



UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE

Dynamique des structures

Vibrations Mécaniques

Cours et Exercices Corrigés

L3 - Construction Mécanique

DR. BOUMEDIENE FAIZA

PR. MILOUDI ABDELHAMID

DÉPARTEMENT DE CONSTRUCTION MÉCANIQUE ET DE PRODUCTIQUE



Novembre 2016

Table des matières

1	Introduction à la dynamique des structures	7
1.1	Introduction : Objectif de la dynamique des structures	7
1.2	Modélisation mathématique	8
1.2.1	Loi fondamentale de la dynamique	8
1.2.2	Méthode énergétique (systèmes conservatifs)	11
1.2.3	Méthode de Lagrange	11
1.3	Caractéristiques d'un problème dynamique	12
1.3.1	Le nombre de degrés de liberté	12
1.3.2	Rigidités de quelques éléments élastiques	13
1.3.3	Amortissement	15
1.4	Réponse libre non amortie	16
1.4.1	Mouvement harmonique simple	16
1.4.2	Fréquence et période du mouvement libre non amorti	17
1.4.3	Amplitude du mouvement libre non amorti	17
1.5	Réponse libre amortie	18
1.5.1	Amortissement du type visqueux	19
1.5.2	Décrément logarithmique	23
2	Vibrations forcées des Systèmes à un degré de liberté	27
2.1	Introduction	27
2.2	Excitation harmonique	27
2.2.1	Système non amorti	27
2.2.2	Système à amortissement visqueux	28
2.2.3	Etude des variations d'amplitude et de phase	29
2.2.4	Amortissement visqueux équivalent	30
2.2.5	La bande passante	32
2.3	Amortissement du type structural ou hystérésis	33
2.3.1	Amortissement visqueux équivalent à un amortissement du type structural ou hystérésis	33
2.3.2	la réponse forcée d'un système avec un amortissement structural	34

2.4	Application pratiques d'un système à un ddl soumis à une force harmonique . . .	34
2.4.1	Balourd dans les machines tournantes	35
2.4.2	Isolation vibratoire et transmissibilité	36
2.4.3	Cas d'une fondation rigide (transmissibilité en force)	37
2.4.4	Cas d'une fondation mobile (transmissibilité en déplacement)	38
2.4.5	Application - Capteurs de vibrations	40
2.5	Excitation périodique	44
2.5.1	Analyse de Fourier	44
2.5.2	Réponse à une excitation représentée par des séries de Fourier	45
2.6	Excitation transitoire	46
2.6.1	Excitation par impulsion	46
2.6.2	Excitation quelconque	49
2.6.3	Force brutale d'une durée illimitée - Intégrale de convolution	49
2.6.4	Force brutale d'une durée limitée	50
2.7	Amortissement du type Coulomb	51
3	Systèmes à N degrés de liberté	59
3.1	Introduction	59
3.2	Equations générales des systèmes non amortis	59
3.3	Les modes propres de vibration	60
3.4	Orthogonalité des modes propres	62
3.5	Réponse du mouvement libre	63
3.6	Réponse du mouvement forcé harmonique	63
3.7	Application : étouffeur de vibrations	66
3.8	Système avec amortissement visqueux	67
3.9	Généralisation aux systèmes à $Nddl$	67
3.10	Normalisation des modes	70
3.10.1	Normalisation par rapport à l'unité	70
3.10.2	Normalisation par rapport à la masse	71
3.10.3	Calcul des modes propres dans le cas de $nddl$	71
4	Introduction aux Systèmes continus	75
4.1	Introduction	75
4.2	Vibrations longitudinales dans les barres	75
4.2.1	Equations des ondes longitudinales	75
4.2.2	Fréquences naturelles et déformées modales	76
4.2.3	Conditions aux limites	77
4.2.4	Expression complète du mouvement	78

4.3	Vibrations de torsion dans les barres	80
4.3.1	Equations des ondes de torsion	80
4.3.2	Conditions aux limites	81

Chapitre 1

Introduction à la dynamique des structures

1.1 Introduction : Objectif de la dynamique des structures

Tout corps possédant une masse et une élasticité est capable de vibrer. Ces vibrations peuvent être de plusieurs ordres :

- utiles (montres, rasoir électrique, haut parleur, détection de fissures par mesures vibratoires, etc...),
- agréables (berceau, balançoire, instruments de musique, etc...),
- désagréables voire bruyantes (marteau-piqueur, etc...),
- fatigantes ou nuisibles tant pour les êtres humains que pour les machines ou les édifices (sur-chargent les pièces et fatiguent les matériaux en provoquant parfois des ruptures, desserrent les assemblages et matent les surfaces en contact, nuisent à la précision des mouvements et par conséquent à la qualité du travail accompli, fatiguent le personnel et nuisent à sa santé ... etc.).

La lutte contre les vibrations indésirables est un aspect important de l'étude des machines. Le rôle de l'ingénieur est de :

- prévoir les résonances dangereuses,
- s'assurer qu'elles se trouvent hors du régime opératoire,
- éliminer ou de réduire les sources de vibrations,
- atténuer la vibration des machines,
- protéger l'environnement et les appareils contre les vibrations,
- introduire des amortisseurs.

Ainsi la conception de toute machine ou structure nécessite la prise en considération du comportement vibratoire de celle-ci. Pour cela, la modélisation mathématique est nécessaire. Le modèle permet :

- d'étudier le comportement d'un prototype et d'apporter les corrections nécessaires avant de le réaliser, d'où un gain de temps et d'argent,
- d'éviter de faire des mesures trop coûteuses ou même impossibles sur l'objet réel (grande machines, simulation d'accidents),
- de faire fonctionner (simuler) le système dans des situations extrêmes sans aucun danger ni frais,
- de découvrir des effets inattendus.

1.2 Modélisation mathématique

Les équations mathématiques qui définissent les déplacements, sont appelées, les équations de mouvements. La résolution de ces équations donne l'historique des déplacements recherchés. Afin d'établir ces équations de mouvements, on dispose de plusieurs méthodes, dont nous présentons certaines qui sont déjà vues en modules (VOM et Mécanique rationnelle -cf programme Licence 2ème année) :

- la loi fondamentale de la dynamique,
- et la méthode de Lagrange.

1.2.1 Loi fondamentale de la dynamique

Soient le repère Galilien R_i et le système matériel (S) de masse m et de centre d'inertie G (Figure 1.1). Le système (S) est lié au repère R_k .

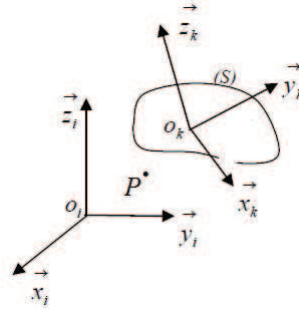


FIGURE 1.1 – Un système matériel

On définit le torseur des forces extérieures par rapport au point P , comme suit :

$$\tau_{S/P} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{ext} \\ \vec{M}_{/P}(\vec{F}_{ext}) \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

tel que \vec{F}_{ext} et $\vec{M}_{/P}(\vec{F}_{ext})$ sont respectivement la résultante des forces extérieures et la résultante des moments des forces extérieures par rapport au point P .

Le torseur dynamique, calculé dans le repère R_i , du système (S) par rapport à un point P quelconque est donné par :

$$\tau_{D/P} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Sigma}^i \\ \vec{\delta}_{/P}^i \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

tel que $\vec{\Sigma}^i$ est la résultante dynamique et $\vec{\delta}_{/P}^i$ est le moment dynamique par rapport à un point P . Ces derniers sont donnés par les relations suivantes :

$$\vec{\Sigma}^i = m \frac{d^i \vec{V}^i(G)}{dt} \quad (1.3)$$

$$\vec{\delta}_{/P}^i = \frac{d^i \vec{\mu}_{/P}^i}{dt} + \vec{V}^i(P) \wedge m \vec{V}^i(G) \quad (1.4)$$

où $\vec{V}^i(*)$ est la vitesse du point $(*)$ et $\vec{\mu}_{/P}^i$ est le moment cinétique donné par :

$$\boxed{\vec{\mu}_{/P}^i = I_G \vec{\Omega}_k^i + \overrightarrow{PG} \wedge m \vec{V}^i(G) ; P \text{ quelconque}} \quad (1.5)$$

et I_G et $\vec{\Omega}_k^i$ sont respectivement le tenseur d'inertie calculé au centre d'inertie G et le vecteur de rotation instantané.

Si le point P appartient au système matériel (S) (par exemple O_k), on peut calculer le moment cinétique par la relation :

$$\boxed{\vec{\mu}_{/O_k}^i = I_{O_k} \vec{\Omega}_k^i + \overrightarrow{O_k G} \wedge m \vec{V}^i(O_k) ; O_k \in S} \quad (1.6)$$

Si le point P est quelconque mais fixe ou s'il se coïncide avec le centre d'inertie de la structure G , la relation (1.4) devient :

$$\boxed{\vec{\delta}_{/P}^i = \frac{d^i \vec{\mu}_{/P}^i}{dt} = I_G \frac{d^i \vec{\Omega}}{dt}} \quad (1.7)$$

La loi fondamentale de la dynamique est définie par l'égalité entre le torseur dynamique (1.2) et le torseur des forces extérieures (1.1), comme suit :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Sigma}^i \\ \vec{\delta}_{/P}^i \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{/ext} \\ \vec{M}_{/P}(\vec{F}_{ext}) \end{array} \right\}} \quad (1.8)$$

Ce qui donne pour la translation pure de coordonnée x :

$$\boxed{\sum_i F_i = m \ddot{x}} \quad (1.9)$$

où \ddot{x} est l'accélération du centre de gravité de la masse et $m \ddot{x}$ est appelée force d'inertie qui s'oppose à l'accélération de la masse.

Dans le cas de la rotation pure de coordonnée θ par rapport au point P , le théorème fondamental de la dynamique devient :

$$\boxed{\sum_i M_{i/P}(F_{ext}) = I_P \ddot{\theta}} \quad (1.10)$$

où $\ddot{\theta}$ est l'accélération en rotation.

Application 1.1

Considérons un système masse-ressort-amortisseur (Figure 1.2 a). Pour utiliser la loi mentionnée ci-dessus (1.9), nous devons passer par différentes étapes :

- isoler le système dans sa position d'équilibre statique et déterminer les forces de rappel élastique actives à cette position (Figure 1.2 b).
- choisir un sens positif pour le déplacement, la vitesse et l'accélération.
- représenter le système isolé pendant son déplacement positif à partir de sa position d'équilibre avec toutes les forces qui s'exercent sur le système, avec leurs sens réels. Pendant ce déplacement, la vitesse est aussi considérée positive pendant ce temps (Figure 1.2 c).
- appliquer la deuxième loi de Newton (1.9)

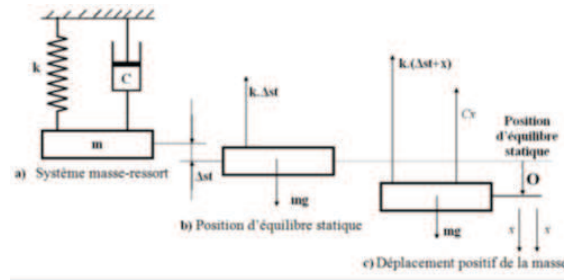


FIGURE 1.2 – Système à un degré de liberté avec amortissement visqueux

On obtient l'équation de l'équilibre statique (Figure 1.2 b) :

$$k\Delta_{st} = mg \quad (1.11)$$

En dynamique (Figure 1.2 c) :

$$k(\Delta_{st} + x) + C\dot{x} - mg = m\ddot{x} \quad (1.12)$$

En remplaçant (1.11) dans (1.12), on trouve l'équation de mouvement dynamique par rapport à la position d'équilibre statique comme suit :

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = 0 \quad (1.13)$$

Application 1.2

Considérons un pendule inversé, constitué d'une sphère de masse m_1 et de rayon r , solidaire à une des extrémités de la tige de masse m_2 et de longueur L_2 (Figure 1.3). La tige est articulée à une extrémité et fixée à un ressort et un amortisseur. Nous supposons que $r \ll L_2$ et par conséquent la sphère peut être considérée comme un point matériel et donc le moment d'inertie massique total devient :

$$I_O = I'_O + m_1 L_2^2$$

où I'_O est le moment d'inertie massique de la tige par rapport à l'axe O

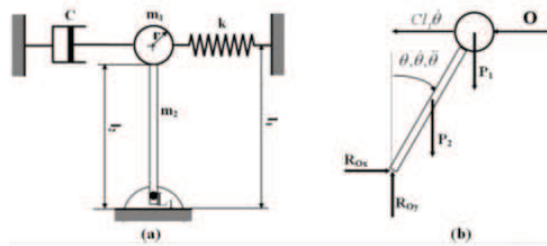


FIGURE 1.3 – Pendule inversé

En adoptant les mêmes étapes que précédemment, nous aurons à l'état d'équilibre statique, le ressort n'est pas sollicité. En se référant au diagramme isolé (Figure 1.3 b), et en appliquant l'équation (1.10), pour les faibles oscillations, il vient :

$$P_2 \frac{l_2}{2} \theta + P_1 l_1 \theta - k l_1^2 \theta - C l_1^2 \dot{\theta} = (I'_O + m_1 l_1^2) \ddot{\theta}$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{C l_1^2}{I_O} \dot{\theta} + \left(\frac{k l_1^2 - P_2 \frac{l_2}{2} - P_1 l_1}{I_O} \right) \theta = 0 \text{ avec } I_O = I'_O + m_1 l_2^2$$

1.2.2 Méthode énergétique (systèmes conservatifs)

Quand il n'y a pas de dissipation d'énergie, le système est dit conservatif. A chaque instant, l'énergie d'un système conservatif, en vibrations libres, est répartie en énergie cinétique et énergie potentielle. L'énergie cinétique est emmagasinée dans la masse par l'intermédiaire de sa vitesse, par contre l'énergie potentielle est emmagasinée sous forme de travail effectué par la déformation élastique ou par un champ de force comme la gravitation. L'énergie totale est constante et donc la variation de l'énergie totale est nulle pour un système conservatif.

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T + U) = 0} \quad (1.14)$$

où T et U sont respectivement l'énergie cinétique et potentielle.

Application 1.3

Considérons un pendule de torsion constitué d'un disque de moment d'inertie J restreint à une rotation par un arbre de raideur de torsion K (Figure 1.4). Les énergies cinétique et potentielle sont données par :

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$\text{et } U = \frac{1}{2} K \theta^2.$$

En appliquant l'équation (1.14), on obtient :

$$J\ddot{\theta} + K\theta = 0$$

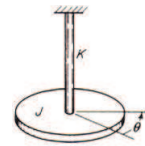


FIGURE 1.4 – Pendule de torsion

1.2.3 Méthode de Lagrange

Soit un système dont la position d'un point est repérée par n ordonnées q_1, q_2, \dots, q_n . On appelle équation de Lagrange, l'équation de la forme :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i} \quad (1.15)$$

avec :

T : l'énergie cinétique totale du système,

U : l'énergie potentielle totale du système,

Q_i : la force généralisée externe appliquée au système.

D : l'énergie de dissipation

$D = \frac{1}{2} C \dot{q}_i^2$ avec C : le coefficient d'amortissement

Dans le cas où toutes les forces dérivent d'un potentiel, l'équation (1.15) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

avec : $L = T - U$: est le Lagrangien du système.

Pour un système conservatif, libre, l'équation de Lagrange peut être écrite :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.16)$$

Application 1.4

Une barre de longueur L , de poids P a un mouvement de vibrations dans le plan de la figure 1.5. Pour des faibles oscillations, établir l'équation du mouvement de la barre.

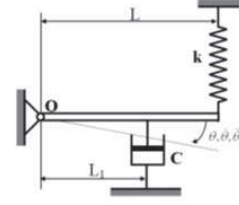


FIGURE 1.5 – Barre articulée

Solution

L'énergie cinétique, potentielle et celle de dissipation, sont données respectivement par :

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 \quad , \quad U = \frac{1}{2} K (L\theta)^2 \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{2} C (L\dot{\theta})^2$$

Le calcul des différents termes donne :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_0 \ddot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = kL^2 \theta, \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = CL_1^2 \dot{\theta} \quad \text{et} \quad Q = 0$$

En appliquant l'équation de Lagrange (1.15), nous aurons :

$$J_0 \ddot{\theta} + CL_1^2 \dot{\theta} + kL^2 \theta = 0$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{CL_1^2}{J_0} \dot{\theta} + \frac{kL^2}{J_0} \theta = 0$$

1.3 Caractéristiques d'un problème dynamique

Tout système vibratoire peut être modélisé par un système équivalent (Figure 1.2 a) ayant une masse équivalente m , un amortissement équivalent c et une rigidité équivalente k . Lorsque le système est soumis à une force f , le problème dynamique est régi par l'équation suivante :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \quad (1.17)$$

où x , \dot{x} et \ddot{x} caractérisent respectivement le déplacement, la vitesse et l'accélération de la masse. Pour un système à un degré de liberté, ces entités sont des scalaires. Par contre, si le nombre de degrés de liberté n est supérieur à un, m , c et k deviennent des matrices de dimension n et x , \dot{x} et \ddot{x} ainsi que la force f deviennent des vecteurs de dimension n .

1.3.1 Le nombre de degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté d'un système physique est égal au nombre minimal de coordonnées spatiales indépendantes nécessaires pour décrire le mouvement du système. Ainsi une particule libre dans l'espace possède trois degrés de liberté, par contre un corps absolument rigide a six degrés de liberté dans l'espace, trois pour la détermination de sa position et trois pour la détermination de son orientation. Pour décrire les mouvements des corps continus élastiques,

il nous faut une infinité de coordonnées (trois pour chaque point du corps) donc leur nombre de degrés de liberté est infini. Cependant, dans plusieurs cas, certaines parties du corps peuvent être considérées comme rigides et le système peut être considéré dynamiquement équivalent à un système à un degré de liberté (Figure 1.6).

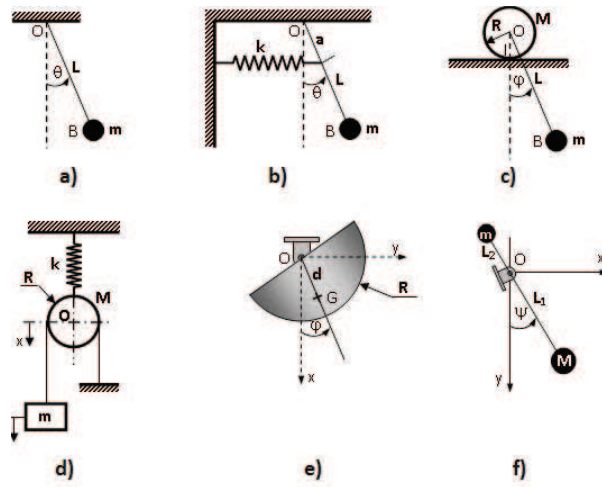


FIGURE 1.6 – Systèmes à un degré de liberté

1.3.2 Rigidités de quelques éléments élastiques

Ressort équivalent

En pratique, deux dispositions de ressorts peuvent exister :

Disposition en série (Figure 1.7)

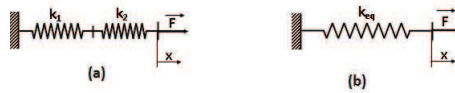


FIGURE 1.7 – Ressorts en série et leur système équivalent

$$F = k_{eq}x = k_{eq}\left(\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k_{eq}}$$

En général, pour n ressorts en série, on a :

$$\boxed{\frac{1}{k_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}} \quad (1.18)$$

Disposition en parallèle (Figure 1.8)

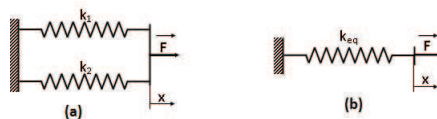


FIGURE 1.8 – Ressorts en parallèle et leur système équivalent

Les deux ressorts se déplacent de la même quantité :

$$F = k_{eq}x = k_1x + k_2x \Rightarrow k_{eq} = k_1 + k_2$$

En général, pour n ressorts en parallèle, on a :

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^n k_i \quad (1.19)$$

La rigidité des structures peut être déterminée par un calcul statique. On donne quelques valeurs dans le Tableau 1.1. [13]

Application 1.5

Déterminer la pulsation propre du système représenté à la figure 1.9, constitué d'une masse m , suspendue à l'aide d'un ressort, à l'extrémité d'une poutre encastree.

On donne :

$$m = 25kg$$

$$k_2 = 1900N/m$$

$$E = 2.110^{11}N/m^2$$

$$L = 0.32m$$

$$a = 0.03m$$

$$b = 0.006m$$

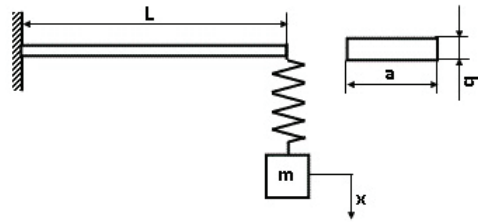


FIGURE 1.9 – Poutre cantilever

A l'extrémité libre de la poutre encastree, le déplacement statique n'est rien d'autre que la flèche statique de celle-ci sous l'action du poids P . La flèche à l'extrémité est donnée par :

$$\Delta_{st} = \frac{PL^3}{3EI}$$

et la rigidité de la poutre est égale à : $k_1 = \frac{P}{\Delta_{st}} = \frac{3EI}{L^3}$ avec $I = \frac{ab^3}{12}$

A.N : $I = 5.410^{-10}m^4$ et $k_1 = 10333.57N/m$

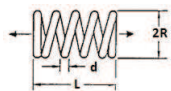



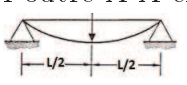
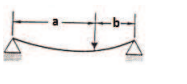
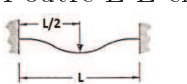
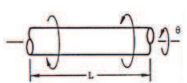
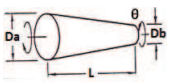
Nous constatons que la raideur de la poutre est en série avec celle du ressort, donc la raideur équivalente est donnée par :

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_e = 160491N/m$$

La pulsation propre du système est donnée par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = 8.01rd/s$$

TABLE 1.1 – Raideurs en translation et rotation de quelques éléments

Ressort hélicoïdal axial 	$K = \frac{Gd^4}{16nR^3}$ pour $L \gg R$ n est le nombre de spires actives
Ressort hélicoïdal en flexion 	$K = \frac{Ed^4}{64nR} \left(\frac{1}{1 + \frac{E}{2G}} \right)$ pour $L \gg R$ n est le nombre de tours actifs
Ressort spiral de torsion 	$K = \frac{EI}{L}$ si le point A est encastré $K = 0,8 \frac{EI}{L}$ si le point A est appuyé L est la longueur totale de la spire I est le moment d'inertie de la section
Poutre E-L chargée à son extrémité 	$K = \frac{3EI}{L^3}$
Poutre A-A chargée en son centre 	$K = \frac{48EI}{L^3}$
Poutre A-A chargée en dehors de son centre 	$K = \frac{3EI(a+b)}{a^2b^2}$
Poutre E-E chargée en son centre 	$K = \frac{192EI}{L^3}$
Torsion d'un arbre uniforme 	$K = \frac{GC}{L}$ C est la constante de torsion de la section
Torsion d'un arbre à section variable 	$K = \frac{3\pi}{32} \frac{D_b^4 G}{L \left[\frac{D_b}{D_a} + \left(\frac{D_b}{D_a} \right)^2 + \left(\frac{D_b}{D_a} \right)^3 \right]}$

1.3.3 Amortissement

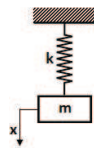
Les expériences montrent qu'il est impossible d'avoir des systèmes vibrants sans dissipation d'énergie. Les forces de friction et d'amortissement sont toujours présentes pour tout système physique, qui atténue l'amplitude des vibrations. Ces forces dissipent de l'énergie ; plus pré-

cisément, l'inévitable présence de ces forces constitue un mécanisme à travers lequel l'énergie mécanique du système, l'énergie cinétique ou l'énergie potentielle se transforme en d'autres formes d'énergies telle que la chaleur. La dissipation de l'énergie peut être une fonction du déplacement, de la vitesse, des contraintes ou d'autres facteurs. Cependant, un modèle d'amortissement peut être conçu pour permettre le plus souvent une approximation satisfaisante. Malgré la présence de l'amortissement, pour n'importe quel système, on commence d'abord par étudier la réponse non amortie pour déterminer les modes propres. Ceci est l'objet de la section suivante.

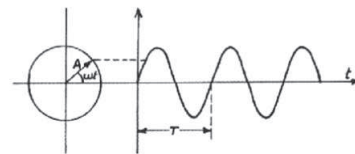
1.4 Réponse libre non amortie

1.4.1 Mouvement harmonique simple

Afin d'introduire la terminologie nécessaire pour nos discussions futures, nous prenons le plus simple système oscillatoire à un seul degré de liberté dont le mouvement peut être décrit par une seule coordonnée x . Le système est constitué d'une masse m suspendue à un ressort de raideur k et de masse négligeable (Figure 1.10 a). Son mouvement harmonique peut être décrit par un vecteur tournant comme indiqué sur la (figure 1.10 b) qui résulte d'une fonction trigonométrique de la forme $A \sin \omega t$ ou $A \cos \omega t$. Le mouvement se répète à intervalles de temps égaux appelés périodes. Le mouvement complet accompli pendant une période est appelé cycle. Le nombre de cycles effectués par unité de temps désigne la fréquence. La valeur du pic du mouvement est appelé amplitude.



(a) Système masse-ressort



(b) Représentation vectorielle

FIGURE 1.10 – Mouvement harmonique

Appliquons la méthode de l'énergie (1.14), pour déterminer l'équation de mouvement du système ci-dessus (Figure 1.10 a) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = (m \ddot{x} + kx) \dot{x} = 0$$

Comme la vitesse \dot{x} ne peut être nulle à tout instant on aura :

$$\boxed{m \ddot{x} + kx = 0} \quad (1.20)$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad (1.21)$$

avec ω_0 est la pulsation propre du système non amorti, donnée par :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (1.22)$$

L'équation (1.21), est une équation différentielle homogène du second ordre dont la solution générale est donnée par :

$$x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t \quad (1.23)$$

Les constantes arbitraires A et B sont déterminées par les conditions initiales du système. En général, les conditions initiales sont les suivantes :

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \quad (1.24)$$

et la solution générale devient :

$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t \quad (1.25)$$

1.4.2 Fréquence et période du mouvement libre non amorti

L'examen de l'équation (1.23) nous montre que le mouvement décrit par cette équation est harmonique donc périodique. Puisque les fonctions sinus et cosinus ont une période égale à 2π , alors la période T du mouvement peut être déterminée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1.26)$$

La fréquence est défini comme étant le nombre de cycles complets du mouvement effectués par unité du temps.

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (1.27)$$

qui définit, la fréquence propre du système.

1.4.3 Amplitude du mouvement libre non amorti

L'équation (1.23) qui décrit le mouvement libre non amorti peut être écrite sous la forme sinusoïdale suivante :

$$x = X \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (1.28)$$

ou bien sous la forme :

$$x = X \cos(\omega_0 t - \psi) \quad (1.29)$$

Où :

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \quad (1.30)$$

$$\tan \phi = \frac{x_0}{v_0/\omega_0} \quad (1.31)$$

$$\tan \psi = \frac{v_0/\omega_0}{x_0} \quad (1.32)$$

Ces équations sont déduites en posant :

$$x_0 = X \sin \phi \text{ et } \frac{v_0}{\omega_0} = X \cos \phi$$

La valeur de X est définie comme étant l'amplitude du mouvement et l'angle ϕ (ou ψ) comme étant la phase du mouvement. Nous représentons graphiquement la solution du mouvement libre non amorti par la (figure 1.11).

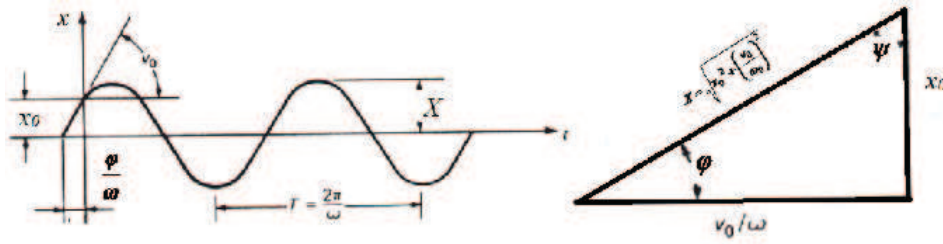


FIGURE 1.11 – Réponse du mouvement libre non amorti

1.5 Réponse libre amortie

Il est impossible d'avoir des systèmes physiques vibrants sans amortissement. Trois mécanismes d'amortissement intrinsèques sont importants dans l'étude des systèmes mécaniques :

- l'amortissement interne : pertes internes, dissipation d'énergie mécanique dans le matériau ;
- l'amortissement de type fluide : dissipation d'énergie mécanique résultant des forces de frottement et des interactions dynamiques fluide-structure ;
- l'amortissement de frottement : dissipation d'énergie mécanique résultant des mouvements relatifs entre les composantes d'une structure aux points de contact ; joints ou des supports.

Si l'amortissement intrinsèque n'est pas suffisant, deux types d'amortissements externes peuvent être ajoutés :

- l'amortissement passif : c'est un dispositif qui dissipe l'énergie à travers quelques mouvements, sans avoir besoin d'une source d'alimentation externe ou d'actionneurs ;
- l'amortissement actif : ce dispositif a des actionneurs qui nécessitent des sources externes d'alimentation. Ils fonctionnent en contrôlant activement le mouvement du système qui nécessite un amortissement. (contrôleurs de vibration).

Du fait qu'il existe divers types de matériaux et différents systèmes mécaniques, on ne peut pas adopter un seul modèle d'amortissement. Dans tous les cas, l'équation de mouvement s'écrit sous la forme :

$$M\ddot{x} + d(\dot{x}) + kx = 0 \quad (1.33)$$

tel que d est le terme d'amortissement (Tableau 1.2)

L'utilisation d'un terme d'amortissement visqueux linéaire équivalent simplifie considérablement l'analyse mathématique. Pour déterminer cet amortissement équivalent, il suffit de prendre l'égalité entre l'énergie dissipée due à ce dernier, par cycle d'oscillation à celle de l'amortissement original. Dans ce qui suit, on étudie la réponse d'un système avec amortissement de type visqueux. On étudiera d'autres types d'amortissement dans le deuxième chapitre.

TABLE 1.2 – Les différents modèles d'amortissement

Type d'amortissement	Expression
Visqueux	$\sum_i C_i \dot{x}_i$
Hystérétique - Structural	$\sum_i \frac{1}{\omega_i} C_i \dot{x}_i$
Frottement	$\sum_i C_i \dot{x}_i \text{sgn}(\dot{x}_i)$
Frottement (Coulomb)	$\sum_i C_i \text{sgn}(\dot{x}_i)$
Fluide	$\sum_i C_i \dot{x}_i \dot{x}_i$

1.5.1 Amortissement du type visqueux

L'amortissement est dit visqueux si la force d'amortissement appliquée à un corps est développée par un fluide visqueux qui l'entoure. La force d'amortissement visqueux est proportionnelle à la vitesse et de sens opposé au mouvement ; elle est exprimée par :

$$F = -C\dot{x} \quad (1.34)$$

où C est le coefficient d'amortissement et \dot{x} est la vitesse.

L'équation de mouvement libre de ce système est donnée par la relation suivante :

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = 0 \quad (1.35)$$

La solution d'une telle équation est de la forme :

$$x(t) = Ue^{rt} \quad (1.36)$$

où r est une constante à déterminer.

En remplaçant (1.36) dans (1.35) nous obtenons quelque soit le temps t :

$$mr^2 + Cr + k = 0 \quad (1.37)$$

L'équation (1.37) est appelée équation (ou polynôme) caractéristique de l'équation différentielle (1.35), son discriminant est donné par :

$$\Delta = C^2 - 4km \quad (1.38)$$

Cas 1 : $\Delta = 0$:

Dans ce cas l'équation (1.37) a une racine double de la forme :

$$r = \frac{-C}{2m} \quad (1.39)$$

En annulant la valeur de Δ (1.38), on obtient :

$$C^2 - 4km = 0 \Rightarrow C = 2\sqrt{km}$$

Cette valeur représente l'amortissement critique C_{cr} (la transition entre les conditions de mouvements oscillatoire et non oscillatoire). Donc :

$$\boxed{C_{cr} = 2\sqrt{km} = 2\omega_0 m} \quad (1.40)$$

Donc, l'équation (1.39) devient :

$$r = \frac{-C_{cr}}{2m} = -\omega_0 \quad (1.41)$$

Donc la solution (1.36) s'écrit sous la forme :

$$x(t) = Ue^{-\omega_0 t}$$

Une deuxième solution peut exister tel que U sera fonction de temps, comme suit :

$$x(t) = U(t)e^{-\omega_0 t} \quad (1.42)$$

En remplaçant (1.42) dans l'équation de mouvement (1.35), on obtient :

$$\ddot{U}(t) = 0$$

Ce qui implique que la première dérivée (vitesse) est constante ($\dot{U}(t) = A$). Alors U est linéaire en fonction du temps :

$$U(t) = At + B$$

Donc la solution homogène pour un amortissement critique est donnée par :

$$\boxed{x_h(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}} \quad (1.43)$$

où A et B sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

Cas 2 : $\Delta > 0$ (Système sur-amorti) :

Dans ce cas les deux racines sont réelles distinctes données par :

$$r_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4km}}{2m} \quad (1.44)$$

Puisque C est une valeur positive, De la relation (1.38) on obtient :

$$C > 2\sqrt{km} \Rightarrow C > C_{cr}$$

On pose :

$$\boxed{\xi = \frac{C}{C_{cr}}}$$

tel que ξ est le facteur d'amortissement ($\xi > 1$ dans ce cas) et $\xi = 1$ correspond à l'amortissement critique.

Alors le coefficient d'amortissement peut être écrit sous la forme :

$$\boxed{C = 2\xi\omega_0 m} \quad (1.45)$$

En remplaçant C par sa valeur (1.45) dans la solution (1.44), cette dernière devient :

$$r_{1,2} = \omega_0(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) \quad (1.46)$$

Le mouvement est apériodique (non oscillatoire) sous forme exponentielle décroissante.

$$\boxed{x_h(t) = Ae^{-\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t} + Be^{-\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t}} \quad (1.47)$$

où A et B sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

Cas 3 : $\Delta < 0$ (Système sous-amorti) :

Dans ce cas Δ est de type complexe :

$$\Delta = -(4km - C^2) = i^2(4km - C^2)$$

Les solutions sont complexes conjuguées de la forme :

$$r_{1,2} = \frac{-C \pm i\sqrt{4km - C^2}}{2m} \quad (1.48)$$

ou en fonction du facteur d'amortissement ξ comme dans la relation (1.46) comme suit :

$$r_{1,2} = \omega_0(-\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2}) \quad (1.49)$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors sous la forme :

$$x_h(t) = e^{-\xi\omega_0 t}(Ae^{i\omega_a t} + Be^{-i\omega_a t}) \quad (1.50)$$

tel que ω_0 est la pulsation propre du système non amorti et ω_a est la pulsation propre du système amorti,

$$\boxed{\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (1.51)$$

ou sous une forme plus simple comme suit :

$$\boxed{x_h(t) = Xe^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_a t + \Phi)} \quad (1.52)$$

Application 1.6

Un système masse ressort avec amortissement visqueux est écarté de sa position d'équilibre statique d'une distance x_0 , puis lâché sans vitesse initiale.

- Déterminer la réponse du mouvement $x(t)$ quand $\xi = 3$; $\xi = 1$ et $\xi = 0.1$
- Comparer les résultats en traçant sur le même graphe, les trois courbes adimensionnelles x/x_0 en fonction de $\omega_0 t$.

Solution

a) Cas : $\xi = 3$, le mouvement est apériodique dont la réponse est représentée par l'équation (1.47) :

$$x_h = Ae^{(-3+\sqrt{8})\omega_0 t} + Be^{(-3-\sqrt{8})\omega_0 t}$$

Les constantes arbitraires A et B sont déterminées à partir des conditions initiales :

$$x(0) = x_0 \text{ et } \dot{x} = 0$$

La réponse du mouvement devient :

$$\frac{x_h}{x_0} = 1.0303e^{-0.1716\omega_0 t} - 0.303e^{-5.8284\omega_0 t}$$

b) Cas : $\xi = 1$, c'est l'amortissement critique

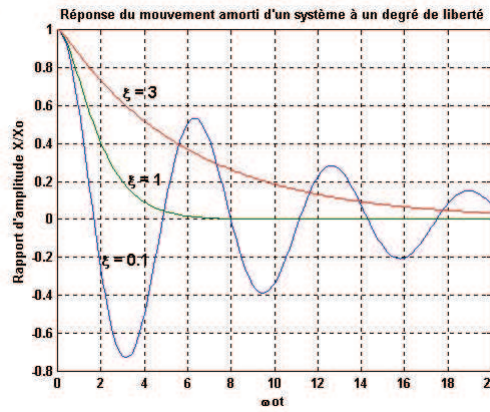
La réponse d'un tel système est de la forme (1.43). En appliquant les conditions initiales, on obtient :

$$\frac{x_h}{x_0} = (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$$

b) Cas : $\xi = 0.1$, mouvement périodique de la forme (1.52). En appliquant les conditions initiales on obtient :

$$\frac{x_h}{x_0} = 1.005e^{-0.1\omega_0 t} \sin(0.995\omega_0 t + 84.26)$$

Les solutions obtenues, pour différentes valeurs de l'amortissement ξ sont représentées sur la (figure 1.12). Pour les trois types de mouvements, nous constatons que l'amplitude du mouvement tend vers zéro lorsque t devient grand, ce qui justifie l'abandon de la solution transitoire en régime permanent.


 FIGURE 1.12 – Réponse du mouvement amorti pour trois valeurs de l'amortissement ξ

Application 1.7

Un oscillateur simple constitué d'une masse $M = 2 \text{ kg}$, du ressort de raideur $K = 10^5 \text{ N/m}$ et d'un amortisseur de coefficient d'amortissement $C = 200 \text{ N.s/m}$, assujéti à se déplacer verticalement comme le montre la figure 1.13. Déterminer la réponse libre du système consécutivement à l'application des conditions initiales suivantes :

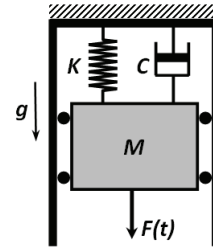


FIGURE 1.13 – Schéma d'un système à un ddl.

$$x(0) = x_0 = 0,01 \text{ m} \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = v_0 = 1 \text{ m/s}$$

Solution

La nature de la réponse libre du système amorti, dépend du facteur d'amortissement ξ , donné par :

$$\xi = \frac{C}{2M\omega_0}$$

avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = 223,61 \text{ rad/s}$$

d'où : $\xi = 0,22$ et donc le système est sous amorti car $\xi < 1$

Pour un tel système amorti, la réponse libre est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\xi\omega_0 t} (A \sin \omega_a t + B \cos \omega_a t) \\ \dot{x}(t) &= e^{-\xi\omega_0 t} [-\xi\omega_0 (A \sin \omega_a t + B \cos \omega_a t) + \omega_a (A \cos \omega_a t - B \sin \omega_a t)] \end{aligned}$$

Appliquons les conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 &\implies B = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\xi\omega_0 B + \omega_a A &= v_0 \implies A = \frac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\omega_a} \end{aligned}$$

La pulsation propre du système amorti :

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} = 217,94 \text{ rad/s}$$

D'où on tire : $A = 0,0069$ et $B = 0,01$ d'où on a :

$$x(t) = e^{-50 t} [0,0069 \sin (217,94 t) + 0,01 \cos (217,94 t)]$$

2ème Méthode :

$$\begin{aligned} x(t) &= X e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_a t + \phi) \\ \dot{x}(t) &= X e^{-\xi \omega_0 t} [-\xi \omega_0 (\sin \omega_a t + \phi) + \omega_a (\cos \omega_a t + \phi)] \end{aligned}$$

Appliquons les conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \implies A \sin \psi = x_0 \\ \dot{x}(0) &= X [-\xi \omega_0 \sin \phi + \omega_a \cos \phi] = v_0 \end{aligned}$$

En combinant les deux équations ci-dessus, on aura :

$$\psi = \arctg \frac{x_0 \omega_a}{v_0 + \xi \omega_0 x_0}$$

soit : $\psi = 0,9668 \text{ rad}$ et $X = 0,0121$

La réponse est donc donnée par :

$$x(t) = 0,0121 e^{-50t} \sin(217,94 t + 0,9668)$$

1.5.2 Décrément logarithmique

La détermination expérimentale du facteur d'amortissement ξ , peut se faire par la mesure du décrément logarithmique δ . Celui-ci représente le taux d'affaiblissement de l'amplitude des vibrations pendant une période (Figure 1.14). Le décrément logarithmique est le logarithme Népérien du rapport de deux amplitudes maximales successives X_i et X_{i+1} .

$$\delta = \ln \frac{X_i}{X_{i+1}} \quad (1.53)$$

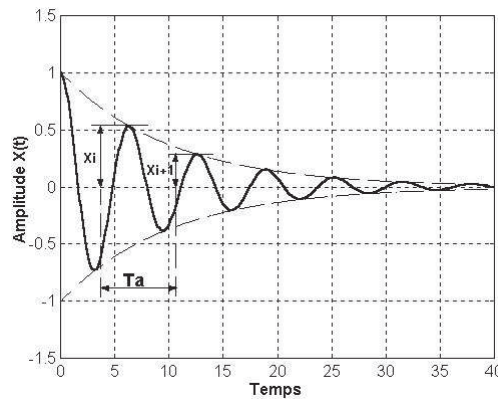


FIGURE 1.14 – Taux d'affaiblissement de l'amplitude des vibrations

Pour un système libre amorti ($\xi < 1$), la réponse est donnée par (1.52) :

$$x_h(t) = X e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_a t + \Phi)$$

Notons que pour la valeur du sinus égale à l'unité, la courbe est tangente à l'enveloppe exponentielle $X e^{-\xi \omega_0 t}$, cependant les tangentes ne sont pas horizontales et les points de tangence apparaissent légèrement à droite du point d'amplitude maximale. Généralement cet écart est

négligeable et l'amplitude du point de tangence peut être prise égale à l'amplitude maximale. Donc le décrement logarithmique peut être écrit sous la forme suivante :

$$\delta = \ln \frac{e^{-\xi\omega_0 t_i}}{e^{-\xi\omega_0(t_i+T_a)}} = \ln e^{\xi\omega_0 T_a} = \xi\omega_0 T_a$$

Comme le système est amorti, la pseudo-période T_a est donnée par :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

on a :

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (1.54)$$

En représentant graphiquement $\delta = f(\xi)$ (Figure 1.15), il est évident que pour des petites valeurs de ξ , le décrement logarithmique δ est directement proportionnel à ξ et est donnée par :

$$\delta = 2\pi\xi \quad (1.55)$$

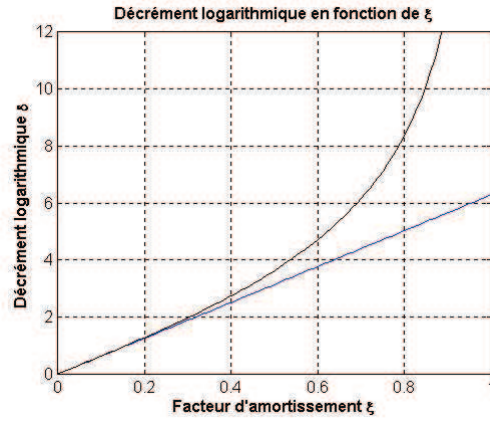


FIGURE 1.15 – Décrement logarithmique en fonction du facteur d'amortissement

Notons que, plus le facteur d'amortissement ξ est faible et plus la mesure du rapport de deux maximums successifs n'est imprécise car ce rapport est proche de l'unité. Afin de palier à ce problème on effectue la mesure du rapport des amplitudes maximales X_i et X_{i+n} . et on obtient :

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{X_i}{X_{i+n}} \quad (1.56)$$

SÉRIE D'EXERCICES

Exercice 1

Etablir les équations de mouvement des systèmes de la figure 1.6. On suppose que :

- les oscillations sont de faible amplitude ;
- les ressorts et les tiges sont de masses négligeables ;
- la corde de la figure 2d est de masse négligeable et inextensible.

Exercice 2

On se propose d'étudier le comportement vibratoire de matériaux en caoutchouc (Figure 1.16) en vue de leur utilisation dans la construction. Pour leur modélisation, nous assimilons l'élasticité du matériau à celle d'un ressort de raideur k et les pertes énergétiques par un amortissement visqueux de coefficient c . Le ressort et l'amortisseur ainsi considérés sont associés en parallèle. On suppose, de plus, que le poids du caoutchouc est négligeable devant les forces mises en jeu.

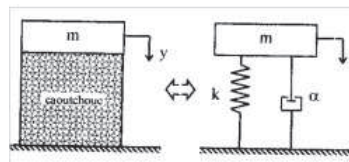


FIGURE 1.16 – Support en caoutchouc

On place une masse $m = 1\text{ tonne}$ sur un bloc en caoutchouc qui se comprime, alors, d'une distance d . Après une compression supplémentaire, la masse m relâchée prend un mouvement oscillatoire amorti autour de sa position d'équilibre que l'on repère par la coordonnée y . On mesure l'intervalle de temps, Δt , séparant le 1er (A_1) et le 6ème (A_6) maximums. On trouve $\Delta t = 0.2\text{s}$. La diminution d'amplitude correspondante est de 60%.

- 1- Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la masse m par rapport à la position d'équilibre.
- 2- Donner la forme générale de la solution $y(t)$. Comment varie l'amplitude des oscillations ?
- 3- Calculer le rapport entre le 1er et le 6ème maximums (A_1/A_6).
- 4- Calculer la pulsation propre ω_0 (en prenant $A_1/A_6 = 2.5$).
- 5- Déduire de ce qui précède les valeurs de k et c .

Exercice 3

Nous nous proposons de déterminer expérimentalement les caractéristiques mécaniques (m, c, k) de l'accéléromètre. Suspendons une masse de 200grammes à la masselotte de l'accéléromètre. Le système étant à l'équilibre, la surcharge est décrochée. Nous observons un mouvement sinusoïdal amorti, les mesures effectuées donnent :

- la pseudo période : $T_a = 20.10^{-3}\text{s}$
- l'amplitude initiale et celle du premier maximum de même signe : $A_0 = 1,25\text{mm}$ et $A_1 = 0,05\text{mm}$

Calculer les caractéristiques suivantes :

- La pulsation propre ω_0
- Le coefficient d'amortissement c
- La masse m et la raideur k .

Exercice 4

Pour quelle valeur de la masse m aura lieu la résonance du système représenté par la (figure 1.17) ?

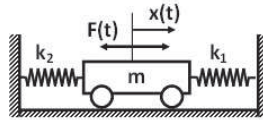


FIGURE 1.17 – Système à un degré de liberté.

On donne :

$$k_1 = 2 \times 10^4 \frac{N}{m}, \quad k_2 = 1 \times 10^4 \frac{N}{m} \quad \text{et} \quad F(t) = 200 \sin 50t$$

Chapitre 2

Vibrations forcées des Systèmes à un degré de liberté

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le mouvement des structures modélisées à un degré de liberté excitée par une force. Nous commençons d'abord par les forces harmoniques. Plusieurs structures sont soumises à des forces ou des déplacements qui peuvent être représentés par des fonctions trigonométriques en sinus ou en cosinus en fonction du temps. L'étude de ce type d'excitation revêt une grande importance puisqu'on le retrouve assez souvent en dynamique des structures. Ces dernières sont souvent sollicitées par des actions dynamiques qui proviennent des machines tournantes qui développent des excitations harmoniques dues à l'inévitable présence de masses excentrées dans les rotors de certaines machines. En outre, dans le cas où l'excitation n'est pas harmonique, la réponse du système peut être obtenue, en utilisant la méthode de Fourier, comme la superposition de réponses à des composantes harmoniques de l'excitation. En plus, nous entamons les forces aléatoires et nous présentons deux nouveaux types d'amortissement.

2.2 Excitation harmonique

2.2.1 Système non amorti

Considérons un système non amorti excité par une force harmonique d'amplitude F_0 et de pulsation Ω . L'équation différentielle régissant un tel mouvement est donnée par :

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t)} \quad (2.1)$$

la solution de cette équation est de la forme :

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)} \quad (2.2)$$

tel que : $x_h(t)$ est la solution de l'équation homogène (c'est le cas du système libre non amorti, étudié dans le chapitre 1) et $x_p(t)$ est la solution particulière déterminée suivant la nature de la force d'excitation.

Dans le cas d'une force harmonique de pulsation Ω , la solution particulière est harmonique de même pulsation :

$$\boxed{x_p(t) = X \sin \Omega t} \quad (2.3)$$

En remplaçant (2.3) dans l'équation (2.1), il vient :

$$X = \frac{F_0/k}{1-r^2} \quad (2.4)$$

où r est le rapport des fréquences :

$$r = \frac{\Omega}{\omega_0} \quad (2.5)$$

et la solution générale sera alors :

$$x(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t + \frac{F_0/k}{1-r^2} \sin \Omega t \quad (2.6)$$

Nous constatons que la réponse est déduite par superposition de deux fonctions harmoniques de fréquences différentes. Donc la réponse globale n'est pas harmonique.

2.2.2 Système à amortissement visqueux

Considérons le cas d'un système à un degré de liberté (figure 2.1) en vibrations soumis à un amortissement du type visqueux. F_0 est l'amplitude de la force d'excitation et Ω est la pulsation d'excitation. L'équation du mouvement du système est donnée par :

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t) \quad (2.7)$$

la solution de cette équation est de la forme :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

La solution particulière $x_p(t)$ dépend de la forme du second membre de l'équation différentielle, ainsi dans le cas de l'équation (2.7), on cherche une solution de la forme :

$$x_p(t) = C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t \quad (2.8)$$

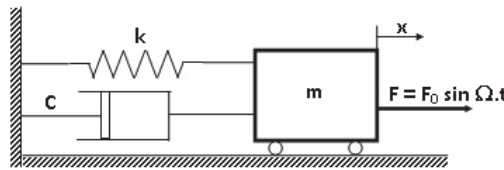


FIGURE 2.1 – Système à amortissement visqueux excité par une force harmonique

En remplaçant $x_p(t)$ dans l'équation (2.7) et après identifications, nous trouvons :

$$C_1 = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2}(\omega_0^2 - \Omega^2) \quad (2.9)$$

$$C_2 = \frac{-F_0/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2} 2\xi\omega_0\Omega^2 \quad (2.10)$$

En posant : $\omega_0^2 - \Omega^2 = E \cos \Phi$ et $2\xi\omega_0\Omega^2 = E \sin \Phi$, nous obtenons :

$$x_p(t) = G \sin(\Omega t - \Phi) \quad (2.11)$$

où G et Φ sont respectivement l'amplitude et le retard de phase de la réponse du mouvement permanent par rapport à l'excitation $F(t)$.

$$x_p(t) = G_0 \frac{\sin(\Omega t - \Phi)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.12)$$

tel que :

$$\Phi = \arctan\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right) \quad (2.13)$$

et G_0 est la réponse à l'excitation statique de grandeur F_0 et r est le rapport des fréquences (2.5)

$$G_0 = X_{st} = \frac{F_0}{k} \quad (2.14)$$

La solution totale est donc la somme de la solution homogène qui représente la réponse transitoire et la solution particulière qui représente la solution permanente :

$$x(t) = X e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_a t + \phi) + \frac{G_0 \sin(\Omega t - \Phi)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.15)$$

Pour la réponse transitoire, nous l'avons déjà étudiée dans le chapitre précédent et nous avons constaté que l'amplitude du mouvement transitoire tend vers zéro lorsque t devient grand ce qui justifie l'abandon de la réponse transitoire en régime permanent. Ainsi la réponse, en régime permanent est donnée par :

$$x(t) = G_0 D \sin(\Omega t - \Phi) \quad (2.16)$$

tel que D est le rapport de l'amplitude de la réponse en mouvement permanent du système sur l'amplitude de la réponse statique. Il est appelé "Facteur d'Amplification Dynamique"

$$D = \frac{G}{G_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.17)$$

A partir de l'équation (2.17), nous constatons que le facteur d'amplification dynamique D varie avec le rapport des fréquences r et du facteur d'amortissement ξ . De même l'équation (2.13), montre que la phase Φ varie également avec les mêmes paramètres.

2.2.3 Etude des variations d'amplitude et de phase

Le facteur d'amplification dynamique maximal D_{max} est obtenu pour le minimum de son dénominateur. Ainsi :

$$\frac{d}{dr} \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} = 0$$

Donc, le facteur d'amplification dynamique est maximal pour :

$$r = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (2.18)$$

Ou bien de la relation (2.5), on trouve que D_{max} s'obtient à la valeur de pulsation :

$$\Omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (2.19)$$

Ainsi nous déduisons que la résonance d'amplitude a lieu à $\Omega_r < \omega_0$. A la résonance d'amplitude, le facteur d'amplification dynamique maximal est :

$$D_{max} = D(r = \sqrt{1 - 2\xi^2}) = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.20)$$

Par contre, nous constatons que la résonance de phase est indépendante du facteur d'amortissement ξ et elle a lieu à $r = 1$ c'est à dire à $\Omega_r = \omega_0$. En général, pour les systèmes amortis, la résonance de phase ne se coïncide pas avec la résonance d'amplitude. Néanmoins, pour les systèmes faiblement amortis nous pouvons dire que :

$$\Omega_r \simeq \omega_0 \quad (2.21)$$

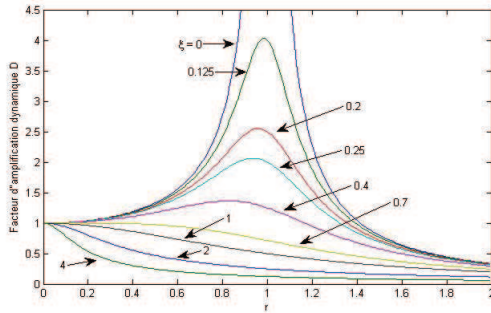
et

$$D_{max} \simeq \frac{1}{2\xi} \quad (2.22)$$

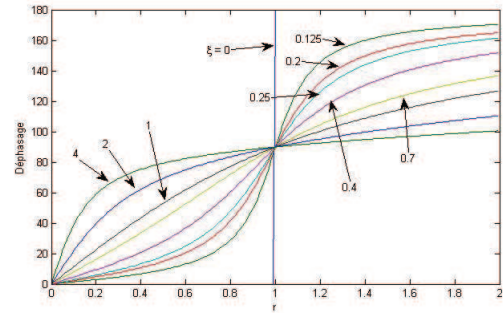
Nous représentons, dans la figure 2.2, l'influence du facteur d'amortissement ξ sur le facteur d'amplification dynamique et sur la phase de la réponse en régime permanent. L'analyse de cette représentation met en évidence un maximum de réponse vibratoire lorsque le rapport des fréquences est égal à $r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ c'est la résonance d'amplitude. Le facteur d'amplification dynamique maximal s'écrit donc : $D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ Nous constatons que la variation de la phase, entre le mouvement de la masse m et de la force excitatrice, en fonction de la pulsation d'excitation est caractérisé (2.2 b) par :

- l'angle de déphasage est compris entre 0 et 180 degrés, avec un passage à 90 degrés au rapport des fréquences égal à 1 ; c'est la résonance de phase,
- pour un faible amortissement, le passage par cette résonance provoque un changement de phase de 180 degrés environ.

Pour les systèmes peu amortis, la résonance de phase et la résonance d'amplitude apparaissent comme confondus ; on parle de résonance sans précision. Cette fréquence de $\omega_0/2\pi$, ne dépend que de la rigidité et de la masse du système ; sa détermination se fait indépendamment de la force d'excitation et de l'amortissement ξ .



(a) Facteur d'amplification dynamique D



(b) La phase Φ .

FIGURE 2.2 – Facteur d'amplification dynamique D et phase Φ en fonction du rapport des fréquences r pour différentes valeurs d'amortissement ξ

2.2.4 Amortissement visqueux équivalent

L'importance de l'amortissement est principalement de limiter l'amplitude de la réponse au voisinage de la résonance. Dans le cas d'un amortissement visqueux, la résonance d'amplitude a lieu à $\omega \simeq \omega_0$ (avec l'hypothèse que $\xi \ll 1$) et :

$$X = \frac{F_0}{C\omega} \quad (2.23)$$

Pour tous les autres types d'amortissement, l'amplitude à la résonance peut être estimée, avec une bonne précision, en utilisant dans l'équation (2.23) le coefficient d'amortissement visqueux équivalent C_{eq} évalué sur la base d'un mouvement harmonique et d'énergie de dissipation égale. Le coefficient d'amortissement visqueux équivalent est déterminé à partir de l'expression de l'énergie dissipée par cycle, par l'amortissement visqueux à la pulsation ω qui est donnée par :

$$E = \pi C_{eq} \omega X^2 \quad (2.24)$$

où l'énergie E doit être évaluée pour la force d'amortissement considérée.

Application 2.1

Déterminer le coefficient d'amortissement visqueux équivalent dans le cas d'une force d'amortissement quadratique, proportionnelle au carré de la vitesse. Ce type d'amortissement est rencontré dans le cas des écoulements turbulents des fluides.

En déduire l'amplitude à la résonance.

Solution

Soit la force d'amortissement :

$$F_a = -sgn(\dot{x})\alpha\dot{x}^2$$

où $sgn(\dot{x}) = \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$

ainsi :

$$F_a = \pm\alpha\dot{x}^2$$

où le signe négatif est pris lorsque \dot{x} est positive et vice versa.

le déplacement est harmonique de type : $x = -X \cos \omega t$

L'énergie dissipée par cycle est :

$$E = 2 \int_{-X}^X \alpha \dot{x}^2 dx = -2\alpha\omega^2 X^3 \int_0^\pi \sin^3 \omega t d(\omega t)$$

soit :

$$E = \frac{8}{3}\alpha\omega^2 X^3$$

Le coefficient d'amortissement visqueux équivalent est tiré à partir de l'égalité des énergie (2.24) :

$$\pi C_{eq} \omega X^2 = \frac{8}{3}\alpha\omega^2 X^3$$

d'où

$$C_{eq} = \frac{8}{3\pi}\alpha\omega X$$

L'amplitude à la résonance est obtenue en posant $\omega = \omega_0$ et $C_{eq} = F_0/(X\omega_0)$ (2.23) :

$$X = \sqrt{\frac{3\pi F_0}{8\alpha\omega_0^2}}$$

2.2.5 La bande passante

Nous avons déjà vu, précédemment (Chapitre 1), que l'affaiblissement d'amplitude des vibrations libres permet d'évaluer l'amortissement d'un système à un degré de liberté, simplement par le calcul du décrément logarithmique. Une autre technique de détermination de l'amortissement est basée sur l'observation de la réponse en régime permanent autour de la résonance, par la mesure de la largeur de bande. L'amortissement dans un système vibratoire est caractérisé par sa courbe de résonance (réponse dans la zone de résonance) et peut être mesuré par la bande passante. La bande passante est l'intervalle $(r_2 - r_1)$ situé autour de la résonance et tel que l'amplitude de la réponse pour les rapports de fréquences r_1 et r_2 soit égale à l'amplitude de la réponse à la fréquence de résonance divisée par $\sqrt{2}$. Nous avons déjà montré que les systèmes faiblement amortis $\xi \leq 0.1$, le pic de résonance d'amplitude correspond aux valeurs : $r \simeq 1$ et $D_{max} \simeq 1/2\xi$ (2.22). En remplaçant dans l'équation (2.17) D par $D_{max}/\sqrt{2}$, on obtient :

$$r^4 + 2r^2(2\xi^2 - 1) + 1 - 8\xi^2 = 0$$

qui a pour solutions :

$$r_{1,2}^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1 + \xi^2}$$

Puisque ξ est faible ($\xi \leq 0.1$), on aura :

$$r_{1,2}^2 = 1 \pm 2\xi$$

Donc on a :

$$r_2 - r_1 = 2\xi$$

En remplaçant les rapports des fréquences par leurs expressions, nous aurons :

$$\frac{\Delta\Omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = 2\xi = \frac{1}{Q} \quad (2.25)$$

où Q est le facteur de surtension ou facteur de qualité. En électronique, Q mesure la résonance du circuit électrique.

La mesure de la bande passante est très utilisée pour déterminer le facteur d'amortissement ξ . Par ailleurs, on a :

$$20 \log_{10} \frac{X(r_1)}{X_r} = 20 \log_{10} \frac{X(r_2)}{X_r} = -3dB$$

Ce qui justifie l'expression fréquemment utilisée de "largeur de bande à (3dB)"

La figure 2.3 schématise la méthode d'obtention de la fréquence de résonance. Les points M_1 et M_2 sont appelés, les points de demi-puissance, car l'énergie dissipée aux fréquences correspondant à r_1 et r_2 est égale à la moitié de celle dissipée à la résonance.

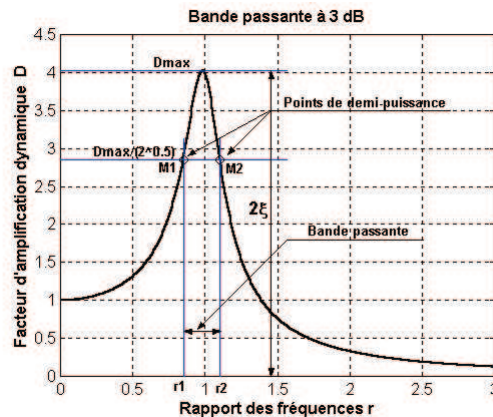


FIGURE 2.3 – Méthode de la largeur de bande

2.3 Amortissement du type structural ou hystérésis

Considérons le cas général d'un déplacement harmonique résultant d'une force d'excitation harmonique. On a donc :

$$F = F_0 \sin \Omega t \text{ et } x = X \sin(\Omega t - \Phi)$$

Le travail effectué par le mouvement pendant un cycle est :

$$E = \int F dx = \int F \frac{dx}{dt} dt = F_0 \Omega X \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \sin \Omega t \cos(\Omega t - \Phi) dt$$

D'où :

$$E = \pi F_0 X \sin \Phi \quad (2.26)$$

Il est évident, qu'à partir de cette équation (2.26), pour une amplitude donnée, l'énergie de dissipation maximale a lieu quand $\Phi = 90^\circ$. Notons que la condition de résonance est $\Omega = \omega_0$ pour $\Phi = 90^\circ$ et l'amplitude correspondante est :

$$X = \frac{F_0/k}{2\xi} \quad (2.27)$$

En remplaçant dans l'équation (2.26), nous obtenons le travail effectué par cycle à la résonance :

$$E = 2\pi \xi k X^2 = \pi C \omega_0 X^2 \quad (2.28)$$

L'énergie dissipée par cycle par la force d'amortissement peut être représentée par la figure 2.4, sachant que ($\dot{x} = X\Omega \cos(\Omega t - \Phi) = \pm\Omega\sqrt{X^2 - x^2}$) et la force d'amortissement visqueux est représentée par une ellipse donnée par :

$$F_a = C\dot{x} = \pm C\Omega\sqrt{X^2 - x^2}$$

Donc le travail effectué par cycle est l'aire entourée par l'ellipse représentée sur la figure 2.4.

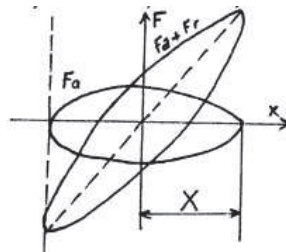


FIGURE 2.4 – La courbe hystérésis

Si nous considérons que l'amortissement est associé avec le ressort, l'équation de la force totale F_t , est donnée par :

$$F_t = F_r + F_a = kx \pm C\Omega\sqrt{X^2 - x^2} \quad (2.29)$$

2.3.1 Amortissement visqueux équivalent à un amortissement du type structural ou hystérésis

Quand un matériau est cycliquement déformé, l'énergie est dissipée intérieurement par l'intermédiaire du matériau lui-même. Plusieurs expériences ont indiqués que pour plusieurs structures métalliques telles que l'acier et l'aluminium, l'énergie dissipée par cycle est indépendante de la

fréquence pour une large bande de fréquences. En général, nous admettons que l'énergie dissipée par amortissement structural est proportionnelle au carré de l'amplitude des vibrations ; soit :

$$E = \alpha X^2 \quad (2.30)$$

Le coefficient d'amortissement visqueux équivalent est donc obtenu par :

$$\pi C_{eq} \omega X^2 = \alpha X^2 \quad (2.31)$$

d'où :

$$C_{eq} = \frac{\alpha}{\pi \omega} \quad (2.32)$$

La force d'amortissement structural est donc :

$$F_a = C_{eq} \dot{x} = \frac{\alpha}{\pi \omega} \dot{x} \quad (2.33)$$

et l'équation différentielle du mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$m\ddot{x} + \frac{\alpha}{\pi \omega} \dot{x} + kx = F_0 e^{j\omega t} \quad (2.34)$$

et dans le cas d'un déplacement harmonique, $\dot{x} = j\omega x$, l'équation (2.34) devient :

$$m\ddot{x} + j\frac{\alpha}{\pi} x + kx = F_0 e^{j\omega t} \quad (2.35)$$

En posant $\frac{\alpha}{\pi} = \eta k$, l'équation de mouvement est donc donnée par :

$$\boxed{m\ddot{x} + k(1 + j\eta)x = F_0 e^{j\omega t}} \quad (2.36)$$

où $k(1 + j\eta)$ est la rigidité complexe et η est appelée facteur de perte par amortissement structural.

2.3.2 la réponse forcée d'un système avec un amortissement structural

La réponse du mouvement permanent de l'équation (2.36) est donc donnée par :

$$\boxed{x = X e^{j(\omega t - \Phi)}} \quad (2.37)$$

Par identification, on a :

$$[(k - m\omega^2) + j\eta k] X e^{-j\Phi} = F_0$$

d'où on tire :

$$\boxed{X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\eta k)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + \eta^2}}} \quad (2.38)$$

et

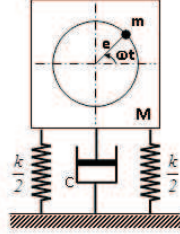
$$\boxed{\Phi = \arctan \frac{\eta k}{k - m\omega^2} = \arctan \frac{\eta}{1 - r^2}} \quad (2.39)$$

2.4 Application pratiques d'un système à un ddl soumis à une force harmonique

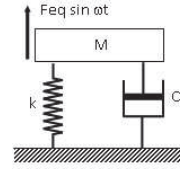
Nous présentons maintenant, l'utilisation pratique des systèmes vibrants modélisés par un système à un degré de liberté soumis à une excitation harmonique.

2.4.1 Balourd dans les machines tournantes

Une turbine, un moteur électrique ou toute autre machine avec un rotor comme organe principal est une machine tournante. On parle de la présence d'un balourd si le centre des masses du rotor ne se coïncide pas avec son axe de rotation. Le produit de la masse par son excentrement (me) est par définition le balourd de la machine tournante (Figure 2.5 a). La machine tournante de masse totale M montrée sur la (figure 2.5 a) est supposée se déplacer dans la direction verticale $x(t)$.



(a) Modèle initial



(b) Modèle équivalent.

FIGURE 2.5 – Balourd

La masse excentrée m tourne avec une vitesse angulaire Ω .

Soit $x(t)$ le déplacement vertical de la masse $(M - m)$, alors le déplacement vertical de m est :

$$x + e \sin \Omega t$$

où : e est l'excentricité.

L'équation différentielle du mouvement du système est alors :

$$(M - m) \ddot{x} + m \frac{d^2}{dt^2} (x + e \sin \Omega t) + C \dot{x} + Kx = 0$$

ou bien :

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = m.e\Omega^2 \sin \Omega t \quad (2.40)$$

Posons $m.e\Omega^2 = F_{eq}$, l'équation de mouvement s'écrit :

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = F_{eq} \sin \Omega t \quad (2.41)$$

On peut dans ce cas donner le modèle équivalent au système initial, et la réponse en mouvement permanent du système est donnée par :

$$x = \frac{me\Omega^2}{K} D \sin (\Omega t - \phi) \quad (2.42)$$

avec : $D = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$, $r = \frac{\Omega}{\omega_0}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$; $\xi = \frac{C}{2\sqrt{KM}}$ et $\phi = \text{Arctg} \frac{2\xi r}{1 - r^2}$

A partir de l'équation 2.42, on a :

$$x = \frac{me\Omega^2}{M \frac{k}{M}} D \sin (\omega t - \phi) = \frac{me}{M} r^2 D \sin (\omega t - \phi) = X \sin (\omega t - \phi)$$

L'amplitude de la réponse en mouvement permanent est :

$$X = \frac{me}{M} r^2 D \quad (2.43)$$

En résonance de phase, $r = 1$; $D = \frac{1}{2\xi}$; $X = \frac{me}{2\xi M}$ et $\phi = \text{Arctg} \frac{2\xi r}{0} = 90^\circ$ de l'équation 2.43, on a :

$$\frac{MX}{me} = r^2 D = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.44)$$

Cette dernière équation est illustrée sur la figure 2.6, pour différentes valeurs de l'amortissement.

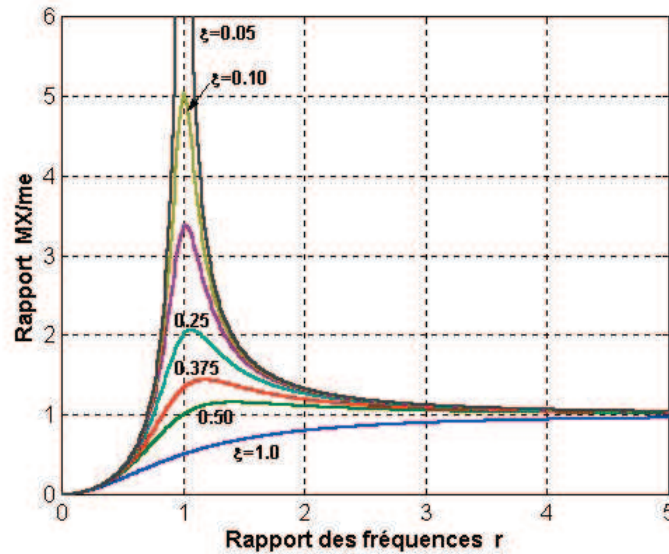


FIGURE 2.6 – Le rapport MX/me

Remarques

- Pour de faibles vitesses, quand $r \ll 1$, la force $me\Omega^2$ est petite et l'amplitude X des vibrations est proche de zéro.
- En résonance de phase, quand $r = 1$ et le facteur d'amplification dynamique $D = 1/2\xi$, la masse $(M - m)$ a une amplitude égale à $X = me/(2\xi M)$ est par conséquent limitée par la présence de l'amortissement dans le système. La masse $(M - m)$ a un déphasage de $\Phi = 90^\circ$ par rapport à la masse excentrée m , lorsque la masse $(M - m)$ se déplace vers le haut en passant par sa position d'équilibre statique, la masse est directement au dessus de son centre de rotation.
- Pour les grandes vitesses, quand $r \gg 1$, $\frac{MX}{me} \simeq 1$. C'est à dire que la masse $(M - m)$ a une amplitude $X \simeq \frac{me}{M}$. En d'autres termes l'amplitude est indépendante de la fréquence d'excitation ou de l'amortissement du système. Lorsque $r \gg 1$, les masses $(M - m)$ et m sont en opposition de phase ($\Phi = 180^\circ$).

Ces déductions peuvent être appliquées au mouvement déséquilibré des machines alternatives.

2.4.2 Isolation vibratoire et transmissibilité

Les forces de vibrations générées par les machines tournantes et qui sont transmises à la fondation sont souvent inévitables ; cependant, elles peuvent être réduites considérablement par un choix approprié des ressorts et amortisseurs.

2.4.3 Cas d'une fondation rigide (transmissibilité en force)

Supposant que la fondation est rigide (Figure 2.7). Si la force appliquée à la masse m est harmonique, l'équation de mouvement du système s'écrit :

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_{eq}\sin\Omega t$$

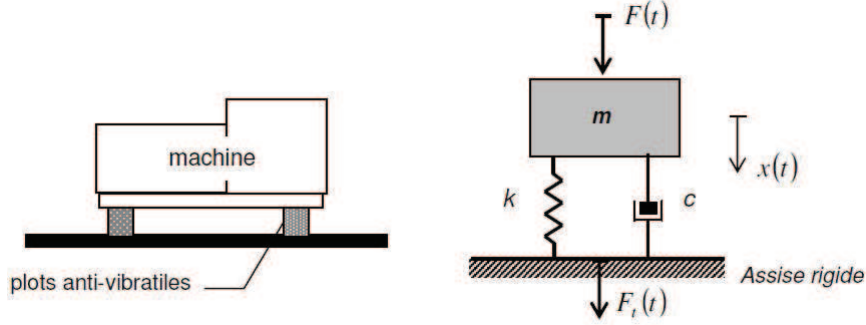


FIGURE 2.7 – Cas d'une fondation rigide

La réponse du système à une excitation harmonique est :

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_a t + \phi_1) + \frac{F_{eq}}{k} D \sin(\omega t - \phi) \quad (2.45)$$

et la force transmise au sol sera :

$$F_T = C\dot{x} + kx \quad (2.46)$$

On s'intéresse uniquement aux forces transmises pendant le mouvement permanent, alors :

$$F_T = kX \sin(\omega t - \phi) + CX\omega \cos(\omega t - \phi) = X\sqrt{k^2 + (C\omega)^2} \sin(\omega t - \phi + \psi)$$

Ce qui donne :

$$F_T = \frac{F_{eq}}{k} D \sqrt{k^2 + (C\omega)^2} \sin(\omega t - \phi + \psi) \quad (2.47)$$

ou en fonction du facteur d'amortissement ξ :

$$F_T = F_{eq} D \sqrt{1 + (2\xi r)^2} \sin(\omega t - \phi + \psi) \quad (2.48)$$

avec $\psi = \arctan \frac{C\omega}{k} = \arctan 2\xi r$

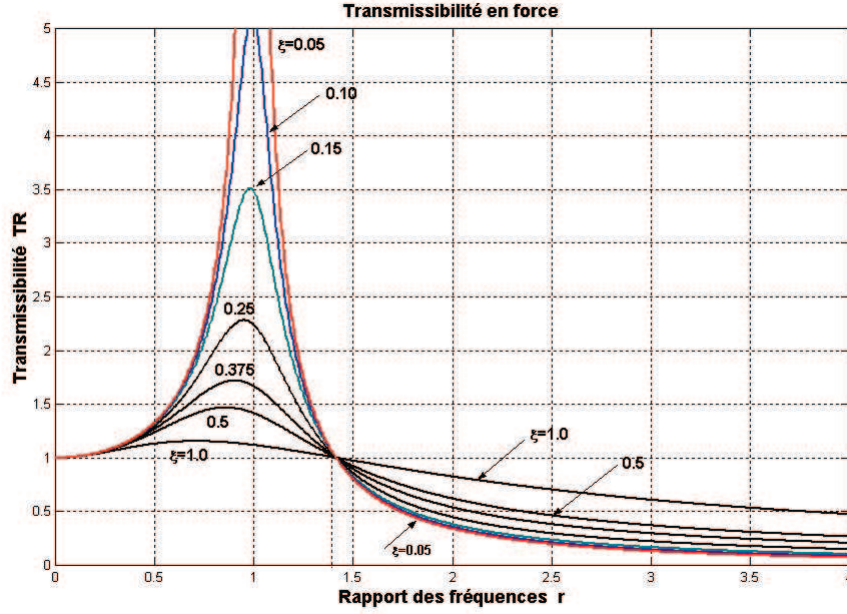
La transmissibilité TR est par définition, le rapport des amplitudes de la force transmise et celle appliquée :

$$TR = \frac{\|F_T\|}{\|F_{eq}\|} \quad (2.49)$$

Ce qui donne :

$$TR = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.50)$$

Cette dernière relation nous permet de tracer les courbes de la dépendance $TR = f(r)$ pour différentes valeurs d'amortissement ξ (Figure 2.8).


 FIGURE 2.8 – La transmissibilité en force TR

On remarque que toutes les courbes du graphe se coïncident au même point d'abscisse $r = \sqrt{2}$. Ce point coupe la figure en deux zones : une zone d'amplification ($r < \sqrt{2}$) et une zone d'isolation vibratoire ($r > \sqrt{2}$). Dans la zone d'amplification ($r < \sqrt{2}$), l'accroissement de l'amortissement cause la diminution de la transmissibilité TR . Par contre, quand la machine tourne avec une vitesse telle que ($r > \sqrt{2}$) la force transmise est inférieure à la force appliquée mais si ξ augmente TR augmente aussi. Ainsi pour une machine à vitesse constante, l'amplitude de la force d'excitation est constante et la force transmise est proportionnelle à la valeur de la transmissibilité TR . Il est donc avantageux de choisir la vitesse de la machine telle que $\Omega/\omega_0 > \sqrt{2}$. En isolation vibratoire, on préférera donc des fréquences propres basses et de faibles amortissements.

Dans le cas d'un amortissement structural, la force transmise au sol est donnée par :

$$F_T = k(1 + j\eta)x \quad (2.51)$$

x est le déplacement donné par la relation (2.37). On obtient alors :

$$F_T = k(1 + j\eta) \frac{F_0/k}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + \eta^2}} e^{j(\omega t - \Phi)} = \frac{F_0(1 + j\eta)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + \eta^2}} e^{j(\omega t - \Phi)}$$

Comme la transmissibilité TR est le rapport de l'amplitude de la force transmise à celle appliquée (2.49), on aura :

$$TR = \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + \eta^2}} \quad (2.52)$$

2.4.4 Cas d'une fondation mobile (transmissibilité en déplacement)

L'excitation peut être appliquée au support ou à la base du système. Il est dans ce cas utile de considérer aussi bien le mouvement absolu de la masse que le mouvement relatif de la masse et du support (Figure 2.9).

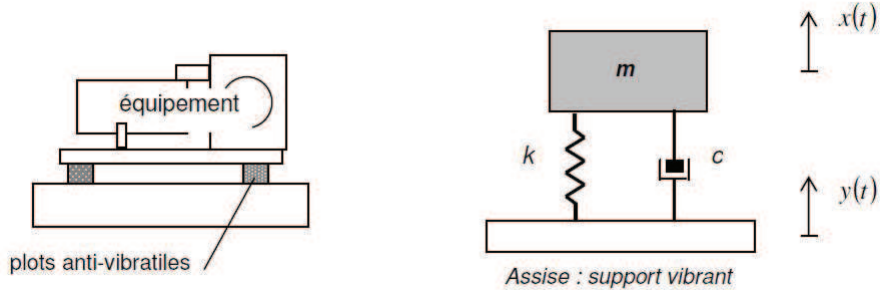


FIGURE 2.9 – Cas d'une fondation mobile

Étudions le mouvement absolu $x(t)$ de la masse m . En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on obtient l'équation du mouvement sous la forme :

$$m\ddot{x} + C(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

ou bien :

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = ky + C\dot{y} \quad (2.53)$$

si $y(t) = Y \sin \omega t$, l'équation de mouvement devient :

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = Y(k \sin \omega t + C\omega \cos \omega t)$$

qui peut être écrite sous la forme :

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = F_{eq} \sin(\omega t + \gamma) \quad (2.54)$$

où : $\gamma = \arctan \frac{C\omega}{k} = \arctan(2\xi r)$ et $F_{eq} = Y \sqrt{k^2 + (C\omega)^2} = Yk \sqrt{1 + (2\xi r)^2}$
La solution de l'équation différentielle est :

$$x(t) = \frac{F_{eq}}{k} D \sin(\omega t - \phi + \gamma)$$

$$x(t) = Y \sqrt{1 + (2\xi r)^2} D \sin(\omega t - \phi + \gamma) \quad (2.55)$$

avec : $\phi = \arctan \frac{2\xi r}{1-r^2}$

Le rapport de déplacement est alors donnée par :

$$\boxed{\frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}} \quad (2.56)$$

Nous remarquons que la transmissibilité en déplacement est égale à la transmissibilité de force trouvée pour le cas de fondation rigide. La force transmise à la masse

$$f_T(t) = -C(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y) = m\ddot{x}(t) \Rightarrow F_T = m\omega^2 X$$

On divise cette valeur par kY pour trouver une valeur adimensionnelle, on trouve :

$$\boxed{\frac{F_T}{kY} = r^2 T R} \quad (2.57)$$

Le mouvement relatif entre la masse et le support est : $z = x - y$. En substituant x par $z - y$ dans l'équation de mouvement (2.54) on aura :

$$m\ddot{z} + C\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega t \quad (2.58)$$

La réponse en mouvement permanent s'écrit :

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y}{k} D \sin(\omega t - \phi) = r^2 D Y \sin(\omega t - \phi)$$

avec $\phi = \arctan \frac{2\xi r}{1-r^2}$

Donc le rapport entre l'amplitude de déplacement relatif Z et l'amplitude de la base Y est donné par (Figure 2.10) :

$$\frac{Z}{Y} = r^2 D = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.59)$$

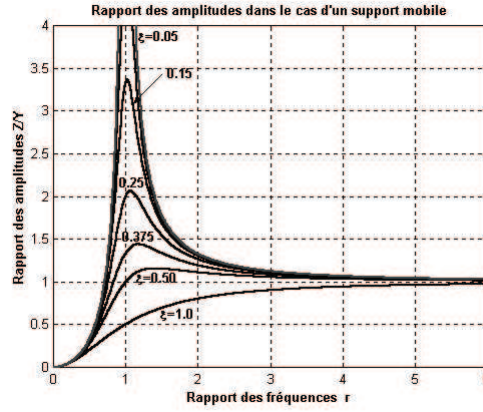


FIGURE 2.10 – Le rapport des amplitudes Z/Y

2.4.5 Application - Capteurs de vibrations

Cette application correspond au cas d'une fondation mobile (Figure 2.11). Comme nous venons de voir précédemment (2.59), l'amplitude de la réponse est donnée par :

$$Z = \frac{r^2 Y}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = r^2 D Y$$

et $\phi = \arctan \frac{2\xi r}{1-r^2}$

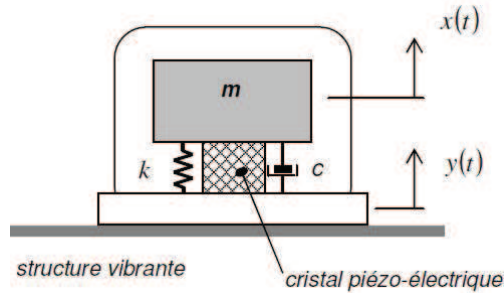


FIGURE 2.11 – Capteurs de vibrations

Capteurs à basse fréquence propre (vibromètre)

Lorsque la fréquence propre du capteur de vibrations est faible devant la fréquence des vibrations à mesurer, c'est à dire $r \gg 1$, le rapport Z/Y est proche de l'unité, en ignorant la valeur du facteur d'amortissement. Le mouvement relatif de la masse m de l'oscillateur est donc égale au déplacement à mesurer ($Z = Y$). Un tel instrument est appelé "vibromètre". Cependant l'amplitude du mouvement à mesurer est limitée par les dimensions du capteur.

Capteurs à haute fréquence propre (accéléromètre)

Lorsque la fréquence propre du capteur de vibration est grande devant la fréquence des vibrations à mesurer, c'est à dire $r \ll 1$, le dénominateur de l'équation $Z = f(r)$ tend vers l'unité d'où on a :

$$Z \simeq r^2 Y = \frac{\omega^2 Y}{\omega_0^2}$$

or $\omega^2 Y = \ddot{y}$ est l'accélération d'où :

$$Z = \frac{\ddot{y}}{\omega_0^2}$$

donc Z est proportionnelle à l'accélération du mouvement à mesurer d'où son appellation "accéléromètre".

Application 2.2

Un modèle simplifié de la suspension d'un véhicule est représenté sur la figure 2.12. L'habitacle du véhicule de masse m est connecté aux roues par une suspension modélisée par un ressort de raideur K en parallèle avec un amortisseur visqueux de coefficient d'amortissement C . Les roues sont supposées rigides et suivent le contour de la route. Le contour de la route traversée par le véhicule est supposé sinusoïdal comme le montre la figure 1-b, donné par :

$$y(x) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$

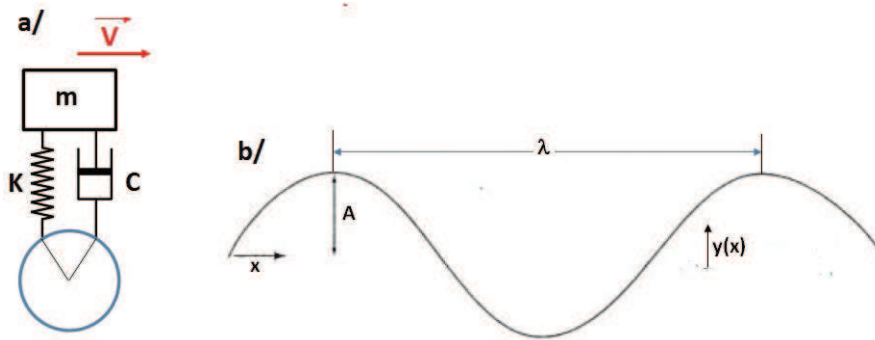


FIGURE 2.12 – (a) Véhicule modélisé par un système à 1 d.d.l. et (b) profile de la route.

On donne :

$$m = 500 \text{ kg}, \quad K = 4 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad \text{et} \quad C = 3000 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

Si le véhicule roule à une vitesse $V=52 \text{ m/s}$, déterminer :

1. La pulsation naturelle du système,
2. Le facteur d'amortissement ξ ,
3. La pulsation du déplacement du véhicule,
4. Le rapport des fréquences r ,
5. La transmissibilité TR ,
6. L'amplitude absolue du déplacement du véhicule,
7. L'amplitude absolue de l'accélération du véhicule

Solution

1. La pulsation naturelle du système,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \text{soit} : \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4 \times 10^4}{500}} = 8,944 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

2. Le facteur d'amortissement ξ ,

$$\xi = \frac{C}{2m\omega_0} \text{ soit } \xi = \frac{3000}{2 \times 8,944} = 0,3354$$

3. La pulsation du déplacement du véhicule,

$$\Omega = \frac{2\pi V}{\lambda} \text{ soit } \Omega = \frac{2 \times \pi \times 52}{2,5} = 130,69 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

4. Le rapport des fréquences r ,

$$r = \frac{\Omega}{\omega_0} \text{ soit : } r = \frac{130,69}{8,944} = 14,612$$

5. La transmissibilité TR ,

$$TR = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \text{ soit : } TR = 0,046$$

6. L'amplitude absolue du déplacement du véhicule,

$$\frac{X}{Y} = TR \Rightarrow X = Y \cdot TR \text{ avec } Y = A \text{ donc } X = 0,01 \times 0,046 = 4,631 \times 10^{-4} \text{ m}$$

7. L'amplitude absolue de l'accélération du véhicule

$$A_c = \Omega^2 X \text{ soit } A_c = 130,69^2 \times 4,631 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Application 2.3

Une machine de masse $M = 130 \text{ kg}$ est montée sur un support mobile, comme le montre la figure ci-contre : On donne :

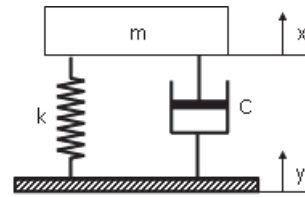


FIGURE 2.13 – Système à base mobile.

$$\xi = 0,13$$

$$y(t) = \sin(2\pi ft) \text{ avec : } f = 9 \text{ Hz}$$

Déterminer :

- la raideur effective du support, si une mesure de la fréquence propre du système a donné $f_0 = 3 \text{ Hz}$
- la fréquence des vibrations de la machine provoquées par l'excitation du support,
- l'amplitude du rapport $\frac{X}{Y}$ donnant le régime établi du mouvement vertical de la fondation.

Solution

1. La fréquence propre est donnée par :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} \Rightarrow K = 4\pi^2 f_0^2 M = 46,19 \times 10^3 \text{ N/m}$$

2. pour un système linéaire la fréquence de la réponse est égale à celle de l'excitation :

$$f_{rep} = f = 9 \text{ Hz}$$

3. l'amplitude du rapport $\frac{X}{Y}$ donnant le régime établi du mouvement vertical de la fondation, est la transmissibilité en déplacement donnée par :

$$TR = \frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

Le rapport des fréquences est donné par : $r = \frac{f}{f_0} = \frac{9}{3} = 3$

d'où : $TR = 0,1578$

Application 2.4

Une machine de poids $P = 3000 \text{ N}$, est supportée par une fondation flexible. La deflexion statique de la fondation due au poids de la machine est $f = 7,5 \text{ cm}$. Il est observé que la machine vibre avec une amplitude $X = 1 \text{ cm}$ quand la base est soumise à une oscillation harmonique à la fréquence propre du système non amorti avec une amplitude de $Y = 0,25 \text{ cm}$. Trouver :

1. Le facteur d'amortissement ξ de la fondation,
2. La force dynamique transmise F_T à la fondation,
3. L'amplitude du mouvement relatif Z entre le déplacement de la machine et la fondation.

Solution

1. La rigidité de la fondation peut être déduite à partir de la deflexion statique :

$$Mg = K.f \implies K = \frac{Mg}{f} = \frac{3000}{0,0075} = 4 \times 10^4 \text{ N/m}$$

d'où on tire : $\omega_0 = \sqrt{\frac{3 \times 10^5}{3000}} = 10 \text{ rad/s}$.

— Le rapport des amplitudes est donné par :

$$\frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

À la résonance $r = 1$, le rapport devient :

$$\frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi)^2}}{2\xi} = \frac{1}{0,25} = 4$$

d'où on a : $60\xi^2 - 1 = 0 \implies \xi = 0,1291$

2. La force dynamique transmise F_T à la fondation est obtenue à partir de :

$$\frac{F_T}{kY} = r^2.TR \implies F_T = kYr^2 \frac{\sqrt{1 + (2\xi)^2}}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

À la résonance, cette force est donnée par :

$$F_T = kY \frac{\sqrt{1 + (2\xi)^2}}{2\xi} = KX = 40000 \times 0,01 = 400 \text{ N}$$

3. L'amplitude du mouvement relatif Z peut être obtenu à partir de :

$$\frac{Z}{Y} = r^2 D = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

À la résonance, on a :

$$\frac{Z}{Y} = \frac{1}{2\xi}$$

d'où $Z = \frac{Y}{2\xi} = \frac{0,0025}{2 \times 0,1291} = 0,00968 \text{ m}$

Application 2.5

Une machine à coudre de masse $M = 165 \text{ kg}$ présente un balourd de $m_0 e = 0,15 \text{ kg.m}$. La machine opère à une fréquence $f = 125 \text{ Hz}$ et montée sur une fondation de raideur équivalente $K = 2 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ et de coefficient d'amortissement $\xi = 0,12$. Déterminer l'amplitude X du régime établi de la machine.

Solution

- La pulsation propre est donnée par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \text{ soit : } \omega_0 = \sqrt{\frac{2 \times 10^6}{165}} = 110,096 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- La pulsation d'excitation est donc :

$$\Omega = 2\pi f \text{ soit : } \Omega = 2 \times \pi \times 125 = 785,398 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- Le rapport des fréquences :

$$r = \frac{\Omega}{\omega_0} \text{ soit : } r = \frac{785,398}{110,096} = 7,134$$

- L'amplitude de la machine est déduite à partir de :

$$\frac{MX}{m_0 e} = r^2 D = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \text{ d'où : } X = \frac{m_0 e \cdot r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = 9,268 \times 10^{-4} \text{ m}$$

2.5 Excitation périodique

Dans cette partie du chapitre, nous présentons l'application des séries de Fourier pour déterminer la réponse du système à un degré de liberté à une force périodique.

2.5.1 Analyse de Fourier

Nous considérons un système à un degré de liberté sous l'action d'une charge périodique qui est une force dont la fonction se répète à intervalle de temps égaux T qui représente la période de la fonction. Fourier a montré que toute fonction périodique peut être exprimée comme la sommation d'un nombre infini de termes en sinus et en cosinus. Soit une fonction périodique ($f(t) = f(t+T)$) où T est la période comme représenté dans la (Figure 2.14).

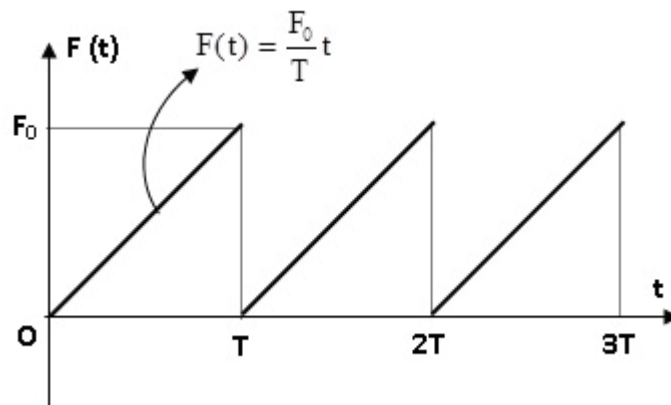


FIGURE 2.14 – Force périodique

Sous réserve de remplir certaines conditions (théorème de Dirichlet), une fonction périodique, de période T , peut s'écrire sous la forme de la série suivante :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (2.60)$$

avec $\omega = 2\pi/T$ est la pulsation d'excitation.

Les coefficients de la série s'obtiennent par les expressions :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (2.61)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt \quad (2.62)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt \quad (2.63)$$

Soit $f(t)$ une force d'excitation ; elle est alors la somme d'une force constante a_0 (valeur moyenne de la force) et une série de forces harmoniques, de pulsations $n\omega$ et d'amplitudes a_n et b_n . La réponse d'un système soumis à une telle force d'excitation sera donc la somme des réponses à chaque harmonique (terme de la série).

2.5.2 Réponse à une excitation représentée par des séries de Fourier

La réponse du système à un degré de liberté à une force périodique, représentée par des série de Fourier est obtenue par la superposition des réponses de chaque composante des séries. Quand le régime transitoire est négligé, la réponse du système à chaque terme en sinus de l'équation (2.60) est donnée par :

$$y_n(t) = \frac{b_n/k}{\sqrt{(1-r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2}} \sin(n\omega t - \Phi_n) \quad (2.64)$$

tel que : $\tan \Phi_n = \frac{2\xi r_n}{1-r_n^2}$ ou bien sous la forme :

$$y_n(t) = \frac{b_n}{k} \frac{(1-r_n^2) \sin n\omega t - (2\xi r_n) \cos n\omega t}{(1-r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2} \quad (2.65)$$

Pour les termes en cosinus, nous obtenons :

$$y_n(t) = \frac{a_n}{k} \frac{(1-r_n^2) \cos n\omega t - (2\xi r_n) \sin n\omega t}{(1-r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2} \quad (2.66)$$

Finalement, la réponse totale est donnée alors par la superposition des termes exprimés par les équations (2.65) et (2.66) en rajoutant la réponse du terme constant de la série. Ainsi la réponse totale d'un système amorti à un degré de liberté peut être exprimé en régime établi par :

$$y_n(t) = \frac{a_0}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n 2\xi r_n + b_n(1-r_n^2)}{(1-r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2} \sin n\omega t + \frac{a_n(1-r_n^2) - b_n 2\xi r_n}{(1-r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2} \cos n\omega t \right] \quad (2.67)$$

Dans le cas d'un système non amorti, la réponse totale d'un système à un degré de liberté peut être exprimée comme suit :

$$y(t) = \frac{a_0}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{b_n}{1-r_n^2} \sin n\omega t + \frac{a_n}{1-r_n^2} \cos n\omega t \right] \quad (2.68)$$

Application 2.6

Considérons un système classique masse–ressort–amortisseur visqueux, soumis à l'action d'une force périodique (Figure 2.14).

Déterminer la réponse du système $x(t)$ en régime permanent.

Solution

La première étape est de déterminer les séries de Fourier de la force $F(t)$ en utilisant les expressions : (2.61-2.63). Les coefficients de la série s'obtiennent par les expressions suivantes : $a_0 = F_0/2$, $a_n = 0$ et $b_n = -F_0/(n\pi)$ La réponse du système amorti est donnée donc par l'équation (2.67)

$$x(t) = \frac{F_0}{2k} - \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{F_0/n\pi}{(1-r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2} ((1-r_n^2) \sin n\omega t - (2\xi r_n) \cos n\omega t) \right]$$

avec : $r_n = n r_1$ où $r_1 = \omega/\omega_0$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $\omega = 2\pi/T$

2.6 Excitation transitoire

Lorsqu'un système est soumis à une force non-périodique, le système vibre de façon transitoire. Le but de cette section est de déterminer la réponse d'un système soumis à une excitation arbitraire (singulière). Pour ce faire, nous allons utiliser l'intégrale de convolution. La fonction singulière de base est l'échelon unitaire (marche d'escalier) (Figure 2.15). Les autres s'obtiennent par dérivation ou intégration.

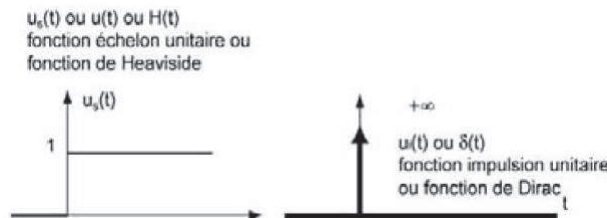


FIGURE 2.15 – Les fonctions singulières

2.6.1 Excitation par impulsion

Définition de l'impulsion

L'impulsion \hat{F} est défini comme étant l'intégrale d'une force par rapport au temps t pendant son temps d'application $(t_2 - t_1)$, soit :

$$\hat{F} = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt \quad (2.69)$$

La force $F(t)$ est dite impulsifonnelle si elle a une très grande amplitude et si son temps d'application est très court. La Figure 2.16 montre une force impulsifonnelle d'amplitude constante \hat{F}/ϵ et de durée d'application ϵ .

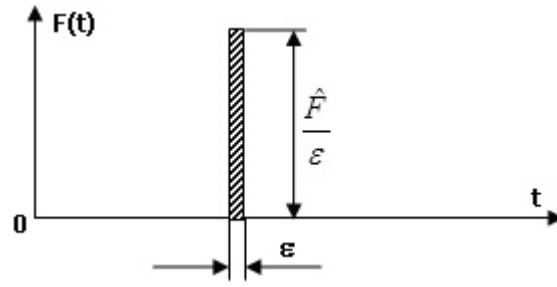


FIGURE 2.16 – Force impulsionnelle

Impulsion unitaire

Lorsque la durée d'application ϵ tend vers 0, l'amplitude de la force tend vers l'infini. Par contre, l'impulsion \hat{F} demeure finie. Lorsque \hat{F} est égale à l'unité et que la durée d'application ϵ tend vers 0, l'impulsion obtenue est dite impulsion unitaire. La (figure 2.17) montre une impulsion unitaire au temps $t = t_0$.



FIGURE 2.17 – Impulsion unitaire

Mathématiquement, on représente l'impulsion unitaire par la fonction de Dirac $\delta(t - t_0)$ qui est définie comme suit :

$$\begin{cases} \delta(t - t_0) = 0 & \text{pour } t \neq t_0 \\ \delta(t - t_0) = \infty & \text{pour } t = t_0 \end{cases} \quad (2.70)$$

Deux propriétés mathématiques de la fonction de Dirac sont les suivantes :

$$\begin{cases} \int_0^\infty \delta(t - t_0) dt = 1 & \text{pour } t < t_0 < \infty \\ \int_0^\infty f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) & \text{pour } t < t_0 < \infty \end{cases} \quad (2.71)$$

Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est la réponse d'un système excité par une impulsion unitaire. Considérons le système masse ressort de la figure 2.18. Ce dernier est excité par une impulsion unitaire au temps $t = 0$. Pour étudier les différents cas, nous considérons un système masse ressort excité par une force singulière (figure 2.18). On change seulement le type de la force appliquée.

Afin de déterminer la réponse du système, on peut le considérer en vibration libre en calculant les conditions initiales produites par l'impulsion unitaire. Ainsi au temps $t = 0^-$ (avant l'impulsion), nous avons :

$$\begin{cases} x(0^-) = 0 \\ \dot{x}(0^-) = 0 \end{cases} \quad (2.72)$$

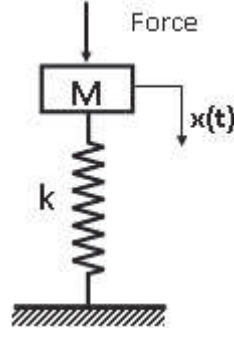


FIGURE 2.18 – Système masse-ressort excité par une impulsion unitaire

L'impulsion a pour effet de changer la condition de vitesse en conservant la position nulle ce qui implique que $x(0^+) = 0$.

On doit donc calculer la condition initiale de vitesse que crée l'impulsion $\dot{x}(0^+)$. Or selon la deuxième loi de Newton, l'impulsion est égale au changement de la quantité de mouvement, soit :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = mv_2 - mv_1 \quad (2.73)$$

Ainsi, dans le cas qui nous intéresse, nous avons :

$$\hat{F} = m\dot{x}(0^+) - m\dot{x}(0^-) = m\dot{x}(0^+) \quad (2.74)$$

Nous avons donc maintenant un système en vibration libre dont les conditions initiales sont les suivantes :

$$\begin{cases} x_0 = x(0^+) = 0 \\ \dot{x}_0 = \dot{x}(0^+) = \frac{\hat{F}}{m} \end{cases} \quad (2.75)$$

Selon le chapitre 1, nous savons que la solution d'une équation différentielle du mouvement en vibration libre est donnée comme suit (1.25) :

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x(0) \cos \omega_0 t$$

avec les conditions initiales (2.75), on obtient donc :

$$x(t) = \frac{\hat{F}}{m\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (2.76)$$

La réponse impulsionnelle du système masse-ressort est trouvée en utilisant une impulsion unitaire $\hat{F} = 1$. On la dénote alors $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (2.77)$$

A partir de la réponse impulsionnelle d'un système, on peut donc déterminer la réponse à une impulsion non-unitaire avec la relation suivante :

$$x(t) = \hat{F}h(t) \quad (2.78)$$

Avec le même principe de résolution que précédemment, on peut trouver la réponse impulsionnelle d'un système masse-ressort-amortisseur comme suit :

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_a} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_a t \quad (2.79)$$

tel que ω_a est la pulsation amortie. On constate donc que la réponse impulsionnelle est propre au système étudié.

2.6.2 Excitation quelconque

Connaissant la réponse impulsionnelle d'un système, on peut déterminer sa réponse pour une excitation quelconque. L'idée consiste à décomposer l'excitation quelconque $f(t)$ en une série d'impulsions telles qu'illustrées à la figure 2.19.

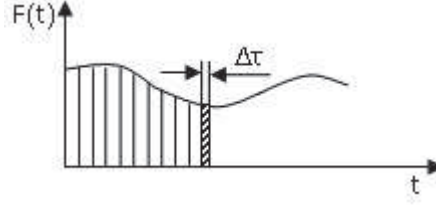


FIGURE 2.19 – Représentation d'une force quelconque par une série d'impulsions

Par superposition linéaire, la réponse du système sera la somme des réponses de chacune des impulsions.

Considérons la force quelconque $f(t)$ illustrée à la figure 2.19. Celle-ci est décomposée en une série d'impulsions. Considérons maintenant une seule de ces impulsions, soit la i ème (celle-ci est hachurée). Cette impulsion est appliquée au temps τ_i et d'une durée $\Delta\tau$. La réponse de cette impulsion $\hat{x}_i(t)$ est déterminée à partir de la réponse impulsionnelle unitaire au temps τ_i , soit :

$$\hat{x}_i(t) = f(\tau_i)\Delta\tau h(t - \tau_i) \quad (2.80)$$

En superposant la réponse de chaque impulsion, on obtient la réponse de l'excitation quelconque, soit :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n f(\tau_i)\Delta\tau h(t - \tau_i) \quad (2.81)$$

Lorsque $\Delta\tau$ tend vers 0, on obtient la forme intégrale de cette équation, soit :

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.82)$$

Cette intégrale est appelée intégrale de convolution ou intégrale de Duhamel. Notons que cette solution suppose que le système est au repos au temps initial, c'est à dire : $x_0 = 0$ et $\dot{x}_0 = 0$.

2.6.3 Force brutale d'une durée illimitée - Intégrale de convolution

Soit une charge brutale F_0 appliquée à un système masse-ressort pour une durée illimitée. Déterminons alors, la réponse du système $x(t)$. Mathématiquement, la charge est représentée par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ F_0 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (2.83)$$

Avec l'intégrale de convolution (2.82), on peut formuler la réponse du système par :

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

où $h(t - \tau)$ est la réponse impulsionnelle du système.

Dans ce cas, le système est non amorti et la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega_0} \sin(\omega_0(t - \tau)) \quad (2.84)$$

En combinant les trois équations précédentes, on obtient :

$$x(t) = \int_0^t F_0 \frac{1}{m\omega_0} \sin(\omega_0(t - \tau)) d\tau$$

d'où :

$$x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos(\omega_0 t)) \quad (2.85)$$

2.6.4 Force brutale d'une durée limitée

Soit une charge brutale (F_0) appliquée sur un système masse-ressort pour une durée limitée (Figure 2.20). Déterminons alors, la réponse du système $x(t)$.

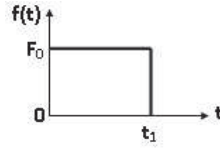


FIGURE 2.20 – Force brutale d'une durée limitée

Mathématiquement, la charge est représentée par :

$$f(t) = \begin{cases} F_0 & \text{si } 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.86)$$

Avec l'intégrale de convolution (2.82), on peut formuler la réponse du système par :

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Puisque $f(t)$ est discontinue, on doit diviser le problème en deux parties. On résout d'abord pour $0 \leq t \leq t_1$ et ensuite pour $t > t_1$.

Lorsque $0 \leq t \leq t_1$, l'équation (2.82) devient :

$$x(t) = \int_0^t F_0 h(t - \tau) d\tau$$

Dans ce cas, la réponse est donnée par la superposition des impulsions ayant lieu entre 0 et t . Cette situation revient à l'exemple précédent et ainsi, la réponse est donnée par (2.85) :

$$x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos(\omega_0 t))$$

Lorsque $t > t_1$, l'équation (2.82) devient :

$$x(t) = \int_0^{t_1} F_0 h(t - \tau) d\tau + \int_{t_1}^t 0 h(t - \tau) d\tau$$

Dans ce cas, la réponse est donnée par la superposition des impulsions entre 0 et t_1 uniquement puisqu'il n'y a pas d'impulsion après t_1 . La résolution de l'intégrale donne alors :

$$x(t) = \frac{F_0}{k} (\cos(\omega_0(t - t_1)) - \cos(\omega_0 t)) \quad (2.87)$$

Une méthode alternative de résolution est la suivante : On peut d'abord décomposer la force d'excitation de durée limitée en deux forces d'excitation de durée illimitée (Figure 2.21).

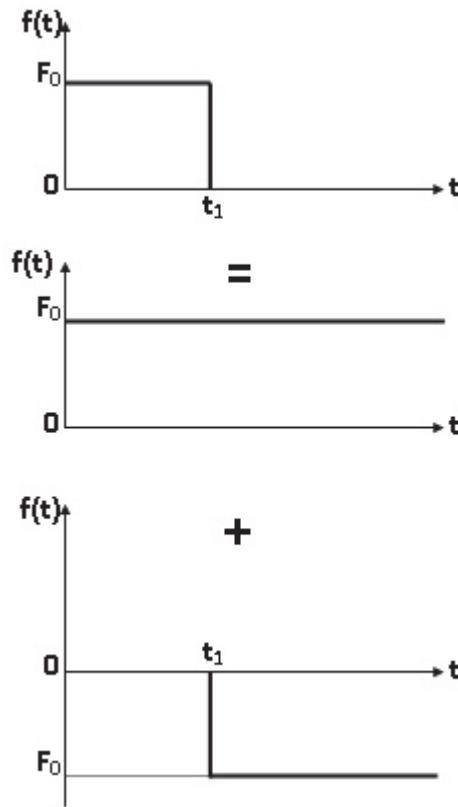


FIGURE 2.21 – Décomposition de la force brutale

Connaissant la réponse du système à une force d'excitation de durée illimitée $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on peut facilement, par superposition linéaire, trouver la réponse totale $x(t)$ soit :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}(1 - \cos(\omega_0 t)) - \frac{F_0}{k}(1 - \cos(\omega_0(t - t_1)))$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}(\cos(\omega_0(t - t_1)) - \cos(\omega_0 t))$$

2.7 Amortissement du type Coulomb

L'amortissement résultant de frottements secs est appelé amortissement de Coulomb. Pour ce type d'amortissement, la force d'amortissement demeure constante et elle est égale au produit de la force N normale au plan de contact par le coefficient de frottement μ (Table 2.1), ce qui nous donne :

$$F = \pm \mu N \quad (2.88)$$

La force de friction F représentant la force d'amortissement, agit dans le sens opposé à la vitesse.

TABLE 2.1 – Valeurs typiques des coefficients de frictio

Type de contact	μ
Métal sur métal lubrifié	0.07
Bois sur bois	0.2
Métal sur métal non lubrifié	0.3
Caoutchouc sur acier	1

Considérons donc un système masse-ressort (Figure 2.22) dont le coefficient de frottement dynamique est égal à μ .

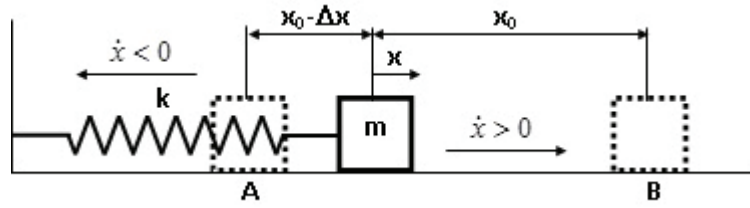
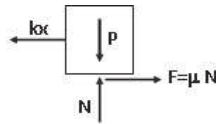
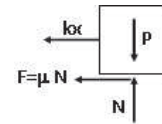


FIGURE 2.22 – Système masse – ressort avec amortissement du type Coulomb

Comme le sens de la force de frottement s'oppose toujours à celui de la vitesse (en opposition de phase), nous ne pouvons pas représenter un seul diagramme du corps libre pour déterminer l'équation différentielle du mouvement comme pour le système à amortissement visqueux. Afin de déterminer l'équation de mouvement, nous utilisons deux diagrammes de corps libres, un pour le mouvement vers la gauche (Figure 2.23a) et un autre pour le mouvement vers la droite (Figure 2.23b), pendant un demi cycle.



(a) Mouvement vers la gauche



(b) Mouvement vers la droite.

FIGURE 2.23 – Mouvement de la masse - amortissement du type Coulomb

Ecrivons les équations de mouvements dans les deux cas :

Mouvement vers la gauche : $m\ddot{x} = -kx + F$

d'où on a :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F/m$$

avec $\omega_0^2 = k/m$

Mouvement vers la droite : $m\ddot{x} = -kx - F$

d'où on a :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -F/m$$

L'équation générale peut être écrite alors sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -(F/m) \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (2.89)$$

avec $\operatorname{sgn}(\dot{x})$ est le signe de \dot{x} donné par

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{x} > 0 \\ -1 & \text{si } \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (2.90)$$

La solution homogène (transitoire) de l'équation (2.89) est donnée par :

$$x_h(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$$

et la solution particulière (permanente) est donnée par (cf. équation (2.85)) :

$$x_p(t) = -\frac{1}{\omega_0^2} \frac{F}{m} \operatorname{sgn}(\dot{x}) = -\frac{F}{k} \operatorname{sgn}(\dot{x})$$

La solution générale de l'équation (2.89) est la somme des deux solutions homogène et particulière :

$$x(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t - \frac{F}{k} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (2.91)$$

avec A et B sont des constantes arbitraires déterminées par les conditions initiales.

Si les conditions initiales sont données par $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, l'équation (2.91) devient :

$$x(t) = (x_0 + \frac{F}{k} \operatorname{sgn}(\dot{x})) \cos \omega_0 t - \frac{F}{k} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (2.92)$$

pour le premier demi-cycle $\omega_0 t = \pi$, le déplacement est donné par :

$$x(t) = -x_0 - \frac{2F}{k} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (2.93)$$

Pour le mouvement vers la gauche, $\operatorname{sgn}(\dot{x}) = -1$ et en fin du demi cycle on a : $x = -(x_0 - \Delta x)$ en remplaçant dans l'équation (2.93), il vient :

$$-(x_0 - \Delta x) = -x_0 + \frac{2F}{k}$$

d'où on tire :

$$\Delta x = \frac{2F}{k} \quad (2.94)$$

Comme l'affaiblissement d'amplitude Δx pendant un demi-cycle est indépendant du déplacement, nous concluons que l'affaiblissement est le même pour chaque demi-cycle (Figure 2.24). Ainsi l'affaiblissement de l'amplitude pour un cycle complet est :

$$\Delta x_{cycle} = \frac{4F}{k} \quad (2.95)$$

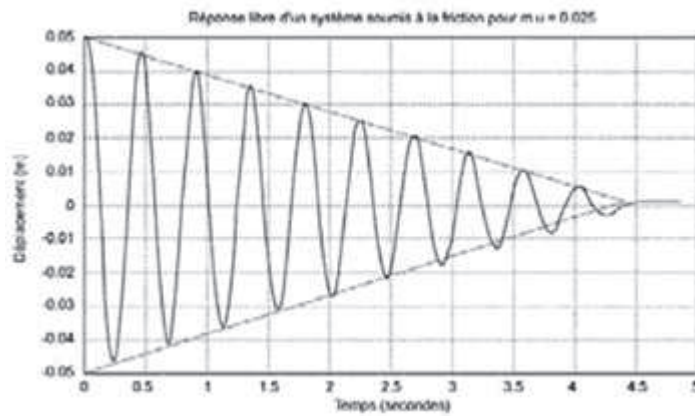


FIGURE 2.24 – Vibrations libres avec amortissement du type Coulomb

SÉRIE D'EXERCICES

Exercice 1

Une machine de masse totale égale à $45kg$ est montée sur quatre ressorts parallèles de raideur chacun égale à $2.10^5 N/m$. En régime établi, l'amplitude instantanée mesurée est de $1.5mm$ pour une fréquence de fonctionnement de $32Hz$.

Quelle est l'amplitude de l'excitation agissant sur la machine à cette vitesse ?

Exercice 2

Soit un système vibratoire dont l'équation différentielle est donnée par :

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = F(t)/m$$

où $F(t)$ est périodique (figure 2.25).

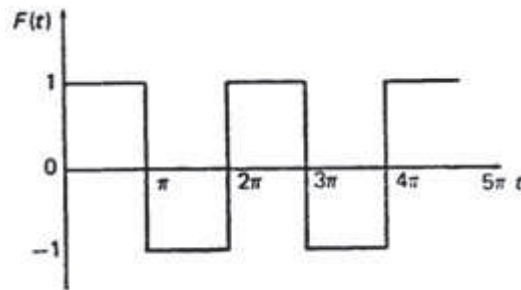


FIGURE 2.25 – le signal de la force appliquée

Déterminer la réponse de ce système en prenant en compte jusqu'à l'harmonique d'ordre 3. Pour l'harmonique d'ordre 3, nous supposons que l'amortissement est faible ($\xi = 0$)

Exercice 3

Une machine de $20kg$, montée sur 4 supports viscoélastiques, est excitée par une force harmonique. Au repos, la déflexion statique est de $2.485mm$. On constate qu'à sa vitesse de rotation de $1800tr/mn$, l'amplitude des vibrations est de $1mm$. Lors d'une mesure de l'amplitude de la réponse vibratoire dans le domaine des fréquences réalisée par un démarrage de moteur jusqu'à une vitesse élevée, on constate que l'amplitude maximale est de $10mm$. En posant par hypothèse le fait que le système a un seul degré de liberté :

- 1- Calculez le taux d'amortissement $\xi(\%)$.
- 2- Trouvez les valeurs de la rigidité $k(N/m)$ et de l'amortissement $c(N.s/m)$ de chaque support viscoélastique.
- 3- Calculez l'amplitude de la force d'excitation.

Exercice 4

Une machine de $100kg$ est soutenue par des isolateurs dont la rigidité équivalente est de $40000N/m$ et l'amortissement de $800N.s/m$. la machine est excitée par une force de $80N$ à la fréquence de $3Hz$.

1. Calculez l'amplitude de l'accélération vibratoire que subit la machine en régime permanent,
2. Calculez la phase (en degrés) entre le déplacement de la machine et la force d'excitation.

Exercice 5

Un compresseur pesant 1000kg , tournant à $1800\text{tr}/\text{mn}$, est installé directement sur le sol. On constate que les vibrations du compresseur sont trop importantes. La rigidité du sol a été évaluée à environ $8106\text{N}/\text{m}$ et son rapport d'amortissement à 10%. Afin de réduire les vibrations, on se propose d'installer le compresseur sur un bloc de béton tel qu'illustré à la figure 2.26. Calculez la masse du béton M à prévoir afin que l'amplitude des vibrations du compresseur soit réduite de 75%.

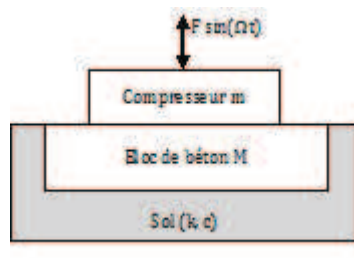


FIGURE 2.26 – installation du compresseur

Exercice 6

La réponse vibratoire d'une masse oscillante de 1kg en acier dans la direction horizontale soumise à la friction sur un plan d'acier lubrifié est de 30mm au temps initial et de 3.5mm en position finale après quatre cycles d'oscillation qui durent 1seconde . Calculez le coefficient de friction.

Exercice 7

Un système à $1ddl$ se compose d'une masse de 20kg attachée à un ressort de $4000\text{N}/\text{m}$. En vibration libre sur un plan horizontal, on constate que les amplitudes successives à chacun des cycles sont de $50, 45, 40, 35\text{mm}$, etc. Calculer la force d'amortissement.

Exercice 8

Une masse de 20kg oscille sur une surface sèche à cause de l'action d'un ressort de $10\text{N}/\text{m}$. l'amplitude initiale est de 150mm . Après quatre cycles, l'amplitude est de 100mm .

1. Établissez la durée de ces quatre cycles,
2. Trouvez le coefficient de friction entre les deux surfaces.

Exercice 9

Une poutre encastree dont la rigidité en flexion est égale à $200\text{N}/\text{m}$ et dont la masse est négligeable, soutient à son extrémité une masse de 2kg . On donne à la masse un déplacement initial de 30mm et on la relâche. Après 100cycles , l'amplitude est de 20mm . Trouvez le facteur de perte de la poutre.

Exercice 10

Un panneau fait de composites renforcés de fibres est modélisé comme système à $1ddl$ avec une masse de $1kg$ et une raideur de $2N/m$. le rapport de deux amplitudes successives, relevées sur $1cycle$ en vibration libre est égal à 1.1. Trouvez :

- Le facteur de perte,
- La constante d'amortissement visqueux équivalent si le système est excité à sa pulsation naturelle,
- L'énergie perdue lors d'un cycle si l'amplitude est de $10mm$.

Exercice 11

On doit procéder à l'installation d'une machine de $960kg$ sur une dalle de béton qui vibre de façon continue avec des composantes harmoniques prédominantes à $28.9Hz$, $33.8Hz$ et $39.1Hz$. Les niveaux de vitesse à ces fréquences sont respectivement de $12.36cm/s$, $9.16cm/s$ et de $27.86cm/s$. On veut protéger la machine en la montant sur 4 supports en néoprène dont le facteur de perte est de 0.21. Sachant que l'accélération maximale de la machine doit être inférieure à $4.5m/s^2$ à l'une ou l'autre de ces fréquences, déterminez la rigidité chaque suspension.

Exercice 12

Soit un moteur de $3kg$, tournant à $5000tr/mn$, monté sur un châssis d'ordinateur par l'intermédiaire d'un support anti-vibratile et doté d'une rigidité et d'un amortissement. Faites la conception du support afin d'obtenir une réduction minimale de 80% des forces transmises au châssis, en considérant :

1. qu'on peut négliger l'amortissement (le système n'est pas soumis aux chocs)
2. un taux d'amortissement de 20% est indispensable, en cas de chocs.

Exercice 13

Un chauffeur de camion pesant $80kg$ est assis sur un siège dont le poids est de $20kg$. La suspension a une rigidité de $10000N/m$ et un amortissement de $500Ns/m$. une mesure de plancher révèle que celui-ci vibre avec une amplitude de $1mm$ et une pulsation de $25rd/s$.

1. calculez la déflexion statique du siège,
2. calculez l'amplitude de l'accélération que subit le chauffeur,
3. calculez la force transmise au chauffeur.

Exercice 14

Un compresseur de masse $M = 500kg$ tourne à une fréquence $f = 20Hz$. On peut assimiler le balourd à une masse $m = 10kg$ située à une distance $e = 100mm$ de l'axe du système. Le facteur d'amortissement de la suspension est $\xi = 0.10$.

1. Quelle doit être la rigidité des ressorts de l'isolation pour qu'il n'y ait que 10% de la force d'excitation est transmise à la fondation ?
2. Quelle est l'amplitude de la force transmise ?

Exercice 15

Une machine alternative de masse $10000kg$ produit des forces harmoniques verticales d'une amplitude de $2500N$ à la fréquence de fonctionnement de $40Hz$. Afin de limiter les vibrations induites dans le bâtiment où cette machine doit être installée, on prévoit de la poser sur quatre ressorts : un en chaque coin de sa base rectangulaire. On veut déterminer la rigidité des ressorts nécessaires pour limiter à $400N$ la force harmonique totale transmise au bâtiment. En déduire la flèche statique provoquée par le poids de la machine.

Exercice 16

Mathématiquement, la charge sous forme d'une fonction rampe est représentée par (Figure 2.27) : $F(t) = a.t.u(t) = \delta F t$

Où $u(t)$ est la fonction échelon et δF est la pente. Donner la solution $x(t)$, en utilisant l'intégrale de convolution pour un système non amorti et un système amorti.

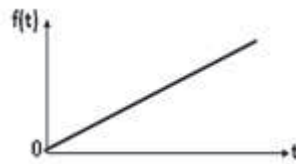


FIGURE 2.27 – Fonction rampe

Exercice 17

Déterminer la réponse d'un oscillateur conservatif de pulsation propre ω_0 soumis à une impulsion de forme sinusoïdale de durée T et d'amplitude maximale F (Figure 2.28). Démontrer que, pour un temps t supérieur à T , la réponse est une fonction harmonique de pulsation ω_0 . Donner la valeur du retard. Indication : $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$

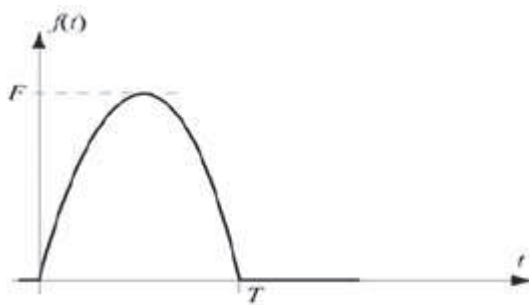


FIGURE 2.28 – Fonction sinusoïdale

Chapitre 3

Systèmes à N degrés de liberté

3.1 Introduction

Le passage à l'étude des systèmes à n degrés de liberté ($n > 1$), permet de compléter l'analyse des phénomènes observés pour un degré de liberté, et mettre en place, sur des exemples simples, les méthodes de calcul utilisées pour les systèmes à plus de deux degrés de liberté.

Bien que les systèmes à deux degrés de liberté fassent partie des systèmes à n degrés de liberté, ceux-ci sont traités à part. En effet, leur petite taille facilite les calculs analytiques et la notation matricielle n'est pas nécessaire. Cependant pour la préparation des systèmes à n degrés de liberté, la notation matricielle est introduite comme une méthode alternative pour exprimer les équations de mouvements. Par ailleurs, les systèmes à deux degrés de liberté facilitent la compréhension des méthodes plus générales et permettent d'expliquer des applications utiles telles que l'éteufoeur de vibrations et la fixation des systèmes.

3.2 Equations générales des systèmes non amortis

Soit un système à deux degrés de liberté constitué par deux masses m_1 et m_2 soumises respectivement à des forces $F_1(t)$ et $F_2(t)$. Les masses sont liées entre elles et avec le sol par des ressorts comme illustré dans la figure 3.1. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont données comme suit :

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$
$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_c(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2$$

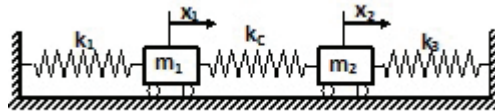


FIGURE 3.1 – Système à deux degrés de liberté

Appliquons au système les équations de Lagrange, nous obtenons le système d'équations régissant le mouvement comme suit :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_c)x_1 - k_cx_2 = F_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_c)x_2 - k_cx_1 = F_2(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

C'est un système de deux équations différentielles linéaires de second ordre couplées par la présence de k_c . En notation matricielle, le système (3.1) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & k_2 + k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

L'équation (3.2) est sous la forme :

$$M\ddot{X} + KX = F \quad (3.3)$$

tel que : $M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ et $K = \begin{bmatrix} k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & k_2 + k_c \end{bmatrix}$

M et K sont respectivement la matrice de masse et la matrice de raideur. Tout système à n ddl non amorti peut être écrit sous la forme (3.3) tel que les matrices et les vecteurs sont de dimension n .

Application 3.1

Par les équations de Lagrange, établir les équations de mouvements de la poutre AB , de masse m et de longueur L , articulée et suspendue par quatre ressorts comme le montre la figure 2. Mettre ces équations sous forme matricielle.

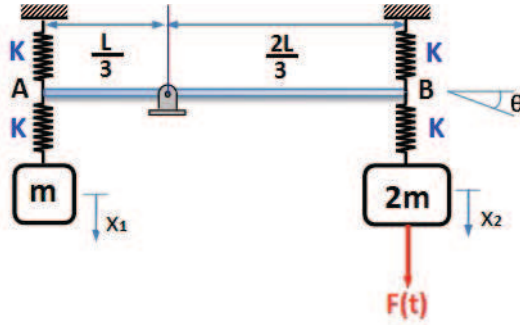


FIGURE 3.2 – Système à 3 d.d.l.

Solution

En utilisant, les équations de Lagrange, l'écriture matricielle des équations de mouvement du système est donnée par :

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9}mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & 0 & -\frac{2}{3}KL \\ 0 & K & -\frac{1}{3}KL \\ -\frac{2}{3}KL & -\frac{1}{3}KL & \frac{10}{9}KL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.3 Les modes propres de vibration

Pour étudier le système libre, prenons : $F_1(t) = F_2(t) = 0$ et le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_c)x_1 - k_c x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_c)x_2 - k_c x_1 = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Admettons que le mouvement est harmonique en tout point du système :

$$x_1 = A_1 \sin \omega t$$

$$x_2 = A_2 \sin \omega t$$

et examinons sous quelles conditions un tel mouvement est possible.

En remplaçant dans les équations de mouvements, on obtiendra un système d'équations algébriques :

$$\begin{cases} (k_1 + k_c - m_1 \omega^2) A_1 - k_c A_2 = 0 \\ -k_c A_1 + (k_2 + k_c - m_2 \omega^2) A_2 = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Ces équations ne sont satisfaites (pour n'importe quelle valeur de A_1 et A_2) que si le déterminant suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_c - m_1 \omega^2 & -k_c \\ -k_c & k_2 + k_c - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

L'équation (3.6) est appelé : équation caractéristique du système et ses solutions sont les pulsations propres du système. L'équation (3.6) donne :

$$\omega^4 - \left[\frac{k_1 + k_c}{m_1} + \frac{k_2 + k_c}{m_2} \right] \omega^2 + \frac{k_1 k_2 + (k_1 + k_2) k_c}{m_1 m_2} = 0 \quad (3.7)$$

C'est une équation quadratique en ω^2 dont les solutions ω_1^2 et ω_2^2 . Chacune de ces pulsations propres donne $\pm \omega$; nous éliminons les racines négatives parce qu'elles n'ont pas de sens physique.

Le rapport des amplitudes décrivant les modes propres du système sont déterminés à partir de l'équation (3.5).

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{k_c}{k_2 + k_c - m_2 \omega^2}$$

Donc les deux modes sont déterminés par :

$$\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{(1)} = \frac{k_c}{k_2 + k_c - m_2 \omega_1^2}$$

$$\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{(2)} = \frac{k_c}{k_2 + k_c - m_2 \omega_2^2}$$

Pour expliquer le sens physique de ces pulsations et vecteurs propres, on prend le cas particulier où :

$$m_1 = m_2 = m$$

$$k_1 = k_c = k_2 = k$$

Dans ce cas, on trouve les pulsations propres :

$$\omega_1 = \sqrt{k/m} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{3k/m}$$

Le rapport des amplitudes est :

$$\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{(1)} = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{(2)} = -1$$

Donc les vecteurs propres sont donnés par :

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} A_1 \\ 1.A_1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} A_1 \\ (-1).A_1 \end{Bmatrix}$$

En normant par rapport à la première composante, on aura :

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

où ω_1 et ω_2 représentent les pulsations propres, sur lesquelles vibre le système décrit par la figure 3.1. Φ_1 et Φ_2 sont les modes propres vibratoires associés à chacune des pulsations propres ω_1 et ω_2 ; on peut les schématiser par la figure 3.3.



FIGURE 3.3 – Modes de vibration du système à deux ddl

3.4 Orthogonalité des modes propres

Soit M et K respectivement les matrices masse et raideur. Désignons par Φ_1 et Φ_2 les modes correspondant aux pulsations propres ω_1 et ω_2 .

En mouvement libre, le système d'équation peut être écrit sous la forme :

$$-\omega^2 MX + KX = 0 \quad \text{ou} \quad \omega^2 MX = KX$$

Donc, pour les deux pulsations propre ω_1 et ω_2 , on aura les expressions correspondantes comme suit :

$$\omega_1^2 M\Phi_1 = K\Phi_1 \tag{3.8}$$

$$\omega_2^2 M\Phi_2 = K\Phi_2 \tag{3.9}$$

En pré-multipliant les deux expressions (3.8) et (3.9), respectivement par transposé des vecteurs propres Φ_1^T et Φ_2^T , on obtient :

$$\omega_1^2 \Phi_2^T M\Phi_1 = \Phi_2^T K\Phi_1 \tag{3.10}$$

$$\omega_2^2 \Phi_1^T M\Phi_2 = \Phi_1^T K\Phi_2 \tag{3.11}$$

En prenant la transposée de chaque membre de l'équation (3.11), il vient :

$$\omega_2^2 \Phi_2^T M\Phi_1 = \Phi_2^T K\Phi_1 \tag{3.12}$$

En prenant la différence (3.10) – (3.12), on obtient :

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2) \Phi_2^T M\Phi_1 = 0$$

Si $\omega_1 \neq \omega_2$ on a : $\Phi_2^T M\Phi_1 = 0$

En procédant de la même manière, nous démontrons que les modes sont orthogonaux par rapport aux matrices de masse et de raideur quelque soit le nombre de *ddl* :

$$\boxed{\Phi_i^T M\Phi_j = \Phi_j^T K\Phi_i = 0 ; i \neq j} \tag{3.13}$$

En prémultipliant maintenant les expressions (3.8) et (3.9) respectivement par Φ_1 et Φ_2 , on peut retrouver les pulsations propres ω_i comme suit :

$$\omega_i^2 = \frac{\Phi_i^T K \Phi_i}{\Phi_i^T M \Phi_i} \quad (3.14)$$

Les quantités $\Phi_i^T M \Phi_i$ et $\Phi_i^T K \Phi_i$ sont appelées respectivement masse et raideur modale du mode i .

A priori les matrices M et K ne sont pas obligatoirement diagonales, mais elles sont symétriques et définies positives.

- Symétrie : les valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres associés sont orthogonaux
- Définie positive : les valeurs propres sont positives $\Rightarrow \det(M) > 0$ et $\det(K) > 0$ donc non nul.

Etant donné les propriétés des matrices M et K ; les valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres sont linéairement indépendants.

3.5 Réponse du mouvement libre

Pour le système à deux degrés de liberté, nous trouvons deux pulsations propres ω_1 et ω_2 qui satisfont la forme propre :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \phi) \quad (3.15)$$

Donc chaque déplacement modal est donné par :

$$\text{1er mode : } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$\text{2ème mode : } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

La solution générale du système d'équations de mouvements est composée de deux mouvements harmoniques de pulsations ω_1 et ω_2 ; elle est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega_2 t + \phi_2) \quad (3.16)$$

Soient : $\frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{\lambda_1}$ et $\frac{A_2}{B_2} = \frac{1}{\lambda_2}$; la solution générale devient finalement :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ \lambda_1 A_1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \begin{Bmatrix} A_2 \\ \lambda_2 A_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega_2 t + \phi_2) \quad (3.17)$$

Les quatre constantes A_1 , A_2 , λ_1 et λ_2 sont déterminées à partir des conditions initiales $x_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_1(0)$ et $\dot{x}_2(0)$.

3.6 Réponse du mouvement forcé harmonique

Lorsqu'un système est excité par une force harmonique, les vibrations qui en résultent sont à la même fréquence que celle de l'excitation. Comme pour les systèmes à un degré de liberté la résonance aura lieu lorsque la fréquence d'excitation est égale à l'une des fréquences propres du système. Nous allons détailler la résolution à travers un exemple.

Exemple

Reprenons l'exemple de la figure 3.1, excité par une force harmonique au niveau de la masse 1, de forme : $F_1 \sin \omega t$ on prend : $k_1 = k_c = k_2 = k$ et $m_1 = m_2 = m_3 = m$

Méthode de résolution directe

En l'absence d'amortissement, le mouvement de chaque masse est en phase avec la force d'excitation et donc on peut considérer la solution de la forme :

$$x_1 = A_1 \sin \omega t \quad \text{et} \quad x_2 = A_2 \sin \omega t$$

En remplaçant dans les équations différentielles, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Nous reconnaissons le déterminant caractéristique qui peut être écrit sous forme :

$$Det = \begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = (2k - m\omega^2)(3k - m\omega^2) = m^2(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)$$

Les amplitudes A_1 et A_2 sont données par :

$$A_1 = \frac{1}{Det} \begin{vmatrix} F_1 & -k \\ 0 & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = \frac{F_1(2k - m\omega^2)}{m^2(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}$$

$$A_2 = \frac{1}{Det} \begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & F_1 \\ -k & 0 \end{vmatrix} = \frac{F_1 k}{m^2(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}$$

d'où les solutions du mouvement :

$$x_1 = \frac{F_1(2k - m\omega^2)}{m^2(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

$$x_2 = \frac{F_1 k}{m^2(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

Méthode de résolution modale

L'intérêt de la méthode modale réside dans le fait qu'elle découple les équations de mouvement en utilisant le principe d'orthogonalité des modes propres. D'une manière générale, le mouvement peut être écrit de la forme :

$$M\ddot{X} + KX = F(t)$$

Le système admet deux pulsations propres ω_1 et ω_2 à qui correspondent les vecteurs propres Φ_1 et Φ_2 respectivement. Soit le changement de variable :

$$X = \Phi q \quad (3.19)$$

où Φ et q sont respectivement la matrice des vecteurs propres et le vecteur des coordonnées généralisées. Pour un système à deux ddl :

$$\Phi = [\Phi_1 \ \Phi_2] \quad \text{et} \quad q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

En remplaçant (3.19) dans l'équation de mouvement (3.18) et en prémultipliant par Φ^T , il vient :

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q} + \Phi^T K \Phi q = \Phi^T F \quad (3.20)$$

Pour un système à deux *ddl* et en utilisant l'orthogonalité des modes (3.13), on trouve :

$$\begin{aligned} \Phi^T M \Phi &= \begin{bmatrix} \Phi_1^T \\ \Phi_2^T \end{bmatrix} M [\Phi_1 \ \Phi_2] = \begin{bmatrix} \Phi_1^T M \Phi_1 & \Phi_1^T M \Phi_2 \\ \Phi_2^T M \Phi_1 & \Phi_2^T M \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \\ \Phi^T K \Phi &= \begin{bmatrix} \Phi_1^T \\ \Phi_2^T \end{bmatrix} K [\Phi_1 \ \Phi_2] = \begin{bmatrix} \Phi_1^T K \Phi_1 & \Phi_1^T K \Phi_2 \\ \Phi_2^T K \Phi_1 & \Phi_2^T K \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix} \\ \Phi^T F &= \begin{bmatrix} \Phi_1^T \\ \Phi_2^T \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} \Phi_1^T F \\ \Phi_2^T F \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et les équations de mouvements deviennent

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_1^T F \\ \Phi_2^T F \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Ce qui constitue un système de deux équations indépendantes.

En l'appliquant à l'exemple précédent, dont les pulsations et vecteurs propres sont :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{k/m} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{3k/m} \\ \Phi_1 &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

L'équation (3.21) devient :

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ F \end{Bmatrix}$$

Les solutions sont harmoniques : $q_1 = Q_1 \sin \omega t$ et $q_2 = Q_2 \sin \omega t$

On peut trouver la solution pour chaque équation (Chapitre 2) :

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{F_1 \sin \omega t}{2k - 2m\omega^2} = \frac{F \sin \omega t}{2m(\omega_1^2 - \omega^2)} \\ q_2 &= \frac{F_1 \sin \omega t}{6k - 2m\omega^2} = \frac{F \sin \omega t}{2m(\omega_2^2 - \omega^2)} \end{aligned}$$

en reprenant le changement de variable (3.19) :

$$X = \Phi q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 + q_2 \\ x_2 &= q_1 - q_2 \end{aligned}$$

soit, en remplaçant :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{F \sin \omega t}{2m(\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{F \sin \omega t}{2m(\omega_2^2 - \omega^2)} = \frac{F \sin \omega t (2k - m\omega^2)}{m^2(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \\ x_2 &= \frac{F \sin \omega t}{2m(\omega_1^2 - \omega^2)} - \frac{F \sin \omega t}{2m(\omega_2^2 - \omega^2)} = \frac{kF \sin \omega t}{m^2(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \end{aligned}$$

3.7 Application : étouffeur de vibrations

Soit le système à deux degrés de liberté (Figure 3.4). Les équations de mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1 \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_1 - k_1 x_1 = 0 \end{cases}$$



FIGURE 3.4 – Etouffeur de vibrations

En régime permanent, les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont déduites simplement de la méthode directe ; comme il n'y a pas d'amortissement on pose :

$$x_1 = X_1 \sin \omega t$$

$$x_2 = X_2 \sin \omega t$$

La résolution du système d'équation nous donne :

$$X_1 = \frac{F(k_2 - m_2 \omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{F k_2}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}$$

On remarque en particulier que si : $\omega = \sqrt{k_2/m_2}$, on aura :

$$X_1 = 0 \text{ et } X_2 = -F/k_2$$

Principe :

Lorsque le système initial (k_1, m_1) est soumis à une excitation de pulsation ω , il suffit de rajouter un deuxième système tel que : $\omega = \sqrt{k_2/m_2}$ pour que le déplacement de la première masse soit nul.

Généralement un problème se pose lorsque la pulsation d'excitation est égale à $\sqrt{k_1/m_1}$:

$$\omega = \sqrt{k_1/m_1} = \sqrt{k_2/m_2}$$

et il faut que : 1°) L'étouffeur (k_2, m_2) puisse supporter, sans dommage, la force appliquée ,
2°) La pulsation soit constante ou très légèrement variable. En effet la pulsation de résonance du système est remplacée par deux autres pulsations situées de part et d'autre de .

3.8 Système avec amortissement visqueux

Soit le système amorti (Figure 3.5). L'équation de mouvement s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

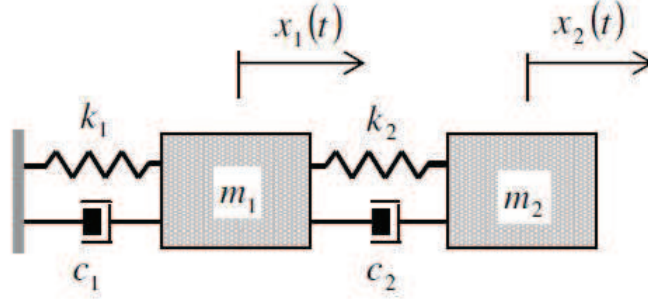


FIGURE 3.5 – Système amorti à 2 ddl

Dans ce cas la décomposition modale ne peut pas être appliquée sauf si la matrice d'amortissement C est proportionnelle à la matrice de masse M ou à la matrice de raideur K , ou si : $\Phi_i^T C \Phi_j \ll \Phi_i^T C \Phi_i$. D'où l'intérêt d'utiliser l'amortissement visqueux équivalent.

3.9 Généralisation aux systèmes à N ddl

Les systèmes à plusieurs degrés de liberté, constituent des modélisations assez fidèles de systèmes réels assez complexes (Figure 3.6).

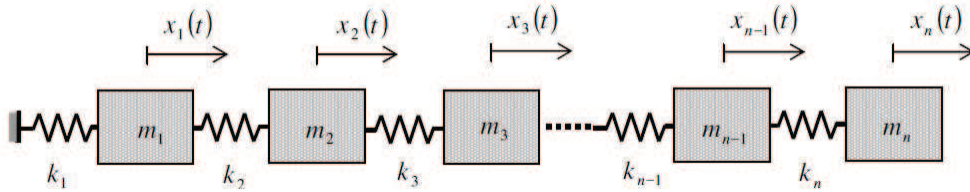


FIGURE 3.6 – Exemple de problème à n ddl

En généralisant au système complet :

$$m_j \ddot{x}_j = -k_j(x_j - x_{j-1}) + k_{j+1}(x_{j+1} - x_j) = k_j x_{j-1} - (k_j + k_{j+1})x_j + k_{j+1}x_{j+1}; \quad \text{pour } j = 1, \dots, n$$

avec $x_0 = 0$ et $k_{n+1} = 0$

Donc l'équation de mouvement libre devient :

$$M\ddot{X} + KX = 0$$

$$M = \text{diag}(m_1, m_2, m_3, \dots, m_{n-1}, m_n)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -k_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

Remarque : Dans le cas où la dernière masse est connectée par une raideur k_{n+1} à une partie fixe, le dernier élément sur la diagonale de la matrice de raideur devient $k_n + k_{n+1}$.

Application 3.2

Pour le système à trois ddl (Figure 3.7), l'équation de mouvement s'écrit sous la forme :

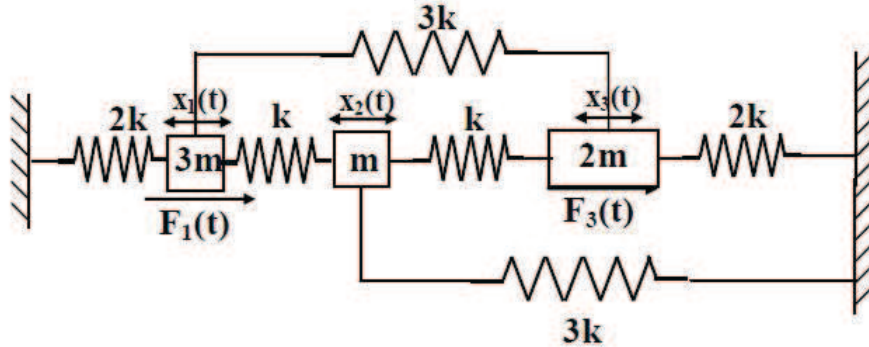


FIGURE 3.7 – Exemple d'un système à 3 ddl

$$\begin{bmatrix} 3m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6k & -k & -3k \\ -k & 5k & -k \\ -3k & -k & 6k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Application 3.3

1. Écrire, sous forme matricielle, les équations de mouvements du système à trois degrés de liberté, représenté par la figure 3.8,

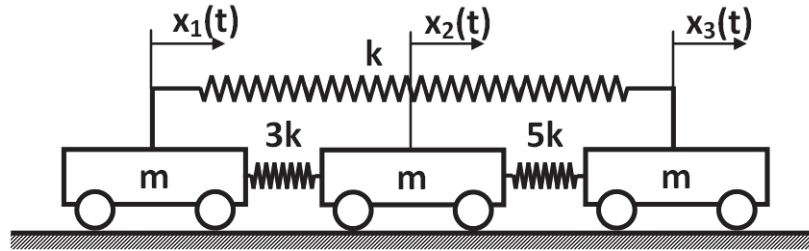


FIGURE 3.8 – Système à 3 degrés de liberté.

2. Déterminer les fréquences et modes propres. (normer les modes propres en prenant leur première composante égale à l'unité),
3. Calculer les masses et raideurs modales,
4. Si on excite la masse 1 par une force harmonique $F(t) = F_0 \sin \Omega t$, déterminer la réponse forcée par décomposition modale.

Solution

1. Sous forme matricielle, les équations de mouvements sont données par :

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 4k & -3k & -k \\ -3k & 8k & -5k \\ -k & -5k & 6k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2. Détermination des modes et fréquences propres

Les pulsations propres sont obtenues à partir de la résolution du déterminant :

$$\det(K - \omega^2 M) = \begin{vmatrix} 4k - m\omega^2 & -3k & -k \\ -3k & 8k - m\omega^2 & -5k \\ -k & -5k & 6k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Les pulsations propres obtenues sont :

$$\omega_1 = 0 \quad ; \quad \omega_2 = 2.353\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_3 = 3.531\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Les vecteurs propres associés aux pulsations propres obtenues sont donnés par :

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.268 \\ -0.732 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \phi_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3.732 \\ 2.732 \end{Bmatrix}$$

3. Calcul des masses et raideurs modales

Les masses modales sont obtenues à partir de :

$$\begin{aligned} \Phi^T M \Phi &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0.268 & -0.732 \\ 1 & -3.732 & 2.732 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0.268 & -3.732 \\ 1 & -0.732 & 2.732 \end{bmatrix} \\ \Phi^T M \Phi &= \begin{bmatrix} 3m & 0 & 0 \\ 0 & 1.608m & 0 \\ 0 & 0 & 22.392m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les masses modales sont donc :

$$M_1 = 3m \quad ; \quad M_2 = 1.608m \quad \text{et} \quad M_3 = 22.392m$$

Les raideurs modales sont obtenues à partir de :

$$\begin{aligned} \Phi^T K \Phi &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0.268 & -0.732 \\ 1 & -3.732 & 2.732 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3k & -k & -2k \\ -k & 2k & -k \\ -2k & -k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0.268 & -3.732 \\ 1 & -0.732 & 2.732 \end{bmatrix} \\ \Phi^T K \Phi &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.9k & 0 \\ 0 & 0 & 279.1k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les raideurs modales sont donc :

$$K_1 = 0 \quad ; \quad K_2 = 8.9k \quad \text{et} \quad K_3 = 279.1k$$

4. Détermination de la réponse forcée par décomposition modale

Sous forme matricielle, le système d'équations est de la forme : $[M] \{\ddot{X}\} + [K] \{X\} = \{F(t)\}$

On pose $\{X\} = [\Phi] \{q\}$ et on prémultiplie par $[\Phi]^T$, on obtient alors le système découplé suivant :

$$\begin{pmatrix} 3m & 0 & 0 \\ 0 & 1.608m & 0 \\ 0 & 0 & 22.392m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.9k & 0 \\ 0 & 0 & 279.1k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin \Omega t \\ F_0 \sin \Omega t \\ F_0 \sin \Omega t \end{Bmatrix}$$

dont les solutions sont :

$$q_1 = \frac{F_0}{-3m\Omega^2} \sin \Omega t \quad q_2 = \frac{F_0}{8.9k - 1.608m\Omega^2} \sin \Omega t \quad q_3 = \frac{F_0}{279.1k - 22.392m\Omega^2} \sin \Omega t$$

En revenant à notre changement de variables $\{X\} = [\Phi] \{q\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 + q_2 + q_3 = \left(\frac{1}{-3m\Omega^2} + \frac{1}{8.9k - 1.608m\Omega^2} + \frac{1}{279.1k - 22.392m\Omega^2} \right) F_0 \sin \Omega t \\ x_2 &= q_1 - 0.268q_2 - 3.732q_3 = \left(\frac{1}{-3m\Omega^2} + \frac{-0.268}{8.9k - 1.608m\Omega^2} + \frac{-3.732}{279.1k - 22.392m\Omega^2} \right) F_0 \sin \Omega t \\ x_3 &= q_1 - 0.732q_2 - 2.732q_3 = \left(\frac{1}{-3m\Omega^2} + \frac{-0.732}{8.9k - 1.608m\Omega^2} + \frac{-2.732}{279.1k - 22.392m\Omega^2} \right) F_0 \sin \Omega t \end{aligned}$$

3.10 Normalisation des modes

Les modes propres sont définis à une constante multiplicative près. Cette constante peut être choisie de façon que :

- la première composante du vecteur modal considéré soit égale à 1 ;
- la plus grande composante soit égalé à 1 ;
- les modes propres soient normalisés par rapport à la matrice identité, la matrice masse ou la matrice rigidité.

3.10.1 Normalisation par rapport à l'unité

Dans ce cas le produit scalaire de la matrice modale par elle même doit être égal à la matrice identité. Soit :

$$\overline{\Phi} \Phi^T = I \quad (3.22)$$

tel que $\overline{\Phi}$ est la matrice des modes propres normalisée Cette dernière est reliée à la matrice modale Φ par :

$$\overline{\Phi} = \Phi A \quad (3.23)$$

tel que A est une matrice diagonale qui peut être calculée de la matrice modale.

Des équations (3.22) et (3.23), on obtient :

$$\Phi A A \Phi^T = I$$

En multipliant par Φ^{-1} à droite et à gauche, on obtient :

$$(\Phi)^{-1} \Phi A A \Phi^T (\Phi^{-1})^T = \Phi^{-1} I (\Phi^{-1})^T$$

Alors :

$$A = (\Phi \Phi^T)^{-1/2} \quad (3.24)$$

3.10.2 Normalisation par rapport à la masse

Dans ce cas on doit calculer la matrice modale qui vérifie le produit scalaire suivant :

$$\bar{\Phi} M \bar{\Phi}^T = I \quad (3.25)$$

tel que $\bar{\Phi}$ est la matrice des modes propres normalisée Cette dernière est reliée à la matrice modale Φ par la relation (3.23). Donc, il suffis de déterminer la matrice diagonale A comme précédemment.

En multipliant l'équation (3.25) par Φ^{-1} à droite et à gauche, on obtient :

$$\bar{\Phi}^{-1} \bar{\Phi} M \bar{\Phi}^T (\bar{\Phi}^{-1})^T = \bar{\Phi}^{-1} I (\bar{\Phi}^{-1})^T$$

Alors :

$$M = \bar{\Phi}^{-1} (\bar{\Phi}^{-1})^T$$

En multipliant par Φ maintenant, on obtient :

$$M = \Phi \bar{\Phi}^{-1} (\bar{\Phi}^{-1})^T \Phi^T$$

On remplace la valeur de $\bar{\Phi}$ par sa valeur (3.23) :

$$M = \Phi \Phi^{-1} (A^{-1})^T A^{-1} (\Phi^{-1})^T \Phi^T = A^{-2}$$

Donc on obtient la matrice diagonale A comme suit :

$$A = (\Phi^T M \Phi)^{-1/2} \quad (3.26)$$

3.10.3 Calcul des modes propres dans le cas de *nddl*

Les fréquences propres des systèmes vibratoires sont, sans doute, les premiers éléments auxquels nous nous intéressons en analyse dynamique. Leur détermination n'est pas toujours aisée, surtout lorsque le nombre de degrés de liberté devient important. Ceci nous conduira souvent à l'utilisation de certaines méthodes approchées et/ou numériques.

SÉRIE D'EXERCICES

Exercice 1

Soit le système de la (Figure 1). La masse m_1 est fixée à une tige rigide, de masse négligeable et de longueur b , qui peut osciller (d'un angle θ_1) dans le plan vertical autour du point O_1 . La masse m_2 est fixée à une autre tige rigide, de masse négligeable, de longueur L et qui peut osciller (d'un angle θ_2) autour du point O_2 . Les deux tiges sont reliées entre elles par un ressort k_1 situé à la position d par rapport à O_1 et à O_2 . La masse m_2 est reliée au sol à l'aide d'un ressort k_2 .

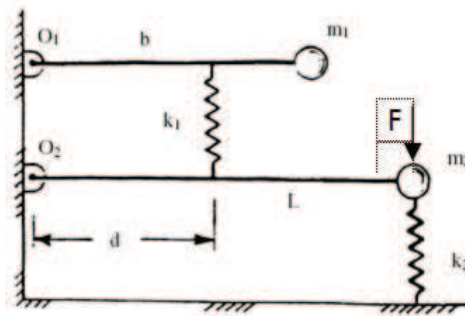


FIGURE 3.9

1. En supposant que les rotations θ_1 et θ_2 sont infinitésimales ; écrire les équations différentielles du mouvement sous forme matricielle en fonction de m_1 , m_2 , k_1 , k_2 , b , d , L , θ_1 et θ_2 . Soient $d = L/2 = (2/3)b$; $k_1 = k_2 = k$ et $m_1 = m_2 = m$.
2. Ecrire les équations précédentes en fonction de m , k , d , θ_1 et θ_2 ,
3. Calculer les pulsations propres et les vecteurs propres,
4. On applique à la masse m_2 une force sinusoïdale $F = f \cdot \sin(\Omega t)$. Donner les équations différentielles du mouvement sous forme matricielle en fonction de m , k , d , θ_1 et θ_2 ,
5. Ecrire les équations découplées correspondantes.

Exercice 2

La poulie du système (Figure 4) est constituée de deux disques homogènes de même masse M et de rayons respectifs R_1 et R_2 . Cette poulie tourne sans frottement autour d'un axe fixe. A l'équilibre $\theta = 0$, les deux ressorts de raideur k ne sont pas déformés. La masse m glisse sans frottement sur le plan horizontal.

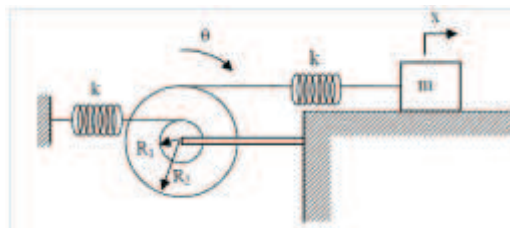


FIGURE 3.10

1. Combien de degrés de liberté a le système ?

2. Etablir les équations différentielles régissant le mouvement libre.
Supposons maintenant que : $R_2 = 2R_1$ et $M = m$.
3. Calculer les pulsations propres en fonction de la pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$,
4. Calculer les modes propres normés par rapport à la première composante en fonction de R_1 .
Supposons que la masse m est soumise à une force sinusoïdale de type : $F = F_0 \sin(\Omega t)$.
5. Ecrire les équations de mouvement du système forcé sous forme matricielle,
6. Ecrire les équations découplées en utilisant la méthode modale,
7. Donner la solution des équations découplées.

Exercice 3

On considère le système de la figure 3.11 constitué de deux pendules simples identiques de masse m et de longueur L , fixés à un bâti fixe horizontal. Un ressort de raideur k , fixé à une distance a du bâti assure le couplage entre les deux pendules. A l'équilibre les deux pendules sont verticaux.

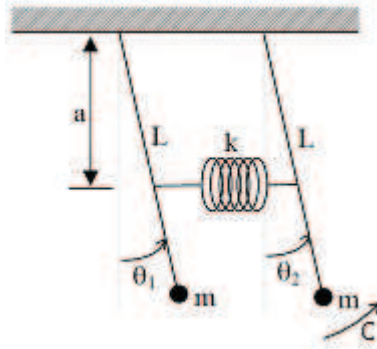


FIGURE 3.11

1. Calculer l'énergie cinétique T , l'énergie potentielle U et le lagrangien dans le cas des oscillations de faible amplitude,
2. Etablir les équations différentielles du mouvement,
3. Calculer les pulsations propres ω_1 et ω_2 en fonction de :
 $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ et de $\Omega = \sqrt{(ka^2)/(mL^2)}$
4. Calculer θ_1 et θ_2 , pour les conditions initiales suivantes :
 $\theta_1(0) = -\theta_2(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$,
5. Calculer les rapports des amplitudes lorsque le système oscille dans chacun des deux modes,
6. Déduire les modes propres Φ_1 et Φ_2 ,
7. On applique un couple $C = C_0 \sin(\alpha t)$ comme montré dans la figure 3.11. Ecrire l'équation de mouvement sous forme matricielle. Déduire l'équation découplée.

Exercice 4

Un système à deux degrés de liberté (variables x_1 et x_2) est défini par sa matrice de masse M et sa matrice de rigidité K :

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Normalisez les modes par rapport à la masse,
2. Calculez les amplitudes de la réponse à une excitation $f(t) = \cos(\pi t)$ sur x_2 en utilisant la méthode des modes normaux.

Exercice 5

Un système à deux degrés de liberté (variables x_1 et x_2) est défini par sa matrice de masse M et sa matrice de rigidité K :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad et \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Déterminez les fréquences naturelles et les modes propres,
2. Déterminez la réponse pour les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = 0; x_2(0) = 1, v_1(0) = 0; v_2(0) = 0$$

3. Trouvez les matrices diagonales obtenues en exprimant x sur la base des modes
4. Calculez la réponse à une excitation $f(t) = \cos(\sqrt{2}t)$ en x_2 en vous servant du système découplé obtenu en (3). Quels sont les coefficients de participation modale ?

Chapitre 4

Introduction aux Systèmes continus

4.1 Introduction

Les équations tridimensionnelles des vibrations d'un milieu continu donné sont d'une très grande complexité et ne peuvent en règle générale être résolues analytiquement. Cependant, les milieux continus utilisés dans les constructions mécaniques, présentent des particularités géométriques qui permettent de simplifier l'analyse mathématique de leurs vibrations. Ces simplifications faites à priori, ont donné naissance aux théories des poutres, plaques et coques.

Les théories des poutres consistent à construire des modèles monodimensionnels et en ce sens représentent les milieux continus les plus simples. Cette simplicité nous sera très utile puisqu'elle nous permettra d'obtenir des solutions analytiques du problème et en conséquence d'étudier les phénomènes vibratoires de façon très complète. La poutre possède deux de ses dimensions (largeur et épaisseur) faibles devant la troisième (longueur). La recherche des phénomènes vibratoires de base nous conduira à envisager trois mouvements élémentaires des poutres : les vibrations longitudinales, les vibrations de torsion et les vibrations de flexion.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la modélisation des poutres en traction et en torsion (barres). Ces barres ont une distribution continue des masses et de l'élasticité. Ils sont supposés homogènes, isotropes et obéissant à la loi de Hooke en deçà de la limite élastique.

4.2 Vibrations longitudinales dans les barres

4.2.1 Equations des ondes longitudinales

Soit une barre de longueur l et de section variable $A(x)$ (Figure 4.1). Les ondes longitudinales sont des ondes de traction-compression dans la direction x .

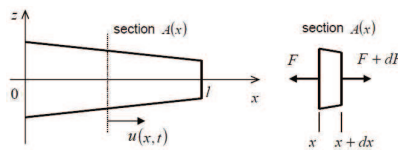


FIGURE 4.1 – Déplacement longitudinal dans une barre

L'équation d'équilibre de l'élément dx s'écrit :

$$F + dF - F = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

avec $u(x, t)$ le déplacement longitudinal, $A(x)$ la section et ρ la masse volumique. Il n'existe que la contrainte suivant l'axe x et elle est donnée par :

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{A(x)} \quad (4.2)$$

La déformation s'obtient par la loi de Hooke (E : est le module de Young et ν est le coefficient de Poisson) :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{F}{EA(x)}$$

Ce qui donne :

$$F = EA(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (4.3)$$

Puisque $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx$, alors l'équation d'équilibre (4.1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} (EA(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}) dx = \rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx \quad (4.4)$$

Dans le cas d'une section constante $A(x) = A$, on a :

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

En notant la vitesse de propagation des ondes longitudinales $c_l = \sqrt{E/\rho}$, l'équation de propagation peut se représenter sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0} \quad (4.6)$$

La loi de Hooke montre qu'il existe aussi une déformation dans la direction z (et y)

$$\epsilon_{zz} = -\nu \epsilon_{xx}$$

La propagation des ondes de traction-compression dans les barres s'accompagne d'une déformation en z . On parle alors d'onde quasi-longitudinale (figure 4.2).

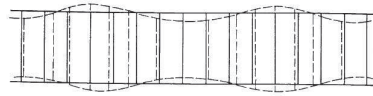


FIGURE 4.2 – Onde quasi-longitudinale : onde de traction-compression dans une barre

4.2.2 Fréquences naturelles et déformées modales

Le déplacement longitudinal est représenté par des fonctions indépendantes en utilisant la technique de séparation de variables. La solution recherchée se présente sous la forme d'un produit de deux fonctions, dont l'une dépend de l'espace et l'autre du temps :

$$u(x, t) = N(x)q(t) \quad (4.7)$$

Introduite dans l'équation des ondes, nous donne :

$$c^2 \frac{N''(x)}{N(x)} = \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = -\omega^2 \quad (4.8)$$

tel que : $N''(x) = \frac{d^2 N(x)}{dx^2}$ et $\ddot{q}(t) = \frac{d^2 q(t)}{dt^2}$

La relation (4.8) conduit à deux équations indépendantes :

$$\begin{cases} N''(x) + \sigma^2 N(x) = 0 \\ \ddot{q} + \omega^2 q(t) = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

tel que : $\omega^2 = \sigma^2 c^2$ dont les solutions sont :

$$\begin{cases} N(x) = \alpha \sin(\sigma x) + \beta \cos(\sigma x) \\ q(t) = a \sin(\sigma ct) + b \cos(\sigma ct) \end{cases} \quad (4.10)$$

Les fréquences naturelles et les déformées modales vont dépendre des conditions aux limites.

4.2.3 Conditions aux limites

Les déformées modales et les fréquences naturelles dépendent des conditions aux limites aux deux extrémités de la barre. Différents types de conditions aux limites peuvent être envisagés (4.3) :

- a) Extrémité libre : la contrainte est nulle $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
- b) Extrémité encastrée : le déplacement est nul $u = 0$
- c) Extrémité fixée à un ressort de raideur k : $\pm k u = EA \frac{\partial u}{\partial x}$
- d) Extrémité attachée à une masse m : $\pm m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EA \frac{\partial u}{\partial x}$

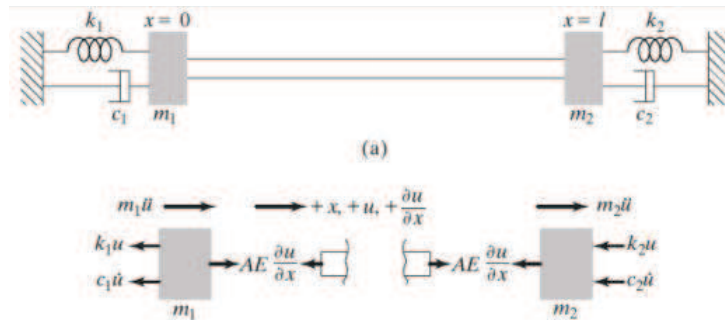


FIGURE 4.3 – Les conditions aux limites

Dans le cas de la figure (4.3), les conditions aux limites sont données comme suit :

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = (m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial u}{\partial t} + k_1 u) \Big|_{x=0}$$

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = (m_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial u}{\partial t} + k_2 u) \Big|_{x=l}$$

Application 4.1

Soit la barre encastrée à une extrémité et libre à l'autre (cantilever) (figure (4.4)).

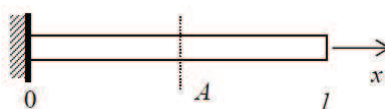


FIGURE 4.4 – Barre encastrée-libre

Les conditions aux limites se décrivent par :

En $x = 0$, le déplacement est nul :

$$u(0, t) = 0 \rightarrow N(0) = 0$$

En $x = l$, la contrainte est nulle :

$$\sigma_{xx}(l, t) = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \rightarrow N'(l) = 0$$

Soit :

$$N(0) = \beta = 0 \rightarrow N(x) = \alpha \sin(\sigma x) \rightarrow N'(x) = \sigma \alpha \cos(\sigma x)$$

$$N'(l) = \sigma \alpha \cos(\sigma l) = 0 \rightarrow \cos(\sigma l) = 0 \rightarrow \sigma = \frac{2n-1}{2l} \pi \quad \text{tel que } n = 1, 2, 3, \dots$$

Les déformées modales sont :

$$N_n(x) = \sin(\sigma_n x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} = \Phi_n(x)$$

Et vérifient la relation d'orthogonalité :

$$\int_0^l \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx = \int_0^l \sin(\sigma_n x) \sin(\sigma_m x) dx = \frac{l}{2} \delta_{mn} \quad (4.11)$$

Avec δ_{mn} est le symbole de Kronecker :

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Les pulsations naturelles sont :

$$\omega_n = \sigma_n c_l = \frac{(2n-1)\pi c_l}{2l} = \frac{(2n-1)\pi}{2l} \sqrt{E/\rho} \quad (4.12)$$

Donc pour ce cas, les solutions sont comme suit :

le déplacement : $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin(\sigma_n c_l t) + B_n \cos(\sigma_n c_l t)) \sin(\sigma_n x)$

la vitesse $\dot{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n c_l (A_n \cos(\sigma_n c_l t) - B_n \sin(\sigma_n c_l t)) \sin(\sigma_n x)$

la pulsation propre : $\omega_n = \sigma_n c_l$

Et la forme modale $\Phi_n = \sin(\sigma_n x)$

Il reste à déterminer A_n et B_n . Pour cela, les conditions initiales (à $t = 0$) et la relation d'orthogonalité sont utilisées.

4.2.4 Expression complète du mouvement

Pour expliquer cette partie, on utilise l'exemple de la figure 4.4. Dans cet exemple, le déplacement initial est donné par :

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(\sigma_m x)$$

Ce qui donne en multipliant fois $\sin(\sigma_n x)$ et en intégrant sur la longueur totale de la barre :

$$\int_0^l u_0(x) \sin(\sigma_n x) dx = \int_0^l \left(\sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(\sigma_m x) \right) \sin(\sigma_n x) dx = \int_0^l B_n \sin^2(\sigma_n x) dx = \frac{B_n l}{2}$$

Donc

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin(\sigma_n x) dx \quad (4.13)$$

La vitesse initiale :

$$\dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m c_l A_m \sin(\sigma_m x)$$

Alors, en procédant de la même manière que pour le déplacement, on obtient :

$$\int_0^l \dot{u}_0(x) \sin(\sigma_n x) dx = \int_0^l \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m c_l A_m \sin(\sigma_m x) \right) \sin(\sigma_n x) dx = \int_0^l \sigma_n c_l A_n \sin^2(\sigma_n x) dx = \sigma_n c_l A_n \frac{l}{2}$$

Donc :

$$A_n = \frac{2}{\sigma_n c_l l} \int_0^l \dot{u}_0(x) \sin(\sigma_n x) dx \quad (4.14)$$

Application 4.2

Considérons la barre de l'application 1. A $t = 0$, la vitesse initiale : $\dot{u}_0(x) = 0$ et une force F_0 est appliquée à l'extrémité libre de la barre encastree.



FIGURE 4.5 – barre encastree-libre

De la loi de Hook, on trouve :

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = \frac{F_0}{EA} \rightarrow u(x, 0) = \frac{F_0 x}{EA}$$

En remplaçant dans (4.17) et (4.18), on obtient :

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{F_0 x}{EA} \sin(\sigma_n x) dx = \frac{8F_0 l (-1)^{n+1}}{EA \pi^2 (2n-1)^2}$$

et

$$\dot{u}(x, 0) = 0 \rightarrow A_n = 0$$

Le déplacement libre de la barre est complètement défini par ses conditions aux limites et ses conditions initiales :

$$u(x, t) = \frac{8F_0 l}{EA \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \cos(\omega_n t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)$$

$$\text{avec } \omega_n = \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \sqrt{E/\rho}, n = 1, 2, 3, \dots$$

4.3 Vibrations de torsion dans les barres

4.3.1 Equations des ondes de torsion

Une barre peut vibrer en torsion : la vibration est caractérisée par un déplacement angulaire (mouvement de rotation) autour de l'axe longitudinal de la barre (4.6).

On considère l'équilibre des moments d'un petit élément dx d'une barre de section circulaire uniforme. Soit M_t le moment de torsion en x et $(M_t + (\partial M_t / \partial x)dx)$ le moment de torsion en $(x + dx)$.

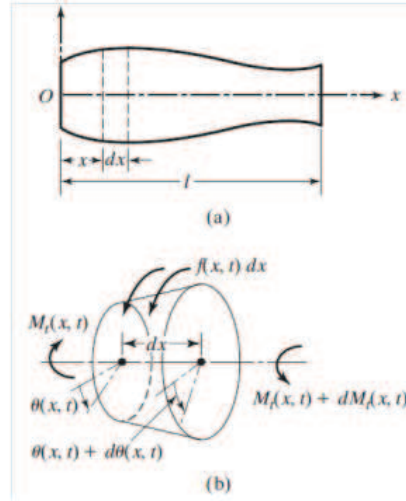


FIGURE 4.6 – Un arbre en torsion

Le moment de torsion s'écrit comme suit :

$$M_t = GI_0 \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}$$

où :

GI_0 est la raideur à la torsion

$G = E/(2(1 + \nu))$ est le module de cisaillement

I_0 est le moment quadratique de rotation de la section droite.

L'équilibre des moments est :

$$M_t + \frac{\partial M_t}{\partial x} dx - M_t + f(x, t) dx = J_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2}$$

où J_0 est le moment d'inertie de l'élément de volume par rapport à l'axe de rotation : $J_0 = \rho I_0 dx$

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial x} (GI_0 \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}) dx + f(x, t) dx = \rho I_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2}$$

L'équation de propagation des ondes de torsion, en mouvement libre, peut s'écrire sous la forme habituelle :

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2}$$

Avec la vitesse de propagation des ondes de torsion :

$$c_t = \sqrt{G/\rho}$$

4.3.2 Conditions aux limites

Extrémité encastrée : déplacement angulaire nul $\theta(x_0, t) = 0$

Extrémité libre : moment nul $\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \big|_{x_0} = 0$

La méthode pour obtenir les pulsations naturelles et les déformées modales est la même que pour les barres en traction-compression. La prise en compte des conditions initiales permettra de déterminer totalement le mouvement de la barre en torsion.

SÉRIE D'EXERCICES

Exercice 1

Une barre de section uniforme A , de longueur l , de masse volumique ρ et de module de Young E est encastrée à une de ses extrémités (Figure 4.7). A l'autre extrémité est fixée une masse ponctuelle égale à la masse de la barre elle-même.

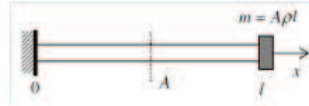


FIGURE 4.7 – barre encastrée et liée à une masse

1- Exprimer les conditions aux limites en considérant le déplacement sous la forme

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

2- En utilisant une expression approchée $\tan(\alpha) \approx \alpha - (n-1)\pi$ quand α est proche de $(n-1)\pi$, donner les pulsations naturelles de la barre.

3- Pour la première pulsation naturelle. Utiliser une approximation de la tangente exacte au second ordre $\tan(\alpha) \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$ pour améliorer l'estimation.

Exercice 2

Soit une poutre Encastrée-Libre en vibrations longitudinale, ayant deux sections différentes le long de l'axe x , comme le montre la figure 4.8.



FIGURE 4.8 – barre encastrée-libre de section variable

1- Ecrire les équations différentielles régissant les déplacements longitudinaux $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$

2- Exprimer mathématiquement les conditions aux limites et de continuité.

3- On admet pour solutions :

$$u_1(x, t) = X_1(x)e^{j\omega t} \text{ et } u_2(x, t) = X_2(x)e^{j\omega t}$$

$$\text{avec : } X_i(x) = a_i \cos(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x) + b_i \sin(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x)$$

Déterminer alors l'équation caractéristique pour les fréquences naturelles du système

Exercice 3

Une poutre uniforme, de masse volumique ρ , de longueur L , et de section S , est supportée au moyen d'un ressort de masse négligeable et de raideur k à une extrémité et attachée à une masse M à l'autre extrémité (Figure 4.9).

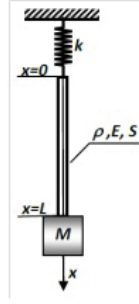


FIGURE 4.9 – barre encastrée-libre de section variable

Déterminer l'équation aux fréquences propres des vibrations longitudinales de la poutre On donne :

$$u(x, t) = (A_1 \cos(\frac{\omega x}{C}) + A_2 \sin(\frac{\omega x}{C}))(B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t))$$

Exercice 4

Une poutre cantilever uniforme, de masse volumique ρ , de longueur L , et de section S , est supportée au moyen d'un ressort de masse négligeable et de raideur k (Figure 4.10). Déterminer l'équation aux fréquences propres. On donne : $k = ES/L$

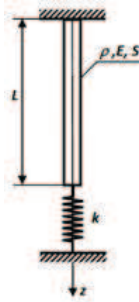


FIGURE 4.10 – barre encastrée et liée à un ressort

Exercice 5

Une poutre verticale, uniforme de longueur L et de section S , est encastrée à une extrémité et chargée par un corps de masse M à l'autre extrémité (Figure 4.11).

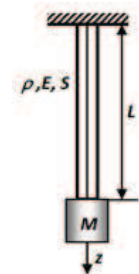


FIGURE 4.11 – barre encastrée et liée à un ressort

Montrer que les fréquences naturelles des vibrations longitudinales de la poutre sont déterminées par la résolution de l'équation :

$$\omega L \sqrt{\frac{\rho}{E}} \tan(\omega L \sqrt{\frac{\rho}{E}}) = \frac{S \rho L}{M}$$

Exercice 6

Etablir l'équation de fréquence et donner la forme générale de la solution pour les vibrations de torsion dans le barreau cylindrique de la figure 4.12.

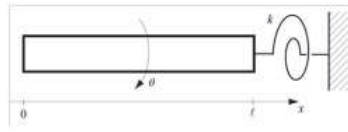


FIGURE 4.12 – barre en torsion

Exercice 7

Trouver l'équation aux fréquences pour les vibrations de torsion d'une poutre circulaire, de section uniforme S . La poutre est attachée rigidement à ces deux extrémités par deux rotors rigides (Figure 4.13).

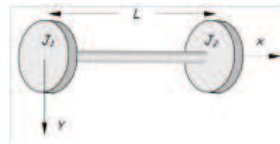


FIGURE 4.13 – barre en torsion liée à deux rotors rigides

Bibliographie

- [1] Timoshenko S.P. et al. *Vibration Problems in Engineering*. 4th edition, Wiley, 1974.
- [2] Tse F.S. et al. *Mechanical Vibrations. Theory and Applications*. 2nd Edition Allyn and Bacon, 1978.
- [3] Pascal J.C. Vibrations et acoustique 1. Cours - Université du Maine, 2007-2008.
- [4] Pascal J.C. Vibrations et acoustique 2. Cours - Université du Maine, 2008-2009.
- [5] Géradin M. and Rixen D. *Théorie des Vibrations. Application à la Dynamique des Structures*. Editions Masson, 1993.
- [6] Lalanne M. *Mécanique des Vibrations Linéaires*. Editions Masson, 1984.
- [7] Roseau M. *Vibrations des Systèmes Mécaniques*. Editions Masson, 1984.
- [8] Thomas. M and Laville. F. *Simulation des vibrations mécaniques par Matlab, Simulink et Ansys*. Presses de l'Université du Québec, 2007.
- [9] Blevins R.D. *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. R.E. Kriegen Publishing, 1984.
- [10] Clough R.W. and Penzien J. *Dynamics of Structures*. Mc. Graw-Hill, 1975.
- [11] Graham Kelly S. *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*. Mc GrawHill, 1996.
- [12] Rao S.S. *Mechanical vibrations*. Prentice Hall, 2011.
- [13] Thomson W.T. *Theory of Vibration with Application*. 2nd edition Prentice-Hall, 1981.
- [14] Seto W.W. *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*. Schaum's outline series, 1964.