $-\frac{24}{25}$ (b) $-\frac{24}{7}$ (c) IV

21 (a) $\frac{3\sqrt{21}-8}{25} = 0.23$ (b) $\frac{4\sqrt{21}+6}{25} = 0.97$ (c) 1

23 $\sin(\theta + \pi) = \sin \theta \cos \pi + \cos \theta \sin \pi$
 $= \sin \theta(-1) + \cos \theta(0) = -\sin \theta$

25 $\sin\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{5\pi}{2} - \cos x \sin \frac{5\pi}{2}$
 $= -\cos x$

27 $\cos(\theta - \pi) = \cos \theta \cos \pi + \sin \theta \sin \pi = -\cos \theta$

29 $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x \cos \frac{3\pi}{2} - \sin x \sin \frac{3\pi}{2}$
 $= \sin x$

31 $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$
 $= \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{2} - \cos x \sin \frac{\pi}{2}}{\cos x \cos \frac{\pi}{2} + \sin x \sin \frac{\pi}{2}}$
 $= \frac{-\cos x}{\sin x} = -\cot x$

33 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cot\left[\frac{\pi}{2} - \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$
 $= \cot(-\theta) = -\cot \theta$

35 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4}$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \theta + \cos \theta)$

37 $\tan\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan u + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan u \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \tan u}{1 - \tan u}$

$$\begin{aligned}
 38 \cos(u+v) + \cos(u-v) &= (\cos u \cos v - \sin u \sin v) + (\cos u \cos v + \sin u \sin v) \\
 &= 2 \cos u \cos v
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 43 \sin(u+v) \cdot \sin(u-v) &= (\sin u \cos v + \cos u \sin v) \cdot (\sin u \cos v - \cos u \sin v) \\
 &= \sin^2 u \cos^2 v - \cos^2 u \sin^2 v \\
 &= \sin^2 u (1 - \sin^2 v) - (1 - \sin^2 u) \sin^2 v \\
 &= \sin^2 u - \sin^2 u \sin^2 v - \sin^2 v + \sin^2 u \sin^2 v \\
 &= \sin^2 u - \sin^2 v
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 43 \frac{1}{\cot \alpha - \cot \beta} &= \frac{1}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta}} \\
 &= \frac{1}{\frac{\cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \sin \beta}} \\
 &= \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 45 \sin u \cos v \cos w + \cos u \sin v \cos w + \\
 \cos u \cos v \sin w - \sin u \sin v \sin w
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 47 \cot(u+v) &= \frac{\cos(u+v)}{\sin(u+v)} \\
 &= \frac{(\cos u \cos v - \sin u \sin v)(1/\sin u \sin v)}{(\sin u \cos v + \cos u \sin v)(1/\sin u \sin v)} \\
 &= \frac{\cot u \cot v - 1}{\cot v + \cot u}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 49 \sin(u-v) &= \sin[u + (-v)] \\
 &= \sin u \cos(-v) + \cos u \sin(-v) \\
 &= \sin u \cos v - \cos u \sin v
 \end{aligned}$$

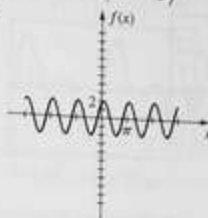
$$\begin{aligned}
 51 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
 &= \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
 &= \frac{\cos x \cos h - \cos x}{h} - \frac{\sin x \sin h}{h} \\
 &= \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) - \sin x \left(\frac{\sin h}{h} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 53 \text{ (a) Cada lado } &\approx 0.0523. \quad \text{(b) } \alpha = 60^\circ \\
 \text{(c) } \alpha = 60^\circ, \beta &= 3^\circ
 \end{aligned}$$

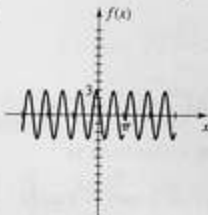
$$55 \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \quad 57 \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$$

$$59 \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4} \text{ es externo.}$$

$$\begin{aligned}
 61 \text{ (a) } f(x) &= 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{(b) } 2, \pi, \frac{\pi}{12} \\
 \text{(c)} &
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 63 \text{ (a) } f(x) &= 2\sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{(b) } 2\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{12} \\
 \text{(c)} &
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 65 y &= 10\sqrt{41} \cos\left(60\pi t - \tan^{-1} \frac{5}{4}\right) \\
 &\approx 10\sqrt{41} \cos(60\pi t - 0.8961)
 \end{aligned}$$

$$67 \text{ (a) } y = \sqrt{13} \cos(t - C) \text{ con } \tan C = \frac{3}{2}; \sqrt{13}, 2\pi$$

$$\text{(b) } t = C + \frac{\pi}{2} + \pi n = 2.55 + \pi n \text{ para cualquier entero no negativo } n.$$

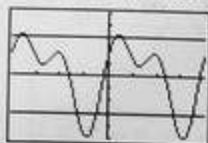
$$\begin{aligned}
 69 \text{ (a) } p(t) &= A \sin \omega t + B \sin(\omega t + \tau) \\
 &= A \sin \omega t + B(\sin \omega t \cos \tau + \cos \omega t \sin \tau) \\
 &= (B \sin \tau) \cos \omega t + (A + B \cos \tau) \sin \omega t \\
 &= a \cos \omega t + b \sin \omega t \\
 \text{con } a &= B \sin \tau \text{ y } b = A + B \cos \tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b) } C^2 &= (B \sin \tau)^2 + (A + B \cos \tau)^2 \\
 &= B^2 \sin^2 \tau + A^2 + 2AB \cos \tau + B^2 \cos^2 \tau \\
 &= A^2 + B^2(\sin^2 \tau + \cos^2 \tau) + 2AB \cos \tau \\
 &= A^2 + B^2 + 2AB \cos \tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 71 \text{ (a) } C^2 &= A^2 + B^2 + 2AB \cos \tau \leq A^2 + B^2 + 2AB, \\
 \text{como } \cos \tau &\leq 1 \text{ y } A > 0, B > 0. \text{ Así,} \\
 C^2 &\leq (A + B)^2 \text{ y, por tanto, } C \leq A + B. \\
 \text{(b) } 0, 2\pi \quad \text{(c) } \cos \tau &> -B/(2A)
 \end{aligned}$$

R56 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

- 73 $(-2.97, -2.69), (-1.00, -0.37), (0.17, 0.46), (2.14, 2.77)$



$[-3.14, 3.14, \pi/4]$ por $[-5, 5]$

EJERCICIOS 7.4

1 $\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, -\frac{24}{7}$ 3 $-\frac{4}{9}\sqrt{2}, -\frac{7}{9}, \frac{4}{7}\sqrt{2}$

5 $\frac{1}{10}\sqrt{10}, \frac{3}{10}\sqrt{10}, \frac{1}{3}$

7 $-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, -\sqrt{2}-1$

9 (a) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (c) $\sqrt{2}+1$

11 $\sin 10\theta = \sin(2 \cdot 5\theta) = 2 \sin 5\theta \cos 5\theta$

13 $4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \sin x$

15 $(\sin t + \cos t)^2 = \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t = 1 + \sin 2t$

17 $\sin 3u = \sin(2u + u)$
 $= \sin 2u \cos u + \cos 2u \sin u$
 $= (2 \sin u \cos u) \cos u + (1 - 2 \sin^2 u) \sin u$
 $= 2 \sin u \cos^2 u + \sin u - 2 \sin^3 u$
 $= 2 \sin u (1 - \sin^2 u) + \sin u - 2 \sin^3 u$
 $= 2 \sin u - 2 \sin^3 u + \sin u - 2 \sin^3 u$
 $= 3 \sin u - 4 \sin^3 u = \sin u (3 - 4 \sin^2 u)$

19 $\cos 4\theta = \cos(2 \cdot 2\theta) = 2 \cos^2 2\theta - 1$
 $= 2(2 \cos^2 \theta - 1)^2 - 1$
 $= 2(4 \cos^4 \theta - 4 \cos^2 \theta + 1) - 1$
 $= 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$

21 $\sin^2 t = (\sin^2 t)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2$
 $= \frac{1}{4}(1 - 2 \cos 2t + \cos^2 2t)$
 $= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos 4t}{2}\right)$
 $= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4t$
 $= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t$

23 $\sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta} = \frac{1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{\sec^2 \theta}\right) - 1}$
 $= \frac{1}{\frac{2 - \sec^2 \theta}{\sec^2 \theta}} = \frac{\sec^2 \theta}{2 - \sec^2 \theta}$

25 $2 \sin^2 2t + \cos 4t = 2 \sin^2 2t + \cos(2 \cdot 2t)$
 $= 2 \sin^2 2t + (1 - 2 \sin^2 2t) = 1$

27 $\tan 3u = \tan(2u + u) = \frac{\tan 2u + \tan u}{1 - \tan 2u \tan u}$
 $= \frac{\frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} + \tan u}{1 - \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} \cdot \tan u}$
 $= \frac{\frac{2 \tan u + \tan u (1 - \tan^2 u)}{1 - \tan^2 u}}{\frac{1 - \tan^2 u - 2 \tan^2 u}{1 - \tan^2 u}}$
 $= \frac{1 - \tan^2 u}{1 - 3 \tan^2 u} = \frac{\tan u (3 - \tan^2 u)}{1 - 3 \tan^2 u}$

29 $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \csc \theta - \cot \theta$

31 $\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{8} \cos 2\theta$

33 $\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 8x$ 35 $0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

37 $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi$ 39 $0, \pi$ 41 $0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

45 (a) 1.20, 5.09
 (b) $P\left(\frac{2\pi}{3}, -1.5\right), Q(\pi, -1), R\left(\frac{4\pi}{3}, -1.5\right)$

47 (a) $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
 (b) $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{4}, \pm \frac{7\pi}{4}$

49 (b) Sí, el punto B está a 25 millas de A.

51 (a) $V = \frac{5}{2} \sin \theta$ (b) 53.13° 53 (b) 12.43 mm

55 La gráfica de f parece ser la de $y = g(x) = \tan x$.
 $\frac{\sin 2x + \sin x}{\cos 2x + \cos x + 1} = \frac{2 \sin x \cos x + \sin x}{(2 \cos^2 x - 1) + \cos x + 1}$
 $= \frac{\sin x (2 \cos x + 1)}{\cos x (2 \cos x + 1)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

57 -3.55, 5.22

59 -2.03, -0.72, 0.58, 2.62 61 -2.59

EJERCICIOS 7.5

$$1 \frac{1}{2} \cos 4t - \frac{1}{2} \cos 10t \quad 3 \frac{1}{2} \cos 2u + \frac{1}{2} \cos 10u$$

$$5 \sin 12\theta + \sin 6\theta \quad 7 \frac{3}{2} \sin 3x + \frac{3}{2} \sin x$$

$$9 2 \sin 4\theta \cos 2\theta \quad 11 -2 \sin 4x \sin x$$

$$13 -2 \cos 5t \sin 2t \quad 15 2 \cos \frac{3}{2}x \cos \frac{1}{2}x$$

$$17 \frac{\sin 4t + \sin 6t}{\cos 4t - \cos 6t} = \frac{2 \sin 5t \cos t}{2 \sin 5t \sin t} = \cot t$$

$$19 \frac{\sin u + \sin v}{\cos u + \cos v} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(u+v) \cos \frac{1}{2}(u-v)}{2 \cos \frac{1}{2}(u+v) \cos \frac{1}{2}(u-v)} = \tan \frac{1}{2}(u+v)$$

$$21 \frac{\sin u - \sin v}{\sin u + \sin v} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(u+v) \sin \frac{1}{2}(u-v)}{2 \sin \frac{1}{2}(u+v) \cos \frac{1}{2}(u-v)} = \cot \frac{1}{2}(u+v) \tan \frac{1}{2}(u-v) = \frac{\tan \frac{1}{2}(u-v)}{\tan \frac{1}{2}(u+v)}$$

$$23 4 \cos x \cos 2x \sin 3x = 2 \cos 2x (2 \sin 3x \cos x) = 2 \cos 2x (\sin 4x + \sin 2x) = (2 \cos 2x \sin 4x) + (2 \cos 2x \sin 2x) = [\sin 6x - \sin (-2x)] + (\sin 4x - \sin 0) = \sin 2x + \sin 4x + \sin 6x$$

$$25 \frac{1}{2} \sin [(a+b)x] + \frac{1}{2} \sin [(a-b)x] \quad 27 \frac{\pi}{4}n$$

$$29 \frac{\pi}{2}n \quad 31 \frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n, \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$$

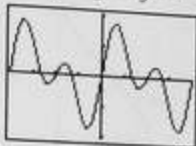
$$33 \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}n, \frac{2\pi}{3} \quad 35 \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$37 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{4}, \pm \frac{7\pi}{4}$$

$$39 f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi n}{l}(x+kt) + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi n}{l}(x-kt)$$

$$41 (a) 0, \pm 1.05, \pm 1.57, \pm 2.09, \pm 3.14$$

$$(b) 0, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{2\pi}{3}, \pm \pi$$



$[-3.14, 3.14, \pi/4]$ por $[-2.09, 2.09]$

$$43 \text{ La gráfica de } f \text{ parece ser la de } y = g(x) = \tan 2x. \\ \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \frac{\sin 2x + (\sin 3x + \sin x)}{\cos 2x + (\cos 3x + \cos x)} = \frac{\sin 2x + 2 \sin 2x \cos x}{\cos 2x + 2 \cos 2x \cos x} = \frac{\sin 2x(1 + 2 \cos x)}{\cos 2x(1 + 2 \cos x)} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$$

EJERCICIOS 7.6

$$1 (a) -\frac{\pi}{4} \quad (b) \frac{2\pi}{3} \quad (c) -\frac{\pi}{3}$$

$$3 (a) \frac{\pi}{3} \quad (b) \frac{\pi}{4} \quad (c) \frac{\pi}{6}$$

$$5 (a) \text{ No está definido.} \quad (b) \text{ No está definido.} \quad (c) \frac{\pi}{4}$$

$$7 (a) -\frac{3}{10} \quad (b) \frac{1}{2} \quad (c) 14$$

$$9 (a) \frac{\pi}{3} \quad (b) \frac{5\pi}{6} \quad (c) -\frac{\pi}{6}$$

$$11 (a) -\frac{\pi}{4} \quad (b) \frac{3\pi}{4} \quad (c) -\frac{\pi}{4}$$

$$13 (a) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (b) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (c) \text{ No está definido.}$$

$$15 (a) \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (b) \frac{\sqrt{34}}{5} \quad (c) \frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$17 (a) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (b) 0 \quad (c) -\frac{77}{36}$$

$$19 (a) -\frac{24}{25} \quad (b) -\frac{161}{289} \quad (c) \frac{24}{7}$$

$$21 (a) -\frac{1}{10}\sqrt{2} \quad (b) \frac{4}{17}\sqrt{17} \quad (c) \frac{1}{2}$$

$$23 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad 25 \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} \quad 27 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$29 \sqrt{\frac{1+x}{2}} \quad 31 (a) -\frac{\pi}{2} \quad (b) 0 \quad (c) \frac{\pi}{2}$$

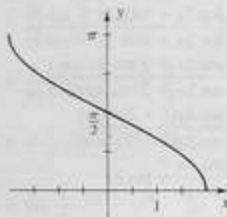
33



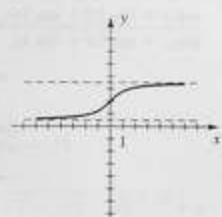
35



37



39



41

43 (a) $2 \leq x \leq 4$

$$(b) -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$$

$$(c) x = \sin 2y + 3$$

$$45 (a) -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \quad (b) 0 \leq y \leq 4\pi$$

$$(c) x = \frac{3}{2} \cos \frac{1}{4}y$$

$$47 x = \sin^{-1}(-y-3) \quad 49 x = \cos^{-1}\left[\frac{1}{2}(15-y)\right]$$

$$51 x = x_k \text{ o } x = \pi - x_k, \text{ donde } x_k = \sin^{-1}\left(\frac{3}{4} \sin y\right)$$

$$53 \cos^{-1}(-1 + \sqrt{2}) \approx 1.1437, \\ 2\pi - \cos^{-1}(-1 + \sqrt{2}) \approx 5.1395$$

$$55 \tan^{-1}\frac{1}{4}(-9 + \sqrt{57}) \approx -0.3478, \\ \tan^{-1}\frac{1}{4}(-9 - \sqrt{57}) \approx -1.3337$$

$$57 \cos^{-1}\frac{1}{5}\sqrt{15} \approx 0.6847, \cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\sqrt{15}\right) \approx 2.4569, \\ \cos^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.9553, \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \approx 2.1863$$

$$59 \sin^{-1}\left(\pm \frac{1}{6}\sqrt{30}\right) \approx \pm 1.1503$$

$$61 \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) \approx 2.2143, \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 1.2310, \\ 2\pi - \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) \approx 4.0689, 2\pi - \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 5.0522$$

$$63 \cos^{-1}\frac{2}{3} \approx 0.8411, 2\pi - \cos^{-1}\frac{2}{3} \approx 5.4421, \\ \frac{\pi}{3} \approx 1.0472, \frac{5\pi}{3} \approx 5.2360$$

$$65 (a) 1.65 \text{ m} \quad (b) 0.92 \text{ m} \quad (c) 0.43 \text{ m} \quad 67 3.07^\circ$$

$$69 (a) \alpha = \theta - \sin^{-1}\frac{d}{k} \quad (b) 40^\circ$$

$$71 \text{ Sea } \alpha = \sin^{-1}x \text{ y } \beta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ con} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ y } -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}. \text{ Así, } \sin \alpha = x \text{ y} \\ \sin \beta = x. \text{ Dado que la función seno es biunívoca sobre} \\ \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ tenemos } \alpha = \beta.$$

$$73 \text{ Sea } \alpha = \arcsin(-x) \text{ y } \beta = \arcsin x \text{ con} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ y } -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}. \text{ Así,} \\ \sin \alpha = -x \text{ y } \sin \beta = x. \text{ En consecuencia,} \\ \sin \alpha = -\sin \beta = \sin(-\beta). \text{ Dado que la función seno} \\ \text{es biunívoca } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ tenemos que } \alpha = -\beta.$$

$$75 \text{ Sea } \alpha = \arctan x \text{ y } \beta = \arctan(1/x). \text{ Dado que } x > 0, \\ \text{tenemos } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ y } 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ y de ahí que} \\ 0 < \alpha + \beta < \pi. \text{ Así,}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{x + (1/x)}{1 - x \cdot (1/x)} = \\ \frac{x + (1/x)}{0}. \text{ Puesto que el denominador es } 0, \tan(\alpha + \beta) \text{ es} \\ \text{indefinido, de ahí que } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

77 Dominio: $[0, 2]$; imagen: $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$



$$[-3, 6] \text{ por } [-2, 4]$$

79 0.29

81 $\theta = 1.25 = 72^\circ$



$$[0, 1.57, \pi/8] \text{ por } [0, 1.05, 0.2]$$

83 $\tan^{-1} 1 = 45^\circ$ 85 $\tan^{-1} \frac{1}{2} \approx 26.6^\circ$

EXERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 7

1 $(\cot^2 x + 1)(1 - \cos^2 x) = (\csc^2 x)(\sin^2 x) = 1$

$$\begin{aligned} 2 \cos \theta + \sin \theta \tan \theta &= \cos \theta + \sin \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \frac{(\sec^2 \theta - 1) \cot \theta}{\tan \theta \sin \theta + \cos \theta} &= \frac{(\tan^2 \theta) \cot \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \sin \theta + \cos \theta} \\ &= \frac{\tan \theta}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta} = \frac{\tan \theta}{\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta}} = \frac{\tan \theta}{1/\cos \theta} \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 (\tan x + \cot x)^2 &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} = \sec^2 x \csc^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \frac{1}{1 + \sin t} \cdot \frac{1 - \sin t}{1 - \sin t} &= \frac{1 - \sin t}{1 - \sin^2 t} = \frac{1 - \sin t}{\cos^2 t} \\ &= \frac{1 - \sin t}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos t} \\ &= \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{\sin t}{\cos t} \right) \cdot \sec t \\ &= (\sec t - \tan t) \sec t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} &= \frac{(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)/\cos \alpha \cos \beta}{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)/\cos \alpha \cos \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \tan 2u &= \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\cot u}}{1 - \frac{1}{\cot^2 u}} = \frac{2}{\cot^2 u - 1} \\ &= \frac{2 \cot u}{\cot^2 u - 1} = \frac{2 \cot u}{(\csc^2 u - 1) - 1} = \frac{2 \cot u}{\csc^2 u - 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \cos^2 \frac{v}{2} &= \frac{1 + \cos v}{2} = \frac{1 + \frac{1}{\sec v}}{2} = \frac{\sec v + 1}{2} \\ &= \frac{1 + \sec v}{2 \sec v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \frac{\tan^3 \phi - \cot^3 \phi}{\tan^2 \phi + \csc^2 \phi} &= \frac{(\tan \phi - \cot \phi)(\tan^2 \phi + \tan \phi \cot \phi + \cot^2 \phi)}{[\tan^2 \phi + (1 + \cot^2 \phi)]} \\ &= \tan \phi - \cot \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \text{ L1} &= \frac{\sin u + \sin v}{\csc u + \csc v} = \frac{\sin u + \sin v}{\frac{1}{\sin u} + \frac{1}{\sin v}} = \frac{\sin u + \sin v}{\frac{\sin u \sin v + \sin v \sin u}{\sin u \sin v}} \\ &= \sin u \sin v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{LD} &= \frac{1 - \sin u \sin v}{-1 + \csc u \csc v} = \frac{1 - \sin u \sin v}{-1 + \frac{1}{\sin u \sin v}} \\ &= \frac{1 - \sin u \sin v}{\frac{-\sin u \sin v + 1}{\sin u \sin v}} \\ &= \sin u \sin v \end{aligned}$$

Dado que el L1 y el LD equivalen a la misma expresión y los pasos son reversibles, la identidad se verifica.

$$\begin{aligned} 11 \left(\frac{\sin^2 x}{\tan^2 x} \right) \left(\frac{\csc^2 x}{\cot^2 x} \right) &= \left(\frac{\sin^2 x}{\tan^2 x} \right) \left(\frac{\csc^2 x}{\cot^2 x} \right) = \frac{(\sin x \csc x)^2}{(\tan x \cot x)^2} \\ &= \frac{(1)^2}{(1)^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12 \quad \frac{\cos \gamma}{1 - \tan \gamma} + \frac{\sec \gamma}{1 - \cot \gamma} &= \frac{\cos \gamma}{\frac{\cos \gamma - \sec \gamma}{\cos \gamma}} + \frac{\sec \gamma}{\frac{\sec \gamma - \cos \gamma}{\sec \gamma}} \\
 &= \frac{\cos^2 \gamma}{\cos \gamma - \sec \gamma} + \frac{\sec^2 \gamma}{\sec \gamma - \cos \gamma} \\
 &= \frac{\cos^2 \gamma - \sec^2 \gamma}{\cos \gamma - \sec \gamma} \\
 &= \frac{(\cos \gamma + \sec \gamma)(\cos \gamma - \sec \gamma)}{\cos \gamma - \sec \gamma} \\
 &= \cos \gamma + \sec \gamma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13 \quad \frac{\cos(-t)}{\sec(-t) + \tan(-t)} &= \frac{\cos t}{\sec t - \tan t} = \frac{\cos t}{\frac{1}{\cos t} - \frac{\sin t}{\cos t}} \\
 &= \frac{\cos t}{\frac{1 - \sin t}{\cos t}} = \frac{\cos^2 t}{1 - \sin t} = \frac{1 - \sin^2 t}{1 - \sin t} \\
 &= \frac{(1 - \sin t)(1 + \sin t)}{1 - \sin t} = 1 + \sin t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14 \quad \frac{\cot(-t) + \csc(-t)}{\sec(-t)} &= \frac{-\cot t - \csc t}{-\sec t} = \frac{\cot t + \csc t}{\sec t} \\
 &= \frac{\frac{\cos t}{\sin t} + \frac{1}{\sin t}}{\frac{1}{\cos t}} = \frac{\cos t + 1}{\sin^2 t} = \frac{\cos t + 1}{1 - \cos^2 t} \\
 &= \frac{\cos t + 1}{(1 - \cos t)(1 + \cos t)} = \frac{1}{1 - \cos t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} &= \sqrt{\frac{(1 - \cos t)}{(1 + \cos t)} \cdot \frac{(1 - \cos t)}{(1 - \cos t)}} \\
 &= \sqrt{\frac{(1 - \cos t)^2}{1 - \cos^2 t}} \\
 &= \sqrt{\frac{(1 - \cos t)^2}{\sin^2 t}} = \frac{|1 - \cos t|}{|\sin t|} = \frac{1 - \cos t}{|\sin t|},
 \end{aligned}$$

puesto que $(1 - \cos t) \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 16 \quad \sqrt{\frac{1 - \sec \theta}{1 + \sec \theta}} &= \sqrt{\frac{(1 - \sec \theta)}{(1 + \sec \theta)} \cdot \frac{(1 + \sec \theta)}{(1 + \sec \theta)}} \\
 &= \sqrt{\frac{1 - \sec^2 \theta}{(1 + \sec \theta)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{-\tan^2 \theta}{(1 + \sec \theta)^2}} \\
 &= \frac{|\tan \theta|}{|1 + \sec \theta|} = \frac{|\sin \theta|}{|1 + \sec \theta|},
 \end{aligned}$$

puesto que $(1 + \sec \theta) \geq 0$.

$$17 \quad \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \cos x \cos \frac{5\pi}{2} + \sin x \sin \frac{5\pi}{2} = \sin x$$

$$18 \quad \tan\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \frac{3\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{3\pi}{4}} = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$$

$$\begin{aligned}
 19 \quad \frac{1}{4} \sin 4\beta &= \frac{1}{4} \sin(2 \cdot 2\beta) = \frac{1}{4} (2 \sin 2\beta \cos 2\beta) \\
 &= \frac{1}{2} (2 \sin \beta \cos \beta) (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \\
 &= \sin \beta \cos^3 \beta - \cos \beta \sin^3 \beta
 \end{aligned}$$

$$20 \quad \tan \frac{1}{2} \theta = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \csc \theta - \cot \theta$$

$$\begin{aligned}
 21 \quad \sin 8\theta &= 2 \sin 4\theta \cos 4\theta \\
 &= 2(2 \sin 2\theta \cos 2\theta)(1 - 2 \sin^2 2\theta) \\
 &= 8 \sin \theta \cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) [1 - 2(2 \sin \theta \cos \theta)^2] \\
 &= 8 \sin \theta \cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) (1 - 8 \sin^3 \theta \cos^3 \theta)
 \end{aligned}$$

22 Sea $\alpha = \arctan x$ y $\beta = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$. Debido a que $-1 < x < 1$, $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Así, $\tan \alpha = x$ y $\tan \beta = \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \tan 2\alpha$. Dado que la función tangente es biunívoca $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tenemos $\beta = 2\alpha$ o, de manera equivalente, $\alpha = \frac{1}{2}\beta$.

$$23 \quad \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 25 \quad 0, \pi$$

$$26 \quad \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 27 \quad 0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$28 \quad \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 29 \quad \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$$

$$30 \quad \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi, 31 \quad \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$32 \quad \text{ Toda } x \text{ en } [0, 2\pi) \text{ excepto } \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$33 \quad \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 34 \quad 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$35 \quad \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}, \frac{19}{4}, \frac{23}{4}, 36 \quad 0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$37 \quad \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 38 \quad \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$39 \quad 0, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$$

40 $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$

41 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

42 $-2-\sqrt{3}$

43 $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

44 $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}$

45 $\frac{84}{85}$

46 $\frac{13}{85}$

47 $-\frac{84}{13}$

48 $-\frac{36}{77}$

49 $\frac{36}{85}$

50 $\frac{36}{85}$

51 $\frac{240}{289}$

52 $-\frac{161}{289}$

53 $\frac{24}{7}$

54 $\frac{1}{10}\sqrt{10}$

55 $\frac{1}{3}$

56 $\frac{5}{34}\sqrt{34}$

57 (a) $\frac{1}{2} \cos 3t - \frac{1}{2} \cos 11t$

(b) $\frac{1}{2} \cos \frac{1}{12}u + \frac{1}{2} \cos \frac{5}{12}u$

(c) $3 \sin 8x - 3 \sin 2x$

(d) $2 \sin 10\theta - 2 \sin 4\theta$

58 (a) $2 \sin 5u \cos 3u$

(b) $2 \sin \frac{11}{2}\theta \sin \frac{5}{2}\theta$

(c) $2 \cos \frac{9}{40}t \sin \frac{1}{40}t$

(d) $6 \cos 4x \cos 2x$

59 $\frac{\pi}{6}$

60 $\frac{\pi}{4}$

61 $\frac{\pi}{3}$

62 π

63 $-\frac{\pi}{4}$

64 $\frac{3\pi}{4}$

65 $\frac{1}{2}$

66 2

67 No está definido.

68 $\frac{\pi}{2}$

69 $\frac{240}{289}$

70 $-\frac{7}{25}$

71



72



73



74



75 $\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos[(\alpha + \beta) + \gamma]$
 $= \cos(\alpha + \beta) \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \sin \gamma$
 $= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \cos \gamma -$
 $(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \sin \gamma$
 $= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma -$
 $\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$

76 (b) $r = 0, \pm \frac{\pi}{4b}$

(c) $\frac{2}{3}\sqrt{2}A$

77 $\pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{4}, \pm \frac{7\pi}{4}, \pm \frac{9\pi}{4}, \pm \frac{11\pi}{4}, \pm \frac{13\pi}{4}, \pm \frac{15\pi}{4}$

78 (a) $x = 2d \tan \frac{1}{2}\theta$

(b) $d \leq 1,000$ pies

79 (a) $d = r \left(\sec \frac{1}{2}\theta - 1 \right)$

(b) 43°

80 (a) 78.7°

(b) 61.4°

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 7

 1 Sugerencia: Factorizar $\sin^3 x - \cos^3 x$ como una diferencia de cubos.

2 $\sqrt{a^2 - x^2}$
 $= \begin{cases} a \cos \theta & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ o } 3\pi/2 \leq \theta < 2\pi \\ -a \cos \theta & \text{si } \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \end{cases}$

3 45; aproximadamente 6.164.

4 El cociente de la diferencia para función seno parece ser la función coseno.

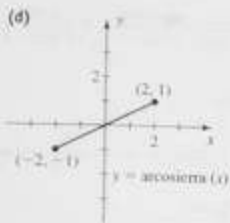
 5 Sugerencia: Escribe la ecuación en la forma $\frac{\pi}{4} + \alpha = 4\theta$, y saca la tangente de ambos lados.

 6 (a) La función diente de sierra inversa, representada por sierra^{-1} , se define como sigue: $y = \text{sierra}^{-1}x$ si $x = \text{sierra } y$ para $-2 \leq x \leq 2$ y $-1 \leq y \leq 1$.

(b) 0.85; -0.4

 (c) $\text{sierra}(\text{sierra}^{-1}x) = x$ si $-2 \leq x \leq 2$;
 $\text{sierra}^{-1}(\text{sierra } y) = y$ si $-1 \leq y \leq 1$

R62 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS



Capítulo 8

EJERCICIOS 8.1

- 1 $\beta = 62^\circ$, $b = 14.1$, $c = 15.6$
 3 $\gamma = 100^\circ 10'$, $b = 55.1$, $c = 68.7$
 5 $\beta = 78^\circ 30'$, $a = 13.6$, $c = 17.8$
 7 No existe triángulo.
 9 $\alpha = 77^\circ 30'$, $\beta = 49^\circ 10'$, $b = 108$;
 $\alpha = 102^\circ 30'$, $\beta = 24^\circ 10'$, $b = 59$
 11 $\alpha = 82.54^\circ$, $\beta = 49.72^\circ$, $b = 100.85$;
 $\alpha = 97.46^\circ$, $\beta = 34.80^\circ$, $b = 75.45$
 13 $\beta = 53^\circ 40'$, $\gamma = 61^\circ 10'$, $c = 20.6$
 15 $\alpha = 25.993^\circ$, $\gamma = 32.383^\circ$, $a = 0.146$ 17 219 yd
 19 (a) 1.6 mi (b) 0.6 mi 21 2.7 mi 23 628 m
 25 3.7 mi de A y 5.4 mi de B 27 350 pies
 29 (a) 18.7 (b) 814 31 (3949.9, 2994.2)

EJERCICIOS 8.2

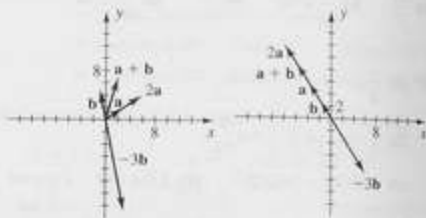
- 1 (a) B (b) F (c) D (d) E
 (e) A (f) C
 3 (a) α , ley de los senos, (b) α , ley de los cosenos.
 (c) Cualquier ángulo, ley de los cosenos.
 (d) No se proporcionó suficiente información.
 (e) γ , $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
 (f) c , ley de los senos; o γ , $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
 5 $a = 26$, $\beta = 41^\circ$, $\gamma = 79^\circ$
 7 $b = 180$, $\alpha = 25^\circ$, $\gamma = 5^\circ$
 9 $c = 2.75$, $\alpha = 21^\circ 10'$, $\beta = 43^\circ 40'$
 11 $\alpha = 29^\circ$, $\beta = 47^\circ$, $\gamma = 104^\circ$
 13 $\alpha = 12^\circ 30'$, $\beta = 136^\circ 30'$, $\gamma = 31^\circ 00'$ 15 196 pies
 17 24 mi 19 39 mi 21 2.3 mi 23 N55°31'E
 25 63.7 pies desde la primera y tercera bases; 66.8 pies desde la segunda base.
 27 37 039 pies ≈ 7 mi
 29 Sugerencia: Usa la fórmula $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$
 31 (a) 72° , 108° , 36° (b) 0.62 (c) 0.59, 0.36

Ejercicios 33 al 40: la respuesta está en unidades cuadradas.

- 33 260 35 11.21 37 13.1 39 517.0
 41 1.62 acres 43 123.4 pies²

EJERCICIOS 8.3

- 1 $(3, 1)$, $(1, -7)$, $(13, 8)$, $(3, -32)$, $\sqrt{13}$
 3 $(-15, 6)$, $(1, -2)$, $(-68, 28)$, $(12, -12)$, $\sqrt{53}$
 5 $4i - 3j$, $-2i + 7j$, $19i - 17j$, $-11i + 33j$, $\sqrt{5}$
 7 Los puntos terminales son (3, 2), (-1, 5), (2, 7), (-4, 6), (-2, 3), (6, 4), (3, -15), (-6, 9), (-8, 12), (6, -9).



- 11 $-b$ 13 f 15 $-\frac{1}{2}e$
 17 $a + (b + c) = (a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2))$
 $= (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2)$
 $= (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2)$
 $= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2)$
 $= (a + b) + c$
 19 $a + (-a) = (a_1, a_2) + (-a_1, -a_2)$
 $= (a_1, a_2) + (-a_1, -a_2)$
 $= (a_1 - a_1, a_2 - a_2)$
 $= (0, 0) = 0$
 21 $(mn)a = (mn)(a_1, a_2)$
 $= ((mn)a_1, (mn)a_2)$
 $= (mna_1, mna_2)$
 $= m(na_1, na_2)$ o $n(ma_1, ma_2)$
 $= m(n(a_1, a_2))$ o $n(m(a_1, a_2))$
 $= m(na)$ o $n(ma)$
 23 $0a = 0(a_1, a_2) = (0a_1, 0a_2) = (0, 0) = 0$.
 También, $m0 = m(0, 0) = (m0, m0) = (0, 0) = 0$.
 25 $-(a + b) = -((a_1, a_2) + (b_1, b_2))$
 $= -(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
 $= (-a_1 - b_1, -a_2 - b_2)$
 $= (-a_1 - b_1, -a_2 - b_2)$
 $= (-a_1, -a_2) + (-b_1, -b_2)$
 $= -a + (-b) = -a - b$

$$\begin{aligned} 27 \quad \|2\mathbf{v}\| &= \|2(a, b)\| = \|(2a, 2b)\| = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2} \\ &= \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\|(a, b)\| \\ &= 2\|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

$$29 \quad 3\sqrt{2}; \frac{7\pi}{4} \quad 31 \quad 5; \pi \quad 33 \quad \sqrt{41}; \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right) + \pi$$

$$35 \quad 18; \frac{3\pi}{2} \quad 37 \quad 102 \text{ lb} \quad 39 \quad 7.2 \text{ lb}$$

$$41 \quad 89 \text{ lb}; 566^\circ \quad 43 \quad 5.8 \text{ lb}; 129^\circ$$

$$45 \quad 4096; 28.68 \quad 47 \quad -6.18; 19.02$$

$$49 \quad (a) -\frac{8}{17}\mathbf{i} + \frac{15}{17}\mathbf{j} \quad (b) \frac{8}{17}\mathbf{i} - \frac{15}{17}\mathbf{j}$$

$$51 \quad (a) \left\langle \frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle \quad (b) \left\langle -\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle$$

$$53 \quad (a) (-12, 6) \quad (b) \left\langle -3, \frac{3}{2} \right\rangle$$

$$55 \quad -\frac{24}{\sqrt{65}}\mathbf{i} + \frac{42}{\sqrt{65}}\mathbf{j}$$

$$57 \quad (a) \mathbf{F} = (7, 2) \quad (b) \mathbf{G} = -\mathbf{F} = (-7, -2)$$

$$59 \quad (a) \mathbf{F} = (-5.86, 1.13)$$

$$(b) \mathbf{G} = -\mathbf{F} = (5.86, -1.13)$$

$$61 \quad \sin^{-1}(0.4) \approx 23.6^\circ \quad 63 \quad 56^\circ; 232 \text{ mph}$$

$$65 \quad 420 \text{ mph}; 244^\circ \quad 67 \quad N22^\circ W$$

$$69 \quad \mathbf{v}_1 = 4.1\mathbf{i} - 7.10\mathbf{j}; \mathbf{v}_2 = 0.98\mathbf{i} - 3.67\mathbf{j}$$

$$71 \quad (a) (24.51, 20.57) \quad (b) (-24.57, 18.10)$$

$$73 \quad 28.2 \text{ lb/persona}$$

EJERCICIOS 8.4

$$1 \quad (a) 24 \quad (b) \cos^{-1}\left(\frac{24}{\sqrt{29}\sqrt{45}}\right) = 48^\circ 22'$$

$$3 \quad (a) -14 \quad (b) \cos^{-1}\left(\frac{-14}{\sqrt{17}\sqrt{13}}\right) = 160^\circ 21'$$

$$5 \quad (a) 45 \quad (b) \cos^{-1}\left(\frac{45}{\sqrt{81}\sqrt{41}}\right) = 38^\circ 40'$$

$$7 \quad (a) -\frac{149}{5} \quad (b) \cos^{-1}\left(\frac{-149/5}{\sqrt{149}\sqrt{149/25}}\right) = 180^\circ$$

$$9 \quad (4, -1) \cdot (2, 8) = 0 \quad 11 \quad (-4\mathbf{j}) \cdot (-7\mathbf{i}) = 0$$

$$13 \quad \text{Opuesto} \quad 15 \quad \text{Mismo} \quad 17 \quad \frac{6}{5} \quad 19 \quad \pm \frac{3}{8}$$

$$21 \quad (a) -23 \quad (b) -23 \quad 23 \quad -51$$

$$25 \quad 17/\sqrt{26} \approx 3.33 \quad 27 \quad 2.2 \quad 29 \quad 7$$

$$31 \quad 28 \quad 33 \quad 12$$

$$35 \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2 \\ = (\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2 = \|\mathbf{a}\|^2$$

$$\begin{aligned} 37 \quad (m\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= (m(a_1, a_2)) \cdot (b_1, b_2) \\ &= (ma_1, ma_2) \cdot (b_1, b_2) \\ &= ma_1b_1 + ma_2b_2 \\ &= m(a_1b_1 + a_2b_2) = m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \end{aligned}$$

$$39 \quad \mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = (0, 0) \cdot (a_1, a_2) = 0(a_1) + 0(a_2) \\ = 0 + 0 = 0$$

$$41 \quad 1000\sqrt{3} \approx 1732 \text{ pies}\cdot\text{lb}$$

$$43 \quad (a) \mathbf{v} = (93 \times 10^3)\mathbf{i} + (0.432 \times 10^3)\mathbf{j}; \\ \mathbf{w} = (93 \times 10^3)\mathbf{i} - (0.432 \times 10^3)\mathbf{j}$$

$$(b) 0.53^\circ$$

$$45 \quad \left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle \quad 47 \quad 2.6 \quad 49 \quad 24.33$$

$$51 \quad 16\sqrt{3} \approx 27.7 \text{ caballos de fuerza}$$

EJERCICIOS 8.5

$$1 \quad 5 \quad 3 \quad \sqrt{85} \quad 5 \quad 8 \quad 7 \quad 1 \quad 9 \quad 0$$

Nota: El punto P es el correspondiente a la representación geométrica.

$$11 \quad P(4, 2) \quad 13 \quad P(3, -5) \quad 15 \quad P(-3, 6)$$

$$17 \quad P(-6, 4) \quad 19 \quad P(0, 2)$$



$$21 \quad \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4} \quad 23 \quad 8 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} \quad 25 \quad 4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$$

$$27 \quad 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4} \quad 29 \quad 20 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} \quad 31 \quad 12 \operatorname{cis} 0$$

$$33 \quad 7 \operatorname{cis} \pi \quad 35 \quad 6 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \quad 37 \quad 10 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$$

$$39 \quad \sqrt{5} \operatorname{cis} \left(\tan^{-1} \frac{1}{2} \right)$$

$$41 \quad \sqrt{10} \operatorname{cis} \left[\tan^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) + \pi \right]$$

$$43 \quad \sqrt{34} \operatorname{cis} \left(\tan^{-1} \frac{3}{5} + \pi \right)$$

$$45 \quad 5 \operatorname{cis} \left[\tan^{-1} \left(-\frac{3}{4} \right) + 2\pi \right]$$

$$47 \quad 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \quad 49 \quad -3 + 3\sqrt{3}i \quad 51 \quad -5$$

$$53 \quad 5 + 3i \quad 55 \quad 2 - i \quad 57 \quad -2, i$$

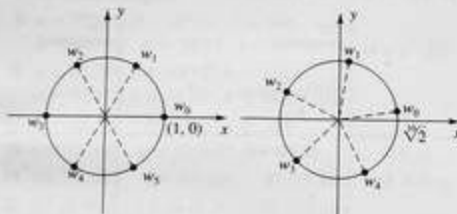
$$59 \quad 10\sqrt{3} - 10i, -\frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{2}{5}i \quad 61 \quad 40, \frac{5}{2}$$

$$63 \quad 8 - 4i, \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i \quad 67 \quad 17.21 + 24.57i$$

69 $11.01 + 9.24i$ 71 $\sqrt{365}$ ohms 73 70.43 volts

EJERCICIOS 8.6

1 $-972 - 972i$ 3 $-32i$ 5 -8
 7 $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ 9 $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$
 11 $-64\sqrt{3} - 64i$ 13 $\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$
 15 $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{18}}{2}i\right), \pm\left(\frac{\sqrt{18}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$
 17 $3i, \pm\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$
 19 $\pm 1, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ 21 $\sqrt[3]{2} \text{ cis } \theta \text{ con } \theta = 9^\circ, 81^\circ, 153^\circ, 225^\circ, 297^\circ$



23 $\pm 2, \pm 2i$ 25 $\pm 2i, \sqrt{3} \pm i, -\sqrt{3} \pm i$
 27 $2i, \pm\sqrt{3} - i$
 29 $3 \text{ cis } \theta \text{ con } \theta = 0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$
 31 $[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = [r(e^{i\theta})]^n$
 $= r^n(e^{in\theta})$
 $= r^n \text{ cis } (n\theta)$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 8

1 $a = \sqrt{43}, \beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{43}\sqrt{43}\right), \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{5}{86}\sqrt{43}\right)$
 2 $\alpha = 60^\circ, \beta = 90^\circ, b = 4; \alpha = 120^\circ, \beta = 30^\circ, b = 2$
 3 $\gamma = 75^\circ, a = 50\sqrt{6}, c = 50(1 + \sqrt{3})$
 4 $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right), \beta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{16}\right), \gamma = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$
 5 $\alpha = 38^\circ, a = 8.0, c = 13$
 6 $\gamma = 19^\circ 10', \beta = 137^\circ 20', b = 258$
 7 $a = 24^\circ, \gamma = 41^\circ, b = 10.1$
 8 $\alpha = 42^\circ, \beta = 87^\circ, \gamma = 51^\circ$ 9 290 10 10.9

- 11 Los puntos terminales son $(-2, -3), (-6, 13), (-8, 10), (-1, 4)$.



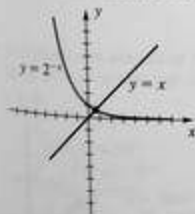
- 12 (a) $12i + 19j$ (b) $-8i + 13j$ (c) $\sqrt{40} \approx 6.32$
 (d) $\sqrt{29} - \sqrt{17} \approx 1.26$
 13 $(14 \cos 40^\circ, -14 \sin 40^\circ)$ 14 109 lb; $S78^\circ E$
 15 $-16i + 12j$
 16 $\left\langle -\frac{12}{\sqrt{58}}, \frac{28}{\sqrt{58}} \right\rangle$
 17 Círculo con centro (a_1, a_2) y radio c .
 18 Los vectores a, b , y $a - b$ forman un triángulo donde el vector $a - b$ es opuesto al ángulo θ . La conclusión es una aplicación directa de la ley de los cosenos, con los lados $\|a\|, \|b\|$ y $\|a - b\|$.
 19 $183^\circ; 70 \text{ mph}$
 20 (a) 10 (b) $\cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{13}\sqrt{17}}\right) = 47^\circ 44'$ (c) $\frac{10}{\sqrt{13}}$
 21 (a) 80 (b) $\cos^{-1}\left(\frac{40}{\sqrt{40}\sqrt{50}}\right) = 26^\circ 34'$ (c) $\sqrt{40}$
 22 56
 23 $10\sqrt{2} \text{ cis } \frac{3\pi}{4}$ 24 $4 \text{ cis } \frac{5\pi}{3}$ 25 $17 \text{ cis } \pi$
 26 $12 \text{ cis } \frac{3\pi}{2}$ 27 $10 \text{ cis } \frac{7\pi}{6}$
 28 $\sqrt{41} \text{ cis } \left(\tan^{-1} \frac{5}{4}\right)$ 29 $10\sqrt{3} - 10i$
 30 $12 + 5i$ 31 $-12 - 12\sqrt{3}i, -\frac{3}{2}$
 32 $-4\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}$ 33 $-512i$ 34 i
 35 $-972 + 972i$ 36 $-2^{18} - 2^{19}\sqrt{3}i$
 37 $-3, \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}i$
 38 (a) 2^{24} (b) $\sqrt{2} \text{ cis } \theta \text{ con } \theta = 100^\circ, 220^\circ, 340^\circ$
 39 $2 \text{ cis } \theta \text{ con } \theta = 0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$
 40 47.6° 41 53 000 000 mi
 42 (a) 449 pies (b) 434 pies
 43 (a) 33 mi, 41 mi (b) 30 mi 44 204
 45 1 hora y 16 minutos 46 (c) 158°
 47 (a) 47° (b) 20
 48 (a) 72° (b) 181.6 pies² (c) 37.6 pies

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 8

- 4 (b) *Sugerencia:* la ley de los cosenos.
 5 (a) $\|b\| \cos \alpha + \|a\| \cos \beta$ +
 $\|b\| \sin \alpha - \|a\| \sin \beta$
 6 (a) 1 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $e^{-\pi/2} \approx 0.2079$
 7 La afirmación es verdadera.

Capítulo 9
EJERCICIOS 9.1

- 1 (3, 5), (-1, -3) 3 (1, 0), (-3, 2)
 5 (0, 0), $(\frac{1}{8}, \frac{1}{128})$ 7 (3, -2) 9 No hay solución.
 11 (-4, 3), (5, 0) 13 (-2, 2)
 15 $(-\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{86}, \frac{1}{5} + \frac{3}{10}\sqrt{86})$,
 $(-\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{86}, \frac{1}{5} - \frac{3}{10}\sqrt{86})$
 17 (-4, 0), $(\frac{12}{5}, \frac{16}{5})$ 19 (0, 1), (4, -3)
 21 $(\pm 2, 5)$, $(\pm\sqrt{5}, 4)$
 23 $(\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{3})$
 25 $(2\sqrt{2}, \pm 2)$, $(-2\sqrt{2}, \pm 2)$ 27 (3, -1, 2)
 29 (1, -1, 2), (-1, 3, -2)
 31 (a) $b = 4$; tangente
 (b) $b < 4$; interseca en dos puntos
 (c) $b > 4$; no hay intersección
 33 Sí, ocurre una solución entre 0 y 1.



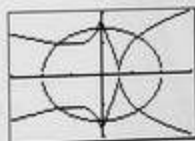
- 35 $\frac{1}{4}$ tangente 37 $f(x) = 2(3)^x + 1$
 39 12 pulg \times 8 pulg
 41 (a) $a = 120\,000$, $b = 40\,000$ (b) 77 143
 43 (0, 0), (0, 100), (50, 0); la cuarta solución (-100, 150) no tiene sentido.

- 45 Sí; 1 pie \times 1 pie \times 2 pies o bien
 $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ pies \times $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ pies \times $\frac{8}{(\sqrt{13}-1)^2}$ pies
 ≈ 1.30 pies \times 1.30 pies \times 1.18 pies
 47 Los puntos están sobre la parábola (a) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y$
 (b) $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.
 49 (a) (31.25, -50)
 (b) $(-\frac{3}{2}\sqrt{11}, -\frac{1}{2}) \approx (-4.975, -0.5)$
 51 $(\pm 0.82, \pm 1.82)$; $(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{7}}{2})$
 53 $(\pm 0.56, \pm 1.92)$, $(\pm 0.63, \pm 1.90)$, $(\pm 1.14, \pm 1.65)$



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

- 55 $(-1.44, \pm 1.04)$, $(-0.12, \pm 1.50)$, $(0.10, \pm 1.50)$,
 $(1.22, \pm 1.19)$



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

- 57 $a = 1.2012$, $b = 0.4004$ 59 $a = 2.8019$, $b = 0.9002$

EJERCICIOS 9.2

- 1 (4, -2) 3 (8, 0) 5 $(-1, \frac{3}{2})$ 7 $(\frac{76}{53}, \frac{28}{53})$
 9 $(\frac{51}{13}, \frac{96}{13})$ 11 $(\frac{8}{7}, -\frac{3}{7}\sqrt{6})$ 13 No hay solución.
 15 Todos los pares ordenados (m, n) tales que $3m - 4n = 2$.
 17 (0, 0) 19 $(-\frac{22}{7}, -\frac{11}{5})$

- 21 313 estudiantes, 137 no estudiantes.
 23 $x = (\frac{30}{\pi}) - 4 \approx 5.55$ cm, $y = 12 - (\frac{30}{\pi}) \approx 2.45$ cm

R66 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

25 $l = 10$ pies, $w = \frac{20}{\pi}$ pies 27 2400 adultos, 3600 cachorros

29 40 g de aleación al 35%, 60 g de aleación al 60%.

31 540 mph, 60 mph 33 $v_0 = 10$, $a = 3$

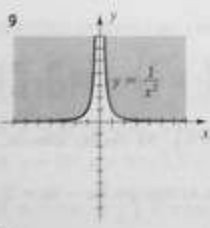
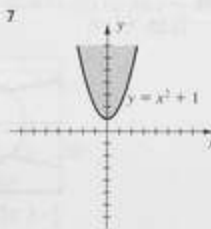
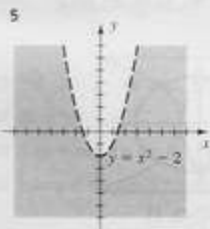
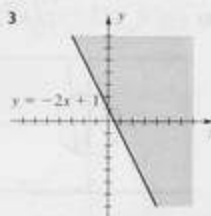
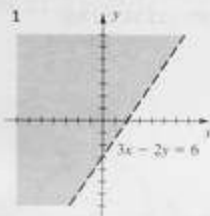
35 20 sofás, 30 sillones.

37 (a) $\left(\frac{4}{5}e\right)$ para una $e > 0$ arbitraria (b) \$16 por hora.

39 1928; 15.5°C 41 LP: 4 h, SLP: 2 h

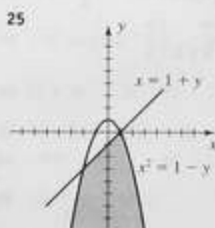
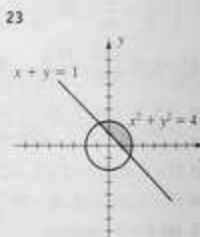
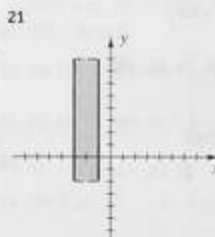
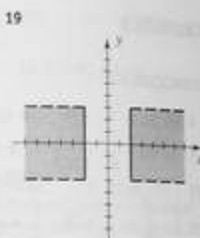
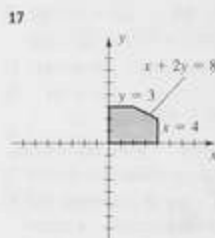
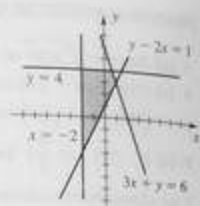
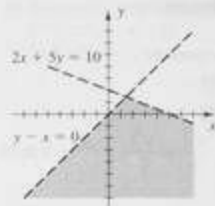
43 $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{6}e^{6x}$ 45 $a = \cos x - \sec x$, $b = \sin x$

EJERCICIOS 9.3



13

15



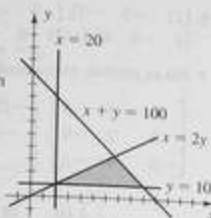
27 $0 \leq x < 3$, $y < -x + 4$, $y \geq x - 4$

29 $x^2 + y^2 \leq 9$, $y > -2x + 4$

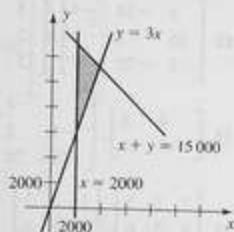
31 $y < x$, $y \leq -x + 4$, $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 8$

33 $y > \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$, $y \leq x + 4$, $y \leq -\frac{3}{4}x + 4$

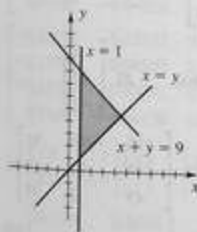
- 35 Si x y y denotan los números de conjuntos de la marca A y de la marca B, respectivamente, entonces un sistema es $x \geq 20$, $y \geq 10$, $x \geq 2y$, $x + y \leq 100$.



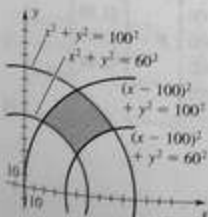
- 37 Si x y y denotan la cantidad puesta en inversión de alto riesgo y bajo riesgo, respectivamente, entonces un sistema es $x \geq 2000$, $y \geq 3x$, $x + y \leq 15000$.



- 39 $x + y \leq 9$, $y \geq x$, $x \geq 1$



- 41 Si la planta está ubicada en (x, y) , entonces un sistema es $60^2 \leq x^2 + y^2 \leq 100^2$, $60^2 \leq (x - 100)^2 + y^2 \leq 100^2$, $y \geq 0$.



43



$[-3.5, 4]$ por $[-1, 4]$

45



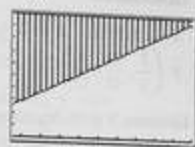
$[-1.5, 1.5]$ por $[-1, 1]$

47 No hay solución.



$[-4.5, 4.5]$ por $[-3, 3]$

49 (a) Si
(b)

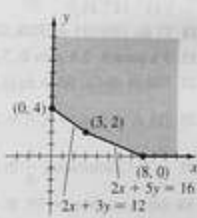
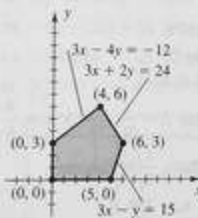


$[33, 80, 5]$ por $[0, 50, 5]$

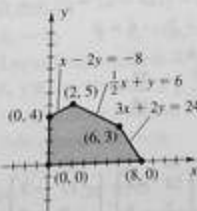
(c) Región arriba de la recta.

EJERCICIOS 9.4

- 1 Máximo de 27 en $(6, 2)$; mínimo de 9 en $(0, 2)$.
3 Máximo de 21 en $(6, 3)$ 5 Mínimo de 21 en $(3, 2)$



- 7 C tiene el valor máximo de 24 para cualquier punto del segmento de recta de $(2, 5)$ a $(6, 3)$.



- 9 50 estándar y 30 de tamaño extra.

R68 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

11 3.5 lb de S y 1 lb de T.

13 Enviar 25 desde W, a A y 0 desde W, a B.

Enviar 10 desde W, a A y 60 desde W, a B.

15 Ninguno de alfalfa y 80 acres de maíz.

17 Costo mínimo: 16 oz de X, 4 oz de Y, 0 oz de Z;
costo máximo: 0 oz de X, 8 oz de Y, 12 oz de Z.

19 Dos camionetas de reparto y cuatro autobuses.

21 3000 truchas y 2000 lobinas.

23 60 unidades básicas y 20 de lujo.

EJERCICIOS 9.5

1 (2, 3, -1) 3 (-2, 4, 5) 5 No hay solución.

7 $\begin{pmatrix} 2 & 31 & 1 \\ 3 & 21 & 21 \end{pmatrix}$

Ejercicios 9 al 16: hay otras formas para las respuestas; c es cualquier número real.

9 (2c, -c, c) 11 (0, -c, c)

13 $\begin{pmatrix} 12 & -9 & c \\ 7 & 7 & c \\ 7 & 7 & c \end{pmatrix}$

15 $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 19 \\ 10 & 2 & 10 \\ 10 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

17 $\begin{pmatrix} 1 & 31 & 3 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix}$ 19 (-2, -3) 21 No hay solución.

23 17 de 10%, 11 de 30%, 22 de 50%.

25 4 h para A, 2 h para B, 5 h para C.

27 380 lb de G₁, 60 lb de G₂, 160 lb de G₃.

29 (a) $I_1 = 0, I_2 = 2, I_3 = 2$ (b) $I_1 = \frac{3}{4}, I_2 = 3, I_3 = \frac{9}{4}$

31 $\frac{3}{8}$ lb Colombiano, $\frac{1}{8}$ lb Brasileño, $\frac{1}{2}$ lb Keniano

33 (a) A: $x_1 + x_4 = 75$, B: $x_1 + x_2 = 150$.

C: $x_2 + x_5 = 225$, D: $x_3 + x_4 = 150$

(b) $x_1 = 25, x_2 = 125, x_4 = 50$

(c) $x_3 = 150 - x_4 \leq 150$;

$x_5 = 225 - x_2 = 225 - (150 - x_1) = 75 + x_1 \geq 75$

35 2134 37 $x^2 + y^2 - x + 3y - 6 = 0$

39 $f(x) = x^2 - 2x^2 - 4x - 6$

41 $a = -\frac{4}{9}, b = \frac{11}{9}, c = \frac{17}{18}, d = \frac{23}{18}$

EJERCICIOS 9.6

1 $\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 & -3 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -5 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 3 & -15 \\ -18 & 0 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 11 & -3 & -3 \\ 8 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -3 & 7 \\ -21 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

7 No es posible, no es posible.

$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -8 \\ -6 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ -6 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

9 -18 11 $\begin{bmatrix} 16 & 38 \\ 11 & -34 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 38 \\ 23 & -22 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 3 & -14 & -3 \\ 16 & 2 & -2 \\ -7 & -29 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -20 & -11 \\ 2 & 10 & -4 \\ 15 & -13 & 1 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -18 & 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -5 & 2 & 2 \\ -51 & 26 & 10 \end{bmatrix}$

17 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

19 $\begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ -12 & 28 & 8 \\ 15 & -35 & -10 \end{bmatrix}$

21 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, no es posible. 23 $\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}$

25 $\begin{bmatrix} 18 & 0 & -2 \\ -40 & 10 & -10 \end{bmatrix}$ 35 $\begin{bmatrix} 135 & -109 & 91 \\ -39 & 92 & -33 \\ 45 & 3 & 95 \end{bmatrix}$

37 $\begin{bmatrix} 76 & -38 & 102 \\ -5 & 61 & -13 \\ 41 & 0 & 19 \end{bmatrix}$

39 (a) $A = \begin{bmatrix} 400 & 550 & 500 \\ 400 & 450 & 500 \\ 300 & 500 & 600 \\ 250 & 200 & 300 \\ 100 & 100 & 200 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \$1.39 \\ \$2.99 \\ \$4.99 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \$4695.50 \\ \$4396.50 \\ \$4906.00 \\ \$2442.50 \\ \$1436.00 \end{bmatrix}$

(c) Los \$1436.00 representan la cantidad que la tienda debería recibir si se vendieran todas las toallas amarillas.

EJERCICIOS 9.7

 1 Demuestre que $AB = I_2$ y $BA = I_2$.

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad 5 \text{ No existe}$$

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad 9 \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad 13 \text{ ab} \neq 0; \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

$$17 \text{ (a) } \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$19 \text{ (a) } \begin{pmatrix} -25 & -34 & 7 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } \begin{pmatrix} 16 & 16 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$21 \begin{bmatrix} 0.11111 & 0.25926 & -0.62963 \\ -0.03704 & 0.02469 & 0.32099 \\ 0.07407 & -0.04938 & 0.35802 \end{bmatrix}$$

$$23 \begin{bmatrix} -0.22278 & 0.12932 & 0.06496 & 0.37796 \\ -1.17767 & 0.09503 & 0.55936 & 0.29171 \\ -0.37159 & 0.00241 & 0.14074 & 0.37447 \\ 0.15987 & -0.04150 & 0.07218 & -0.20967 \end{bmatrix}$$

$$25 \text{ (a) } \begin{bmatrix} 4.0 & 7.1 \\ 2.2 & -4.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.2 \\ 2.9 \end{bmatrix}$$

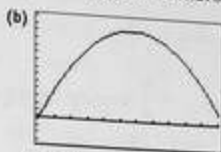
$$\text{(b) } \begin{bmatrix} 0.1391 & 0.2016 \\ 0.0625 & -0.1136 \end{bmatrix} \quad \text{(c) } x \approx 1.4472, y \approx 0.0579$$

$$27 \text{ (a) } \begin{bmatrix} 3.1 & 6.7 & -8.7 \\ 4.1 & -5.1 & 0.2 \\ 0.6 & 1.1 & -7.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.1 \\ 3.9 \end{bmatrix}$$

$$\text{(b) } \begin{bmatrix} 0.1474 & 0.1572 & -0.1691 \\ 0.1197 & -0.0696 & -0.1426 \\ 0.0297 & 0.0024 & -0.1700 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c) } x \approx -0.1081, y \approx -0.5227, z \approx -0.6135$$

$$29 \text{ (a) } a \approx -1.9630, b \approx 26.2963, c \approx -25.7407$$


 $[1, 12]$ por $[-15, 70, 5]$

 (c) Junio: 61°F ; octubre: 41°F .

EJERCICIOS 9.8

$$1 \begin{matrix} M_{11} = 0 = A_{11}; & M_{12} = 5; & A_{12} = -5; \\ M_{21} = -1; & A_{21} = 1; & M_{22} = 7 = A_{22} \end{matrix}$$

$$3 \begin{matrix} M_{11} = -14 = A_{11}; & M_{12} = 10; & A_{12} = -10; \\ M_{13} = 15 = A_{13}; & M_{21} = 7; & A_{21} = -7; \\ M_{22} = -5 = A_{22}; & M_{23} = 34; & A_{23} = -34; \\ M_{31} = 11 = A_{31}; & M_{32} = 4; & A_{32} = -4; \\ M_{33} = 6 = A_{33} \end{matrix}$$

$$5 \quad 5 \quad 7 \quad -83 \quad 9 \quad 2 \quad 11 \quad 0 \quad 13 \quad -125 \quad 15 \quad 48$$

$$17 \quad -216 \quad 19 \text{ abcd} \quad 31 \text{ (a) } x^2 - 3x - 4 \quad \text{(b) } -1, 4$$

$$33 \text{ (a) } x^2 + x - 2 \quad \text{(b) } -2, 1$$

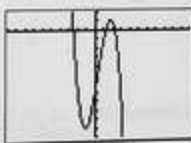
$$35 \text{ (a) } -x^3 - 2x^2 + x + 2 \quad \text{(b) } -2, -1, 1$$

$$37 \text{ (a) } -x^3 + 4x^2 + 4x - 16 \quad \text{(b) } -2, 2, 4$$

$$39 \quad -31i - 20j + 7k \quad 41 \quad -6i - 8j + 18k$$

$$43 \quad -359.284 \quad 45 \quad 10.739.92$$

$$47 \text{ (a) } -x^3 + x^2 + 6x - 7 \quad \text{(b) } -2.51, 1.22, 2.29$$


 $[-10, 11]$ por $[-12, 2]$

EJERCICIOS 9.9

$$1 \quad R_2 \leftrightarrow R_3 \quad 3 \quad -R_1 + R_2 \rightarrow R_1$$

$$5 \quad 2 \text{ es un factor común de } R_1 \text{ y } R_2$$

$$7 \quad R_1 \text{ y } R_3 \text{ son idénticas.}$$

$$9 \quad -1 \text{ es un factor común de } R_2$$

$$11 \quad \text{Todo número de } C_2 \text{ es } 0. \quad 13 \quad 2C_1 + C_2 \rightarrow C_3$$

$$15 \quad -10 \quad 17 \quad -142 \quad 19 \quad -183 \quad 21 \quad 44 \quad 23 \quad 359$$

$$33 \quad (4, -2) \quad 35 \quad (8, 0)$$

$$37 \quad |D| = 0, \text{ así que no se puede usar la regla de Cramer.}$$

$$39 \quad (2, 3, -1) \quad 41 \quad (-2, 4, 5)$$

$$43 \quad x = \frac{cgt - dft + bfi}{cel - afi + bfh}$$

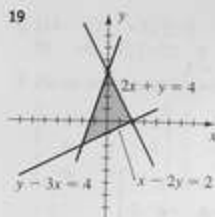
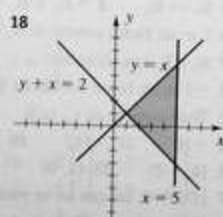
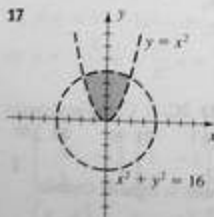
R70 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

EJERCICIOS 9.10

- 1 $\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+3}$ 3 $\frac{5}{x-6} - \frac{4}{x+2}$
 5 $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x-3}$ 7 $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-5} - \frac{1}{x+1}$
 9 $\frac{2}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$ 11 $-\frac{7}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{40}{3x-5}$
 13 $\frac{24/25}{x+2} + \frac{2/5}{(x+2)^2} - \frac{23/25}{2x-1}$
 15 $\frac{5}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$ 17 $-\frac{2}{x-1} + \frac{3x+4}{x^2+1}$
 19 $\frac{4}{x} + \frac{5x-3}{x^2+2}$ 21 $\frac{4x-1}{x^2+1} + \frac{3}{(x^2+1)^2}$
 23 $2x + \frac{1}{x-1} + \frac{3x}{x^2+1}$ 25 $3 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x-4}$
 27 $2x + 3 + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2x+1}$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 9

- 1 $\left(\frac{19}{23}, -\frac{18}{23}\right)$ 2 No hay solución. 3 $(-3, 5), (1, -3)$
 4 $(4, -3), (3, -4)$ 5 $(2\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}), (-2\sqrt{3}, \pm\sqrt{2})$
 6 $(-1, \pm 1, -1), \left(0, \pm \frac{1}{2}, \sqrt{6}, -\frac{1}{2}\right)$ 7 $\left(\frac{14}{17}, \frac{14}{27}\right)$
 8 $\left(\log_2 \frac{25}{7}, \log_2 \frac{15}{7}\right)$ 9 $\left(\frac{6}{11}, -\frac{7}{11}, 1\right)$
 10 $\left(\frac{6}{29}, \frac{2}{29}, -\frac{17}{29}\right)$
 11 $(-2c, -3c, c)$ para cualquier número real c . 12 $(0, 0, 0)$
 13 $\left(5c - 1, -\frac{19}{2}c + \frac{5}{2}, c\right)$ para cualquier número real c .
 14 $(5, -4)$ 15 $\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ 16 $(3, -1, -2, 4)$



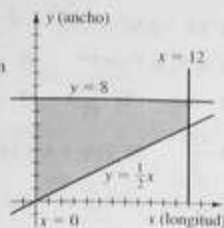
- 21 $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 4 & -11 & 5 \end{bmatrix}$ 22 $\begin{bmatrix} 26 \\ -6 \end{bmatrix}$ 23 $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 16 & 22 & 1 \\ 12 & 11 & 9 \end{bmatrix}$
 24 $\begin{bmatrix} 0 & -37 \\ 15 & -6 \end{bmatrix}$ 25 $\begin{bmatrix} -12 & 4 & -11 \\ 6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$
 26 $\begin{bmatrix} a & 3a \\ 2a & 4a \end{bmatrix}$ 27 $\begin{bmatrix} a & 3a \\ 2b & 4b \end{bmatrix}$ 28 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 29 $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 19 \end{bmatrix}$ 30 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 31 $-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$
 32 $\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -14 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ 33 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$
 34 $\frac{1}{37} \begin{bmatrix} -4 & -20 & 15 \\ 3 & 15 & -2 \\ 9 & 8 & -6 \end{bmatrix}$ 35 $(2, -5)$ 36 $(-1, 3, 2)$
 37 -6 38 9 39 48 40 -86 41 -84
 42 0 43 120 44 -76 45 0 46 -50
 47 $-1 \pm 2\sqrt{3}$ 48 $4, \pm\sqrt{7}$
 49 2 es un factor común de R_1 , 2 es un factor común de C_2 , y 3 es un factor común de C_3 .
 50 Intercambia R_1 con R_2 y luego R_2 con R_3 para obtener el determinante de la derecha. El efecto es multiplicar dos veces por -1 .
 51 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ 53 $\left(\frac{76}{53}, \frac{28}{53}\right)$ 54 $\left(\frac{2}{3}, \frac{31}{21}, \frac{1}{21}\right)$
 55 $\frac{8}{x-1} - \frac{3}{x+5} - \frac{1}{x+3}$ 56 $2 + \frac{3}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}$
 57 $-\frac{2}{x+5} + \frac{3x-1}{x^2+4}$ 58 $\frac{4}{x^2+2} + \frac{x-2}{x^2+5}$
 59 $40\sqrt{5}$ pies $\times 20\sqrt{5}$ pies 60 $y = \pm 2\sqrt{2}x + 3$
 61 Impuesto = \$18 750; bono = \$3125.
 62 Radio interior = 90 pies; radio exterior = 100 pies.

43 En pies/h: A, 30; B, 20; C, 50

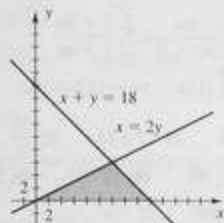
44 Del poniente, 95; del oriente, 55.

45 Si x y y denotan la longitud y el ancho, respectivamente, entonces un sistema es $x \leq 12$, $y \leq 8$,

$$y \geq \frac{1}{2}x.$$



46 $x + y \leq 18$, $x \geq 2y$,
 $x \geq 0$, $y \geq 0$



47 80 podadoras y 30 cortadoras.

48 Alto riesgo, \$50 000; bajo riesgo, \$100 000; bonos \$0.

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 9

1 (a) $b = 1.99$, $x = 204$, $y = -100$;
 $b = 1.999$, $x = 2004$, $y = -1000$

$$(b) x = \frac{4b-10}{b-2}, y = \frac{1}{b-2}$$

(c) Se acerca a $(4, 0)$.

2 (a) $D = [12\ 000 \ 9000 \ 14\ 000]$;

$$E = \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 & 0.00 \\ 0.00 & 0.80 & 0.20 \\ 0.05 & 0.00 & 0.95 \end{bmatrix}$$

(b) Los elementos de $F = [11\ 500 \ 8400 \ 15\ 100]$ representan las poblaciones de las islas A, B y C, respectivamente, después de un año.

(c) La población se estabiliza con 10 000 aves en A, 5 000 en B y 20 000 en C.

(d) A pesar de la distribución de la población inicial de las 35 000 aves, la población tiende hacia la distribución descrita en el inciso (c).

3 Sugerencia: Asigna un tamaño a A y analiza la definición de una inversa.

4 AD: 35%; DS: $33\frac{1}{3}\%$; SP: $31\frac{2}{3}\%$

5 $a = -15$, $b = 10$, $c = 24$; la raíz cuarta es -4 .

6 $y = 0.0583x^3 - 0.116x^2 - 1.1x + 4.2$

8 (a) No es posible.

$$(b) x^2 + y^2 - 1.8x - 4.2y + 0.8 = 0$$

$$(c) f(x) = -\frac{5}{12}x^2 + \frac{7}{12}x + 4$$

$$(d) f(x) = ax^3 + \left(-2a - \frac{5}{12}\right)x^2 + \left(-3a + \frac{7}{12}\right)x + 4,$$

donde a es cualquier número real diferente de cero.

(e) No es posible.

Capítulo 10

EJERCICIOS 10.1

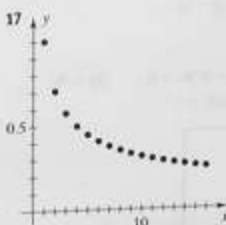
1 9, 6, 3, 0; -12 3 $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{22}{65}$

5 9, 9, 9, 9; 9

7 1.9, 2.01, 1.999, 2.0001; 2.0000001

9 4, $\frac{9}{4}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{11}{8}$; $\frac{15}{16}$ 11 2, 0, 2, 0; 0

13 $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{128}{33}$ 15 1, 2, 3, 4; 8



21 2, 1, -2 , -11 , -38 23 -3 , 3^2 , 3^3 , 3^{10}

25 5, 5, 10, 30, 120 27 2, 2, 4, 4², 4¹²

29 $\frac{7}{2}$, $\frac{15}{2}$, 12, 17

$$31 -1, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

33 -5 35 10 37 25 39 $\frac{17}{15}$ 41 61

43 10 000 45 $\frac{319}{3}$ 47 $\frac{7}{2}k^2$

R72 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

49 $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$

$$\begin{aligned} &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (-b_1 - b_2 - \cdots - b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k \end{aligned}$$

51 Cuando k aumenta, los términos tienden a 1.

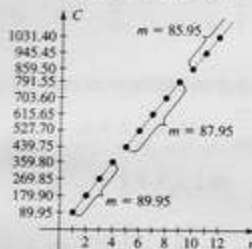
53 0.4, 0.7, 1, 1.6, 2.8

55 (a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

(b) 1, 2, 1.5, 1.6, 1.625, 1.6153846, 1.6190476, 1.6176471, 1.6181818

57 (a) $a_n = 0.8a_{n-1}$ (b) El cuarto día.

59 $C(n) = \begin{cases} 89.95n & \text{si } 1 \leq n \leq 4 \\ 87.95n & \text{si } 5 \leq n \leq 9 \\ 85.95n & \text{si } n \geq 10 \end{cases}$



61 2.236068 63 2.4493

65 (a) $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 0.30 > 0$ (b) 1.76

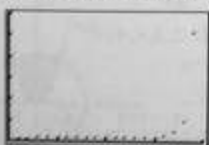
67 a_n tiende a e . 69 a_n tiende a 1.

71 10



$[0, 20, 5]$ por $[0, 125, 25]$

73 19



$[0, 20, 5]$ por $[0, 300, 50]$

75 (a) Disminuye de 250 insectos a 0.

(b) Se estabiliza en 333 insectos.

(c) Se estabiliza en 636 insectos.

EJERCICIOS 10.2

1 Demuestra que $a_{n+1} - a_n = 4$. 3 $4n - 2$; 18; 38

5 $3.3 - 0.3n$; 1.8; 0.3 7 $3.1n - 10.1$; 5.4; 20.9

9 $\ln 3^n$; $\ln 3^5$; $\ln 3^{10}$ 11 -8 13 -8.5

15 -9.8 17 $\frac{551}{17}$ 19 -105 21 30 23 530

25 $\frac{423}{2}$ 27 $934j + 838$ 265

29 $\sum_{n=1}^5 (7n - 3)$ o $\sum_{n=0}^4 (4 + 7n)$

31 $\sum_{n=1}^{67} (7n - 3)$ o $\sum_{n=0}^{66} (4 + 7n)$

33 $\sum_{n=1}^6 \frac{3n}{4n+3}$ o $\sum_{n=0}^5 \frac{3+3n}{7+4n}$

35 $\sum_{n=1}^{1328} (11n - 3) = 12\,845\,132$

37 24 39 12 o 18 41 $\frac{10}{3}, \frac{14}{3}, 6, \frac{22}{3}, \frac{26}{3}$

43 (a) 60 (b) 12 780 45 255 47 154π pies

49 51200 51 $16n^2$

53 Demostrar que el $(n+1)$ -término es 1 mayor que el n -ésimo término.

55 (a) $\frac{8}{36}, \frac{7}{36}, \frac{6}{36}, \dots, \frac{1}{36}$ (b) $d = -\frac{1}{36}$; 1 (c) \$722.22

EJERCICIOS 10.3

1 Demostrar que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{1}{4} \cdot 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{4-n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16}$

5 $300(-0.1)^{n-1}$; 0.03; -0.00003 7 5^n ; 3125; 390 625

9 $4(-1.5)^{n-1}$; 20.25; -68.34375

11 $(-1)^{n-1}x^{2n-2}$; x^2 ; $-x^{14}$ 13 $2^{n-1}(n+1)$; 2^{n+1} ; 2^{7n+1}

15 $\pm\sqrt{3}$ 17 $\frac{243}{8}$ 19 $\sqrt[3]{3}$; 36 21 88 572

23 $\frac{341}{1024}$ 25 $8188 + 55j$ 27 $\sum_{n=1}^7 2^n$

29 $\sum_{n=1}^4 (-1)^{n+1} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 31 $\frac{2}{3}$ 33 $\frac{50}{33}$

35 Puesto que $|r| = \sqrt{2} > 1$, la suma no existe.

37 1024 39 $\frac{23}{99}$ 41 $\frac{2393}{990}$ 43 $\frac{5141}{999}$ 45 $\frac{16\,123}{9999}$

47 24 49 4, 20, 100, 500 51 $\frac{25}{256} \approx 0.1\%$

53 (a) $N(t) = 10\,000(1.2)^t$ (b) 61 917 55 300 pies

57 \$3 000 000 59 (b) 375 mg

$$61 \text{ (a) } a_{n+1} = \frac{1}{4} \sqrt{10} a_n$$

$$\text{(b) } a_n = \left(\frac{1}{4} \sqrt{10} \right)^{n-1} a_1, A_n = \left(\frac{5}{8} \right)^{n-1} A_1$$

$$P_n = \left(\frac{1}{4} \sqrt{10} \right)^{n-1} P_1 \quad \text{(c) } \frac{16a_1}{4 - \sqrt{10}}$$

$$63 \text{ (a) } a_k = 3^{k-1} \quad \text{(b) } 4782969$$

$$\text{(c) } b_k = \frac{3^{k-1}}{4^k} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^{k-1} \quad \text{(d) } \frac{729}{16384} \approx 4.45\%$$

$$65 \text{ \$38 929.00} \quad 67 \text{ \$7396.67}$$

$$69 \text{ (a) } \frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \frac{54}{625}, \frac{162}{3125}$$

$$\text{(b) } r = \frac{3}{5} \cdot \frac{2882}{3125} = 0.92224 \quad \text{(c) } \$16\,000$$

EJERCICIOS 10.4

Ejercicios 1 al 32: se presenta una comprobación característica para los ejercicios 1, 5, 9, ..., 29.

1 (1) P_1 es verdadero, porque $2(1) = 1(1 + 1) = 2$.

(2) Suponiendo que P_k es verdadero:

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \dots + 2k &= k(k + 1). \text{ Por consiguiente,} \\ 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) &= k(k + 1) + 2(k + 1) \\ &= (k + 1)(k + 2) \\ &= (k + 1)(k + 1 + 1). \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

5 (1) P_1 es verdadero, porque

$$5(1) - 3 = \frac{1}{2}(1)[5(1) - 1] = 2.$$

(2) Suponiendo que P_k es verdadero:

$$2 + 7 + 12 + \dots + (5k - 3) = \frac{1}{2}k(5k - 1).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 2 + 7 + 12 + \dots + (5k - 3) + 5(k + 1) - 3 &= \frac{1}{2}k(5k - 1) + 5(k + 1) - 3 \\ &= \frac{5}{2}k^2 + \frac{9}{2}k + 2 \\ &= \frac{1}{2}(5k^2 + 9k + 4) \\ &= \frac{1}{2}(k + 1)(5k + 4) \\ &= \frac{1}{2}(k + 1)[5(k + 1) - 1]. \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

9 (1) P_1 es verdadero, porque

$$(1)^2 = \frac{1(1 + 1)[2(1) + 1]}{6} = 1.$$

(2) Suponiendo que P_k es verdadero:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 &= \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 \\ &= (k + 1) \left[\frac{k(2k + 1)}{6} + \frac{6(k + 1)}{6} \right] \\ &= \frac{(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}. \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

13 (1) P_1 es verdadero, porque $3^1 = \frac{3}{2}(3^1 - 1) = 3$.

(2) Suponiendo que P_k es verdadero:

$$3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^k = \frac{3}{2}(3^k - 1). \text{ Por consiguiente,}$$

$$\begin{aligned} 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^k + 3^{k+1} &= \frac{3}{2}(3^k - 1) + 3^{k+1} \\ &= \frac{3}{2} \cdot 3^k - \frac{3}{2} + 3 \cdot 3^k \\ &= \frac{9}{2} \cdot 3^k - \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}(3 \cdot 3^k - 1) \\ &= \frac{3}{2}(3^{k+1} - 1). \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

R74 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

- 17 (1) P_1 es verdadero, porque $1 < \frac{1}{8}[2(1) + 1]^2 = \frac{9}{8}$.

(2) Suponiendo que P_k es verdadero:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k &< \frac{1}{8}(2k + 1)^2. \text{ Por tanto,} \\ 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) \\ &< \frac{1}{8}(2k + 1)^2 + (k + 1) \\ &= \frac{1}{8}k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{9}{8} \\ &= \frac{1}{8}(4k^2 + 12k + 9) \\ &= \frac{1}{8}(2k + 3)^2 \\ &= \frac{1}{8}[2(k + 1) + 1]^2. \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

- 21 (1) Para $n = 1$, $5^n - 1 = 4$ y 4 es un factor de 4.
(2) Suponiendo que 4 es un factor de $5^k - 1$. El $(k + 1)$ -ésimo término es

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 1 &= 5 \cdot 5^k - 1 \\ &= 5 \cdot 5^k - 5 + 4 \\ &= 5(5^k - 1) + 4. \end{aligned}$$

Según la hipótesis de inducción, 4 es un factor de $5^k - 1$ y 4 es un factor de 4, así que 4 es factor del $(k + 1)$ -ésimo término. Por consiguiente, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

- 25 (1) Para $n = 1$, $a - b$ es factor de $a^1 - b^1$.
(2) Suponiendo que $a - b$ es un factor de $a^k - b^k$. A continuación aplicamos la sugerencia al $(k + 1)$ -ésimo término,

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= a^k \cdot a - b^k \cdot b \\ &= a^k(a - b) + (a^k - b^k)b. \end{aligned}$$

Como $(a - b)$ es un factor de $a^k(a - b)$ y como debido a la hipótesis de inducción $a - b$ es un factor de $(a^k - b^k)b$, se deduce que $a - b$ es un factor del $(k + 1)$ -ésimo término. Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

- 29 (1) P_1 es verdadero, porque $5 + \log_2 8 \leq 8$.
(2) Suponiendo que P_k es verdadero: $5 + \log_2 k \leq k$. De aquí que,

$$\begin{aligned} 5 + \log_2(k + 1) &< 5 + \log_2(k + k) \\ &= 5 + \log_2 2k \\ &= 5 + \log_2 2 + \log_2 k \\ &= (5 + \log_2 k) + 1 \\ &\leq k + 1. \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

$$33 \frac{n^2 + 6n^2 + 20n}{3} \quad 35 \frac{4n^3 - 12n^2 + 11n}{3}$$

$$37 \text{ (a) } a + b + c = 1, 8a + 4b + 2c = 5, \\ 27a + 9b + 3c = 14; a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}$$

(b) El método que se usó en el inciso (a) demuestra que la fórmula sólo es verdadera para $n = 1, 2, 3$.

- 39 (1) Para $n = 1$,

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 1\pi) &= \sin \theta \cos \pi + \cos \theta \sin \pi \\ &= -\sin \theta = (-1)^1 \sin \theta. \end{aligned}$$

- (2) Suponiendo que P_k es verdadero:

$$\begin{aligned} \sin(\theta + k\pi) &= (-1)^k \sin \theta. \\ \text{Por consiguiente,} \\ \sin[\theta + (k + 1)\pi] \\ &= \sin[(\theta + k\pi) + \pi] \\ &= \sin(\theta + k\pi) \cos \pi + \cos(\theta + k\pi) \sin \pi \\ &= [(-1)^k \sin \theta] \cdot (-1) + \cos(\theta + k\pi) \cdot (0) \\ &= (-1)^{k+1} \sin \theta. \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

- 41 (1) Para $n = 1$,

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^1 = r^1[\cos(1\theta) + i \sin(1\theta)].$$

- (2) Suponiendo que P_k es verdadero:

$$\begin{aligned} [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^k &= r^k[\cos k\theta + i \sin k\theta]. \\ \text{Por consiguiente,} \\ [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^{k+1} \\ &= [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^k [r(\cos \theta + i \sin \theta)] \\ &= r^k[\cos k\theta + i \sin k\theta][r(\cos \theta + i \sin \theta)] \\ &= r^{k+1}[(\cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta) + \\ &\quad i(\sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta)] \\ &= r^{k+1}[\cos(k + 1)\theta + i \sin(k + 1)\theta]. \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es verdadera y la demostración termina.

EJERCICIOS 10.5

$$1 \quad 1440 \quad 3 \quad 5040 \quad 5 \quad 336 \quad 7 \quad 1 \quad 9 \quad 21$$

$$11 \quad 715 \quad 13 \quad n(n - 1) \quad 15 \quad (2n + 2)(2n + 1)$$

$$17 \quad 64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3$$

$$19 \quad x^6 + 6x^3y + 15x^2y^2 + 20xy^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

$$21 \quad x^3 - 7x^2y + 21x^2y^2 - 35xy^3 + 35xy^4 - 21x^2y^5 + 7xy^6 - y^7$$

$$23 \quad 81r^4 - 540r^3s + 1350r^2s^2 - 1500rs^3 + 625s^4$$

$$25 \quad \frac{1}{243}x^5 + \frac{5}{81}x^3y^2 + \frac{10}{27}x^2y^4 + \frac{10}{9}xy^6 + \frac{5}{3}xy^8 + y^{10}$$

$$27 \quad x^{12} + 18x^9 + 135x^6 + 540x^3 + 1215 + 1458x^3 + 729x^6$$

$$29 \quad x^{5/2} - 5x^{3/2} + 10x^{1/2} - 10x^{-1/2} + 5x^{-3/2} - x^{-5/2}$$

$$31 \quad 3^{25}e^{10} + 25 \cdot 3^{24}e^{5/3} + 300 \cdot 3^{23}e^{2/3} + 35 \cdot \frac{189}{1024}e^3$$

$$33 \quad -1680 \cdot 3^{13}e^{11} + 60 \cdot 3^{12}e^{10} - 3^{11}e^{9} \quad 35 \quad \frac{114 \cdot 688}{9}u^3v^6 \quad 39 \quad 70x^2y^2 \quad 41 \quad 448y^3x^{10}$$

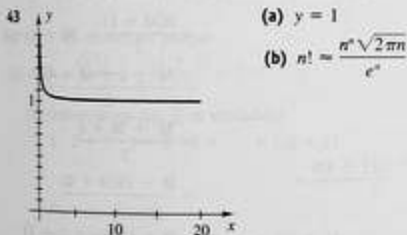
$$43 \quad -216y^3x^2 \quad 45 \quad \frac{135}{16} \quad 47 \quad 4.8, 6.19$$

$$49 \quad 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3$$

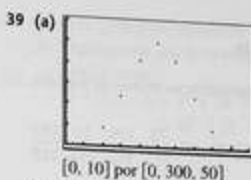
$$\begin{aligned} 51 \quad \binom{n}{1} &= \frac{n!}{(n-1)!1!} = n \\ \binom{n}{n-1} &= \frac{n!}{[n-(n-1)]!(n-1)!} \\ &= \frac{n!}{1!(n-1)!} = n \end{aligned}$$

EJERCICIOS 10.6

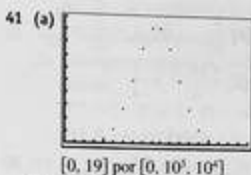
- 1 210 3 60 480 5 120 7 6 9 1 11 $n!$
 13 (a) 60 (b) 125 15 64 17 $P(8, 3) = 336$
 19 24 21 (a) 2 340 000 (b) 2 160 000
 23 (a) 151 200 (b) 5760 25 1024
 27 $P(8, 8) = 40 320$ 29 $P(6, 3) = 120$
 31 (a) 27 600 (b) 35 152 33 9 000 000
 35 $P(4, 4) = 24$ 37 $3! \cdot 2^3 = 48$
 39 $(2^8 - 1) \cdot 17$
 41 (a) 900
 (b) Si n es par, $9 \cdot 10^{(n/2)-1}$; si n es impar, $9 \cdot 10^{(n-1)/2}$


EJERCICIOS 10.7

- 1 35 3 9 5 n 7 1 9 $\frac{12!}{5!3!2!2!} = 166 320$
 11 $\frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = 151 200$ 13 $C(10, 5) = 252$
 15 $C(8, 2) = 28$ 17 $(5! \cdot 4! \cdot 8!) \cdot 3! = 696 729 600$
 19 $3 \cdot C(10, 2) \cdot C(8, 2) \cdot C(4, 2) \cdot C(6, 2) \cdot 3 \cdot 4$
 $= 4 082 400$
 21 $C(12, 3) \cdot C(8, 2) = 6160$ 23 $C(8, 3) = 56$
 25 (a) $C(49, 6) = 13 983 816$ (b) $C(24, 6) = 134 596$
 27 $C(n, 2) = 45$ y en consecuencia $n = 10$
 29 $C(6, 3) = 20$
 31 Determinando $C(31, 3) = 4495$
 33 (a) $C(1000, 30) \approx 2.43 \times 10^{37}$
 (b) $P(1000, 30) \approx 6.44 \times 10^{39}$
 35 $C(4, 3) \cdot C(48, 2) = 4512$
 37 (a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512
 (b) $S_n = 2^n - 1$



(b) 252; 5



(b) 92 378; 9, 10

EJERCICIOS 10.8

- 1 (a) $\frac{4}{52}$; 1 hasta 12 (b) $\frac{8}{52}$; 2 hasta 11 (c) $\frac{12}{52}$; 3 hasta 10
 3 (a) $\frac{1}{6}$; 1 hasta 5 (b) $\frac{1}{6}$; 1 hasta 5 (c) $\frac{2}{6}$; 1 hasta 2
 5 (a) $\frac{5}{15}$; 1 hasta 2 (b) $\frac{6}{15}$; 2 hasta 3 (c) $\frac{9}{15}$; 3 hasta 2
 7 (a) $\frac{2}{36}$; 1 hasta 17 (b) $\frac{5}{36}$; 5 hasta 31 (c) $\frac{7}{36}$; 7 hasta 29
 9 $\frac{6}{216}$ 11 $\frac{3}{8}$ 13 5 hasta 2; 2 hasta 5 15 5 hasta 9; $\frac{9}{14}$
 17 1.93 hasta 1 19 $\frac{48 \cdot 13}{C(52, 5)} \approx 0.00024$
 21 $\frac{C(13, 4) \cdot C(13, 1)}{C(52, 5)} \approx 0.00358$
 23 $\frac{C(13, 5) \cdot 4}{C(52, 5)} \approx 0.00198$ 25 $\frac{4}{6}$
 27 $(0.674)^4 \approx 0.2064$
 29 (a) 0.45 (b) 0.10 (c) 0.70 (d) 0.95
 31 (a) $\frac{C(20, 5) \cdot C(40, 0)}{C(60, 5)} = 0.0028$
 (b) $1 - \frac{C(30, 0) \cdot C(30, 5)}{C(60, 5)} \approx 0.9739$
 (c) $\frac{C(10, 0) \cdot C(50, 5)}{C(60, 5)} + \frac{C(10, 1) \cdot C(50, 4)}{C(60, 5)} \approx 0.8096$
 33 (a) $\frac{C(8, 8)}{2^8} = 0.00391$ (b) $\frac{C(8, 7)}{2^8} = 0.03125$
 (c) $\frac{C(8, 6)}{2^8} = 0.109375$
 (d) $\frac{C(8, 6) + C(8, 7) + C(8, 8)}{2^8} \approx 0.14453$

R76 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

$$35 \quad 1 - \frac{C(48, 5)}{C(52, 5)} = 0.34116$$

37 (a) Un resultado representativo es (nueve de tréboles, 3); 312

(b) 20, 292; $\frac{20}{312}$ (c) No; sí; $\frac{72}{312}, \frac{156}{312}, \frac{36}{312}, \frac{192}{312}$

(d) Sí; no; 0; $\frac{92}{312}$

39 $1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$ 41 (a) $\frac{1}{32}$ (b) $1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$

43 (a) $\frac{C(4, 4)}{4!} = \frac{1}{24}$ (b) $\frac{C(4, 2)}{4!} = \frac{1}{4}$

45 (a) 0 (b) $\frac{1}{9}$

47 (a) $\frac{331\,142}{418\,890} \approx 0.791$ (b) $\frac{334\,415}{418\,890} \approx 0.798$

49 12.5% 51 (a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{C(4, 2)}{2^4} = \frac{6}{16}$

53 $\frac{2}{25\,827\,165}$ (aproximadamente una posibilidad en 13 millones)

55 $\frac{1970}{39\,800} \approx 0.0495$

57 (a) $\frac{8}{36}$ (b) $\frac{1}{36}$ (c) $\frac{244}{495} \approx 0.4929$

59 (a) 0.9639 (b) 0.95 61 (b) 0.76 63 \$0.99

65 \$0.20

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 10

1 5, -2, -1, $-\frac{20}{29}$, $-\frac{7}{19}$

2 0.9, -1.01, 0.999, -1.0001; 0.9999999

3 $2, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{65}{64}$ 4 $\frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{8}{105}, \frac{8}{45}$

5 $10, \frac{11}{10}, \frac{21}{11}, \frac{32}{21}, \frac{53}{32}$ 6 2, 2, 2, 2, 2

7 9, 3, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{3}$ 8 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}$

9 75 10 $\frac{37}{10}$ 11 940 12 -10 13 $\sum_{n=1}^5 3n$

14 $\sum_{n=1}^6 2^{1-n}$ 15 $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)}$ 16 $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

17 $\sum_{n=1}^4 \frac{n}{3n-1}$ 18 $\sum_{n=1}^4 \frac{n}{5n-1}$

19 $\sum_{n=1}^5 (-1)^{n+1} (105 - 5n)$ 20 $\sum_{n=1}^7 (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

21 $\sum_{n=0}^5 a_n x^{2n}$ 22 $\sum_{n=0}^5 a_n x^{3n}$ 23 $1 + \sum_{k=1}^5 (-1)^k \frac{k^{2k}}{2k}$

24 $1 + \sum_{k=1}^5 \frac{x^k}{k}$ 25 $-5 - 8\sqrt{3}; -5 - 35\sqrt{3}$

26 52 27 -31; 50 28 12

29 20, 14, 8, 2, -4, -10 30 64 31 -0.00003

32 1562.5 o bien -1562.5 33 $4\sqrt{2}$ 34 $\frac{12\,800}{2187}$

35 17; 3 36 $\frac{1}{81}, \frac{211}{1296}$ 37 570 38 32.5

39 2041 40 -506 41 $\frac{5}{7}$ 42 $\frac{6268}{999}$

43 (1) P_1 es verdadero, ya que $3(1) - 1 = \frac{1[3(1) + 1]}{2} = 2$

(2) Supón que P_k es verdadero:

$$2 + 5 + 8 + \cdots + (3k - 1) = \frac{k(3k + 1)}{2}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 2 + 5 + 8 + \cdots + (3k - 1) + 3(k + 1) - 1 &= \frac{k(3k + 1)}{2} + 3(k + 1) - 1 \\ &= \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2} \\ &= \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} \\ &= \frac{(k + 1)(3k + 4)}{2} \\ &= \frac{(k + 1)[3(k + 1) + 1]}{2} \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

44 (1) P_1 es verdadero porque

$$[2(1)]^2 = \frac{[2(1)][2(1) + 1][1 + 1]}{3} = 4.$$

(2) Supongamos que P_k es verdadero:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2k)^2 = \frac{(2k)(2k + 1)(k + 1)}{3}$$

De ahí que,

$$\begin{aligned} 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2k)^2 + [2(k + 1)]^2 &= \frac{(2k)(2k + 1)(k + 1)}{3} + [2(k + 1)]^2 \\ &= (k + 1) \left(\frac{4k^2 + 2k}{3} + \frac{12(k + 1)}{3} \right) \\ &= \frac{(k + 1)(4k^2 + 14k + 12)}{3} \\ &= \frac{2(k + 1)(2k + 3)(k + 2)}{3} \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

45 (1) P_1 es verdadero porque

$$\frac{1}{[2(1) - 1][2(1) + 1]} = \frac{1}{2(1) + 1} = \frac{1}{3}$$

(2) Supongamos que P_k es verdadero:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

De ahí que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(2k+3) + 1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(2k+1)(2k+3)}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k+1}{2(k+1)+1} \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

46 (1) P_1 es verdadero, porque

$$1(1+1) = \frac{(1)(1+1)(1+2)}{3} = 2$$

(2) Supongamos que P_k es verdadero:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) \\ + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)(k+2) \left(\frac{k}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

47 (1) Para $n = 1$, $n^3 + 2n = 3$ y 3 es factor de 3.

(2) Supongamos que 3 es factor de $k^3 + 2k$. El $(k+1)$ -ésimo término es

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 5k + 3 \\ &= (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3) \\ &= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1) \end{aligned}$$

Según la hipótesis de inducción, 3 es factor de $k^3 + 2k$ y 3 es un factor de $3(k^2 + k + 1)$, de modo que 3 es un factor del $(k+1)$ -ésimo término.

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

48 (1) P_1 es verdadero, porque $5^1 + 3 < 2^5$.

(2) Supongamos que P_k es verdadero: $k^2 + 3 < 2^k$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} (k+1)^2 + 3 &= k^2 + 2k + 4 \\ &= (k^2 + 3) + (k+1) \\ &< 2^k + (k+1) \\ &< 2^k + 2^k \\ &= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

49 (1) P_1 es verdadero, porque $2^1 \leq 4^1$.

(2) Supongamos que P_k es verdadero: $2^k \leq k!$. Por consiguiente,

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \leq 2 \cdot k! < (k+1) \cdot k! = (k+1)!$$

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

50 (1) P_0 es verdadero, porque $10^0 \leq 10^0$.

(2) Supongamos que P_k es verdadero: $10^k \leq k!$. Por consiguiente,

$$10^{k+1} = 10 \cdot 10^k \leq 10 \cdot k! < (k+1) \cdot k! < (k+1) \cdot (k+1)^k = (k+1)^{k+1}$$

Así, P_{k+1} es verdadero y la demostración termina.

$$51 \quad x^{12} - 18x^9y + 135x^6y^2 - 540x^3y^3 + 1215xy^4 - 1458x^2y^5 + 729y^6$$

$$52 \quad 16x^2 + 32x^3y^2 + 24x^2y^4 + 8xy^6 + y^{10}$$

$$53 \quad x^4 + 40x^2 + 760x^6 \quad 54 \quad \frac{63}{16}x^{12}y^{10}$$

$$55 \quad 21504x^{10}y^2 \quad 56 \quad 52500000$$

$$57 \quad (a) \quad d = 1 - \frac{1}{2}a_i \quad (b) \quad \text{En pies: } 1\frac{1}{4}, 2, 2\frac{3}{4}, 3\frac{1}{2}$$

$$58 \quad 24 \text{ pies} \quad 59 \quad \frac{2}{1-f} \quad 60 \quad P(10, 10) = 3628800$$

$$61 \quad (a) \quad P(52, 13) = 3.954 \times 10^{11} \quad (b) \quad P(13, 5) \cdot P(13, 3) \cdot P(13, 3) \cdot P(13, 2) = 7.094 \times 10^{11}$$

$$62 \quad (a) \quad P(6, 4) = 360 \quad (b) \quad 6^4 = 1296$$

$$63 \quad (a) \quad C(12, 8) = 495 \quad (b) \quad C(9, 5) = 126$$

$$64 \quad \frac{17!}{6!5!4!2!} = 85765680 \quad 65 \quad 5 \text{ hasta } 8; \frac{8}{13}$$

$$66 \quad (a) \quad \frac{2}{4} \quad (b) \quad \frac{2}{8}$$

$$67 \quad (a) \quad \frac{P(26, 4) \cdot 2}{P(52, 4)} = 0.1104 \quad (b) \quad \frac{26^2 \cdot 25^2}{P(52, 4)} = 0.0650$$

$$68 \quad (a) \quad \frac{1}{1000} \quad (b) \quad \frac{10}{1000} \quad (c) \quad \frac{50}{1000}$$

$$69 \quad \frac{C(4, 1)}{2^4} = \frac{4}{16}; 1 \text{ hasta } 3$$

$$70 \quad (a) \quad \frac{C(6, 4) + C(6, 5) + C(6, 6)}{2^6} = \frac{22}{64}$$

$$(b) \quad 1 - \frac{22}{64} = \frac{42}{64}$$

$$71 \quad (a) \quad \frac{1}{312} \quad (b) \quad \frac{57}{312} \quad 72 \quad 0.44 \quad 73 \quad \frac{8}{36}$$

$$74 \quad 5.8125$$

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 10

1 $a_n = 2n + \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(a-10)$

(La respuesta no es única.)

2 $n; j = 94$

3 (a) $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$

(b) Aplicar la inducción matemática.

4 (a) $2n^4 + 4n^3 + 2n^2$

(b) Aplicar la inducción matemática.

5 Examinar el número de dígitos en el exponente del valor en notación científica.

6 El $(k+1)$ -ésimo coeficiente ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) del desarrollo de $(a+b)^n$, a saber $\binom{n}{k}$, que es igual que la cantidad de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos.

7 4.61 8 \$5.33

9 Cantidades en monedas de 10 centavos:

\$237.37 \$215.63 \$195.89 \$177.95 \$161.65

\$146.85 \$133.40 \$121.18 \$110.08 \$100.00

Cantidades realistas en billetes de diez dólares:

\$240.00 \$220.00 \$200.00 \$180.00 \$160.00

\$140.00 \$130.00 \$120.00 \$110.00 \$100.00

10 Se dispone de 11 ingredientes.

11 (a) $\frac{1}{80\,089\,128}$ (b) $\frac{2\,303\,805}{80\,089\,128}$ (aproximadamente 1 en 35).

(c) $\frac{16\,663\,144}{80\,089\,128} \approx 0.21$ (d) \$63425984

12 0.43 13 $0^0 = 1$ 14 El total de la suma es π .

15 (a) $\tan 5x = \frac{5 \tan x - 10 \tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10 \tan^2 x + 5 \tan^4 x}$

(b) $\cos 5x = 1 \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x$

$+ 5 \cos x \sin^4 x;$

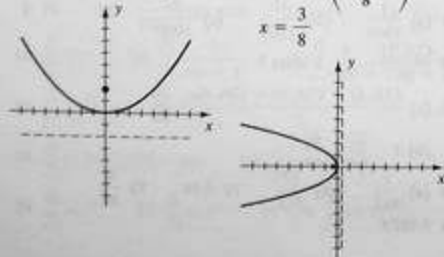
$\sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x$

$+ 1 \sin^5 x$

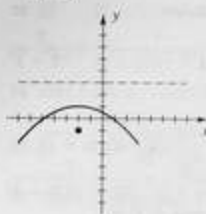
Capítulo 11

EJERCICIOS 11.1

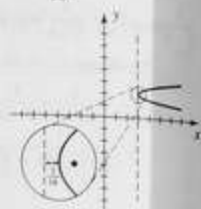
1 $V(0, 0); F(0, 2); y = -2$ 3 $V(0, 0); F(-\frac{3}{8}, 0);$



5 $V(-2, 1); F(-2, -1);$
 $y = 3$

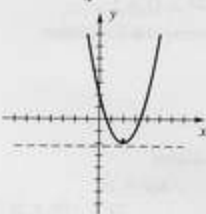


7 $V(3, 2); F(\frac{49}{16}, 2);$
 $x = \frac{47}{16}$

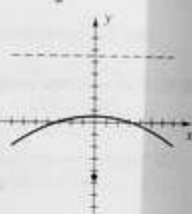


9 $V(2, -2); F(2, -\frac{7}{4});$ 11 $V(0, \frac{1}{2}); F(0, -\frac{9}{2});$

$y = \frac{9}{4}$



$y = \frac{11}{2}$



13 $y^2 = 20(x-1)$

15 $(x+2)^2 = -16(y-3)$

17 $(x-3)^2 = 6(y-\frac{1}{2})$

19 $y^2 = 8x$

21 $(x-6)^2 = 12(y-1)$

23 $(y+5)^2 = 4(x-3)$

25 $y^2 = -12(x+1)$

27 $3x^2 = -4y$

29 $(y-5)^2 = 2(x+3)$

31 $x^2 = 16(y-1)$

33 $(y-3)^2 = -8(x+4)$

35 $y = -\sqrt{x+3} - 1$

37 $x = \sqrt{y-4} - 1$

39 $y = -x^2 + 2x + 5$

41 $x = y^2 - 3y + 1$

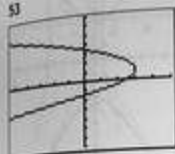
43 4 pulg

45 $\frac{9}{16}$ pies del centro del paraboloide.

47 $2\sqrt{480} = 43.82$ pulg

49 (a) $P = \frac{r^2}{4h}$ (b) $10\sqrt{2}$ pies 51 64 968 pies²

53



$[-11, 10.2]$ por $[-7, 7]$

55 (2.08, -1.04),

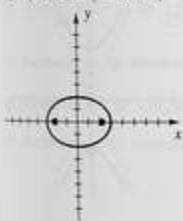
(2.92, 1.38)



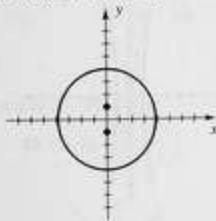
$[-2, 4]$ por $[-3, 3]$

EJERCICIOS 11.2

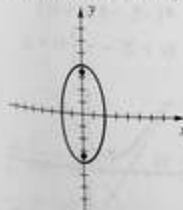
1 $V(\pm 3, 0); F(\pm \sqrt{5}, 0)$



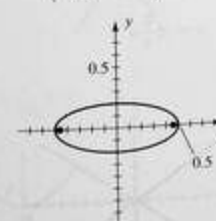
3 $V(0, \pm 4); F(0, \pm 1)$



5 $V(0, \pm 4); F(0, \pm 2\sqrt{3})$

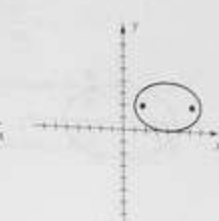
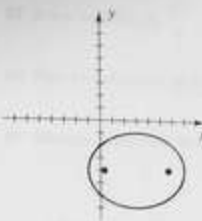


7 $V(\pm \frac{1}{2}, 0); F(\pm \frac{1}{10}, \sqrt{21}, 0)$

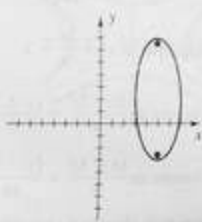


9 $V(3 \pm 4, -4); F(3 \pm \sqrt{7}, -4)$

11 $V(4 \pm 3, 2); F(4 \pm \sqrt{5}, 2)$



13 $V(5, 2 \pm 5); F(5, 2 \pm \sqrt{21})$



15 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$ 17 $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

19 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$ 21 $\frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

23 $\frac{8x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$ 25 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$

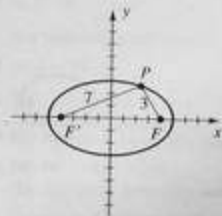
27 $\frac{x^2}{4} + 9y^2 = 1$ 29 $\frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{25} = 1$

31 (2, 2), (4, 1)



33 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 35 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{289} = 1$

37 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$



39 Mitad superior de $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{121} = 1$

41 Mitad izquierda de $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$

43 Mitad derecha de $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

45 Mitad inferior de $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{49} = 1$

47 $\sqrt{84} = 9.2$ pies 49 94 581 000; 91 419 000

51 (a) $d = h - \sqrt{h^2 - \frac{1}{4}k^2}$; $d' = h + \sqrt{h^2 - \frac{1}{4}k^2}$

(b) 16 cm; 2 cm desde V

53 5 pies



$[-300, 300, 100]$ por $[-200, 200, 100]$

57 $(\pm 1.540, 0.618)$



$[-6, 6]$ por $[-2, 2]$

59 $(-0.88, 0.76)$,
 $(-0.48, -0.91)$,
 $(0.58, -0.81)$,
 $(0.92, 0.59)$

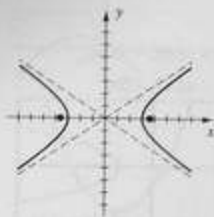


$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

EJERCICIOS 11.3

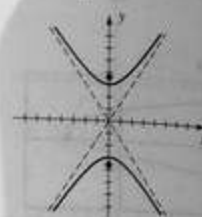
1 $V(\pm 3, 0)$; $F(\pm\sqrt{13}, 0)$;

$y = \pm \frac{2}{3}x$



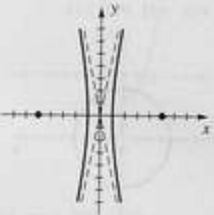
3 $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm\sqrt{13})$;

$y = \pm \frac{3}{2}x$



5 $V(\pm 1, 0)$; $F(\pm 5, 0)$;

$y = \pm\sqrt{24}x$



7 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 2\sqrt{5})$;

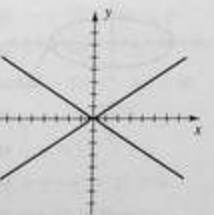
$y = \pm 2x$



9 $V(\pm \frac{1}{4}, 0)$;

$F(\pm \frac{1}{12}\sqrt{13}, 0)$;

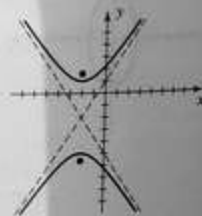
$y = \pm \frac{2}{3}x$



11 $V(-2, -2 \pm 3)$;

$F(-2, -2 \pm \sqrt{13})$;

$(y+2) = \pm \frac{3}{2}(x+2)$



$$13 \quad V(-3 \pm 5, -2); \\ F(-3 \pm 13, -2); \\ (y+2) = \pm \frac{12}{5}(x+3)$$



$$15 \quad V(-2, -5 \pm 3); \\ F(-2, -5 \pm 3\sqrt{5}); \\ (y+5) = \pm \frac{1}{2}(x+2)$$



$$17 \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad 19 \quad (y+3)^2 - \frac{(x+2)^2}{3} = 1$$

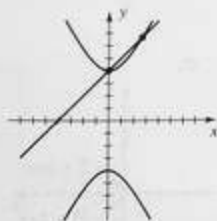
$$21 \quad y^2 - \frac{x^2}{15} = 1 \quad 23 \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad 25 \quad \frac{y^2}{21} - \frac{x^2}{4} = 1$$

$$27 \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1 \quad 29 \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1 \quad 31 \quad \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{49} = 1$$

33 Parábola con eje horizontal.

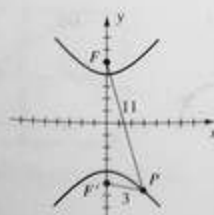
35 Hipérbola 37 Circunferencia 39 Elipse

41 Parábola con eje vertical. 43 $(0, 4), \left(\frac{8}{3}, \frac{20}{3}\right)$



$$45 \quad \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1 \quad 47 \quad \frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$$

$$49 \quad \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$



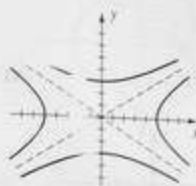
51 Rama derecha de $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

53 Rama superior de $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{49} = 1$

55 Mitades inferiores de las ramas de $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{81} = 1$

57 Mitades izquierdas de las ramas de $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{16} = 1$

mismas asíntotas.



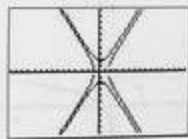
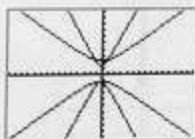
$$61 \quad x = \sqrt{9 + 4y^2}$$

63 Si se introduce un sistema coordenado semejante al del ejemplo 6, entonces las coordenadas del barco son

$$\left(\frac{80}{3} \sqrt{34}, 100\right) \approx (155.5, 100).$$

65 (0.741, 2.206)

67 Ninguno



$[-15, 15]$ por $[-10, 10]$

$[-15, 15]$ por $[-10, 10]$

69 (a) $(6.63 \times 10^3, 0)$

(b) $v > 103\,600 \text{ m/s}$

EJERCICIOS 11.4

$$1 \quad y = 2x + 7$$

$$3 \quad y = x - 2$$



la figura 1, donde el símbolo \lceil especifica el ángulo de 90° . Al usar las longitudes a , b y c de los lados del triángulo pueden obtenerse seis razones:

R82 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

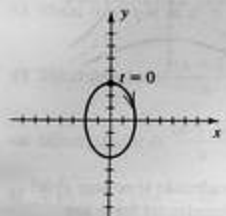
$$5 \quad (y-3)^2 = x+5$$



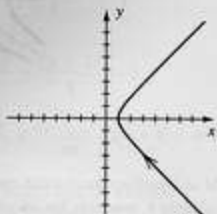
$$7 \quad y = 1/x^2$$



$$9 \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$



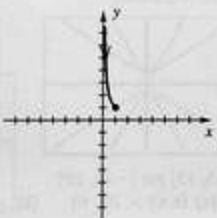
$$11 \quad x^2 - y^2 = 1$$



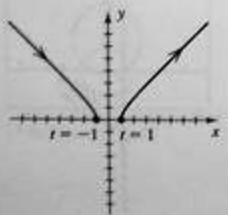
$$13 \quad y = \ln x$$



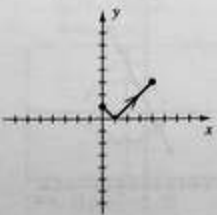
$$15 \quad y = 1/x$$



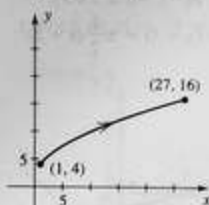
$$17 \quad y = \sqrt{x^2 - 1}$$



$$19 \quad y = |x-1|$$



$$21 \quad y = (x^{1/3} + 1)^2$$

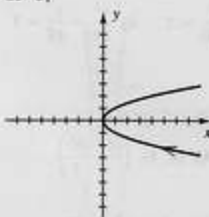


- 23 (a) La gráfica es una circunferencia con centro $(3, -2)$ y radio 2. Su orientación es en el mismo sentido del movimiento de las manecillas del reloj, y empieza y termina en el punto $(3, 0)$.

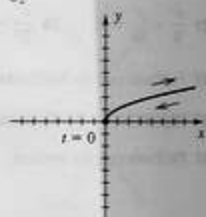
(b) La orientación cambia y es en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

(c) El punto donde empieza y termina la gráfica cambia a $(3, -4)$.

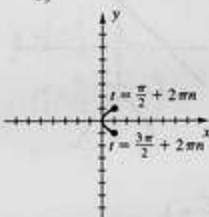
25 C_1



C_2



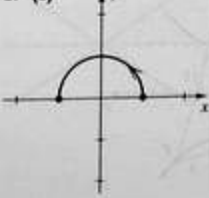
C_3



C_4

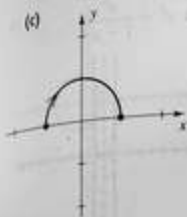


27 (a)



(b)





31 Las respuestas no son únicas.

- (a) (1) $x = t, \quad y = t^2; \quad t \in \mathbb{R}$
 (2) $x = \tan t, \quad y = \tan^2 t; \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
 (3) $x = t^3, \quad y = t^6; \quad t \in \mathbb{R}$
- (b) (1) $x = e^t, \quad y = e^{2t}; \quad t \in \mathbb{R}$ (sólo da $x > 0$)
 (2) $x = \sin t, \quad y = \sin^2 t; \quad t \in \mathbb{R}$ (sólo da $-1 \leq x \leq 1$)
 (3) $x = \tan^{-1} t, \quad y = (\tan^{-1} t)^2; \quad t \in \mathbb{R}$ (sólo da $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$)

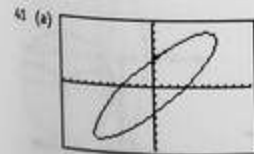
33 $3200\sqrt{3}; 2704$ 35 15 488; 3872

37 (a) La figura es una elipse con centro $(0, 0)$ y ejes de longitudes $2a$ y $2b$.



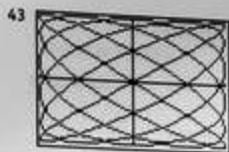
$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

(b) 0°



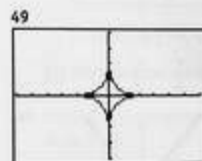
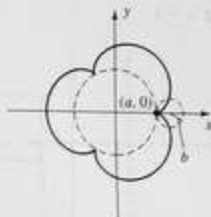
$[-120, 120, 10]$ por $[-80, 80, 10]$

(b) 30°

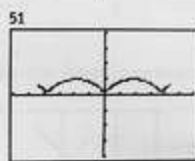


$[-1, 1]$ por $[-1, 1]$

47 $x = 4b \cos t - b \cos 4t,$
 $y = 4b \sin t - b \sin 4t$

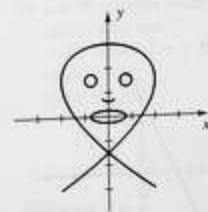


$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

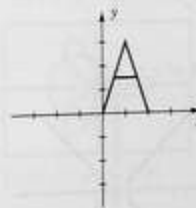


$[-30, 30, 5]$ por $[-20, 20, 5]$

53 Una máscara con boca, nariz y ojos.



55 La letra A.



EJERCICIOS 11.5

1 (a), (c), (e)

3 (a) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

5 (a) $(-4, -4\sqrt{3})$ (b) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

7 $\left(\frac{24}{5}, \frac{18}{5}\right)$ 9 (a) $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ (b) $\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$

11 (a) $\left(14, \frac{5\pi}{3}\right)$ (b) $\left(5\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

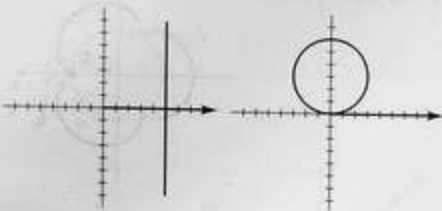
13 $r = -3 \sec \theta$ 15 $r = 4$ 17 $r = 6 \cot \theta \csc \theta$

19 $r = \frac{3}{\cos \theta + \sin \theta}$ 21 $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

23 $r^2 = -4 \sec 2\theta$ 25 $r = 2 \cos \theta$

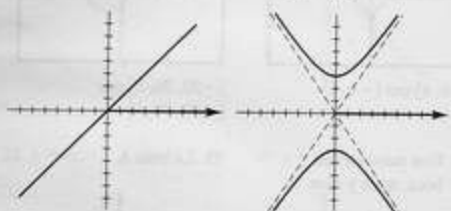
27 $x = 5$

29 $x^2 + (y - 3)^2 = 9$



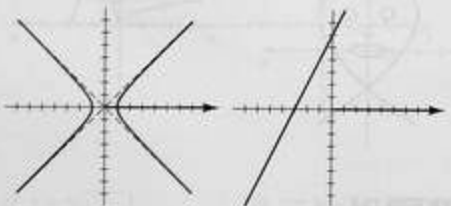
31 $y = x$

33 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

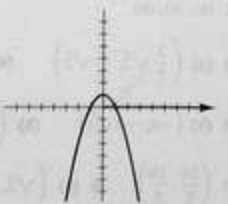


35 $x^2 - y^2 = 1$

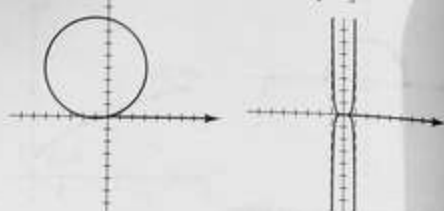
37 $y - 2x = 6$



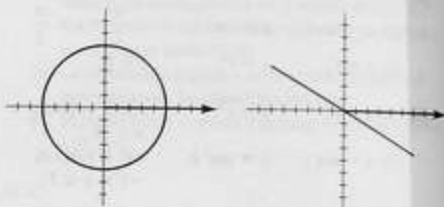
39 $y = -x^2 + 1$



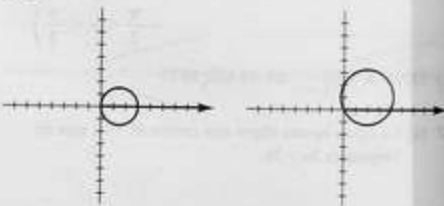
41 $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 17$ 43 $y^2 = \frac{x^4}{1 - x^2}$



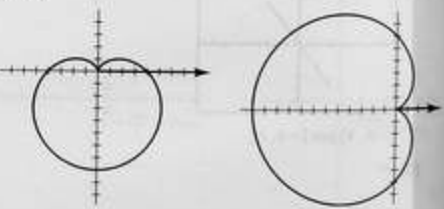
45 47



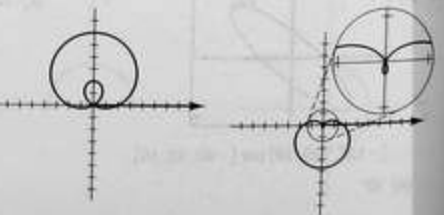
49 51

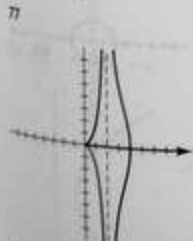
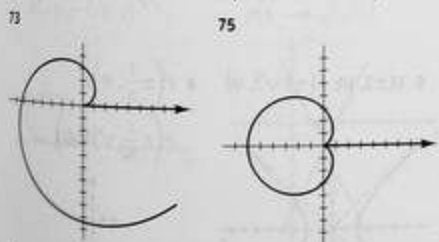
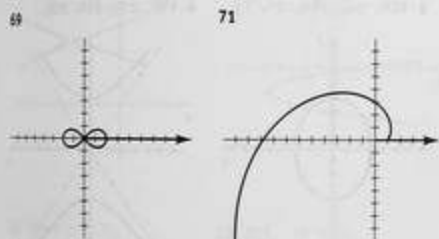
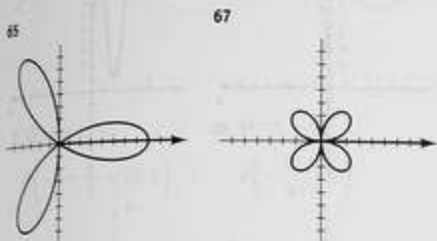
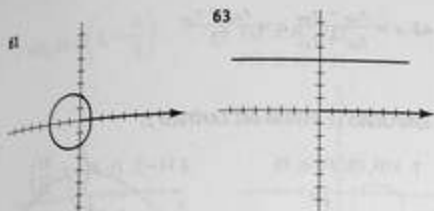


53 55



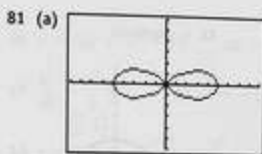
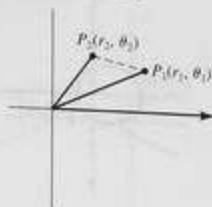
57 59





79 Sean $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ puntos en un plano $r\theta$. Sean $a = r_1$, $b = r_2$, $c = d(P_1, P_2)$ y $\gamma = \theta_1 - \theta_2$. Al sustituir

en la ley de los cosenos, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, se obtiene la fórmula.



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

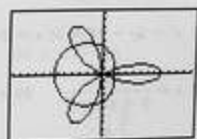
(b) Máx: dirección este-oeste; mín: dirección norte-sur.

83 Simétrica con respecto al eje polar.



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

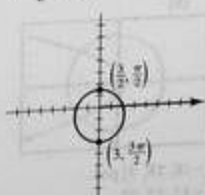
85 Las coordenadas polares aproximadas son $(1.75, \pm 0.45)$, $(4.49, \pm 1.77)$ y $(5.76, \pm 2.35)$.



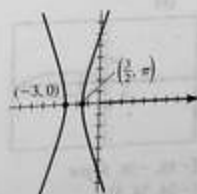
$[-12, 12]$ por $[-9, 9]$

EJERCICIOS 11.6

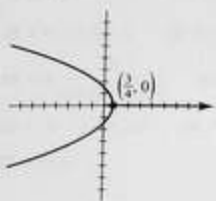
1 $\frac{1}{3}$, elipse



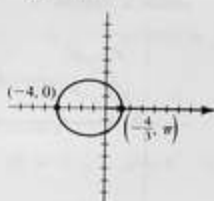
3 3, hipérbola



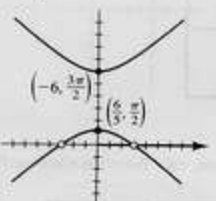
5 1, parábola



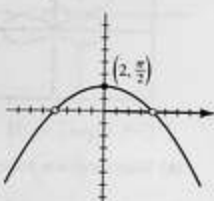
7 $\frac{1}{2}$, elipse



9 $\frac{3}{2}$, hipérbola



11 1, parábola



13 $9x^2 + 8y^2 + 12y - 36 = 0$

15 $8x^2 - y^2 + 36x + 36 = 0$

17 $4y^2 + 12x - 9 = 0$ 19 $3x^2 + 4y^2 + 8x - 16 = 0$

21 $4x^2 - 5y^2 + 36y - 36 = 0$; $x \neq \pm 3$

23 $x^2 + 8y - 16 = 0$; $x \neq \pm 4$ 25 $r = \frac{2}{3 + \cos \theta}$

27 $r = \frac{12}{3 - 4 \cos \theta}$ 29 $r = \frac{2}{1 - \sin \theta}$

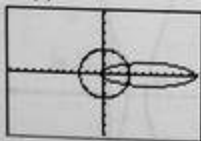
31 $r = \frac{8}{5 + 2 \sin \theta}$ 33 $r = \frac{8}{1 + \sin \theta}$

35 (a) $\frac{3}{4}$ (b) $r = \frac{7}{4 - 3 \sin \theta}$

39 (a) Elíptica

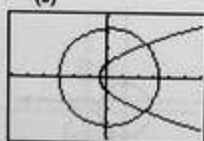
41 (a) Hipérbola

(b)



$[-36, -36, 3]$ por
 $[-24, 24, 3]$

(b)



$[-18, 18, 3]$ por
 $[-12, 12, 3]$

43 $e = \frac{r_{\text{apo}} - r_{\text{per}}}{r_{\text{apo}} + r_{\text{per}}}$, $a = \frac{r_{\text{apo}} + r_{\text{per}}}{2}$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 11

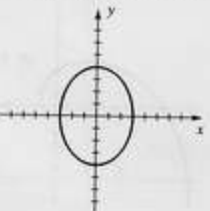
1 $V(0, 0)$; $F(16, 0)$



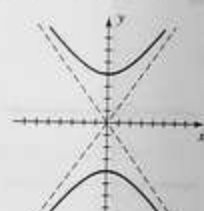
2 $V(-2, 1)$; $F(-2, \frac{33}{32})$



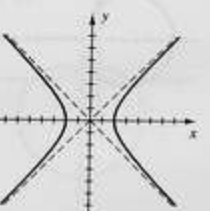
3 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm \sqrt{7})$



4 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 5)$

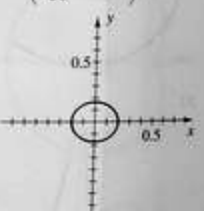


5 $V(\pm 2, 0)$; $F(\pm 2\sqrt{2}, 0)$



6 $V(\pm \frac{1}{5}, 0)$

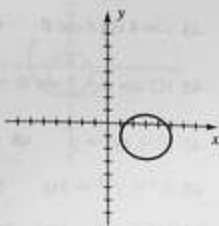
$F(\pm \frac{1}{30} \sqrt{11}, 0)$



7 $V(0, 4); F\left(0, -\frac{9}{4}\right)$

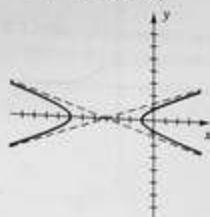


8 $V(3 \pm 2, -1); F(3 \pm 1, -1)$



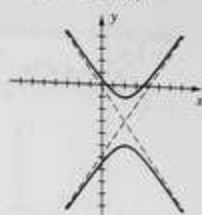
15 $V(-4 \pm 3, 0);$

$F(-4 \pm \sqrt{10}, 0)$



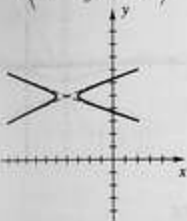
16 $V(2, -3 \pm 2);$

$F(2, -3 \pm \sqrt{6})$



9 $V(-4 \pm 1, 5);$

$F\left(-4 \pm \frac{1}{3}\sqrt{10}, 5\right)$



10 $V(-5, -2);$

$F\left(-\frac{39}{8}, -2\right)$



17 $y = 2(x+7)^2 - 18$

18 $y = -3(x+4)^2 + 147$

19 $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{9} = 1$

20 $y^2 = -16x$

21 $x^2 = -40y$

22 $x = 5y^2$

23 $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{100} = 1$

24 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$

25 $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1$

26 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

27 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{45} = 1$

28 $\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{112} = 1$

29 (a) $-\frac{7}{2}$

(b) Hipérbola

30 $A = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$

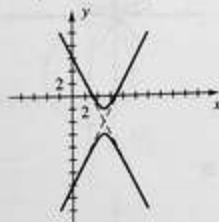
31 $x^2 + (y-2)^2 = 4$

32 $2\sqrt{2} \text{ rad/s} = 0.45 \text{ rev/s}$

11 $V(-3 \pm 3, 2); F(-3 \pm \sqrt{5}, 2)$



12 $V(5, -4 \pm 2); F(5, -4 \pm \sqrt{5})$



33 $x = 4y + 7$



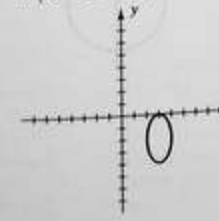
34 $y = x^4 - 4$



13 $V(2, -4); F(4, -4)$



14 $V(3, -2 \pm 2); F(3, -2 \pm \sqrt{3})$



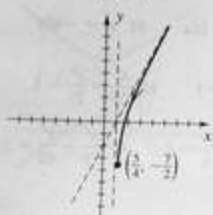
R88 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

35 $(y-1)^2 = -(x+1)$

36 $y = 2^{-x^2}$



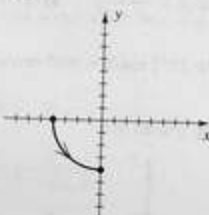
37 $y = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x - 1}$



38 C_1



C_2



C_3



C_4



39 $20480\sqrt{3}; 9216$

40 $\left(-2, \frac{5\pi}{4}\right), \left(2, \frac{9\pi}{4}\right)$

41 $\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$

42 $\left(4, \frac{11\pi}{6}\right)$

43 $r = 4 \cot \theta \csc \theta$

44 $r = 3 \cos \theta - 4 \sin \theta$

45 $r(2 \cos \theta - 3 \sin \theta) = 8$

46 $\theta = \frac{\pi}{4}$

47 $x^2 + xy^2 = y$

48 $x^2 + y^2 = 2x + 3y$

49 $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$

50 $y = (\tan \sqrt{3})x$

51 $8x^3 + 9y^2 + 10x - 25 = 0$

52 $y^2 = 6 + x$

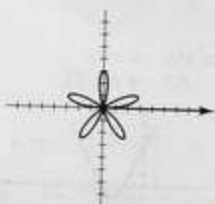
53



54



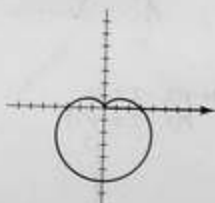
55



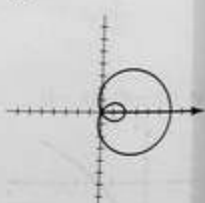
56



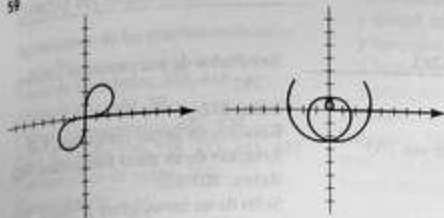
57



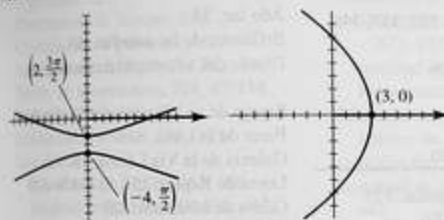
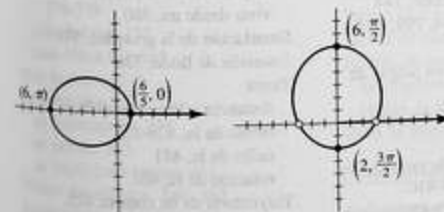
58



60



62


 64 $\frac{1}{2}$, elipse


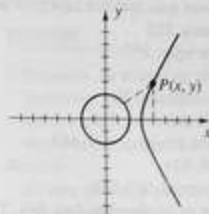
EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 11

1 $w = 4|p|$

2 La circunferencia pasa por ambos focos y por los cuatro vértices del rectángulo auxiliar.

5 $\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1, x \geq 3,$

$$x = 2 + \sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}$$



6 $d = \frac{1}{4\sqrt{a^2 + b^2}}$

7 43.12°

9 $y = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{2}}$

 10 La gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada un ángulo α , en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, mientras que la gráfica de $r = f(\theta + \alpha)$ se rota en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.

11 $(180/n)^\circ$

12 $y = 2 \pm \sqrt{4 - x^2}, y = \pm \sqrt{4 - (x-2)^2}$

ÍNDICE DE APLICACIONES

ADMINISTRACIÓN DE OPERACIONES

- Adición de agua salina a un tanque, 320
- Banda transportadora hidráulica, 480
- Capacidad de producción, 676
- Dimensiones para que una caja pase por una puerta, 222
- Filtrado de agua, 257
- Llenado de un tanque de almacenamiento, 76
- Llenado de una tolva, 128
- Movimiento robótico, 439, 487, 595-596, 623
- Pesca comercial, 567-568
- Planeación de producción, 643, 661, 718
- Producción
 - de circuitos integrados (CI) para computadoras, 364
 - de un barril de petróleo, 93
 - de un recipiente, 91, 256, 319, 652
 - de una crayola, 642
- Productividad de los empleados, 383-384
- Rapidez del volante de una máquina, 400
- Rotación de una cabría, 402
- Vaciado de un tanque de agua, 80

AGRICULTURA

- Construcción de una cerca, 78, 92, 130, 221, 633
- Crecimiento de la cosecha, 346
- Estructuras para almacenamiento de granos, 75, 79, 300, 743
- Mezcla de fertilizantes, 676
- Rendimiento de una huerta, 132
- Riego de un campo, 642, 717
- Superficie de cosecha, 639, 660

ALIMENTACIÓN

- Dimensiones de un cono (barquillo), 79
- Ingredientes para pizzas, 802
- Mezclas de café, 676
- Mezclas de nueces, 643, 674
- Planeación de dietas, 661
- Posibilidades para el almuerzo, 787
- Preparación de alimentos en un hospital, 128
- Producción de queso, 172
- Selección de condimentos, 785
- Selecciones de helado, 785
- Valores de pizza, 403

ANIMALES/VIDA SILVESTRE

- Alices, 334, 340
- Ballenas, 30, 172, 346
- Competencia por el alimento, 633
- Conejos, 513
- Dieta de ganado, 643
- Elefantes, 363
- Erradicación de plagas, 735
- Ganado, 676
- Gatos monteses, 642
- Insectos, 737
- Pájaros, 372, 676, 718
- Peces, 18, 30, 126, 251, 320, 337, 346, 386, 633, 661
- Perros pastor alemán, 126
- Ranas, 221
- Venados, 271, 322, 718

ARTE Y ENTRETENIMIENTO

- Ángulos de visión para pintar, 556
- Apuestas para un dado, 791
- Asientos en un estadio, 743
- Asistencia a un cine, 77
- Azulejos Penrose, 580-581
- Cartas, 787, 791, 798, 800-801, 812
- Cuadros en una película, 18
- Dimensiones de un laberinto, 744
- Dinero de un premio, 744, 799, 802
- Diseño de un cartel, 92
- Fórmula para sobrevivir en juegos de azar, 318
- Grabación en video, reproductora de, 644
- Juego de feria, 797
- Juego de tirar dados, 809-810
- Juegos de video, 173, 479-480
- Lanzamiento de dados, 786, 797-799, 808
- Lanzamiento de una moneda, 787
- Longitud de una cuerda floja, 191, 234
- Lotería, 784, 794, 798, 803
- Lotería "powerball", 814
- Manos de bridge, 795
- Manos de póquer, 795
- Máquinas tragamonedas, 808, 813-814
- Montaje de un sistema de proyección, 497
- Movimientos de backgammon, 813
- Precio de un reproductor de DVD, 747

- Resultados de una carrera de caballos, 787
- Rifas, 812
- Rotación de discos compactos, 410
- Rotación de un disco fonográfico, 492
- Ruleta, 809-810
- Salto de un motociclista acrobata, 313
- Venta de entradas, 652, 662
- Vibración de una cuerda de violín, 549
- Vuelo de un proyectil humano, 226

ASTRONOMÍA

- Año luz, 18
- Brillantez de las estrellas, 63
- Diseño del telescopio de Cassegrain, 841
- Espejo de un telescopio reflector, 815
- Fases de la Luna, 418
- Galaxia de la Vía Láctea, 18
- Leyes de Kepler, 251, 514, 878-879
- Órbita de Mercurio, 829
- Órbita de Plutón, 829
- Periodo de un planeta, 251
- Radiotelescopio de Jodrell Bank, 815
- Resolución de un telescopio, 418
- Satélite
 - trayectoria de un, 129, 815
 - vista desde un, 560
- Simulación de la gravedad, 594
- Sucesión de Bode, 736
- Tierra
 - distancia a Venus desde la, 622
 - órbita de la, 828-829
 - radio de la, 481
 - rotación de la, 402
- Trayectoria de un cometa, 825, 842, 879
- Venus
 - distancia desde el Sol de, 487
 - elongación de, 480

BIOLOGÍA

- Curva de crecimiento de Gompertz, 345
- Curva de crecimiento de una población, 379-381
- Dimensiones de una membrana celular, 129
- Mutación genética, 383
- Reproducción de bacterias, 330, 334, 349, 386, 736, 752
- Sucesión genética, 744

CIENCIAS DEL MEDIO AMBIENTE

- Agotamiento de las reservas carboníferas, 363
- Altura de los árboles, 383, 418
- Altura de una nube, 80
- Cálculo meteorológico, 447, 479
- Capa de ozono, 220, 259, 372, 385, 447
- Concentración de radón, 252
- Contaminación
 - del agua, 371, 595
 - del aire, 348, 677
 - radiactiva, 191
- Corrosión de cables, 234
- Costo de la limpieza de un derrame de petróleo, 323
- Crecimiento de bosque, 653
- Crecimiento de pastizales, 653
- Densidad atmosférica, 91, 303, 348
- Efecto de invernadero, 294, 677
- Incendios, 233, 483, 570
- Isla de calor urbano, 109, 173
- Luz diurna
 - intensidad de la, 460-461, 606
 - longitud de la, 110, 456-457, 462, 508-509
 - y latitud, 111
- Necesidades de ventilación, 245
- Océano
 - olas del, 460-461
 - penetración de la luz en el, 335, 378-379
 - salinidad del, 172
 - zona fótica del, 383
- Olas de marea, 512
- Precipitación, 320
 - en Minneapolis, 259
 - en Seattle, 223
 - en South Lake Tahoe, 461
- Presión atmosférica, 346, 387
- Rayos solares, 447, 513, 606
- Río
 - caudal de un, 513
 - profundidad de un, 561-462
- Sismos, 356, 362, 386-387, 389, 490, 555, 580
- frecuencia de los, 387
- Temperatura
 - determinación de la, 271, 294-295, 322, 694
 - en Augusta, 513
 - en Chicago, 512
 - en Fairbanks, 461, 512
 - en Ottawa, 490
 - en París, 173, 643
 - en una nube, 80, 130

- variación en la, 461
- y altitud, 80, 167
- y humedad, 439
- y latitud, 93
- y precipitación, 553
- Tornados, 18, 402
- Tsunamis, 484
- Velocidad del viento, 371, 590
- Viento transversal vertical, 174, 384

COMUNICACIONES

- Alcance de la radiocomunicación, 78, 92, 622-623
- Anuncios en el supertazón, 175
- Estaciones de radio
 - alcance de la transmisión, 156, 471, 872
 - cantidad de, 245
 - nomenclatura de las, 776
- Llamadas telefónicas
 - número de, 258
 - tarifas de, 208, 643
- Longitud de una antena de banda civil, 481
- Números telefónicos, 776
- Periódicos
 - número de, 141
 - reperto de, 79
- Satélite de comunicaciones, 482
- Semáforo, 776
- Tarifas de correo de primera clase, 344
- Tarifas de correo expreso, 718
- Televisión por cable
 - suscriptores de, 140
 - tarifas de la, 223
- Torre de transmisión para televisión, 480

CONSTRUCCIÓN

- Aislamiento, 77
- Baño, 129
- Banquetas, 84
- Cajas, 88, 91-92, 110, 189, 270, 302
- Canal, 216, 534
- Casa, 78
- Cilindro elástico, 322
- Cobertizo de almacenamiento, 256
- Colocación de una viga de madera, 556
- Dimensiones de una mesa, 642
- Edificios, 190, 687
- Escalera, 481, 741, 801
- Galería susurrante, 829
- Jaulas, 221
- Panel para calefacción solar, 128, 557
- Perrera, 129

- Rampa, 479
- Rampa para silla de ruedas, 255
- Rectángulo de alambre, 92, 222
- Resistencia de extracción de clavos, 108
- Tienda, 303
- Tubos, 633
- Unidades de almacenamiento, 661
- Ventana, 79, 652

DEPORTES

- Baloncesto
 - posiciones en, 776
 - saltos en, 257
 - series de juegos en, 785
- Béisbol
 - compra de bats y pelotas para un equipo de, 648
 - distancias en, 579
 - estadísticas en, 172
 - orden de bateo, 774
 - selección de un equipo de, 780
 - series de juegos en, 802
- Boliche, 799
- Buceo, 271
- Canotaje, 92
- Capacidad aeróbica, 173
- Carreras de patinaje, 621
- Carreras de velocidad, 78, 175, 491, 567, 579
- Ciclismo, 744
- Clasificación de velocistas, 785
- Costos de un club de golf, 747
- Dimensiones de una pista, 257, 491, 717
- Fútbol americano, 593, 784
- Golf, 555
- Lanzamiento de disco, 256
- Lanzamiento de martillo, 634
- Obstáculos para levantadores de pesas, 30
- Remo, 78
- Tenis, 784
- Tiempos de corredoras, 168

EDUCACIÓN

- Acomodo de asientos, 776
- Calificación punto promedio, 80, 321
- Comités, 784, 796
- Designaciones de fraternidad, 776
- Elegibilidad de los maestros para la jubilación, 130
- Oficiales de clase, 772
- Participantes en el programa *Head Start* (comienzo temprano), 272
- Presupuestos en una universidad, 719

Programación de cursos, 776
 Promedio en calificaciones de examen, 69, 77
 Prueba de falso o verdadero, 776, 785, 796, 801
 Prueba de opción múltiple, 776
 Selección de becarios, 785
 Selección de preguntas para un examen, 785

ELECTRICIDAD

Circuitos y voltaje, 58
 Condensador eléctrico, 362
 Corriente en un circuito eléctrico, 362, 386-387, 458, 509-510, 514, 614, 676, 792-793
 Figura de Lissajous, 855, 882
 Intensidad de un reflector, 489
 Interruptores eléctricos, 792-793
 Ley de Coulomb, 91, 251
 Ley de Ohm, 80, 119
 Parabólicas confocales, 815
 Potencia de un molino de viento, 108
 Potencia de un rotor de viento, 258
 Producción de calor en un circuito de CA, 535
 Resistencia eléctrica, 250, 676
 Resistores conectados en paralelo, 65, 119
 Voltaje, 58, 524, 614

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Arreglo de colores, 787, 812
 Demostración de probabilidad, 797
 Experimento con un naipe y un dado, 796, 802
 Experimento de letra y número, 796
 Experimento de percepción extrasensorial, 797
 Función de densidad de probabilidad, 347
 Palíndromos numéricos, 777
 Polinomio de Chebyshev, 270
 Probabilidad de cumpleaños, 799

FÍSICA/CIENCIAS EN GENERAL

Aceleración
 de una partícula, 676
 de una pelota, 643
 Agua
 corcho en, 491
 enfriamiento de, 385
 esferas sólidas de madera en, 295
 evaporación, 108, 173

Alcance de un proyectil, 251, 534
 Altura
 de un cohete de juguete, 80, 89, 258, 479
 de un precipicio, 94
 de un proyectil, 126, 217, 221
 Amplificación lineal, 119
 Bomba de vacío, 752
 Desintegración radiactiva, 252, 331, 335, 346, 358, 362-363, 386, 387
 Desviación del polo magnético, 403
 Determinación de la edad mediante pruebas de carbono 14, 387
 Distancia
 a un blanco, 78
 a un globo de aire caliente, 191, 234, 481-482, 570
 de la lente a la imagen, 115
 de parada de una partícula, 347
 de visibilidad, 30
 entre puntos de la Tierra, 402, 418, 580, 622
 recorrida por un objeto que cae, 744
 recorrida por una pelota que rebota, 750, 752, 802
 Elevación
 de un risco, 490
 de una montaña, 482, 488-489, 571
 del Sol, 479
 Energía de un electrón, 372
 Expansión adiabática, 57
 Explosión nuclear, 93
 Fórmula de contracción de Lorentz, 126
 Hechos que liberan energía, 389
 Intensidad de iluminación, 250
 Intensidad del sonido, 362, 386, 525, 541
 Ley
 de Boyle, 129
 de Coulomb, 91, 251
 de Hooke, 119, 250
 de Newton del enfriamiento, 334, 357
 del gas ideal, 251
 Medida de caudal, 642, 718
 Movimiento
 armónico, 477, 483-484
 de una mesa, 524-525
 Oscilación de un péndulo, 403
 Periodo de un péndulo, 129, 250, 752
 Peso de un astronauta en el espacio, 126
 Polinomio de Legendre, 270
 Presión
 de aire, 362

de un líquido, 250
 de vapor, 363
 Proporcionalidad entre la presión y el volumen de un gas, 247
 Proyección vertical, 91, 643
 Relación peso-latitud, 514
 Sombras, 607
 Temperatura
 del agua hirviendo, 91
 escalas de, 65, 118, 174, 256
 Tierra
 área superficial de la, 18
 campo magnético de la, 471
 densidad de la, 303
 Trabajo realizado
 al empujar, 593, 606
 al tirar, 603-606
 Trayectoria
 de las partículas alfa, 841
 de un objeto, 24
 de una pelota, 634
 Rapidez (velocidad)
 de una partícula, 126
 del sonido, 129, 157
 Velocidad
 de un cohete, 387
 de un gas, 91
 medida con láser de, 487
 Volumen y decibeles, 371
 Vuelo de un proyectil, 221, 849-851, 882

GEOMETRÍA

Ángulos
 de un triángulo, 579
 de una caja, 480, 579
 Área
 de un paralelogramo, 581
 de un rectángulo en un arco parabólico, 280
 de un triángulo, 157, 191, 576-579, 581
 de un vaso cónico, 109
 Área superficial
 de un tanque, 58
 de una pirámide, 489-490
 Centro de una circunferencia, 156
 Diagonal
 de un cubo, 234
 de un paralelogramo, 575, 579
 Figura de Moiré, 634
 Problema isoperimétrico, 634
 Profundidad de un vaso cónico, 488
 Tamiz de Sierpinski, 753-754

- Volumen
de un prisma, 571
de un vaso cónico, 480-481
de una pirámide, 490

INGENIERÍA

- Antenas de TV por satélite, 812, 815
Avión cara a reacción, 571-572, 623
Cables flexibles, 343, 388
Canal de drenaje, 79
Carreteras, 92, 222-224, 513, 534-535
Cicloide, 852-853, 856
Colector solar, 557, 570
Curvas verticales en cimas, 223
Curvas verticales en depresiones, 224
Disco receptor de sonidos, 815
Polinomio de Legendre, 270
Puente(s)
 arcos de, 828
 especificaciones para, 222
 levadizo, 479
Reflector elíptico, 829
Reflector parabólico, 815
Stonehenge, 418, 596
Tobogán de agua, 479
Túnel, 488
Vigas
 carga de soporte, 249
 flexión, 322
 resistencia, 280

INTERÉS GENERAL

- Acomodo de libros, 776
Acomodo de llaves en un llavero
 circular, 784
Acuarios, 129, 190, 630, 634
Agrimensura, 478, 482, 490, 569-570, 572, 579, 622
Altura
 de un anuncio, 418
 de un asta bandera, 407
 de un edificio, 481-482, 488-489, 571, 622
 de una cometa, 478, 482
 de una torre, 473-474, 481-482
 Cercado de una huerta, 92
Composición de una familia, 784, 796
Cúmulo de arena, 109, 233
El Pentágono, 480
Espejo de una linterna, 815
Faro reflector, 815
Fuerzas que actúan sobre un adorno de
 Navidad, 634

- Funciones en computación, 233, 606-607
Genealogía, 753
Globos, 109, 229, 233-234
Gloteocronología (datación de lenguas), 336, 387
Guardarropa para combinar e igualar, 776
La gran pirámide, 487
La torre inclinada de Pisa, 570-571
Longitud
 de un cable, 478, 575
 de un poste de teléfonos, 566-567, 570
Pantallas de calculadora, 192, 557
Pesos de unas cadenas, 687
Pila de troncos, 743
Piscinas
 agua en, 676
 dimensiones de, 129, 653
 llenado de, 79, 256
 niveles de cloro en, 736-737
Rapidez para podar el césped, 79
Rescate en el tiro de una mina, 623
Sucesión de Fibonacci, 736
Torre Eiffel, 487
Vuelos de reconocimiento, 579-580

NEGOCIOS/FINANZAS

- Ahorro diario, 747
Anualidades, 754
Apreciación, 256, 335
Asignaciones de oficina, 784
Aumentar al máximo la ganancia, 656, 660-661, 673, 718
Balance de una hipoteca, 388
Bonos de ventas, 744
Cálculo de un precio, 70
Clave de acceso a cajeros automáticos, 776
Comienzo de horas de trabajo, 797
Comparaciones de inflación, 338
Crecimiento del salario mínimo, 347
Cuenta en un restaurante, 77
Cuentas de ahorro, 30, 77, 337
Depreciación, 336, 752, 754
Descuento por volumen de compra, 93, 222
Efecto multiplicador, 752
El legado de Benjamin Franklin, 393
Facturación por servicio, 77, 258
Función de Gompertz, 337
Función logística y ventas, 337
Gastos de un negocio, 119, 173
Índice de precios al consumidor, 344

- Interés compuesto, 331-333, 335, 338-339, 341-342, 362, 383, 752, 754
Interés simple, 71
Inversiones, 71, 128, 642, 652, 684, 718
Ley de Pareto para países capitalistas, 371
Niveles de inventario, 652
Nómina, 77, 233, 717
Pago de una hipoteca, 336
Poder de compra, 337
Porcentaje de derechos de autor, 208
Precio y demanda, 93, 109, 369, 371, 644
Préstamos, 173, 336
Promedio Dow Jones, 389
Promedio Nasdaq, 389
Relación al mínimo del costo, 657, 660-661
Rendimiento efectivo, 347
Renta de departamentos, 130, 223
Salarios, 129, 389
Tarifas de electricidad, 208
Tasas impositivas, 208
Trueque de servicios, 643
Valor de inventarios, 687
Valor del terreno, 347

POLÍTICA/TEMAS URBANOS

- Cañones urbanos, 560
Crecimiento de la población, 129, 342, 346, 357, 362, 387
Demanda de agua, 490
Densidad de población, 126, 320, 363
Expansión de una ciudad, 92, 128
Fondos municipales, 77
Gastos gubernamentales, 348
Homicidios con arma de fuego, 23
Población estadounidense, 137
Población mundial, 390
Recaudación del gobierno, 337
Regla del cubo, 109
Reglamento de construcción
 de edificios, 190
Ubicación de una planta eléctrica, 652

QUÍMICA

- Aleación cobre-plata, 77
Aleación de plata, 643
Bactericida, 128
Cálculo del pH, 382-383
Curva de respuesta de umbral, 323
Ley del gas ideal, 251
Masa
 de un átomo de hidrógeno, 18
 de un electrón, 18

Número de Avogadro, 18
 Sal disuelta en agua, 335
 Soluciones ácidas, 72, 676

SALUD/MEDICINA

Acción cardíaca, 460
 Análisis de la respiración, 455
 Área superficial del cuerpo, 30, 57
 Bifurcación arterial, 535
 Biorritmos, 460
 Cálculo del crecimiento humano, 109
 Cáncer en la piel, 385
 Cociente de inteligencia, 18
 Crecimiento
 en la infancia, 173, 191, 346, 387
 fetal, 172
 infantil, 221
 Curva de respuesta de umbral, 323
 Dimensiones de una extremidad humana, 250
 Dimensiones de una perla (píldora esférica), 93, 280, 634
 Distinción visual, 559
 Electroencefalografía, 460
 Epidemias, 337
 Estatura decreciente, 119
 Exposición al arsénico y cáncer, 808
 Fuerza de un pie, 559
 Glóbulos rojos, 57
 Gotas para los ojos, 77
 Indicador radiactivo, 346
 Ley de Poiseuille, 251
 Medicamentos
 concentración de, 77
 dosis de, 173, 220
 en el torrente sanguíneo, 333-334, 383, 752
 Memoria, 384
 Muertes por fumar, 797
 Músculo bíceps, 593

Necesidades de calorías, 45
 Niveles de colesterol, 364
 Niveles terapéuticos mínimos, 119, 124
 Operación con litotriptero, 829
 Participantes en el programa *Medicare*, 272
 Peso
 de hombres, 31
 de mujeres, 31
 de niños, 362
 de umbral, 251
 Preparación de una solución de glucosa, 77
 Protección contra la luz solar, 513
 Pulsaciones durante una vida, 57
 Radioterapia, 344
 Rapidez al caminar, 77, 363
 Reacción a un estímulo, 371
 Relación entre huesos y estatura, 80
 Ritmos circadianos, 490

TRANSPORTE

Aumentar al máximo la capacidad de pasajeros, 661
 Automóviles
 compra de, 119, 193
 diseño de, 581
 distancia de frenado, 56, 126, 193, 252
 distancia entre, 157, 579
 neumáticos de, 402
 rendimiento de combustible de, 78, 126, 128, 221, 256
 tarifa de renta de, 208
 tiempos de recorrido de, 74, 128
 valor de reventa de, 335
 velocidad, 128, 251
 Avión(es) (aeroplanos)
 distancia a un, 570
 distancia entre, 92
 hélice para, 487
 trayectoria, 478-479, 483, 579, 593, 841
 velocidad, 481
 velocidad de aterrizaje, 126
 y velocidad del aire, 128, 594, 595, 621
 Barcos
 dirección de, 475-476, 483, 580
 distancia entre, 185, 257, 579
 ubicación de, 836, 841
 velocidad de, 621
 Botes (lanchas)
 consumo de combustible, 128
 curso de, 474-475, 567-569, 579, 595
 hélice para, 491
 seguimiento de, 556
 velocidad de, 640, 642
 Cambio de anticongelante, 73
 Cargos por envío, 718
 Distancias de una pista de aterrizaje, 192, 234
 Flujo vehicular, 208, 677
 Fuerza de un remolcador, 594
 Impuesto a la gasolina, 190
 Mecánica de una bicicleta, 403
 Nave espacial, 191, 257
 Números de placa de circulación, 776
 Potencia, 607
 Reducción al mínimo del costo de combustible, 661
 Ruta de un teleférico, 569-570
 Ruta ferroviaria, 534
 Rutas de un transbordador, 106
 Tiempo de llegada a un destino, 192
 Tren de alta velocidad, 128
 Velocidad de una máquina barrenieves, 78

ÍNDICE

A

- Abscisa, 132
- Agrupación, solución de ecuaciones usando, 102
- Algoritmo de la división, 273
- Amplitud
 - de un número complejo, 609
 - de una función trigonométrica, 449-450, 452-453
 - de una gráfica, 449
 - del movimiento armónico, 477
- Ángulo(s), 392-400
 - agudo (acutángulo), 394, 404
 - central, 394, 398
 - complementarios, 394, 473
 - coterminal, 392-393, 440
 - cuadrantales, 392, 415
 - de depresión, 473, 474
 - de elevación, 473-474, 566-567
 - de referencia, 440, 441, 442
 - definición de, 392
 - entre vectores, 599
 - funciones trigonométricas, 403-417
 - lado inicial, 392
 - lado terminal, 392
 - llano, 392
 - medidos, 394-397
 - medidos en grados, 392
 - medidos en radianes, 394
 - negativo, 392
 - obtusos, 394
 - posición estándar, 392
 - positivo, 392
 - recto, 392, 394
 - subtendido, 394
 - suplementario, 394
 - vértice, 392
- Aproximaciones, 15
 - sucesivas, 264
- Aproximadamente igual a (\approx), 3
- Apuestas, 791
- Arco
 - circular, 398
 - de una circunferencia, 394
- Área
 - de un sector circular, 399
 - de un triángulo, 134, 531, 576

- Argumento de un número complejo, 609, 611
 - de una función, 176
- Arreglos sin repeticiones, 771
- Asíntota(s)
 - de una hipérbola, 832
 - horizontales, 306
 - oblicuas, 315-317
 - verticales, 305, 430, 433, 463-464

B

- Base, 14, 19
 - de una función exponencial, 326
 - logarítmica, 348-349, 373
 - para notación exponencial, 19
- Binomios, 32, 761
 - multiplicación, 34-35
- Bisectriz, 134-135, 166

C

- Calculadora(s). *Véase también*
- Aproximación de valores funcionales con calculadoras graficadoras, 407, 443, 506-507
- cálculo de soluciones de una ecuación trigonométrica, 507
- característica POLY, 269, 285
- combinaciones, 782
- comprobación de ecuaciones, 62
- comprobación de factorizaciones, 40
- comprobación de identidades trigonométricas, 495
- conversión de radianes a grados, 397-398
- conversiones polar a rectangular, 859
- conversiones rectangular a polar, 861
- cuadrada, 690-691
- elaboración de una tabla, 49
- encontrar raíces, 617, 619
- encontrar un determinante, 698
- encontrar un producto punto, 597
- estimación de puntos de intersección, 151-154
- evaluación de expresiones, 5
- evaluación de potencias de funciones trigonométricas, 408
- exponentes racionales, 27
- factoriales, 76
- forma científica, 15
- forma escalonada reducida de una matriz, 670
- fórmulas de suma, 520
- funciones trigonométricas inversas, 552
- generación de una sucesión, 724-726
- graficado de ecuaciones polares, 864-866
- graficado de semielipses, 823
- graficado de una desigualdad, 649-650
- graficado de una ecuación, 144
- graficado de una función, 187-188
- graficado de una función definida por tramos, 200-202
- graficadora, operaciones con almacenamiento de valores, 5
- intersecciones en x , 144-145
- intersecciones en y , 144
- inversa de una función, 242
- inversa de una matriz cuadrada, 690-691
- listado y graficado de una sucesión, 733
- modo paramétrico, 845, 847
- multiplicación de matrices, 683
- permutaciones, 775
- prueba de desigualdades, 10
- raíz principal n -ésima, 23
- recíprocos, 7
- recta del mejor ajuste, 168-170
- sucesión definida recursivamente, 727, 734
- suma de una sucesión, 728-729
- sustracción, 7
- términos de una sucesión de sumas parciales, 730-731, 734
- trazo de puntos, 137-138
- valor absoluto, 12

- valor máximo (mínimo), 214-216
- vectores, 587-588
- Cancelación de factores comunes, 46
- Cantidad escalar, 581
- Cardioides, 867-868
- Caso ambiguo, 565, 574
- Catenaria, 343
- Centro
 - de una circunferencia, 149
 - de una elipse, 8, 16
 - de una hipérbola, 830
- Ceros(s)
 - de multiplicidad m , 283
 - de un polinomio, 281-291, 295
 - de una función, 180, 264, 267, 344-345
 - de una gráfica, 143
 - número, 6, 8
 - racionales de polinomios, 297-298
- Cerrado, definición de, 3
- Cielo, 427
- Cicloide, 852-853
- Cifras significativas, 15
- Circunferencia, 806
 - ecuación estándar de la, 147
 - radio y centro de la, 149
 - unitaria, 147
- Cociente, 8, 273
 - de diferencia, 183
 - de factoriales, 763-764
 - de funciones, 225
 - de números complejos, 611
 - de números reales, 8
 - en el proceso de división, 273
- Coefficiente(s), 19
 - binomiales, 763
 - inicial, 33
- Cofactor, 695-696
- Cofunción, 517
- Columna, de una matriz, 663
- Combinación, 779, 782
- Combinación lineal de i y j , 589-590
 - de renglones, 675
- Complemento, de un conjunto, 790
- Completar el cuadrado, 83, 148
- Componente(s)
 - de a sobre b , 601-602
 - de un vector, 583
- Compresiones horizontales de gráficas, 198
- Común denominador, 47
- Conclusión, 11
- Cónica degenerada, 806
- Conjugado
 - de un número complejo, 96-98
 - de una expresión, 51
- Conjunto(s), 31
 - complemento, 790
 - correspondencia entre, 175-176
 - intersección de, 116
 - subconjuntos de, 782
 - unión de, 116
- Constante(s), 31, 32
 - de proporcionalidad, 245
 - de variación, 245
 - suma de, 731
- Coordenada(s), 9
 - polares, 857-871
 - rectangulares, 132-138
 - relación con las coordenadas polares, 858-860
 - relación con las coordenadas rectangulares, 858-859
 - y, 132
- Correspondencia
 - biunívoca, 8, 583
 - entre conjuntos, 175
- Cota inferior, 287
- Crecimiento de bacterias, 330
- Cuadrantes, 132, 392, 416
- Curva, 842-843
 - cerrada, 843
 - cerrada simple, 843
 - de crecimiento de Gompertz, 345
 - de descenso mínimo, 853
 - de probabilidad normal, 330
 - ecuaciones paramétricas, 843
 - logística, 379
 - orientación, 844
 - parametrizada, 843-844, 847
 - plana, 842
 - puntos extremos, 843
- Cúspide, 852
- D**
- Decimal, 2-3
 - repetitivo infinito, 749
- Decremento exponencial, 327
- Definición de
 - ángulo de referencia, 440
 - apuestas de un evento, 791
 - asíntota horizontal, 306
 - asíntota vertical, 305
 - combinación, 779
 - componente de a sobre b , 601
 - conjugado de un número complejo, 96
 - curva plana, 842
 - determinante de una matriz, 694, 696, 698
 - ecuaciones paramétricas, 843
 - elipse, 816
 - evento, 786
 - excentricidad, 824
 - exponentes racionales, 27
 - factorial, 762
 - función (es), 176, 186
 - biunívoca o inyectiva, 235
 - compuesta, 226
 - coseno inversa, 545
 - cuadrática, 209
 - exponencial natural, 340
 - inversa, 237
 - lineal, 183
 - periódica, 426
 - seno inversa, 542
 - tangente inversa, 547
 - trigonómicas de cualquier ángulo, 413
 - trigonómicas de números reales, 421
 - trigonómicas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, 404
 - trigonómicas en términos de una circunferencia unitaria, 422
 - gráfica de una función, 179
 - hipérbola, 830
 - i y j , 588
 - igualdad y suma de matrices, 678
 - inversa de una matriz, 688
 - la distancia entre puntos sobre una recta coordenada, 13
 - logaritmo, 349
 - logaritmo común, 354
 - logaritmo natural, 355
 - magnitud de un vector, 583

matriz, 664
 medida en radianes, 394
 menores y cofactores, 695
 movimiento armónico simple, 476
 múltiplo escalar de un vector, 585
 negativo de un vector, 586
 parábola, 806
 pendiente de una recta, 157
 permutación, 773
 polinomio, 33
 probabilidad de un evento, 787
 producto de dos matrices, 681
 producto de un número real y una matriz, 679
 producto punto, 596
 recursiva, 726-727, 734
 raíz n -ésima de un número, 23
 sucesión aritmética, 738
 sucesión geométrica, 745
 sucesión infinita, 722
 suma de vectores, 584
 sustracción de vectores, 587
 trabajo, 604
 valor absoluto, 12
 valor absoluto de un número complejo, 608
 valor esperado, 794
 vector cero, 586
 vectores paralelos y ortogonales, 598
 Delta, 157
 Denominador, 8
 mínimo común, 47
 racionalización del, 26, 51, 98
 Descartes, René, 132
 Descomposición en fracción parcial, 709-714
 Desigualdad(es), 9, 110
 continua, 11, 114
 cuadrática, 120, 121
 equivalentes, 111
 gráficas, 111, 644-666
 lineal, 645
 racional, 114
 propiedades, 112, 125
 sistemas, 644-650
 solución, 110-117, 268
 Desintegración radiactiva, 331
 Desplazamiento(s), 582
 de fase, 451-454, 464

de gráficas, 194-196
 horizontales de gráficas, 195-196
 Determinantes, 694-700
 propiedades de, 701-707
 Diagrama(s)
 de árbol, 770
 de signos, 120-124
 Diferencia
 común, 738
 de dos cuadrados, 39
 de dos cubos, 39, 100
 de funciones, 225
 de matrices, 679
 de números complejos, 96
 de números reales, 7
 Dígitos, 15
 Dina, 602
 Dirección(es), 475-476, 567
 negativa, 9
 positiva, 9
 Directriz
 de una cónica, 873
 de una parábola, 808
 Discriminante, 85
 Distancia, entre puntos de una recta
 coordenada, 13
 División
 de números reales, 7
 de polinomios, 273
 larga de polinomios, 273
 sintética, 275-278, 288
 Divisores, 2
 Dominio
 de una expresión algebraica, 32
 de una función, 176
 compuesta, 238
 racional, 303-304
 trigonométrica, 433
 implícito, 177

E

e , número, 340
 Ecuación(es), 60-66, 102-105
 algebraica, 6
 condicional, 61
 cuadráticas, 80-89, 504
 de rectas, 161-164
 de una bisectriz, 166
 de una circunferencia, 147
 de una elipse, 818

de una hipérbola, 833
 de una parábola, 211-213, 809
 de una semiélipse, 820
 en problemas aplicados, 69-76
 en x , 60
 en x y y , 141
 en y , 843
 equivalente, 60
 estándar
 de una circunferencia, 148
 de una elipse, 818
 de una hipérbola, 833
 de una parábola, 808
 exponencial, 328, 372-376
 gráficas, 141-154
 homogéneas, sistema de, 672
 identidad, 61
 lineal, 61-63, 163, 635-641
 con dos variables, 635-641
 con más de dos variables, 662-675
 logarítmica, 351, 366-368, 376-381
 paramétricas, 843
 de una cicloide, 852-853
 de una recta, 848-849
 polares, 861-871
 de cónicas, 873-878
 raíz, 143
 reducida, 291
 sin soluciones, 63
 sistemas de, 626-632
 solución, 60
 teoría de, 281
 tipo cuadrática, 105-106
 trigonométrica, 500-511
 Eje(s)
 conjugado de una hipérbola, 831
 coordenados, 132
 de una elipse, 818
 de una hipérbola, 831
 de una parábola, 142, 807
 imaginario, 607
 mayor de una elipse, 818
 menor de una elipse, 818
 polar, 857
 real, 607
 transverso de la hipérbola, 831
 y , 132

- Elemento
 de un conjunto, 31
 de una matriz, 664
- Elipse, 806, 816-826, 873
 centro, 816
 ecuación estándar, 818
 ecuaciones polares, 875
 eje mayor, 818
 eje menor, 818
 excentricidad, 824
 focos, 816
 propiedad reflexiva, 825
 vértices, 818
- Elipsoide, 826
- Elongación de gráficas, 197-198
- Elongaciones horizontales de gráficas, 198
- Ensayo y error, método de, 41
- Enteros, 2
 no negativos, 2
 positivos, 2
- Equipo graficador, 136. *Véase también* Calculadora graficadora
- Erg, 603
- Escala Richter, 356
- Escalar, 581
- Espacio muestra, 786
- Espiral de Arquímedes, 869
- Eventos, 786
 independientes, 792
 mutuamente excluyentes, 789
- Excentricidad, 824, 873
- Expansión
 binomial, 765-767
 de un determinante, 698
- Experimento, 786
- Exponente(s), 14, 19-22
 cero, 20
 ecuaciones que contienen, 102
 irracional, 28, 326
 leyes de los, 20-21
 negativo, 20, 27
 racional, 27
- Expresión(es)
 algebraica, 31-43
 fraccionaria, 45-53
 productos y cocientes, 47
 racionales, 45
 ecuaciones que contienen, 64
 simplificadas, 46
 sumas y diferencias, 48
 trigonométrica, 494
- Extremo, 263
- F**
- Factor(es), 2, 37
 comunes, 704
 cancelación, 46
 de amortiguación, 468
 no triviales, 37
- Factorización(es), 37
 en la solución de ecuaciones trigonométricas, 503-505
 en primos, 48
 fórmulas para, 38
 método de, 81
 por agrupación, 42
 por ensayo y error, 40-41
- Figura de Lissajous, 851-852
- Foco(s), 830
 de un paraboloide, 811
 de una cónica, 873
 de una elipse, 816
 de una hipérbola, 830
 de una parábola, 808
- Forma científica, 14-15
 de punto-pendiente, 162-163
 escalonada, de una matriz, 666-669, 701
 reducida, 669-670
 exponencial, 349, 609
 factorial de una permutación, 774
 general de la ecuación de una recta, 164
 logarítmica, 349
 polar de un número complejo, 609
 reducida, 669-670
 simétrica de una recta, 172
 trigonométrica de números complejos, 607, 609
- Fórmula(s)
 cuadrática, 84, 86-88
 de ángulo
 doble, 526
 mitad, 529-530
 múltiple, 526-532
 de aproximación, 435
 de cambio de base, 373
 de cofunción, 517
 de crecimiento (o decrecimiento), 342
 de distancia, 132-134
 de Euler, 609
 de factorización, 38
 de Herón, 577-578
 de interés compuesto, 332, 338-339
 continuamente, 339, 341
 simple, 71
 de la distancia, 132-134
 de reducción, 520-521
 de suma, 515-516, 518-519
 a producto, 537-538
 de sustracción, 515-516, 518
 del producto, 36
 a suma, 536-537
 del punto medio, 135
 especial de cambio de base, 374
 para negativos, 428-429
- Fracción(es), 8
 complejas, 50
 parciales, 709-714
 suma, 47-48
- Frecuencia en el movimiento armónico simple, 477
- Fuerza, 602
 constante, 602-604
 resultante, 583
- Función(es). *Véanse también* Funciones trigonométricas
 algebraica, 226
 amplitud, 449
 arcocoseno, 545
 arcoseno, 543
 arcotangente, 547
 biunívoca o inyectiva, 235, 327, 351
 ceros, 180, 264, 266
 circular, 422
 cociente de, 225
 compuesta, 226-232
 constante, 181
 continua, 262
 cosecante, 404, 429
 coseno, 404, 429
 fórmula de suma para la, 516
 fórmula de sustracción para la, 515-517
 hiperbólica, 343
 inverso, 545-546

valores de una circunferencia
unitaria, 847
cotangente, 404, 429-430, 519
crescente, 181, 237
cuadrática, 209-219
de crecimiento, 327
de elevar
al cuadrado, 180
al cubo, 180
de Gompertz, 337, 345
de una variable compleja, 281
decreciente, 181, 237
definición, 176
alternativa, 186
definida
en un conjunto, 177-178
por tramos, 199-202
diferencia de, 225
dominio, 238
implicado, 177
entero mayor, 202
existencia, 178
exponencial, 326-333
natural, 338-345
extremo de, 263
gráfica, 179-180, 187-188, 193-204
identidad, 181
igualdad, 177
imagen, 238
impar, 193
indefinidas, 178
inversa, 235-242
lineal, 183-185
logarítmica, 348-359
natural, 354
logística, 337
mayor entero, 202
objetivo, 654
operaciones con, 224-232
par, 193
periódica, 426
polinomial, 226, 266-269
producto de, 225
racional, 303-318
raíz
cuadrada, 180
cúbica, 180
recíproca, 307
secante, 404, 429, 430
hiperbólica, 376

seno, 404, 429, 500
inverso, 542-545
fórmulas de suma y sustracción,
518-519
valores sobre la circunferencia
unitaria, 847
sucesión infinita como, 722
suma de, 225
tangente, 404, 429-430, 501
inversa, 547-548
trascendentes, 226
trigonometría inversa, 443,
541-553, 888-889
trigonométricas, 404
valor(es)
absoluto, 194
de, 177, 178
de prueba, 264
máximo, 211, 214, 216-217
mínimo, 211, 214
Función(es) trigonométrica(s), 403
amplitud, 559
de ángulos, 403-417
de números reales, 421-435
dominios, 433
en términos de
un triángulo rectángulo, 404
una circunferencia unitaria, 422,
890
fórmulas de
ángulo doble, 526
ángulo mitad, 529-530
ángulo múltiple, 526-532
cofunción, 517
de producto a suma, 536-537
de suma a producto, 537-539
de sustracción, 515-516, 518
gráficas, 425, 431, 433, 448-458,
463-469, 510-511, 888-890
identidades de ángulo mitad,
527-528
inversa, 443, 541-553
par e impar, 429
signos, 416
valor(es)
absoluto, 467
especiales, 406, 424
y ángulos de referencia,
440-443
y calculadoras, 443-446

6

Gauss, Carl Friedrich, 281
Grado
como medida angular, 392
de un polinomio, 33
relación con el radián, 395-397
Gráfica(s). Véase también Calculadora
graficadora 510-511, 888-890
amplitud, 449
compresiones
horizontales, 198
verticales, 197
comunes y sus ecuaciones, 884-885
de desigualdades, 111
de ecuaciones, 141-154
lineales, 164
logarítmicas, 368-369
de funciones, 179-180, 187-188,
193-204
de la figura de Lissajous, 851-852
de un conjunto de números reales,
111
exponenciales, 328-330, 343
logarítmicas, 352-354
polinomiales, 265-266
racionales, 309-310, 312-315, 317
trigonométricas, 425, 431, 433,
448-458, 463-469, 510-511,
888-889
de un conjunto de pares ordenados,
141
de un sistema de desigualdades,
644-646, 649-650
de una curva parametrizada, 844,
847
de una curva plana, 842
de una ecuación polar, 861,
863-866, 868-869
de una sucesión, 723-724
definición, 141
desplazamientos
horizontales, 195-196
verticales, 194-195
elongaciones
horizontales, 198
verticales, 197
hueco, 311, 326, 435
intersecciones con el eje x , 530, 538
puntos
de intersección, 151-154

- retorno, 263, 267
 reflexión, 198-199
 resumen de transformaciones, 886-887
 simetrías, 146-147
- Guías**
- para el método de sustitución de dos ecuaciones en dos variables, 627
 para encontrar descomposiciones en fracciones parciales, 710
 funciones inversas, 239
 la forma escalonada de una matriz, 667
 un elemento en un producto de matrices, 680
 para la división sintética, 276
 para resolver problemas de aplicación, 69
 problemas de variación, 247
 un problema de programación lineal, 655
 una expresión que contiene expresiones racionales, 64
 para trazar la gráfica de una desigualdad en x y y , 645
 función racional, 309
- H**
- Hipérbola, 307, 806, 830-838, 873
 asíntotas, 832
 centro, 830
 ecuación estándar, 833
 ecuaciones polares, 876
 eje transversal, 831
 ejes conjugados, 831
 focos, 830
 propiedad reflexiva, 838
 ramas, 832
 rectángulo auxiliar, 832
 vértices, 831
- Hipotenusa, 404
- Hipótesis, 11
- de inducción, 755
- Hueco, en una gráfica, 311, 326, 435
- I**
- i el vector, 588-589
 i, número complejo, 94
 Identidad(es)
 aditiva, 4
 cotangente, 409
 de ángulo mitad, 527-528
 de diferencia, 515
 ecuación como, 61
 fundamentales, 408-411, 417
 multiplicativa, 4
 pitagóricas, 408-409
 recíprocas, 405, 409
 suma, 515
 tangente, 409, 518
 trigonométrica, comprobación, 412-413, 494, 496-497
 trigonométricas, 494-498
 Igual a ($=$), 31
 Igualdad, 60
 de conjuntos, 31
 de funciones, 177
 de matrices, 678
 de números
 complejos, 94-95
 reales, 2
 de polinomios, 33
 de sucesiones, 723
 de vectores, 582
 propiedades, 5
 Imagen, 176
 de un radical, 24
 de una función, 176, 238, 433
 especular, 147
 índice de sumatoria, 728
 Inducción matemática, 754-759
 Infinito (∞), 111, 305
 Interés
 compuesto, 331-332
 compuesto continuamente, 339, 341
 simple, 71
 Intersección(es)
 de conjuntos (\cap), 116
 de una gráfica, 143
 en x , 143-145, 433, 530, 538
 en y , 143-144, 433
 Intervalo(s), 111
 abierto, 111
 cerrado, 111
 indefinido, 111
 infinito, 111
 semiabierto, 111
 Inverso(a)
 aditivo, 4, 678
 de un número real, 4
 de una matriz, 687-692
 multiplicativo, 98
 de un número complejo, 98
 Inversamente proporcional, definición de, 246
 Invertibilidad de matrices, 699
- J**
- j, el vector, 588-589
- Joule, 603
- K**
- Kepler, Johannes, 824
- L**
- Lado
 adyacente, 404
 opuesto, 404
 terminal de un ángulo, 392
- Ley(es)
 de cosenos, 572-575
 de crecimiento (o decrecimiento), 342
 exponencial, 327
 de exponentes, 20-21
 de logaritmos, 364-366
 de radicales, 24
 de senos, 562-566
 de signos, 11
 de tricotomía, 10
 del enfriamiento de Newton, 357
 del paralelogramo, 583
 del triángulo, 582
- Limaçon(es) (caracoles), 867-868
- Límites para ceros, 287-289
- Litotriptero, 826
- Logaritmos(s)
 base, 348
 cambio de base, 373
 comunes, 354
 fórmulas especiales para cambio de base, 374
 leyes, 364-366
 naturales, 355
 propiedades, 364-369
- Longitud
 de arco, 543
 de un arco circular, 398
 de un segmento de recta, 13

M
 Magnitud, de un vector, 581, 583-584, 588
 Mapas, 176
 Más o menos (\pm), 20
 Matriz(es) algebra, 677-685
 aumentada, 663
 cero, 678
 columna, 683
 columnas de, 663
 combinación lineal de renglones, 675
 cuadrada, 430, 664
 de coeficientes, 663
 aumentada, 663
 de orden n , 664
 de renglón equivalente, 665
 de un sistema de ecuaciones, 663
 definición, 664
 determinante, 694, 698
 elemento de, 664
 elementos de la diagonal principal, 664
 equivalente, 665
 forma escalonada, 666-669
 forma escalonada reducida, 669-670
 identidad, 687-688
 igualdad, 678
 inversa, 687-692
 inverso aditivo, 678-679
 invertible, 688
 notación de doble subíndice, 664
 producto, 681
 producto de un número real con, 679
 renglón, 683
 renglones de, 663
 suma, 678
 sustracción, 679
 tamaño, 664
 transformaciones elementales de renglón, 665
 Máximo factor común (mfc), 38, 53
 Mayor o igual que (\geq), 11
 Mayor que ($>$), 9
 Media
 aritmética, 741
 geométrica, 748
 Menor, 695-696

Menor o igual que (\leq), 11
 Menor que ($<$), 9
 Menos infinito ($-\infty$), 305
 Método
 de completar el cuadrado, 83
 de eliminación, 637, 640, 662
 de ensayo y error, 40
 de factorización, 81
 de sustitución, 627-629
 inverso, 692
 Mínimo común denominador (mcd), 47
 Minutos, 394, 398
 Modelo matemático, 168
 Modo
 conectado, 317
 de punto, 317
 de radianes, 421
 Módulo, de un número complejo, 609, 611
 Monomio, 32
 Movimiento
 amortiguado, 477
 armónico, 476-477
 armónico simple, 476
 de un punto, 846
 Multiplicación de matrices, 680-685
 propiedades, 4
 Multiplicidad de un cero, 284
 Múltiplo constante, de una ecuación, 636
 Múltiplo escalar de un vector, 583, 585-586, 588

N

n factorial, 762
 n -ésima potencia, 19
 n -ésima suma parcial, 730, 746
 Negativo(s)
 de un número real, 4, 6-7
 de un vector, 586
 fórmulas, 428
 Newton, 603
 No polinomios, 34
 Notación
 de doble subíndice, 664
 de sumatoria, 728, 742
 equivalente, 32
 exponencial, 14, 19, 27
 factorial, 762-764

Numerador, 8
 decimal repetitivo infinito como, 749
 racionalización, 51-52
 Número(s)
 amplitud, 609
 argumento, 609-611
 cociente, 98, 611
 complejo, 94-100
 no real, 94
 conjugados, 96-98
 diferencia, 96
 enteros, 2
 forma trigonométrica, 607, 609
 igualdad de, 95
 imaginario, 94
 puro, 94
 inverso multiplicativo, 98
 irracional, 3
 módulo, 609, 611
 multiplicación, 94-95
 por un número real, 96
 naturales, 2
 parte
 imaginaria, 95
 real, 95
 primo, 2
 producto, 611
 propiedades, 4
 raíces cuadradas, 99
 raíz n -ésima, 616-618
 racional, 2
 reales, 2-15
 negativos, 9
 positivos, 9
 suma, 95
 unidad real, 100
 valor absoluto, 608, 610
 y la unidad imaginaria i , 94

O

Onda cosenoidal, 427
 amortiguada, 468
 Onda senoidal, 427, 454
 amortiguada, 468
 Orden de una matriz, 664
 Ordenada, 132
 Ordenamiento, 11
 Orientación, de una curva parametrizada, 844

Origen, 8, 132, 818, 833, 857
Oscilación, 476-477

P

Par

de ceros conjugados de un polinomio, 295
ordenado, 132, 141

Parábola(s), 142-143, 806-813, 873

directriz, 808

ecuación

estándar, 211-213, 809

polar, 876

cje, 807

foco, 808

propiedad reflexiva, 811

vértice, 213-214, 807

Paraboloide, 811

Paralelogramo, diagonales, 575

Parametrización, 843

Parámetro, 843

Parte imaginaria de un número complejo, 95

Parte real de un número complejo, 95

Pendiente(s)

de rectas paralelas, 164

de rectas perpendiculares, 165

de una recta, 157-160

negativa, 158

positiva, 158

Periodo, 426, 433, 450, 452-453, 464

de interés, 338

del movimiento armónico, 477

Permutaciones, 770-775

distinguibles, 778

no distinguibles, 778

Plano

complejo, 607

coordenado, 132

de Argand, 607

z_0 , 857

xy , 132

Polinomio(s), 32-33

cero, 33

cero real, 264

ceros de un, 281-291

ceros racionales, 297-298

coeficiente inicial, 33

como producto de factores lineales y cuadráticos, 298

constante, 33

cúbico, 262

divisible, 273

división, 36, 273

en más de una variable, 35

en x , 32, 33

factorización, 37-38, 41, 281-282

grado, 33

iguales, 33

irreducible, 37

límites para los ceros, 287-289

multiplicación, 35

par de ceros conjugados, 295

primo, 37

suma y resta, 34

término constante, 286

término de, 33

Polo, 857

Posición estándar de un ángulo, 392

Primer término de una sucesión, 722

Principal, 71

Principio

de inducción matemática, 755

extendido de inducción matemática, 758-759

fundamental de conteo, 771

Probabilidad, 786-794

Problema de programación lineal, 655

Problemas de aplicación en

ecuaciones, 69-76

trigonometría en, 471-477

Producto(s)

de funciones, 225

de matrices, 679, 681

de números complejos, 94, 611

de números reales, 3

escalar, 596

interno, 596

punto, 596-605

que implican el cero, 6

Programación lineal, 653-659

Promedio, 741

Propiedad(es)

asociativas, 4

conmutativas, 4

de cocientes, 8

de conjugados, 98

de desigualdades, 112, 125

de i , 94

de la igualdad, 5

de logaritmos, 364-369

de negativos, 6

de números reales, 4

de raíces n -ésimas, 24

de valores absolutos, 116

distributiva, 4

refractoria de una elipse, 825

de una hipérbola, 838

de una parábola, 811

Proporcionalidad conjunta, 248

constante de, 245

directa, 246

inversa, 246

Proyección, de a sobre b , 601

Proyector, trayectoria, 849-851

Prueba de recta horizontal, 236

Pruebas de simetría, 146

Punto(s)

de intersección, de gráficas, 152-153

de prueba, 644

en una circunferencia unitaria correspondiente a un número real, 422

extremos

de un intervalo, 111

de una curva, 843

inicial de un ángulo, 392

inicial de un vector, 581

medio, 136

terminal de un vector, 581

R

n -ada ordenada, 772

Racionalización

de denominadores, 26-27

de numeradores, 51-52

Radián, 394-397, 500

Radical(es), 24-29

combinación, 28-29

ecuaciones que contienen,

103-105

eliminación de factores de, 25-26

leyes, 24

Radicando, 24

Radio de una circunferencia, 149

Radioterapia, 344

Raíz(es)

cuadrada, 3, 23, 98-99

de números negativos, 99
 principal, 23, 98
 cúbica, 23
 de la unidad, 100, 618
 de multiplicidad, 2, 82
 m , 283
 de una ecuación, 60, 143
 doble, 82
 existencia, 24
 extraña, 64
 funcional, 143
 n -ésima, 23, 614, 616-618
 de la unidad, 618
 de números complejos, 614-619
 principal n -ésima, 23
 Ramas
 de la tangente, 430
 de una hipérbola, 832
 Rapidez
 angular, 400
 lineal, 400
 Rayos, 392
 Razón común, 745
 Recíproco(s), 4, 7, 11
 de coordenadas y, 431
 notación, 6
 Recta(s), 157-170
 coordenada, 9
 de mejor ajuste, 168-170
 ecuación, 164
 paramétrica, 848-849
 polar, 862
 forma
 de pendiente-intersección, 163
 de punto-pendiente, 162
 general, 164
 simétrica, 172
 horizontal, 161
 paralela, 164
 pendiente, 157-160
 perpendicular, 165
 real, 9
 tangente, a una parábola, 811
 vertical, 161
 Rectángulo auxiliar, 832
 Rectas
 paralelas, 164
 perpendiculares, 165
 Reflexión de una gráfica, 147,
 198-199, 241

Regla de Cramer, 705-707
 Regla de, los signos de Descartes,
 286-287
 Relación con el grado, 396
 Renglón, de una matriz, 663
 Renglón equivalente (o equivalente
 por renglones), 665
 Representación geométrica, 607
 Residuo, en el proceso de división, 273
 Restricciones de una función objetivo,
 654
 Resultado de un experimento, 786
 Rosa de cuatro pétalos, 869
S
 Satisfacer una ecuación, 60
 Secciones cónicas, 806
 Sector circular, 399
 Segmento de recta dirigido, 581
 Segundo, 394, 398
 Semicircunferencia, 149
 Semiellipse, ecuaciones para,
 820, 823
 Semiipseoide, 826
 Semiparábola, gráfica de, 8, 12
 Semiplano, 645
 Serie(s), 748-749
 geométrica, infinita, 748
 infinita, 7495
 infinita alternante, 750
 Signo(s)
 de desigualdad, 9
 de funciones trigonométricas, 416
 de un número real, 10-11
 leyes, 11
 radical, 24
 resultante, 120
 variación de, 286
 Simetría, 146-147, 241, 433, 870
 Simplificación
 de un radical, 25
 de una expresión
 exponencial, 21
 racional, 46
 Sistema(s)
 consistente de ecuaciones, 638
 coordenado, 9, 132
 de coordenadas
 cartesianas, 132-138
 rectangulares, 132-138

de desigualdades, 644-650
 de ecuaciones, 626-632
 con más de dos variables,
 662-675
 consistentes, 638
 dependientes y consistentes, 638
 en dos variables, 635-641
 equivalentes, 629, 636
 homogéneos, 672
 inconsistentes, 638
 matriz de, 663
 solución, 626, 629
 de números complejos, 94
 dependiente y consistente, 638
 equivalentes, 629, 636
 homogéneo de ecuaciones, 672
 inconsistente de ecuaciones, 638
 polar coordenado, 857
 para una variable, 65
 Solución(es)
 de un sistema de desigualdades,
 644, 646
 de un sistema de ecuaciones,
 626, 629
 de un triángulo, 471
 de una desigualdad, 110-111
 de una ecuación, 60
 en x , 60
 en x y y , 141
 polar, 861
 extrañas, 64
 factibles, 654
 límites, 288
 trivial, 672
 Subconjunto de un conjunto, 31, 782
 Subíndice de la columna, 664
 Subíndice de renglón, 664
 Sucesión(es), 722
 aritmética, 738-742
 de sumas parciales, 730
 definida recursivamente, 726
 generación, 724-726
 geométrica, 745-751
 gráfica, 723-724, 733
 igualdad, 723
 infinita, 722
 término n -ésimo, 723
 Suma parcial, 730, 746
 Suma(s)
 de coordenadas y, 467

- de dos cubos, 39
 - de funciones, 225
 - de funciones trigonométricas, 468, 521
 - de matrices, 678
 - de números complejos, 94
 - de números reales, 3
 - de una serie, 749
 - de una sucesión aritmética, 740
 - de una sucesión geométrica, 746-747
 - de vectores, 582, 584-586, 588
 - parciales, 730, 746
 - geométrica infinita, 748, 750
 - propiedades de la, 4
 - teorema sobre, 732
 - Sustitución, 662
 - trigonométrica, 497-498
 - Sustracción de números complejos, 96
 - de matrices, 679
 - de números reales, 7
- T**
- Tabla de signos, 120, 121
 - Teorema
 - cambio de base, 373
 - de cónicas, 873
 - de De Moivre, 614-616
 - de factorización completa, para polinomios, 281-282
 - de la aritmética, 2
 - de Pitágoras, 106, 133, 405-406, 549
 - del álgebra, 281
 - del binomio, 761-768
 - del factor, 275
 - cero, 6, 81, 504-505
 - del residuo, 1-74, 274-275
 - del valor intermedio, para funciones polinomiales, 263-264
 - fundamental del álgebra, 281
 - para localizar el vértice de una parábola, 213
 - sobre amplitudes
 - y periodos, 450
 - periodos y desplazamientos de fase, 452
 - sobre ángulos de referencia, 442
 - sobre asíntotas horizontales, 308
 - sobre cómo expresar un polinomio como un producto de factores lineales y cuadráticos, 296
 - sobre ecuaciones polares de cónicas, 875
 - sobre el coseno del ángulo entre vectores, 599
 - sobre el número de combinaciones, 779
 - de permutaciones diferentes, 773
 - exacto de ceros de un polinomio, 285
 - máximo de ceros de un polinomio, 282
 - sobre el valor máximo o mínimo de una función cuadrática, 214
 - sobre eventos
 - independientes, 792
 - mutuamente excluyentes, 789
 - sobre exponentes negativos, 22
 - sobre funciones
 - inversas, 238
 - trigonométricas pares e impares, 429
 - sobre invertibilidad de matrices, 699
 - sobre la expansión de determinantes, 698
 - sobre la naturaleza biunívoca de las funciones
 - crecientes o decrecientes, 237
 - exponenciales, 327
 - logarítmicas, 351
 - sobre la probabilidad de ocurrencia de uno de dos eventos, 790
 - sobre la suma de una constante, 731
 - serie geométrica infinita, 748
 - sucesión, 732
 - sucesión aritmética, 739
 - sucesión geométrica, 746
 - sobre las pendientes de rectas
 - paralelas, 164
 - perpendiculares, 165
 - sobre límites para los ceros reales de polinomios, 295
 - sobre los ceros racionales de un polinomio, 297
 - sobre pares de ceros conjugados de un polinomio, 295
 - sobre permutaciones distinguibles, 778-779
 - sobre producto punto, 599
 - sobre productos y cocientes de números complejos, 611
 - sobre propiedades de matrices, 679-680
 - sobre raíces n -ésimas, 616
 - sobre renglones idénticos, 703
 - sobre sistemas equivalentes, 636
 - sobre transformaciones de renglones de matrices, 665
 - y columnas de un determinante, 702
 - sobre un renglón de ceros, 699
 - sobre una gráfica de la función tangente, 464
 - sobre valores funcionales repetidos para seno y coseno, 426
 - sobre vectores ortogonales, 600
 - Teoría de ecuaciones, 281
 - Término de un polinomio, 33
 - de una serie, 749
 - de una sucesión, 722
 - aritmética, 739
 - geométrica, 745
 - Tiempo de duplicación, 357
 - Transformación(es)
 - de columna, 703
 - de determinantes, 702-703
 - de gráficas, 204
 - de sistemas de ecuaciones, 636
 - de renglones
 - de matrices, 665
 - de una matriz, 665, 703
 - elementales de renglón, 665
 - Traslaciones, 196
 - Trayectoria de un proyectil, 849-851
 - Trazo de puntos 132, 137-138
 - Trazo de una gráfica, 111, 144, 309
 - Tríada ordenada, 629
 - Triángulo, 471
 - área, 134, 576
 - de Pascal, 767, 783
 - isósceles, 406, 531
 - oblicuo (oblicuángulo), 562-563, 572
 - rectángulo, 403, 471-473
 - vértices, 471

U

Unidad astronómica (UA), 825
Unidad imaginaria, 94

V

Valor absoluto, 11-13, 25
de prueba, 120, 264
de un número real, 608
de una función trigonométrica,
467
ecuaciones que contienen, 102
esperado, 794
gráfica de una
desigualdad que contiene, 204
ecuación que contiene, 203

propiedades del, 116
sistemas de desigualdades que
contienen, 647

Valor máximo de una función
cuadrática, 211, 214, 216-217

Valor mínimo de una función
cuadrática, 211, 214

Valores polares, 867

Variable(s)
de entrada, 185
de salida, 185
de sumatoria, 728
dependiente, 185
independiente, 185
linealmente relacionadas, 167

Variación

conjunta, 248
directa, 246
inversa, 246

Vector(es)

cero, 586
equivalentes, 582
ortogonales, 598, 600
posición, 583
paralelos, 598, 600
resultante, 591

Vida media, 331

DE NÚMEROS REALES



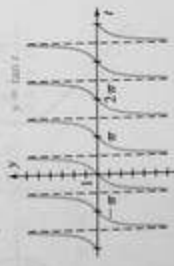
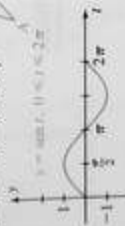
$$\begin{aligned}\sec t &= \frac{1}{\cos t} & \csc t &= \frac{1}{\sin t} \\ \tan t &= \frac{\sin t}{\cos t} & \cot t &= \frac{\cos t}{\sin t}\end{aligned}$$

LEY DE LOS SENOS

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

LEY DE LOS COSENO

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma\end{aligned}$$



DE ÁNGULOS AGUDOS



$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} & \csc \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} \\ \cos \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} & \sec \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \\ \tan \theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} & \cot \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}}\end{aligned}$$

TRIÁNGULO OBLICUO



$$\csc t = \frac{1}{\sin t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}$$

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\cos t = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

FÓRMULAS PARA
ÁNGULOS NEGATIVOS

$$\sin(-t) = -\sin t$$

$$\cos(-t) = \cos t$$

$$\tan(-t) = -\tan t$$

$$\cot(-t) = -\cot t$$

$$\sec(-t) = \sec t$$

$$\csc(-t) = -\csc t$$

FÓRMULAS DE ADICIÓN

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

FÓRMULAS DE SUSTRACCIÓN

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

FÓRMULAS DE MEDIO ÁNGULO

$$\sin \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}}$$

$$\cos \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan \frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\sin u} = \frac{\sin u}{1 + \cos u}$$

FÓRMULAS DE ÁNGULO DOBLE

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$

$$= 1 - 2 \sin^2 u$$

$$= 2 \cos^2 u - 1$$

$$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

FÓRMULAS DE TRIGONOMETRÍA

A partir de P , circunferencia C , man V área de la superficie curva S d h , radio r .

CILINDRO RECTANGULO

ma de Diágonos:
 $= a^2 + b^2$

TRIANGULO

$$P = a + b + c$$



10

$$C = 2\pi r$$



A

4

$$S = 4\pi r^2$$



DISCO CIRCULAR RECTO

$$S = 2\pi rh$$

CIRCULAR RECTO

$$S = \pi r^2$$



FÓRMULAS DE TRIGONOMETRÍA

FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ son
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

FÓRMULAS DE FACTORIZACIÓN ESPECIALES

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x + y)(x - y) \\ x^2 + 2xy + y^2 &= (x + y)^2 \\ x^2 - 2xy + y^2 &= (x - y)^2 \\ x^3 - y^3 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) \\ x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

EXPONENCIALES Y LOGARÍTMOS

$$\begin{aligned} y &= \log_a x \text{ significa } a^y = x \\ \log_a xy &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \\ \log_a x^r &= r \log_a x \\ \log_a a^x &= x \\ \log_a 1 &= 0 \\ \log_a a &= 1 \\ \log_a x &= \log_{a^m} x^m \\ \log_a a &= \log_a x \\ \log_a a &= \log_a b \end{aligned}$$

EXPONENCIALES Y RADICALES

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n} & a^m a^n &= \sqrt[n]{a^m} \\ a^m a^n &= a^{m-n} & a^m a^n &= \sqrt[n]{a^m} \\ (a^m)^n &= a^{mn} & a^m a^n &= (\sqrt[n]{a})^m \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} & \sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[n]{a^m} \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} & \frac{1}{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} & \sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[n]{a^m} \end{aligned}$$

FORMA PUNTO-PENDIENTE DE UNA RECTA

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde m es la pendiente.



FORMA PENDIENTE-INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

$$y = mx + b$$

donde m es la pendiente.



CIRCUNFERENCIA

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



ELIPSE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a^2 = a^2 + b^2$



ELIPSE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

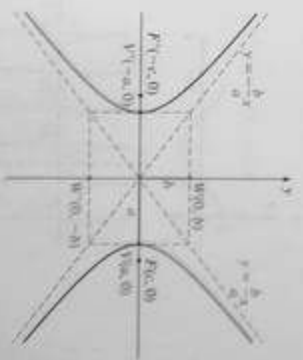
donde $a^2 = a^2 + b^2$



HIPÉRBOLA

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$



SECCIONES CÓNICAS

FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EXPONENTES Y RADICALES

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\sqrt[n]{a^{-n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

VALOR ABSOLUTO ($d > 0$)

$|x| < d$ si y sólo si

$$-d < x < d$$

$|x| > d$ si y sólo si

$$x > d \text{ o bien } x < -d$$

MEDIAS

Media aritmética A de n números

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Media geométrica G de n números

$$G = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}, a_i > 0$$

FÓRMULAS DE PRODUCTOS NOTABLES

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

TEOREMA BINOMIAL

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k} x^{n-k}y^k + \cdots + y^n$$

$$\cdots + \binom{n}{k} x^{n-k}y^k + \cdots + y^n$$

$$\text{donde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

FÓRMULAS DE FACTORIZACIONES NOTABLES

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

DESIGUALDADES

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$

Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$

Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$

SUCESIONES

n -ésimo término de una sucesión aritmética con a_1 como primer término y d como diferencia común

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

La suma S_n de los primeros n términos de una sucesión aritmética

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\text{o } S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

n -ésimo término de una sucesión aritmética con a_1 como primer término y r como razón común

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

La suma S_n de los primeros n términos de una sucesión geométrica

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

$y = \log_a x$ significa $a^y = x$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log x = \log_{10} x$$

$$\ln x = \log_e x$$

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



PENDIENTE m DE UNA RECTA

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



FORMA PUNTO-PENDIENTE DE UNA RECTA

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



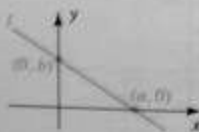
FORMA PENDIENTE-INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

$$y = mx + b$$



FORMA DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$



ECUACIÓN DE UN CÍRCULO

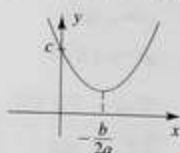
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

$$y = ax^2, a > 0$$

$$y = ax^2 + bx + c, a > 0$$



CONSTANTES

$$\pi \approx 3.14159$$

$$e \approx 2.71828$$

CONVERSIONES

$$1 \text{ centímetro} \approx 0.3937 \text{ pulgadas}$$

$$1 \text{ metro} \approx 3.2808 \text{ pies}$$

$$1 \text{ kilómetro} \approx 0.6214 \text{ milla}$$

$$1 \text{ gramo} \approx 0.0353 \text{ onza}$$

$$1 \text{ kilogramo} \approx 2.2046 \text{ libras}$$

$$1 \text{ litro} \approx 0.2642 \text{ galón}$$

$$1 \text{ mililitro} \approx 0.0381 \text{ onza fluida}$$

$$1 \text{ joule} \approx 0.7376 \text{ pie-libra}$$

$$1 \text{ newton} \approx 0.2248 \text{ libra}$$

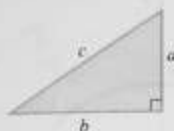
$$1 \text{ lumen} \approx 0.0015 \text{ watt}$$

$$1 \text{ acre} \approx 43\,560 \text{ pies cuadrados}$$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

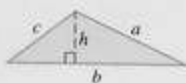
área A perímetro P circunferencia C volumen V área de superficie curva S altura h radio r

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

TRIÁNGULO



$$A = \frac{1}{2}bh \quad P = a + b + c$$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO



$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

RECTÁNGULO



$$A = la \quad P = 2l + 2a$$

PARALELOGRAMO



$$A = bh$$

TRAPECIO



$$A = \frac{1}{2}(a + b)h$$

CÍRCULO



$$A = \pi r^2 \quad C = 2\pi r$$

SECTOR CIRCULAR



$$A = \frac{1}{2}r^2\theta \quad s = r\theta$$

CORONA



$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

PARALELEPÍPEDO



$$V = lah \quad S = 2(hl + la + ha)$$

ESFERA



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad S = 4\pi r^2$$

CILINDRO RECTO



$$V = \pi r^2 h \quad S = 2\pi r h$$

CONO RECTO



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

CONO TRUNCADO



$$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$$

PRISMA

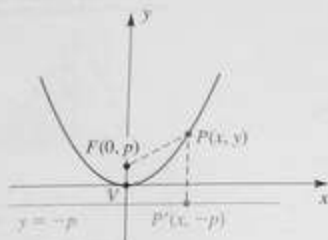


$$V = Bh \text{ donde } B \text{ es el área de la base}$$

SECCIONES CÓNICAS

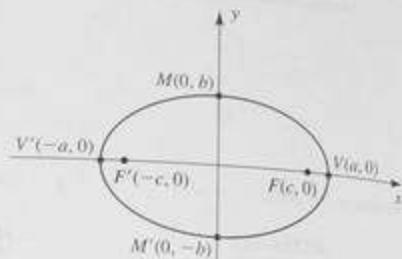
PARÁBOLA

$$x^2 = 4py$$



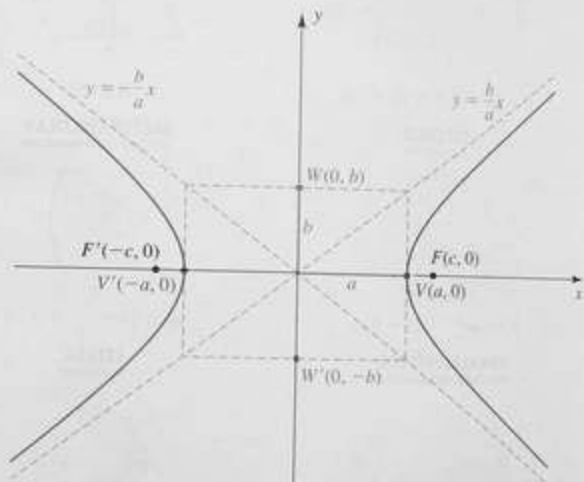
ELIPSE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad a^2 = b^2 + c^2$$



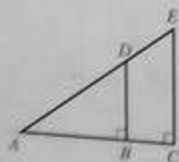
HIPÉRBOLA

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad c^2 = a^2 + b^2$$



GEOMETRÍA PLANA

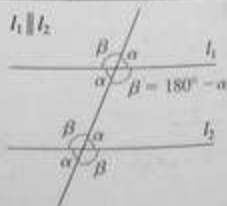
TRIÁNGULOS SIMILARES



$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

ÁNGULOS INTERIORES ALTERNOS CONGRUENTES



TRIGONOMETRÍA

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

DE ÁNGULOS AGUDOS



$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\text{op}}{\text{hyp}} & \csc \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} \\ \cos \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} & \sec \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \\ \tan \theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} & \cot \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}}\end{aligned}$$

TRIÁNGULOS RECTOS ESPECIALES



LEY DE LOS COSENOS

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma\end{aligned}$$

VALORES ESPECIALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

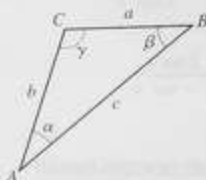
θ (grados)	θ (radianes)	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
0°	0	0	1	0	—	1	—
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0	—	1

DE ÁNGULOS ARBITRARIOS



$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{b}{r} & \csc \theta &= \frac{r}{b} \\ \cos \theta &= \frac{a}{r} & \sec \theta &= \frac{r}{a} \\ \tan \theta &= \frac{b}{a} & \cot \theta &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

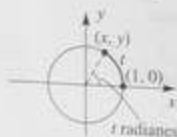
TRIÁNGULO OBLICUO



LEY DE LOS SENOS

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

DE NÚMEROS REALES



$$\begin{aligned}\sin t &= y & \csc t &= \frac{1}{y} \\ \cos t &= x & \sec t &= \frac{1}{x} \\ \tan t &= \frac{y}{x} & \cot t &= \frac{x}{y}\end{aligned}$$

ÁREA

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (Fórmula de Herón)

ALFABETO GRIEGO

Letra	Nombre	Letra	Nombre
A α	alfa	N ν	nu*
B β	beta	Ξ ξ	xi
Γ γ	gamma	Ο ο	ómicron
Δ δ	delta	Π π	pi
Ε ε	épsilon	Ρ ρ	rho
Ζ ζ	zeta	Σ σ	sigma
Η η	eta	Τ τ	tau
Θ θ	theta	Υ υ	épsilon
Ι ι	iota	Φ φ (φ)	phi
Κ κ	kappa	Χ χ	ji
Λ λ	lambda	Ψ ψ	psi
Μ μ	mu*	Ω ω	omega

*El nombre correcto de estas letras es "mi" y "nu", pero es común denominarlas "mu" y "nu", por la semejanza gráfica con el alfabeto latino.

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\csc t = \frac{1}{\sin t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}$$

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

FÓRMULAS PARA ÁNGULOS NEGATIVOS

$$\sin(-t) = -\sin t$$

$$\cos(-t) = \cos t$$

$$\tan(-t) = -\tan t$$

$$\cot(-t) = -\cot t$$

$$\sec(-t) = \sec t$$

$$\csc(-t) = -\csc t$$

FÓRMULAS DE ÁNGULO DOBLE

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$$

$$\begin{aligned}\cos 2u &= \cos^2 u - \sin^2 u \\ &= 1 - 2 \sin^2 u \\ &= 2 \cos^2 u - 1\end{aligned}$$

$$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

FÓRMULAS DE COFUNCIÓN

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

FÓRMULAS DE ADICIÓN

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

IDENTIDADES DE MEDIO ÁNGULO

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

FÓRMULAS DE PRODUCTO A SUMA

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2} [\sin(u + v) + \sin(u - v)]$$

$$\cos u \sin v = \frac{1}{2} [\sin(u + v) - \sin(u - v)]$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2} [\cos(u + v) + \cos(u - v)]$$

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2} [\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

FÓRMULAS DE SUSTRACCIÓN

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

FÓRMULAS DE MEDIO ÁNGULO

$$\sin \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}}$$

$$\cos \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan \frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\sin u} = \frac{\sin u}{1 + \cos u}$$

FÓRMULAS DE SUMA A PRODUCTO

$$\sin u + \sin v = 2 \sin\left(\frac{u + v}{2}\right) \cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos\left(\frac{u + v}{2}\right) \sin\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos\left(\frac{u + v}{2}\right) \cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin\left(\frac{u + v}{2}\right) \sin\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

La undécima edición de esta obra clásica conserva las características que le han dado un éxito rotundo de generación en generación. Ahora ofrece mayor riqueza en recursos para reforzar el aprendizaje, como la inclusión de más de 100 nuevos ejemplos y ejercicios, muchos de los cuales son resultado de las sugerencias de los usuarios y los revisores de la décima edición. Todos se han incorporado sin sacrificar la solidez matemática que ha sido fundamental para el liderazgo de este libro de texto.

Otros recursos didácticos sobresalientes son:

- Abundantes ilustraciones.
- Tablas explicativas y de resumen.
- Numerosos ejemplos.
- Explicaciones paso a paso.
- Ejercicios de análisis.
- Comprobaciones detalladas.
- Ejemplos y ejercicios con calculadora graficadora.
- Secciones sobre calculadora graficadora con pantallas para la TI-83 Plus y la TI-86.
- Aplicaciones.
- Guías dentro de recuadros donde se enumeran los pasos de un procedimiento o técnica ayudan a resolver problemas de manera sistemática.
- Advertencias intercaladas que alertan acerca de errores comunes.
- Sección de respuestas.

THOMSON

MÉXICO Y AMÉRICA CENTRAL
Tel. (52(55)) 1500-8000
Fax (52(55)) 5281-3666
editor@thomsonlearning.com.mx
México, D.F., MÉXICO

AMÉRICA DEL SUR
Tel. (54(11)) 4833-3638/3683
Fax (54(11)) 4831-0764
thomson@thomsonlearning.com.ar
Buenos Aires, ARGENTINA

EL CARIBE
Tel. (787) 758-7560
Fax (787) 758-7573
thomson@caribe.net
Guaynabo, PUERTO RICO

PACIFIC ANDINO
Tel. (571) 630-8212
Fax (571) 630-7099
clientes@thomsonlearning.com.co
Bogotá, COLOMBIA

ESPAÑA
Tel. (34(91)) 446-3350
Fax (34(91)) 445-8218
clientes@panorama.es
Madrid, ESPAÑA

ISBN 970-886-540-3



9 789706 865403