

Instabilités structurales

Principes généraux

par **René MAQUOI**

Ingénieur civil des constructions

Professeur émérite de l'université de Liège

1. Résistance des structures vis-à-vis de l'instabilité.....	C 2 510 – 2
1.1 Importance de l'instabilité en construction métallique	— 2
1.2 Équilibre et stabilité	— 2
1.3 Instabilités structurales élémentaires	— 3
2. Types d'instabilité élastique.....	— 4
2.1 Instabilité par bifurcation.....	— 5
2.1.1 Poteau comprimé axialement.....	— 5
2.1.2 Plaque en compression uni-axiale uniforme.....	— 6
2.1.3 Panneau cylindrique en compression uni-axiale uniforme....	— 7
2.2 Instabilité par point limite.....	— 8
3. Éléments structuraux, idéal et réel	— 8
3.1 Élément structural idéal	— 9
3.2 Imperfections structurales et géométriques.....	— 9
4. Méthodes de détermination des charges d'instabilité	— 10
5. Conclusions.....	— 10
Pour en savoir plus.....	Doc. C 2 510

Les très bonnes propriétés de résistance et de raideur qui caractérisent les aciers de construction expliquent que la construction métallique fasse un très large usage d'éléments structuraux élancés. Un corollaire est que l'instabilité structurale devient une préoccupation majeure lors de l'étude de projets.

L'instabilité structurale peut indifféremment affecter les structures en barres, en plaques ou en coques. Il existe ainsi de multiples phénomènes d'instabilité ayant leurs spécificités. Leur traitement rigoureux trouve vite ses limites, au plan strict de l'analyse mathématique, et la plupart des solutions pratiques préconisées font appel à l'expérimentation et aux outils numériques.

Dans le présent dossier :

- on introduit intuitivement la relation entre équilibre et stabilité et on identifie clairement les phénomènes d'instabilité élémentaires qui seront examinés plus en détail par la suite ;

- on commente, en les illustrant, les deux types d'instabilité élastique – par bifurcation et par point limite – et on en donne les caractéristiques et propriétés ;

- on souligne ce qui différencie l'élément structural réel tel que réalisé par les méthodes usuelles de fabrication, donc doté d'imperfections et fait d'un matériau réel, de l'élément structural idéalement parfait constitué d'un matériau à comportement « théorique » indéfiniment élastique ;

- on leur associe respectivement la charge ultime, seule représentative de la capacité portante réelle, et la charge critique élastique, qui intervient néanmoins au rang des paramètres déterminants dans l'évaluation de la première.

Les dossiers suivants (dont [C 2 511]) abordent successivement et séparément, mais toujours au plan conceptuel, les instabilités spécifiques aux barres, aux plaques et aux coques. Quant aux aspects réglementaires, ils sont abordés dans les dossiers s'adressant spécifiquement aux éléments structuraux concernés.

1. Résistance des structures vis-à-vis de l'instabilité

Les vérifications réglementaires des états limites d'instabilité, qui sont à ranger parmi les états limites ultimes, font appel à des procédures scientifiquement et techniquement fondées couvrant les phénomènes d'instabilité élémentaires. Elles recourent, par contre, à des relations d'interaction approchées lorsque deux, ou plusieurs, de ces phénomènes sont susceptibles de coexister.

Dans la série des dossiers consacrés aux instabilités, l'accent est porté bien davantage sur les concepts que sur les développements mathématiques. Le but de ces dossiers n'est en effet nullement de constituer un traité de stabilité, ou plutôt d'instabilité, mais de rassembler les éléments de la connaissance utiles à une compréhension physique et rationnelle des règles qui gouvernent les phénomènes d'instabilité.

1.1 Importance de l'instabilité en construction métallique

Les éléments structuraux rencontrés dans la construction métallique se distinguent très généralement de ceux constitués d'autres matériaux de construction habituels – tels, par exemple, le béton, le bois et la maçonnerie – par leur grand élancement. Ceux de type *barre* (poteau, poutre, élément de contreventement, mât,...) sont en effet longs, comparativement aux dimensions de leur section transversale, tandis que ceux de type *plaque* ou *coque* (section formée à froid, section reconstituée par soudage, silo, cheminée,...) sont de faible épaisseur comparativement aux dimensions du volume dans lequel ils s'inscrivent. Cette spécificité est le résultat, à la fois, d'une grande résistance et d'une raideur élevée des matériaux métalliques utilisés en constructions civiles, parmi lesquels les aciers occupent une place prépondérante.

Lorsqu'une structure est soumise à des actions ou combinaisons d'actions telles que certains de ses éléments structuraux constitutifs, voire certains composants de ces éléments, se trouvent totalement ou partiellement comprimés, leur résistance est affectée, de manière défavorable, par les effets de leur élancement. Pour faire bref et simple, disons que la résistance d'un élément structural (un poteau, par exemple) est conditionnée par la résistance de la section transversale de cet élément (en l'espèce, celle du poteau), lorsque ce dernier est peu élané (poteau trapu), et par une résistance moindre, lorsque l'élancement devient significatif (poteau élané).

La notion d'élancement traduit intuitivement une influence de la longueur. Il s'agit néanmoins d'une influence relative. Ainsi, de la même manière qu'un poteau de section donnée apparaît de plus en plus souple lorsqu'on accroît sa hauteur, cette souplesse diminue par contre lorsque, à hauteur donnée, on augmente les dimensions, et donc l'encombrement, de la section transversale.

Cette réduction de la résistance des éléments structuraux en raison de leur élancement est le fait de phénomènes d'*instabilité structurale*. L'étude de ces phénomènes est, non seulement, d'un grand intérêt, mais est aussi, comme cela vient d'être mis en évidence, une nécessité pour toute personne intéressée, à quelque titre que ce soit, par la construction métallique. Cette étude devient rapidement complexe et se heurte très tôt à des difficultés d'ordre mathématique. Les solutions analytiques rigoureuses des équations différentielles régissant les phénomènes d'instabilité structurale ne sont pas légion ; elles ne couvrent que des situations simples dont la pratique ne peut se satisfaire. Les ouvrages de référence sont nombreux ; le lecteur particulièrement intéressé à ces matières pourrait utilement se référer à [1], [2], [3], [4].

Comme l'ingénieur a vocation, non seulement d'identifier les problèmes à résoudre, mais aussi de leur apporter des réponses,

on ne s'étonnera pas que les phénomènes d'instabilité structurale doivent parfois être traités par des voies empiriques associant fondements mathématiques et démarches pragmatiques inspirées par le sens physique, l'expérience, la simulation numérique et les études paramétriques. Ainsi, le praticien dispose désormais de méthodes de vérification relativement simples des éléments structuraux susceptibles de périr par instabilité structurale ; ces méthodes ont trouvé place sous forme de règles dans les Eurocodes structuraux, et, en particulier, dans l'Eurocode 3 [6], [7], [8]. Il n'est toutefois pas concevable que ce même praticien se borne à n'être que l'apporteur de telles règles en ignorant les fondements mathématiques les plus élémentaires et les principes physiques sous-jacents.

Dans cette perspective, plusieurs dossiers relatifs à l'instabilité structurale ont été préparés et incorporés à la rubrique *Constructions métalliques*. Leur objectif n'est nullement de développer la théorie de cette discipline mais bien d'introduire, sans développements mathématiques inutiles, les principaux concepts dont la perception est requise pour acquérir la maîtrise opérationnelle des phénomènes d'instabilité.

1.2 Équilibre et stabilité

L'analyse globale d'une structure donnée soumise à des actions données consiste à déterminer les efforts intérieurs induits par ces actions dans les divers éléments structuraux. La notion de *stabilité* y apparaît toujours associée au concept d'*équilibre*. On attend que, sous toute mise en charge, la structure et ses éléments constitutifs prennent une configuration déformée telle qu'en toute section de la structure il y ait équilibre entre les forces extérieures sollicitantes et les efforts intérieurs que celles-ci produisent.

Toute *configuration d'équilibre* est déterminée par les valeurs des déplacements en tous points. Quant à la *stabilité de cette configuration*, elle est examinée au travers de la réponse de la structure à une *perturbation* résultant d'une action extérieure fictive additionnelle (par exemple une force ou un déplacement imposé) de valeur arbitraire mais très petite.

La configuration d'équilibre est dite respectivement *stable* ou *instable*, selon que la structure revient ou ne revient pas à cette configuration d'équilibre lorsqu'on supprime la cause perturbatrice.

■ La **stabilité de l'équilibre** est une notion de base essentielle de la Mécanique du Solide. Il est d'usage de l'introduire, sous une forme illustrative et intuitivement compréhensible, au travers du problème élémentaire représenté à la figure 1.

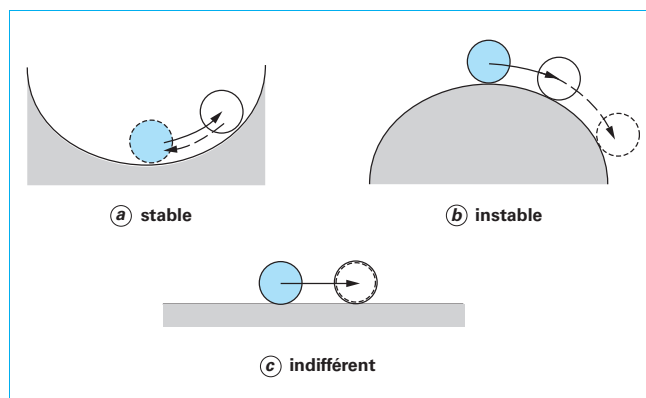


Figure 1 – Caractérisation de l'équilibre

Exemple. Soit une bille sphérique indéformable soumise à la seule action de son propre poids et posée successivement dans un espace solide concave (figure 1a), puis sur un espace solide convexe (figure 1b), et enfin sur un plan horizontal (figure 1c).

Dans le premier cas, la bille trouve assez naturellement sa position d'équilibre au fond de la cavité. Dans le second cas, il faudra beaucoup d'adresse pour réussir à la faire reposer au sommet alors que, dans le troisième cas, elle reste simplement là où on la dépose si, comme on le fait habituellement, tout effet d'inertie est négligé. Dans chacune de ces positions initiales, la bille est strictement en équilibre.

Exercer une perturbation de l'état d'équilibre consiste, par exemple, à appliquer une force transversale de très faible intensité au centre de gravité de la bille. Cette perturbation entraîne nécessairement un déplacement de l'objet par rapport à sa configuration d'équilibre initial. La question se pose ensuite de savoir comment se comporte la bille si l'on supprime la perturbation, c'est-à-dire si l'on annule la cause de la perturbation. Examinons les trois situations précitées.

Dans le **premier cas** (figure 1a), la bille ne peut, sous l'effet de la perturbation, que quitter le fond pour remonter sur la paroi de la cavité dans laquelle elle se trouve. La suppression de la perturbation a pour effet de permettre à la bille de regagner le fond par simple gravité. **La configuration d'équilibre initiale est alors qualifiée de stable.**

À l'inverse, lorsque, dans le **second cas** (figure 1b), la bille quitte sa position de départ, la gravité ne peut que l'entraîner à descendre le long de la paroi. Ce déplacement n'est nullement entravé par l'annulation de la perturbation. La configuration d'équilibre initiale **correspond à un équilibre instable.**

La perturbation appliquée à une bille reposant sur un **plan horizontal** (figure 1c) force la bille à se déplacer sur ce plan mais la suppression de la perturbation laisse simplement la bille dans l'état de déplacement ainsi atteint. **L'état d'équilibre initial est dit neutre ou indifférent.**

Ce qui vient d'être dit à propos d'un corps solide, donc supposé indéformable – la bille en l'espèce –, est généralisable aux systèmes structuraux déformables, notamment aux structures dont le comportement est matériellement élastique.

■ La théorie de la stabilité qui y correspond est la **stabilité élastique**. Cette dernière est particulièrement préoccupante lorsque des phénomènes d'*instabilité* sont susceptibles d'apparaître. Il est dès lors clair que, si la *stabilité* est le but à atteindre, le traitement approprié des risques potentiels d'*instabilité* constitue un point de passage obligé. Dès lors, pour assurer la stabilité, il faut se prémunir contre l'*instabilité*. On comprend aisément, selon le point de vue adopté, qu'on puisse très souvent user de l'un ou l'autre de ces termes.

Dans les dossiers consacrés aux instabilités structurales, on ne présente pas les détails de la stabilité élastique et on ne développe pas davantage les diverses techniques susceptibles de fournir les résultats les plus directement utilisables pour l'ingénieur de projet, à savoir les expressions des charges critiques élastiques.

Ils visent, par contre, à aborder la stabilité dans un cadre plus large : celui des pièces « industrielles », sièges d'inévitables imperfections structurales et géométriques et faites d'un matériau – en l'espèce les aciers de construction – dont le comportement n'est élastique que dans un domaine limité de son utilisation. On parle alors plutôt de *stabilité structurale* que de stabilité élastique.

■ Désormais, selon les termes de la plupart des normes et codes en vigueur, la pratique de la vérification de la sécurité structurale se fonde sur le **principe des états limites**. Ceux-ci sont associés principalement à :

- des situations de ruine globale ou locale (**états limites ultimes**), correspondant à un épuisement de la résistance – terme à prendre au sens large ;
- des conditions d'utilisation ou d'exploitation jugées inacceptables ou inappropriées (**états limites de service**).

Les phénomènes de stabilité structurale sont à ranger parmi les états limites ultimes ; ils constituent les *états limites d'instabilité*.

■ Une **vérification spécifique de la stabilité** de tout ou partie d'un élément structural est requise en présence d'une sollicitation susceptible d'induire des contraintes de compression dans tout ou partie de cet élément. Une large part des actions sollicitant les constructions civiles sont des actions de gravité. Il en va notamment ainsi du poids propre, des surcharges et des charges d'exploitation fixes ou mobiles. On comprend dès lors aisément que la plupart des éléments d'une construction sont directement ou indirectement soumis à des efforts intérieurs comportant des contraintes de compression. Par ailleurs, les effets d'une instabilité potentielle sont d'autant plus grands que ce qui est comprimé est élané. En conséquence, s'agissant de sensibiliser à l'instabilité structurale, on peut légitimement, à des fins pédagogiques, souscrire à l'équation littérale suivante :

Compression + élanement = danger d'instabilité structurale

■ La construction métallique fait usage de **matériaux à haute, voire très haute, résistance**. Ainsi, la quantité de matériau « acier » requise en section pour transmettre un effort de compression donné est notablement plus faible que si le matériau était de faible résistance.

Exemple. On ne saurait mieux illustrer cela qu'en imaginant de remplacer, dans le cadre d'une rénovation de bâtiment, un pilier en maçonnerie par un poteau en acier. Cette réduction d'aire a pour résultat qu'à hauteur donnée le poteau en acier apparaîtra plus élané que le pilier en maçonnerie.

On comprend alors que l'instabilité structurale devienne une préoccupation majeure dans le domaine de la construction métallique. Elle concerne les divers types d'éléments structuraux rencontrés :

- les *barres*, terme générique regroupant les éléments longilignes, à section simple ou composée, dont la longueur est très largement supérieure aux dimensions de la section transversale ;
- les *plaques* et *coques*, éléments dont deux dimensions (longueur, largeur) sont très largement supérieures à la troisième (épaisseur).

■ Le présent dossier consiste en une **introduction à l'instabilité structurale**. On y identifie d'abord les phénomènes élémentaires d'instabilité auxquels l'ingénieur de projet se trouve confronté. On fait ensuite une brève incursion dans un domaine plus conceptuel pour distinguer les types d'instabilité élastique et leurs caractéristiques respectives. Enfin, on souligne ce qui différencie l'instabilité structurale, au sens donné plus haut, et l'instabilité élastique.

L'examen plus spécifique des phénomènes d'instabilité élémentaires est abordé dans des dossiers individuels faisant suite à celui-ci. La séquence de ceux-ci est déterminée par le type d'éléments structuraux concerné. Ainsi, un de ces dossiers est consacré aux instabilités des *barres* [5], un autre traite des instabilités affectant les *plaques*, tandis que le dernier aborde les instabilités de *coques* (dossiers à paraître aux T.I.).

1.3 Instabilités structurales élémentaires

■ Le mot *instabilité* est le terme générique utilisé pour désigner un ensemble de phénomènes et ce, indépendamment du type d'élément structural que ces phénomènes concernent. Des termes spécifiques sont utilisés pour différencier plus précisément les phénomènes d'instabilité élémentaires. Ainsi, pour les barres, on trouve :

- le **flambement** qui caractérise l'instabilité propre à un élément structural longiligne soumis à compression axiale, désigné généralement par *colonne* ou *poteau* ;
- le **déversement** qui est l'instabilité propre à un élément longiligne soumis à flexion autour de l'axe de forte inertie de sa section transversale, désigné généralement par *poutre* ;

– le **voilement** qui est l'instabilité propre aux plaques et aux coques soumises à une sollicitation de compression agissant dans le plan moyen de ces éléments. On notera, à ce stade, que toute paroi d'une section laminée ou d'un profil reconstitué par soudage peut être assemblée à une plaque.

Dans la langue anglaise, le terme « *buckling* » est un terme générique. S'agissant de phénomènes plus spécifiquement identifiés, on a recouru aux termes de « *column buckling* » pour désigner le flambement, « *lateral torsional buckling* » celui de déversement, tandis que « *plate buckling* » a trait au voilement de plaque, et le voilement d'une coque devient « *buckling of shell* ».

Dans la littérature technique anglo-saxonne, une pratique très largement répandue est toutefois d'utiliser le simple terme *buckling*, à la fois, comme terme générique, mais aussi en lieu et place de *column buckling*, la différenciation se faisant, au besoin, en fonction du contexte.

■ Selon le type de section transversale d'un *poteau*, le phénomène de **flambement** peut se manifester de diverses manières, ce qui justifiera l'ajout d'une terminologie la précisant :

- le **flambement par flexion**, pour lequel chaque section transversale fléchit autour d'un axe principal d'inertie. Il est principalement observé dans les poteaux à section ouverte ou fermée et doublement symétrique ;
- le **flambement par torsion**, pour lequel chaque section transversale tourne autour de l'axe longitudinal du poteau. Il se manifeste principalement dans les poteaux à section ouverte doublement symétrique dont la raideur torsionnelle est faible vis-à-vis de la raideur flexionnelle ;
- le **flambement par flexion et torsion** – souvent dit « flambement par flexion-torsion » –, qui comporte des déformations, à la fois, de flexion et de torsion. Il est particulièrement à craindre lorsque la section est ouverte et à parois minces avec non coïncidence du centre de cisaillement (appelé aussi « centre de torsion ») et du centre de gravité.

- Dans le langage technique courant, le **flambement par flexion** est très fréquemment désigné par le seul terme *flambement*. Ce raccourci de langage, s'il est parfois bienvenu, ne doit pas occulter le fait qu'une méconnaissance, au niveau d'un projet, des deux autres types de flambement peut être – et a été à plusieurs reprises – source de graves déconvenues, voire d'accidents ou de ruines structurales.
- Si le flambement par torsion a, pour l'essentiel, un caractère plutôt académique, la manifestation du **flambement par flexion et torsion** est pour ainsi dire omniprésente dans les poteaux à section ouverte à parois minces et formée à froid.

■ Comme on l'a déjà laissé entendre plus haut, un même élément structural peut se trouver concerné par l'action conjointe de **plusieurs types d'instabilité structurale**.

Considérons, par **exemple**, une barre à section en double té, mais à parois minces soumise à un effort de compression N agissant avec une excentricité e dans le plan de forte inertie, telle que N agisse en dehors du noyau central de la section. Cette barre se trouve donc soumise à la combinaison d'un effort axial N et d'un moment de flexion d'axe fort $M = Ne$. On peut y relever les dangers potentiels suivants :

- le voilement des parois totalement ou partiellement comprimées de l'élément, à savoir :
 - celle des semelles qui se trouve en compression uniforme,
 - l'âme dans laquelle la distribution linéaire des contraintes normales comporte une zone de compression ;
- le flambement de l'élément dont la sollicitation comporte une contribution d'effort axial ;
- le déversement de l'élément en raison des moments induits par l'excentricité de l'effort N .

■ Lorsque plusieurs phénomènes d'instabilité élémentaires coexistent, leurs effets se superposent, mais pas à la manière d'un cumul algébrique, entendant par là qu'ils interagissent et conduisent normalement à une situation plus préjudiciable que s'ils étaient pris séparément en considération. L'étude analytique de telles situations devient très rapidement d'une grande complexité au point que, à des fins pratiques, soit on développe des formules d'interaction, soit on recourt à des artifices qui en tiennent lieu.

Si le terme « voilement » s'applique aussi bien aux coques qu'aux plaques, les comportements de ces deux types d'éléments structuraux peuvent toutefois fréquemment se différencier, en particulier quant à leurs comportements postcritiques respectifs, à savoir le stade ultérieur à celui pour lequel l'instabilité élastique s'est produite. Ceci a un impact direct sur la pratique de la vérification des états limites d'instabilité.

2. Types d'instabilité élastique

Lorsqu'on charge une structure – il s'agira souvent d'un élément structural – élastique, son comportement peut être examiné au moyen d'un diagramme charge-déplacement. La charge est évidemment celle appliquée à cette structure. Quant au déplacement, il s'agit du déplacement d'un point de référence choisi *a priori* quelconque. En pratique, ce point est choisi parce qu'une valeur significative du déplacement y est attendue.

Lorsque la charge est appliquée de manière croissante depuis une valeur nulle, la relation charge-déplacement décrite constitue une trajectoire d'équilibre. L'instabilité de la structure correspond à la transition, sur cette trajectoire, entre les configurations d'équilibre respectivement stable et instable. Cette instabilité se produit par apparition :

- d'une **bifurcation** de l'équilibre (figure 2), phénomène appelé dès lors *instabilité par bifurcation* ;
- d'un **point limite**, c'est-à-dire d'un point où la trajectoire d'équilibre (non linéaire) passe par un maximum (figure 3). En ce point, toute augmentation de la charge fait passer la structure d'une configuration d'équilibre donnée à une autre configuration d'équilibre et ce, de manière brusque appelée *claquement*. Ce phénomène est appelé *instabilité par point limite* ou encore *instabilité par claquement* (*snap-through* en langage anglo-saxon). Dans certains cas, lors d'essais expérimentaux, le changement d'une configuration d'équilibre à une autre s'accompagne d'un bruit sonore, d'où le terme de « claquement ».

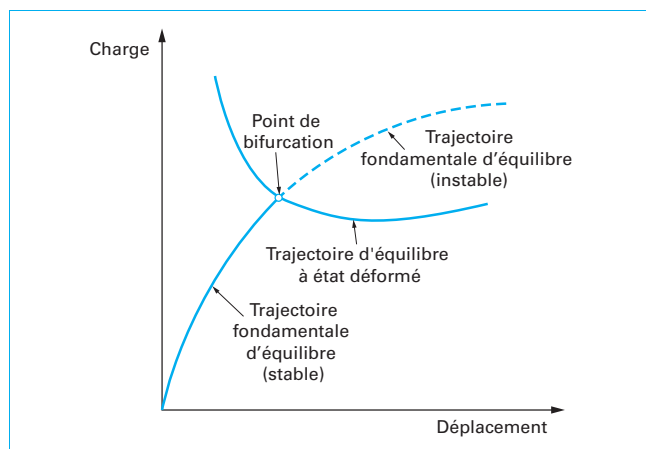


Figure 2 – Instabilité par bifurcation

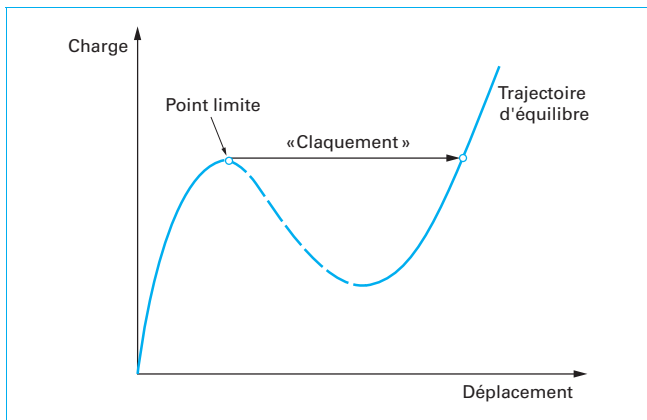


Figure 3 – Instabilité par point limite

Pour examiner les propriétés de ces types d'instabilité, on usera d'une approche intuitive et on se référera ensuite à des éléments structuraux courants dont le comportement est susceptible d'être conditionné par l'existence de configurations d'équilibre instable.

2.1 Instabilité par bifurcation

Un problème d'instabilité par bifurcation (figure 2) est caractérisé par l'existence :

- d'une *trajectoire fondamentale d'équilibre, linéaire ou non linéaire*, qui part de l'origine du diagramme charge-déplacement ;
- d'une *trajectoire d'équilibre à l'état déformé*, qui ne passe pas par l'origine du diagramme charge-déplacement ;
- d'un *point de bifurcation*, qui correspond à l'intersection des deux trajectoires précitées, où les configurations d'équilibre de la trajectoire fondamentale sous charge croissante passent de stables à instables.

L'analyse d'un problème de ce type requiert la détermination :

- des coordonnées du point de bifurcation, en particulier son ordonnée, désignée *charge élastique de bifurcation* ou encore *charge critique élastique* ;
- de la configuration déformée de l'élément structural lorsque la bifurcation survient, appelée *mode d'instabilité* ;
- des propriétés de la trajectoire d'équilibre dans l'état déformé de la structure, en particulier au voisinage du point de bifurcation.

Il est important d'attirer l'attention sur le caractère soudain de l'instabilité par bifurcation. Cette manifestation traduit le fait que les déplacements constituant le mode d'instabilité ne sont pas présents dans la trajectoire fondamentale d'équilibre stable et apparaissent inopinément quand la bifurcation d'équilibre se produit.

L'instabilité par bifurcation est sans doute le type d'instabilité le plus fréquemment rencontré. Examinons brièvement quelques situations courantes où elle se présente.

2.1.1 Poteau comprimé axialement

Reportons-nous au problème bien connu du *poteau d'Euler*, à savoir un poteau élastique à axe rectiligne et de longueur L , simplement appuyé à ses extrémités et soumis à une charge axiale de compression P (figure 4a). Les trajectoires d'équilibre d'un tel poteau sont représentées à la figure 4b, dans laquelle $q = w(L/2)$ est l'amplitude du mode d'instabilité du poteau.

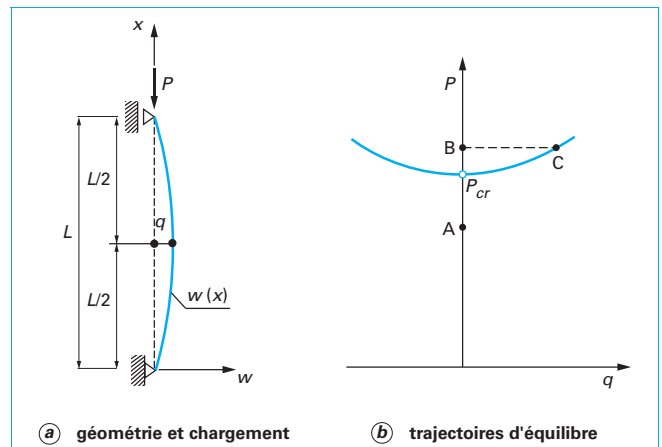


Figure 4 – Poteau d'Euler

■ On distingue deux trajectoires d'équilibre :

- première trajectoire caractérisée par $q = 0$, dite *trajectoire fondamentale*, le long de laquelle le poteau reste rectiligne et donc $w(x) = 0$;
- seconde trajectoire caractérisée par $q \neq 0$, dite *trajectoire à l'état déformé*, au cours de laquelle le poteau fléchit dans un plan principal d'inertie et prend une déformée transversale $w(x) \neq 0$ qui croît avec l'effort axial appliqué.

Ces deux trajectoires se coupent au point de coordonnées $q = 0$ et $P = P_{cr}$, qui est le *point de bifurcation de l'équilibre*.

- Son ordonnée, qui représente la charge de bifurcation, est désignée P_{cr} et est appelée *charge critique élastique* ou encore *charge critique d'Euler*, rappelant ainsi celui qui, le premier, en établit l'expression.

Par la Résistance des matériaux classique, on sait que cette charge est donnée par :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (1)$$

et est associée à un mode d'instabilité en demi-onde de sinuséide :

$$w(x) = q \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2)$$

La quantité EI intervenant dans (1) désigne la raideur flexionnelle de la section transversale du poteau relative à l'axe de flexion concerné.

- L'expression précédente de la charge critique d'Euler résulte, par exemple, de l'intégration de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\rho} - \frac{P}{EI} w(x) \equiv \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{P}{EI} w(x) = 0 \quad (3)$$

qui traduit simplement l'équilibre entre le moment intérieur et le moment externe. Dans (3), la courbure $1/\rho$ (ρ désignant le rayon de courbure) est assimilée, comme c'est l'usage, à la dérivée seconde par rapport à l'abscisse x de la déformée transversale $w(x)$.

- Si l'on tient compte de l'expression correcte de la courbure, à savoir :

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\frac{d^2 w(x)}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (4)$$

l'intégration de l'équation différentielle, rendue désormais non linéaire, devient beaucoup moins évidente car elle fait appel à

des fonctions elliptiques. Sa solution permet toutefois de décrire le comportement du poteau au-delà de P_{cr} , donc la trajectoire d'équilibre à l'état déformé (poteau flambé).

- Von Mises a proposé une **valeur approchée de l'amplitude q** sous la forme :

$$q = \frac{L\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}} - 1} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{P}{P_{cr}} - 1 \right) \right] \text{ pour } P > P_{cr} \quad (5)$$

Cette relation montre qu'une fois P_{cr} atteint, il faut accroître la charge P pour augmenter l'amplitude q . Dans l'expression entre crochets du second membre de (5), négliger le second terme devant l'unité revient à examiner la trajectoire à l'état déformé dans le seul voisinage de la charge critique P_{cr} . Si l'on procède de la sorte, on obtient simplement :

$$\frac{P}{P_{cr}} = 1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{q}{L} \right)^2 \quad (6)$$

■ Pour le poteau d'Euler, la **trajectoire d'équilibre à l'état déformé au voisinage de P_{cr}** est donc représentée par une parabole dont l'axe coïncide avec celui des ordonnées P . Pour une direction de flambement considérée, le sens du flambement est en effet indifférent.

On notera, en particulier, que cette parabole est très plate. Ainsi, pour une charge sollicitante P dépassant P_{cr} de 1 % seulement, l'amplitude de la déformée (flèche) q vaut déjà 9 % de la longueur L du poteau. Cette observation explique la raison pour laquelle, dans la théorie élémentaire du flambement, une horizontale est couramment substituée à la parabole, et l'on dit alors, même si la réalité est quelque peu différente, que, le poteau peut prendre sous P_{cr} une déformée d'amplitude indéterminée.

■ Considérons encore les **trois états d'équilibre du poteau** repérés sur la figure 4b par les points A, B et C, et caractérisés par leurs coordonnées q et P respectives. Les deux premiers points, A et B, appartiennent à la trajectoire fondamentale d'équilibre, tandis que le troisième point, C, se situe sur la trajectoire d'équilibre à l'état déformé, mais au même niveau de charge que le point B.

Appliquons maintenant à chacun de ces états d'équilibre une perturbation sous la forme, par **exemple**, d'une force transversale infiniment petite δF , comme indiqué à la figure 5.

On observe que, **au point A** ($q = 0$ et $P < P_{cr}$), la suppression de la perturbation permet au poteau de reprendre sa configuration initiale, ce qui signifie que l'équilibre est *stable*.

Au point B ($q = 0$ et $P > P_{cr}$), le poteau se trouve écarté de sa position initiale, ce qui signifie que l'équilibre est *instable* car la perturbation amène le poteau dans la position d'équilibre stable C (figure 6).

Si ultérieurement, on applique une **nouvelle perturbation à l'état C** ($q \neq 0$ et $P > P_{cr}$), le poteau revient à son état de départ C après suppression de la perturbation ; l'équilibre y est *stable*.

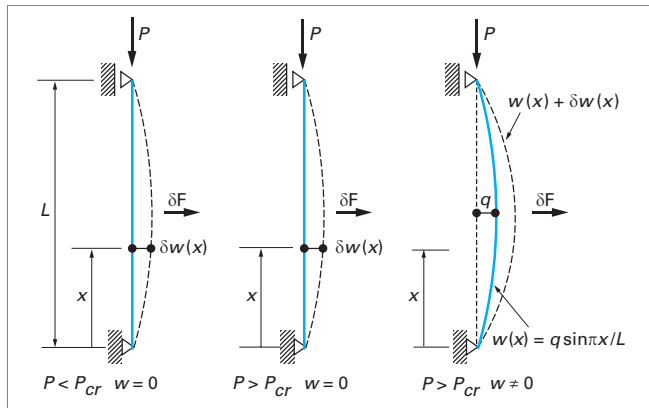


Figure 5 – Configurations d'équilibre du poteau d'Euler

■ La figure 7, dans laquelle l'axe des ordonnées a été rendu **adimensionnel**, reprend les caractéristiques du comportement géométrique non linéaire du poteau d'Euler décrites plus haut. On y a représenté les diverses trajectoires d'équilibre, repéré le point de bifurcation et identifié les configurations respectivement stables et instables d'équilibre.

2.1.2 Plaque en compression uni-axiale uniforme

Considérons maintenant le poteau tubulaire rectiligne et constitué d'un matériau élastique représenté à la figure 8 et admettons que sa hauteur soit suffisamment faible pour que les effets de flambement soient négligeables. Sa section transversale creuse, de forme carrée et à parois minces parfaitement planes, a une aire A.

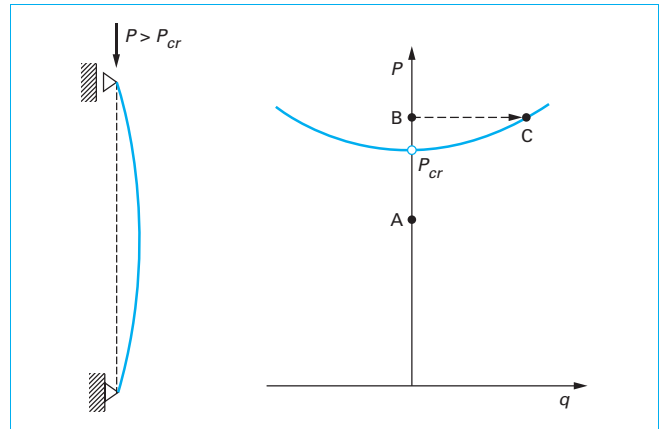


Figure 6 – Transition entre deux états d'équilibre : de l'état non déformé instable à l'état déformé stable

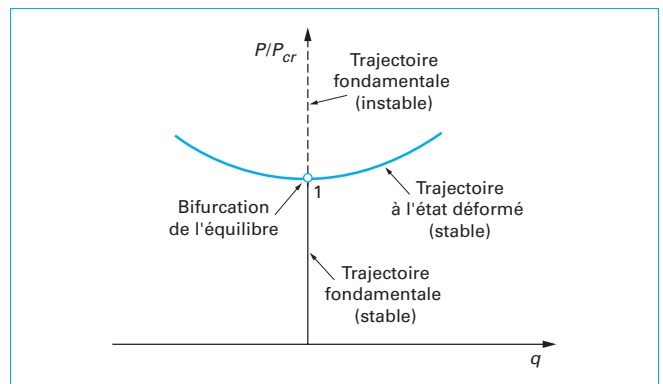


Figure 7 – Trajectoires d'équilibre, stable et instable, pour un poteau comprimé axialement

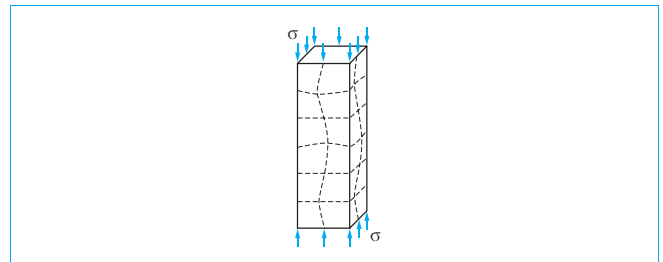


Figure 8 – Voilement local dans un poteau à section tubulaire à parois minces

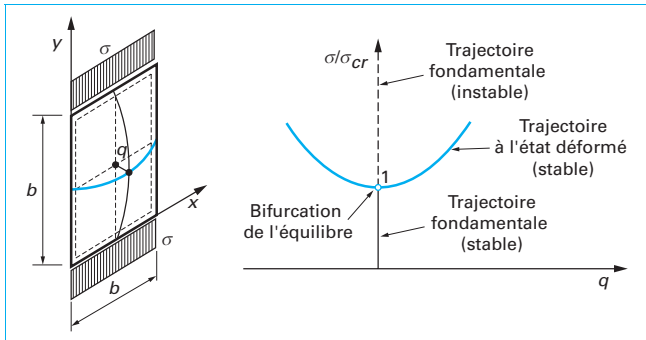


Figure 9 – Trajectoires d'équilibre, stable et instable, pour une plaque comprimée

Ce poteau est chargé axialement par un effort de compression P . Chacune des parois planes d'épaisseur t est soumise à une sollicitation de compression uniforme d'intensité $\sigma = P/A$. Une telle paroi est une plaque, car ses largeurs et longueurs sont significativement plus grandes que son épaisseur. Sous la compression qui la sollicite, elle est susceptible de se ruiner par instabilité lorsque la contrainte σ atteint une valeur critique σ_{cr} , appelée *contrainte critique élastique de voilement*. L'effort résultant sur la paroi est à ce moment $\sigma_{cr}A/4$. Ceci constitue la **charge critique élastique de voilement sous compression uniforme de la paroi**.

On notera, en particulier, que la forme carrée de la section rend les quatre parois identiques. En conséquence, le voilement se produit en principe simultanément dans les quatre parois, et il n'y a dès lors pas d'interaction entre celles-ci. Chaque paroi se comporte donc comme si elle était une plaque isolée simplement appuyée sur ses bords longitudinaux.

Tout comme le poteau d'Euler, on distingue, pour cette plaque, une **trajectoire fondamentale d'équilibre**, constituée d'états d'équilibre de la paroi plane, soit stables, pour $\sigma \leq \sigma_{cr}$, soit instables, pour $\sigma > \sigma_{cr}$, et une trajectoire d'équilibre stable à l'état déformé (paroi voilée). Le comportement est résumé à la figure 9.

Dans la théorie élémentaire des plaques, on montre que, pour les conditions d'appui et la sollicitation considérées, le mode d'instabilité de la plaque a la forme :

$$w(x, y) = q \sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (7)$$

soit une demi-longueur d'onde dans chacune des directions x et y .

La contrainte critique élastique de voilement s'écrit :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{3(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (8)$$

avec ν coefficient de Poisson du matériau.

L'expression précédente de la contrainte critique de voilement résulte, par exemple, de l'intégration de l'équation d'équilibre aux dérivées partielles :

$$\frac{d^4 w(x, y)}{dx^4} + 2 \frac{d^4 w(x, y)}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w(x, y)}{dy^4} = - \frac{\sigma_x t}{D} \frac{d^2 w(x, y)}{dx^2} \quad (9)$$

où la quantité $D = Et^3/12(1 - \nu^2)$, appelée « raideur flexionnelle unitaire » (par unité de largeur) de la plaque, joue dans le voilement d'une plaque, un rôle similaire à celui de la quantité EI dans le flambement du poteau. Dans (9), la contrainte appliquée est indépendante de la déformée $w(x, y)$ prise par la plaque lorsqu'elle voile. Le comportement bi-axial de la plaque se trouve traduit, d'une part, par une raideur flexionnelle majorée dans le rapport $1/(1 - \nu^2)$ et, d'autre part, par une équation aux dérivées partielles par rapport aux deux coordonnées définissant le plan moyen à épaisseur de la plaque.

Quant à la **trajectoire d'équilibre à l'état déformé** (plaque voilée), sa détermination analytique est beaucoup plus complexe que dans le cas du poteau. Elle consiste à résoudre un doublet d'équations aux dérivées partielles couplées dans lesquelles la sollicitation est exprimée via une fonction de contrainte ou fonction d'Airy, soit pour le cas examiné ici :

$$N_x = \sigma_x t = - \frac{d^2 \phi(x, y)}{dy^2} \quad (10)$$

Ce doublet comporte l'équation d'équilibre :

$$\frac{d^4 w(x, y)}{dx^4} + 2 \frac{d^4 w(x, y)}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w(x, y)}{dy^4} = \frac{1}{D} \frac{d^2 \phi(x, y)}{dy^2} \frac{d^2 w(x, y)}{dx^2} \quad (11)$$

et l'équation de compatibilité :

$$\frac{d^4 \phi(x, y)}{dx^4} = - Et \left[\frac{d^2 w(x, y)}{dx^2} \frac{d^2 w(x, y)}{dy^2} - \left(\frac{d^2 w(x, y)}{dx dy} \right)^2 \right] \quad (12)$$

Le couplage des équations montre clairement que la sollicitation de la plaque se trouve modifiée de manière non linéaire par la prise de flèche de la plaque lorsque celle-ci voile.

On peut établir qu'au voisinage du point de bifurcation de l'équilibre, la trajectoire à l'état déformé est donnée approximativement donnée par :

$$\frac{\sigma}{\sigma_{cr}} = 1 + \frac{3(1 - \nu^2)}{8} \left(\frac{q}{t} \right)^2 \quad (13)$$

Ceci est encore l'équation d'une parabole d'axe vertical coïncidant avec l'axe des ordonnées ; la plaque initialement plane peut indifféremment voiler dans l'une ou l'autre direction par rapport à son plan. Il faut, ici encore, une fois la contrainte critique de voilement atteinte, accroître la charge pour pouvoir augmenter la flèche. Selon (13), il est facile d'évaluer qu'une flèche, égale à l'épaisseur de la plaque, est obtenue lorsque la contrainte moyenne appliquée se dépasse la contrainte critique σ_{cr} de l'ordre de 35 %.

La plaque comprimée a qualitativement en commun avec le poteau comprimé d'Euler une trajectoire à l'état déformé de forme parabolique au voisinage du point de bifurcation. Toutefois, la différence quantitative est significative entre les trajectoires respectives à l'état déformé ; la courbure de cette trajectoire est beaucoup plus accentuée pour la plaque que pour le poteau. Au contraire du poteau, pour lequel il a été dit que toute réserve de résistance post-critique est systématiquement négligée, celle-ci peut être significative, voire substantielle, dans une plaque.

Elle est désormais prise en considération dans la vérification réglementaire aux états limites ultimes des plaques en situation d'instabilité.

2.1.3 Panneau cylindrique en compression uniaxiale uniforme

À l'inverse du poteau comprimé axialement et de la plaque soumise à compression uniforme, la trajectoire d'équilibre à l'état déformé d'un panneau cylindrique d'épaisseur t , de rayon de courbure R , soumis à compression uniaxiale uniforme dans la direction de la génératrice et simplement appuyé sur les bords, est, d'une part, rectiligne au voisinage du point de bifurcation et, d'autre part, comporte un tronçon stable et un tronçon instable. Ceci est illustré à la figure 10.

Pour la forme carrée d'un tel élément structural, on peut montrer que le **mode d'instabilité** est approximativement celui de la plaque plane :

$$w(x, y) = q \sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (14)$$

La contrainte critique élastique associée s'écrit :

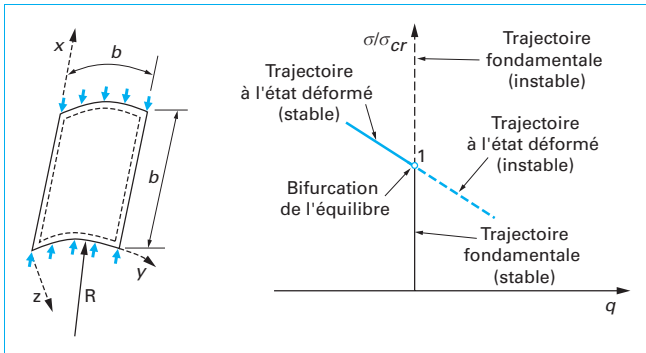


Figure 10 – Trajectoires d'équilibre pour un panneau cylindrique en compression uni-axiale uniforme

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 (1 + \theta^4) \quad (15)$$

avec θ paramètre traduisant les effets de la courbure initiale du panneau :

$$\theta = \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{4R^2 t^2}} \quad (16)$$

■ La trajectoire d'équilibre à l'état déformé au voisinage du point de bifurcation est représentée par l'expression approchée suivante :

$$\frac{\sigma}{\sigma_{cr}} = 1 - \frac{10E}{3\pi^2 R \sigma_{cr}} q \quad (17)$$

qui, dans les coordonnées $(\sigma - q)$, correspond à la droite déjà annoncée.

On notera que lorsque $R \rightarrow \infty$:

- l'expression (17) tend bien vers (13), c'est-à-dire la valeur correspondant à la plaque plane ;
- la pente de la trajectoire à l'état déformé tend vers zéro, soit la valeur obtenue en (13).

Les équations permettant de déterminer la contrainte critique de voilement et de décrire la trajectoire d'équilibre à l'état déformé sont connues sous le nom d'« **équations de Von Karman-Donnell** ».

Ces dernières sont analogues aux équations applicables aux plaques planes, mais comportent des termes additionnels qui traduisent les effets propres à la courbure initiale du panneau.

2.2 Instabilité par point limite

Un problème d'instabilité par point limite est caractérisé par l'existence :

- d'une *trajectoire d'équilibre fondamentale non linéaire*, qui part de l'origine du diagramme charge-déplacement ;
- d'un *point limite* qui correspond à l'annulation de la pente de la trajectoire d'équilibre et où les configurations d'équilibre passent de stables à instables ;
- d'un phénomène de *claquement* qui survient au point limite lorsque l'on veut accroître la charge. Il consiste en un passage dynamique de la structure vers une configuration d'équilibre stable, mais éloignée de la précédente.

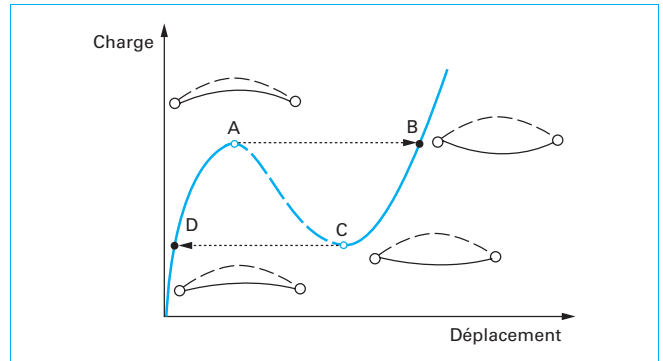


Figure 11 – Instabilité par claquement d'un arc surbaissé

- L'analyse d'un problème de ce type comporte la détermination :
- des coordonnées du point limite, en particulier son ordonnée, appelée *charge élastique de claquement* ou encore *charge élastique limite*, ou, par extension, *charge critique élastique* ;
 - de la configuration déformée de l'élément structural lorsque la bifurcation survient, appelée *mode d'instabilité*.

Il est important de souligner que, contrairement à ce qui se passe dans une instabilité par bifurcation, les déplacements apparaissant dans une instabilité par claquement sont déjà présents dès le début de la mise en charge. L'augmentation de celle-ci engendre une perte progressive de la rigidité de l'élément, traduite par une diminution de la pente de la trajectoire d'équilibre, jusqu'à ce que celle-ci s'annule au point limite.

■ Les coupoles et les arcs sphériques à grand rayon de courbure, articulés aux pieds et sollicités par des forces transversales radiales, sont des éléments structuraux comprimés particulièrement sensibles à l'instabilité par claquement. Ce type de comportement est représenté schématiquement à la figure 11.

Au début, l'arc s'affaisse au fur et à mesure que la charge transversale augmente jusqu'à atteindre le point limite A. La non linéarité de la trajectoire suivie reflète la perte continue de rigidité de l'arc en raison de l'influence croissante de l'effort axial de compression jusqu'à l'annulation de cette rigidité en A. À ce stade une augmentation infime de la charge engendre un changement de signe de la courbure de l'arc ; l'arc « claque » pour retrouver un état d'équilibre en B auquel correspond une géométrie de l'arc différente de celle d'origine.

Si, ultérieurement la charge sollicitante est progressivement réduite, le comportement de l'arc évolue, en descendant, le long de la trajectoire d'équilibre atteinte, et ce jusqu'à un autre point limite C. Toute réduction additionnelle de la charge à partir du point C provoque un nouveau claquement soudain de C vers D, avec recouvrement du signe de la courbure d'origine.

3. Éléments structuraux, idéal et réel

■ Le concept de *charge critique élastique* est intimement associé à un *élément structural idéal*, à la fois quant à sa configuration initiale (dépourvue de toute imperfection géométrique, de type défaut de rectitude ou défaut de planéité), au matériau qui le compose (indéfiniment élastique), et aux conditions d'application de la sollicitation à laquelle il est soumis (résultante axiale ou agissant strictement dans le plan moyen).

■ Le concept de **charge ultime** caractérise, au contraire, un *élément structural réel*, donc un élément géométriquement et structuralement imparfait, fait d'un matériau répondant à une loi constitutive inélastique et sollicitée avec de faibles excentricités non désirées, mais inévitables. **La charge ultime est donc réputée être représentative de la capacité portante effective.**

Dans le cadre de projet, elle est appelée, moyennant utilisation de coefficients partiels de sécurité appropriés, à être comparée à la sollicitation pour porter un jugement sur l'aptitude, ou non, de la structure à supporter cette sollicitation.

Si la charge critique ne constitue clairement pas, en toute circonstance, une mesure réaliste de la capacité portante, elle constitue néanmoins un élément clé dans le processus d'évaluation de la charge ultime. Dès lors, **sa détermination reste essentielle.**

3.1 Élément structural idéal

L'élément structural *idéal* présente un certain nombre de caractéristiques simples et commodités pour les développements théoriques dont il va être l'objet mais non strictement conformes à la réalité.

S'agissant d'une barre, l'axe longitudinal, lieu du centre de gravité des sections transversales, est parfaitement rectiligne et les axes principaux de toutes les sections transversales ont des orientations constantes. Pour une plaque, la surface moyenne, lieu des points à mi-épaisseur, est appelée « plan moyen ». Dans une coque, le lieu des points à mi-épaisseur constitue également une surface moyenne qui répond strictement à la forme géométrique définissant la coque ; ainsi, une coque cylindrique et une coque conique seront respectivement définies par l'équation analytique de leur surface moyenne, à savoir un cylindre et un cône.

Le matériau constitutif est supposé linéairement et indéfiniment élastique. Pour les aciers de construction, le comportement du matériau, en termes de diagramme contrainte-déformation, est une droite de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ indéfinie, où E désigne le module d'élasticité de l'acier, de l'ordre de 210 000 N/mm². En outre, le matériau est vierge et dénué de toute histoire préalable. Plus particulièrement, en l'absence de toute sollicitation, il n'est l'objet, en aucun point, d'une déformation initiale, ce qui s'exprime plus communément par l'absence de toutes contraintes résiduelles.

Quant à la sollicitation, elle est à son tour supposée répondre rigoureusement et strictement à l'appellation qui la caractérise. Dans une barre, une compression axiale est une distribution de contraintes normales dont, en toute section, la résultante sur la section transversale de la barre (respectivement l'épaisseur d'une plaque ou d'une coque) agit rigoureusement au centre de gravité de la section (respectivement dans la surface moyenne pour une plaque ou une coque).

3.2 Imperfections structurales et géométriques

L'élément structural *réel* diffère de l'élément structural idéal. Il est celui auquel on se trouve confronté dans la pratique et qui résulte d'un processus de fabrication, pour lequel la perfection ne saurait exister.

Quiconque a assisté, par **exemple**, au laminage à chaud d'une poutrelle ou bien à la reconstitution, par soudage, d'une section à partir des plats constitutifs comprend aisément que les produits issus de ces modes de fabrication ne sauraient avoir qu'une géométrie imparfaite. Ainsi, une barre n'est jamais, ni parfaitement rectiligne, ni parfaitement doublement symétrique (s'agissant d'une section en double té), ni dépourvue de tout vrillage autour de son axe longitudinal.

De manière similaire, les charges n'agissent pas toujours rigoureusement de la manière souhaitée. Ainsi, on ne peut empêcher qu'une charge dite « axiale » soit, en réalité, appliquée avec une très faible excentricité.

En pratique, de tels défauts de centrage de la charge sont couverts par l'adoption de valeurs conventionnelles de défauts de rectitude. Ceux-ci constituent donc l'essentiel des inévitables *imperfections géométriques*.

■ Le **refroidissement** d'un profilé au cours de son laminage, ou d'une section reconstituée au cours du soudage, ne peut s'effectuer de manière homogène et uniforme. Les régions qui refroidissent les dernières voient leur raccourcissement entravé par les zones voisines plus froides.

Ce refroidissement différentiel est la cause d'un état de déformations résiduelles tel que, en l'absence de toute sollicitation externe, la section se trouve, pour partie, soumise à de la traction et, pour partie, à de la compression (les zones refroidies en dernier étant le siège de contraintes de traction). La distribution de ces contraintes normales, dites *contraintes résiduelles*, existe en-dehors de toute action extérieure directe. Selon un principe fondamental de la statique, elles doivent donc être en équilibre au sein de la section considérée ; elles constituent un état de contraintes auto-équilibré, aussi appelé « état d'auto-contraintes ».

Il est généralement admis que les contraintes résiduelles sont constantes au travers d'une paroi, c'est-à-dire sur l'épaisseur de cette paroi. Cette hypothèse, formulée par souci de simplification, n'est toutefois qu'une approximation. Elle peut être assez notablement invalidée pour les sections formées à froid.

Exemple : la simulation numérique d'essais de flambement sur barres tubulaires à section rectangulaire formée à chaud, mais finie à froid, n'a donné des résultats proches des résultats expérimentaux qu'à condition de modéliser la variation des contraintes résiduelles sur l'épaisseur des parois.

■ Les **distributions des contraintes résiduelles**, respectivement de laminage et de soudage, dans des sections de géométries comparables, présentent en gros des formes analogues.

- **Pour les sections reconstituées par soudage**, on observe une influence du mode de fabrication des semelles (plats laminés ou plats oxycoupés). Il existe toutefois une différence quantitative significative quant à l'intensité des maxima en traction de ces distributions.
- **Pour les aciers structuraux ordinaires**, il est coutume de dire que, dans un profilé laminé, cette intensité est de l'ordre de 0,2 à 0,3 fois celle de la limite d'élasticité du matériau, tandis que pour un profilé reconstitué par soudage, les contraintes résiduelles de traction, dans et au voisinage immédiat de la zone soudée, sont proches de la limite d'élasticité.
- Contrairement à une idée assez largement répandue et à certains écrits qui pourraient le donner à penser, les **contraintes résiduelles maxima de traction** ne sont pas proportionnelles à la limite d'élasticité du matériau. Leur mesure relative diminue en réalité avec l'augmentation de la nuance de l'acier. C'est ce qui justifie d'ailleurs, à section donnée, l'adoption de courbes de flambement plus favorables à partir de la nuance d'acier S460, comme on y reviendra par la suite.
- Les **structures en plaques ou en coques** font essentiellement usage de tôles qui sont assemblées par soudage. Les tôles sont laminées puis, généralement, oxycoupées pour être mises à dimensions. Elles peuvent aussi être déformées à chaud, ou plus souvent à froid, pour être mises à forme avant assemblage.
- Le **laminage de tôles planes** introduit des contraintes résiduelles, mais de faible intensité comparativement à celles dues au formage à froid et au soudage ultérieur.

■ Les contraintes résiduelles constituent l'essentiel des *imperfections structurales*.

Il existe bien de faibles variations dans les propriétés géométriques (dimensions, épaisseurs) des éléments structuraux et d'autres, plus significatives, dans les propriétés mécaniques (limite d'élasticité, limite de rupture, module d'élasticité) du matériau. Elles sont, en principe, couvertes par les coefficients partiels de sécurité et l'usage de valeurs caractéristiques de résistance prises égales aux valeurs minimales garanties (et, assez souvent, significativement dépassées pour les aciers doux).

Les imperfections géométriques et les imperfections structurales sont supposées ne pas exister dans l'élément structural idéal dont on détermine la charge critique élastique. Elles seront toutefois prises en compte lorsqu'on évaluera la charge ultime de l'élément réel.

4. Méthodes de détermination des charges d'instabilité

Les méthodes les plus fréquemment utilisées pour l'analyse de la stabilité de systèmes conservatifs sont :

- méthode de l'équilibre de l'état adjacent ;
- méthode de l'énergie.

■ La **méthode de l'équilibre d'un état adjacent** permet d'étudier l'instabilité survient, soit par bifurcation, soit par claquement. Sa mise en œuvre revient à effectuer une analyse linéaire d'instabilité. Selon cette méthode, on examine si, le long d'une trajectoire fondamentale de chargement, il existe, pour un même niveau du chargement, une éventuelle configuration déformée adjacente en équilibre, c'est-à-dire une configuration infiniment proche de la configuration fondamentale considérée.

Rappelons que la valeur de la charge pour laquelle une telle configuration d'équilibre adjacente existe est dite *charge de bifurcation* ou encore *charge critique élastique* et la forme de la configuration déformée correspondante constitue le *mode d'instabilité*, ou encore *mode critique*.

■ Par la **méthode de l'énergie**, on peut étudier les systèmes dont l'instabilité survient, soit par bifurcation, soit par claquement. Sa mise en œuvre se fonde sur le principe du minimum de l'énergie potentielle, selon lequel toute configuration d'équilibre stable correspond à un état pour lequel l'énergie potentielle du système présente un minimum relatif (c'est-à-dire par comparaison à toutes les configurations d'équilibre adjacentes). Selon cette méthode, on examine, pour une configuration d'équilibre donnée, le signe de la variation de l'énergie potentielle par comparaison à toutes les configurations adjacentes. L'équilibre est stable si cette variation est toujours positive, et il est instable s'il existe, au moins, une configuration adjacente de moindre énergie potentielle totale.

Le présent dossier ne vise pas à développer et à expliciter l'application de ces méthodes. On se bornera, dans les dossiers suivants, à en rappeler les principaux résultats.

5. Conclusions

L'instabilité est à prendre en considération dans les structures ou éléments structuraux élancés et sollicités, totalement ou partiellement, en compression.

Le présent dossier constitue une introduction à l'instabilité structurale. Il n'a pas de finalité immédiate au niveau du projet, mais il a vocation formative. Il vise en effet à introduire les principaux concepts relatifs à l'instabilité et à fournir les éléments d'information utiles pour une utilisation raisonnée des règles de vérification à mettre en œuvre dans le contexte de projets.

La relation entre équilibre et stabilité a été introduite de manière intuitive.

Au plan pratique, les principaux phénomènes élémentaires d'instabilité ont été identifiés dans la perspective d'une analyse ultérieure plus approfondie.

Au plan conceptuel, on a introduit les deux types d'instabilité élastique – par bifurcation et par point limite – et on en a passé en revue les caractéristiques et propriétés en se référant à des exemples.

L'instabilité élastique couvre les éléments structuraux dits « idéaux ». Les éléments industriels diffèrent de ces derniers par leur géométrie initiale imparfaite, les excentricités accidentelles dans l'application des charges, la loi constitutive du matériau et les déformations (contraintes) résiduelles résultant de l'historique de l'élaboration du produit.

La charge critique élastique est une caractéristique des éléments structuraux idéaux. La charge ultime, notion attachée aux éléments structuraux industriels, incorpore les effets de toutes sortes d'imperfections et traduit en même temps, aussi fidèlement que possible, le comportement réel du matériau.

Bien davantage que la charge critique élastique, la charge ultime est représentative de la capacité portante. Sa détermination fait néanmoins intervenir la charge critique au rang des paramètres déterminants.

D'autres dossiers aborderont plus précisément et séparément les aspects d'instabilité plus spécifiquement présents dans, respectivement, les barres [5] les plaques et les coques (autres dossiers à paraître prochainement). Leur traitement ne sera toutefois que phénoménologique. Les détails complets devant permettre les vérifications idoines au plan réglementaire sont exposés dans les dossiers s'adressant spécifiquement aux éléments structuraux concernés.