Université Mohamed Premier
Ecole Supérieure de Technologie

Polycopié du Module Mathématiques Générales

Algèbre et Analyse

1ère année

Cours et Exercices résolus

Préparé par Pr A. Kaaouachi

Année universitaire : 2008 - 2009

Première partie

Algèbre

Chapitre 1

Calcul matriciel

1.1 Notion de matrice

Cette première section aborde la notion de matrice[1].

Définition 1.1.1. *On appelle matrice à n lignes et p colonnes la forme suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Le terme a_{ij} se situe à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne. On note M par $M = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$, ou tout simplement $M = (a_{ij})$.
Le couple (n,p) s'appelle le format ou la dimension de la matrice.

Remarques 1.1.1

- Si $n = p$, on dit que M est une matrice carrée d'ordre n.
- On note $\mathcal{M}_{n,p}$ l'ensemble des matrices ayant le format (n,p).
- On note $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Exemple 1.1.1

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}.$$

1.2 Opérations sur les matrices

1.2.1 Addition

Soient $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $N = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ deux matrices ayant le même format (n,p). La matrice somme des deux matrices M et N est définie par

$$\boxed{M + N = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}.}$$

(On effectue la somme des termes ayant les mêmes indices ij).

[1]Le mathématicien anglais James Sylvester (1814-1897) utilisa pour la première fois le terme “matrice” en 1850. Cayley, Hamilton, Hermann Grassmann, Frobenius et John von Neumann comptent parmi les mathématiciens célèbres qui ont travaillé sur la théorie des matrices.

Exemple 1.2.1

Calculons

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 9 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 10 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Multiplication par un réel

Soient $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ une matrice ayant le format (n,p). La multiplication de M par un réel α est définie par la matrice

$$\boxed{\alpha.M = (\alpha.a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}.}$$

(On effectue la multiplication de tous les termes par le réel α).

Exemple 1.2.2

Calculons

$$5.\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -20 \\ 15 & 30 & -10 \end{pmatrix}.$$

1.2.3 Multiplication

Soient $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ une matrice ayant le format (n,p) et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,m}$ une autre matrice ayant le format (p,m). Le produit de M et N est une matrice ayant le format (n,m) de terme général

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.}$$

Ainsi, pour avoir le terme général c_{ij} de $M.N$, on multiplie les termes de la ligne i de M par les termes de la colonne j de N, puis on procède par la sommation.

$$\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}a_{i2}\ldots a_{ip} \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{pj} & \vdots \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.2.1

L'opération du produit n'est réalisable que si le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N. On garde dans l'esprit le schéma suivant :

$$M(n, \underline{\underline{p}}) \times N(\underline{\underline{p}}, m) = M.N(n,m).$$

Exemple 1.2.3

Calculons

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 36 & 20 & 54 \\ 60 & 45 & 27 & 69 \\ 60 & 45 & 19 & 63 \end{pmatrix}.$$

1.2.4 Transposition

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ une matrice ayant le format (n, p).
On appelle transposée de M la matrice M', ayant le format (p, n) et définie par

$$M' = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n},$$

avec le terme général $b_{ij} = a_{ji}$.
Autrement dit, M' s'obtient de M en transformant le rôle des deux indices ij.

Exemple 1.2.4

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & 1 \\ 5 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}$.
Sa matrice transposée est

$$M' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 9 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,2}.$$

Exemple 1.2.5

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3$.
Sa matrice transposée est

$$M' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3.$$

Dans le cas d'une matrice carrée, on utilise la symétrie des éléments par rapport à la diagonale pour avoir la matrice transposée.

1.3 Matrices remarquables

1.3.1 Matrice nulle

C'est la matrice ayant pour terme général $a_{ij} = 0$, pour tout i, j.

1.3.2 Matrice identité

C'est la matrice carrée d'ordre n ayant pour terme général

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Elle a les termes 1 dans la diagonale et 0 ailleurs.

Exemple 1.3.1

La matrice identité d'ordre 3 est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Propriété 1.3.1. *Soit $I_n \in \mathcal{M}_n$ la matrice identité d'ordre n. Alors on a, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$,*

$$M \times I_n = I_n \times M = M.$$

I_n est l'élément neutre pour l'opération du produit des matrices.

1.3.3 Matrice diagonale

C'est une matice carrée d'ordre n vérifiant $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$, i.e. des zéros hors de la diagonale. Elle a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1.3.4 Matrice triangulaire

Définition 1.3.1. *Soit M une matrice carrée d'ordre n.*

(i) On dit que M est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$, pour tout $i > j$, i.e. des zéros dans la partie inférieure à la diagonale.

(ii) On dit que M est triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$, pour tout $i < j$, i.e. des zéros dans la partie supérieure à la diagonale.

Exemple 1.3.2
$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 19 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.

Exemple 1.3.3
$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure.

1.4 Déterminant d'une matrice carrée

1.4.1 Cas d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. On appelle déterminant[2] de M la quantité

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple 1.4.1

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 14 = 16.$$

1.4.2 Cas d'une matrice carrée d'ordre 3

Soit la matrice carrée d'ordre 3

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de M est la quantité

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

[2]Leibniz a développé la théorie des déterminants en 1693 pour faciliter la résolution des équations linéaires.

On dit qu'on a fait un développement selon la première colonne de M.

Exemple 1.4.2

Calculons

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5(-18) - 6(-58) + 3(-14) = 216.$$

1.4.3 Cas général

Soit $M = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n définie par

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Définition 1.4.1. *(Mineur et cofacteur)*

(i) Pour chaque couple d'indices (i, j), on appelle mineur de la place (i, j), le déterminant Δ_{ij} obtenu en supprimant dans M la ligne i et la colonne j. Soit donc

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

(ii) Pour chaque couple d'indices (i, j), on appelle cofacteur de la place (i, j), le terme

$$M_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Exemple 1.4.3

Soit M la matrice carrée d'ordre trois définie par $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Le mineur de la place $(1, 1)$ est $\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -18$.

Le mineur de la place $(2, 3)$ est $\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 32$, et ainsi de suite pour trouver les autres mineurs (en fait, il y a 9 mineurs).

Le cofacteur de la place $(1, 1)$ est $M_{11} = (-1)^2\Delta_{11} = -18$.

Le cofacteur de la place $(2, 3)$ est $M_{23} = (-1)^5\Delta_{23} = -32$, et ainsi de suite pour trouver les autres cofacteurs (en fait, il y a 9 cofacteurs).

Remarque 1.4.1

Pour une matrice carrée d'ordre n, il y a n^2 mineurs et n^2 cofacteurs.

Proposition 1.4.1. *Soit $M = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. Alors, pour tout $j = 1, \dots, n$,*

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} M_{ij}.$$

(Développement par rapport à la j-ème colonne de M).

Aussi, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} M_{ij}.$$

(Développement par rapport à la i-ème ligne de M).

Exemple 1.4.4

Développons le déterminant de l'Exemple 11.4.2 par rapport à la 1-ère colonne

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} &= 5M_{11} + 6M_{21} + 3M_{31} = 5(-1)^2\Delta_{11} + 6(-1)^3\Delta_{21} + 3(-1)^4\Delta_{31} \\
&= 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5(-18) - 6(-58) + 3(-14) \\
&= 216.
\end{aligned}$$

Maintenant, effectuons le développement par rapport à la 3-ème ligne, on trouve

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} &= 3M_{31} + 7M_{32} + 5M_{33} = 3(-1)^4\Delta_{31} + 7(-1)^5\Delta_{32} + 5(-1)^6\Delta_{33} \\
&= 3\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 216.
\end{aligned}$$

Le développement par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne donne toujours le même résultat.

Exemple 1.4.5

Calculons

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5 & 1 & 9 & 17 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} &= 0M_{41} + 0M_{42} + 0M_{43} + 6M_{44} \\
&= 6(-1)^8\Delta_{44} = 6\begin{vmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 1296.
\end{aligned}$$

On a fait un développement par rapport à la 4-ème ligne.

Remarque 1.4.2

Il est souvent utile de faire le développement par rapport aux lignes ou aux colonnes qui contiennent plusieurs zéros.

Cas particulier : Déterminant d'une matrice diagonale

Soit

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

une matrice diagonale d'ordre n. On a

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemple 1.4.6

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times 6 \times 3 = 90.$$

Remarque 1.4.3

Plus généralement, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de la diagonale principale.

Propriété 1.4.1. *Soient M et N deux matrices carrées. Alors*
(i) $\det(M') = \det(M)$*, avec M' est la transposée de M ;*
(ii) $\det(M.N) = \det(M).\det(N)$.

1.5 Inverse d'une matrice carrée

Etant donnée une matrice M connue, on cherche la matrice N telle que $M \times N = I_n$ (matrice identité d'ordre n). Si cette matrice N existe, on dit que M est inversible et on note N par M^{-1}.

Proposition 1.5.1. *Une matrice carrée M d'ordre n est inversible si et seulement si* $\det(M) \neq 0$*. Dans ce cas, il existe une matrice N telle que $M \times N = I_n$.*

Exemple 1.5.1

La matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
Oui elle est inversible car $\det(M) = 33 \neq 0$.

Définition 1.5.1. *Soit $M = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle comatrice de M la matrice carrée d'ordre n notée* com(M)*, définie par*

$$\mathrm{com(M)} = (\mathrm{M_{ij}}) = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix},$$

où M_{ij} est le cofacteur de la place (i, j).

Exemple 1.5.2

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 1 \\ 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

La comatrice de M est la matrice $\mathrm{com(M)} = \begin{pmatrix} 13 & -21 & -15 \\ -6 & -38 & 26 \\ -17 & 37 & -9 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.5.2. *Soit M une matrice carrée d'ordre n inversible (lorsque* $\det(M) \neq 0$*). Alors il existe une matrice carrée d'ordre n, notée M^{-1}, telle que $M \times M^{-1} = I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.*
La forme de M^{-1} est

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \mathrm{com}'(\mathrm{M}),$$

avec $\mathrm{com}'(\mathrm{M})$ *est la transposée de la comatrice de M.*
M^{-1} s'appelle la matrice inverse de M.

Exemple 1.5.3

Soit la matrice carrée d'ordre 2, sous sa forme générale, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Si $\det(M) = ad - bc \neq 0$, alors M est inversible. Donc, il existe une matrice M^{-1} telle que $M \times M^{-1} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La comatrice de M est $\mathrm{com(M)} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$; sa transposée est $\mathrm{com}'(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Ainsi

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.5.4

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 1 \\ 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
M est-elle inversible ? Si oui, déterminer sa matrice inverse M^{-1}.
Oui, car $\det(M) = -124 \neq 0$. La matrice transposée de la comatrice de M est $\mathrm{com}'(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} 13 & -6 & -17 \\ -21 & -38 & 37 \\ -15 & 26 & -9 \end{pmatrix}$. Ainsi $M^{-1} = \frac{-1}{124} \begin{pmatrix} 13 & -6 & -17 \\ -21 & -38 & 37 \\ -15 & 26 & -9 \end{pmatrix}$.

1.6 Exercices

Exercice 1. Calculer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 4 \\ 5 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Calculer l'inverse de chacune des deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0,$$

avec I_3 est la matrice identité d'ordre 3.
2)En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Chapitre 2

Systèmes d'équations linéaires

2.1 Définition

Un système d'équations linéaires a la forme suivante :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \right.$$

où les (a_{ij}) et (b_j) sont des constantes connues et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les paramètres inconnus du système.

2.2 Cas où $m = n$ (nombre d'équations est égal au nombre d'inconnus)

Prenons le cas $m = n$, le système ci-dessus s'écrit :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array} \right.$$

On note

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

L'écriture matricielle du système (S) est

$$\boxed{AX = b.}$$

Lorsque A est inversible ($\det(A) \neq 0$), le système (S) est dit de Cramer[1]. Dans ce cas, il possède une solution unique.
Pour la résolution du système (S), nous proposons trois méthodes : la première est purement matricielle, la deuxième utilise des déterminants[2] et la troisième considère des opérations sur les équations.

[1] Gabriel Cramer (1704-1752) est un mathématicien suisse.
[2] Cette méthode a été présentée par Cramer en 1750 pour la résolution des équations linéaires.

2.2.1 Méthode matricielle

Le système $AX = b$ est équivaut à $X = A^{-1}b$, qui est son unique solution.

Exemple 2.2.1

Résolvons le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 1 \\ 6x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 9x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Matriciellement, ce système s'écrit sous la forme $AX = b$, avec

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 1 \\ 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution de ce système est

$$X = A^{-1}b = \frac{-1}{124}\begin{pmatrix} 13 & -6 & -17 \\ -21 & -38 & 37 \\ -15 & 26 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{124}\begin{pmatrix} 19 \\ 17 \\ -41 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'unique solution est $x_1 = \frac{-19}{124}$, $x_2 = \frac{-17}{124}$ et $x_3 = \frac{41}{124}$.

2.2.2 Méthode des déterminants

Proposition 2.2.1. *L'unique solution d'un système de Cramer $AX = b$ est donnée par*

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)},$$

avec $j = 1, 2, \dots, n$.

Exemple 2.2.2

Résolvons le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & = & 5 \end{array}\right.$$

La matrice associée au système est $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5 \neq 0$. Donc ce système est de Cramer.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{1}{5} \quad , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{6}{5}.$$

La solution du système est $(\frac{1}{5}, \frac{6}{5})$.

2.2.3 Méthode d'élimination de Gauss (ou bien du pivot de Gauss)

La méthode d'élimination de Gauss[3] permet de résoudre les systèmes de Cramer. Considérons le système de Cramer suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n & (E_n) \end{array} \right.$$

On suppose que $a_{11} \neq 0$. L'idée est de supprimer x_1 dans les autres équations. Pour supprimer x_1 de l'Equation (E_i), $(i \geq 2)$, on multiplie l'Equation (E_1) par $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, puis on fait la différence de l'équation trouvée avec l'Equation (E_i). Le système (S) devient

$$(S') : \left\{ \begin{array}{cccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ & & a'_{22}x_2 & + & \ldots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 & (E_2 \leftarrow E_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}E_1) \\ & & & & \vdots & & & & & \\ & & a'_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a'_{nn}x_n & = & b'_n & (E_n \leftarrow E_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}}E_1) \end{array} \right.$$

Si $a'_{22} \neq 0$, on supprime l'inconnu x_2 de l'Equation (E_i), $(i \geq 3)$, en multipliant l'Equation (E_2) par $\frac{a'_{i2}}{a'_{22}}$, puis on fait la différence de l'équation trouvée avec l'Equation (E_i).

On répète le procédé jusqu'à l'obtention d'une dernière équation qui s'écrit en fonction de x_n, uniquement. On cherche la valeur de x_n, puis on en déduit successivement les valeurs de $x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Exemple 2.2.3

Résolvons le système suivant par la méthode d'élimination de Gauss :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 & (E_1) \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 & (E_2) \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 & (E_3) \end{array} \right.$$

Ce système est bien de Cramer, car

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Le système (S) est équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 & (E_1) \\ & & x_2 & + & x_3 & = & -3 & (E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1) \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -11 & (E_3 \leftarrow E_3 - 3E_1) \end{array} \right.$$

(On a éliminé x_1 des Equations (E_2) et (E_3)).
Ce dernier système s'écrit comme

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 & (E_1) \\ & & x_2 & + & x_3 & = & -3 & (E_2) \\ & & & - & 2x_3 & = & -8 & (E_3 \leftarrow E_3 - E_2) \end{array} \right.$$

On calcule successivement les valeurs des inconnus pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & -7 \\ x_2 & = & -7 \\ x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

[3]Carl Friedrich Gauss (1777-1855) est un mathématicien, astronome et physicien allemand.

2.3 Cas général : $m \neq n$

Soit le système suivant à m équations et n inconnus :

$$(S):\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Posons

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Le système (S) est équivaut à $AX=b$.
Considérons la matrice

$$A_b=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m, \end{pmatrix}$$

qui s'appelle la matrice augmentée ; elle est constituée des éléments de A et ceux de b.

Définition 2.3.1. *(Rang d'une matrice)*
Soit $A=(a_{ij})$ une matrice de format (m,n). On appelle rang de A, et on le note $rg(A)$, le plus grand entier r tel qu'on puisse extraire de A une matrice carrée d'ordre r de déterminant non nul.

Remarque 2.3.1
Il est clair que $rg(A) \leq \min(m,n)$.
Après ce rappel, on s'intéresse maintenant à la résolution du système (S).

Proposition 2.3.1. *Le système (S) admet des solutions si et seulement si*

$$rg(A)=rg(A_b).$$

Pour résoudre le système (S), on calcule le rang de la matrice A associée à (S). Si $rg(A)=r$, alors il existe un déterminant Δ_r non nul d'ordre r, appelé "déterminant principal".
Les équations correspondantes aux lignes de Δ_r s'appellent "les équations principales", et les inconnus correspondants aux colonnes de Δ_r s'appellent "les inconnus principaux". Les autres inconnus s'appellent "les paramètres".

On suppose que le déterminant Δ_r est formé des r premières colonnes. On fait le partage suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ \hline \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{mr+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ \hline \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \begin{array}{l} \leftarrow \text{Bloc 1} \\ \\ \leftarrow \text{Bloc 2} \end{array}$$

Ici, le Bloc 1 représente les équations principales, et le Bloc 2 concerne les équations non principales.

Le Bloc 1 du système (S) donne

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n, \end{cases}$$

où $x_1, x_2, \dots, x_r$ sont les inconnus, qu'on va les écrire en fonction des paramètres $x_{r+1}, \dots, x_n$.
Ensuite, on vérifie si les $n-r$ équations non principales du Bloc 2 sont vérifiées ou non. Si l'une des équations non principales n'est pas satisfaite, le système n'admet pas de solutions.

Exemple 2.3.1

Résolvons le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Le système est constitué de $m = 4$ équations et de $n = 5$ inconnus. La matrice associée à (S) est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par définition, $rg(A) \leq \min(4,5)$, donc $rg(A) \leq 4$.
On vérifie sans difficulté qu'il n'existe pas un déterminant non nul d'ordre 4, donc $rg(A) \neq 4$. On passe à l'ordre 3 ; on a

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

cela implique que $rg(A) = 3$.
On prend ce déterminant comme le déterminant principal. Les inconnus principaux sont x_1, x_2 et x_3. Les équations principales sont les trois premières équations du système.
Le bloc des équations principales du système (S) donne

$$(S) : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 + x_4 - x_5 & (E_1) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 - 4x_5 & (E_2) \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 - x_4 - x_5 & (E_3) \end{cases}$$

C'est un système de Cramer, avec x_4 et x_5 sont les paramètres.
Pour le résoudre, on utilise la méthode d'élimination de Gauss qui donne, à la première étape,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 + x_4 - x_5 & (E_1) \\ x_2 + x_3 = -2x_4 - 2x_5 & (E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1) \\ x_2 - x_3 = -2 - 4x_4 + 2x_5 & (E_3 \leftarrow E_3 - 3E_1) \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 + x_4 - x_5 & (E_1) \\ x_2 + x_3 = -2x_4 - 2x_5 & (E_2) \\ - 2x_3 = -2 - 2x_4 + 4x_5 & (E_3 \leftarrow E_3 - E_2) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x_3 = 1 + x_4 - 2x_5 \\ x_2 = -1 - 3x_4 \\ x_1 = -1 - 3x_4 + x_5. \end{cases}$$

Il faut maintenant voir si la dernière équation "non principale" est satisfaite; on a $x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -1 - 3x_4 + x_5 + 1 + x_4 - 2x_5 + 2x_4 + x_5 = 0$. Oui, elle est bien vérifiée.

Donc, le système (S) admet des solutions qui constituent l'ensemble

$$S = \{(-1 - 3x_4 + x_5, -1 - 3x_4, 1 + x_4 - 2x_5, x_4, x_5) \quad : \quad x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

2.4 Exercices

Exercice 1. Résoudre par deux méthodes différentes (la méthode des déterminants et la méthode d'élimination de Gauss) le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$$

Exercice 2. Soit le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

1) Déterminer $rg(A)$.
2) Résoudre (S).

Exercice 3. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 & (E_1) \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 & (E_2) \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 9 + a, \quad (a \in \mathbb{R}), & (E_3) \end{cases}$$

Exercice 4. Résoudre le système suivant par la méthode d'élimination de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 & (E_1) \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -3 & (E_2) \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 & (E_3) \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6 & (E_4) \end{cases}$$

Chapitre 3

Polynômes et fractions rationnelles

Dans ce chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.

3.1 Polynômes

3.1.1 Fonction polynômiale

Définition 3.1.1. *On appelle fonction polynômiale sur $\mathbb{K}$ toute fonction P de $\mathbb{K}$ vers $\mathbb{K}$ ayant la forme*

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0,$$

avec $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, X \in \mathbb{K}$.
Le nombre $a_n \neq 0$, s'appelle le coeficient dominant de P. Lorsque $a_n = 1$, P est dit unitaire.
L'ensemble des fonctions polynômiales sur $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 3.1.1. *Soit P une fonction polynômiale. On appelle degré de P, le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$; on le note* $\deg(P)$ *: c'est la plus grande puissance.*

Remarque 3.1.1
Par convention, si $P = 0$ alors $\deg(P) = -\infty$.

3.1.2 Opérations

Proposition 3.1.2. *Soient $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ et $Q(X) = b_m X^m + \ldots + b_1 X + b_0$ deux fonctions polynômiales. Alors*
(i) $P + Q$ est une fonction polynômiale de degré $\leq \max(n, m)$ *;*
(ii) PQ est une fonction polynômiale de degré $n + m$.

Exemple 3.1.1
Considérons $P(X) = 2X^4 - X^3 - 5X^2$ et $Q(X) = X^3 + 2X^2$. Calculons $P + Q$ et PQ.
On a $P + Q = 2X^4 - 3X^2$ et $PQ = 2X^7 + 3X^6 - 7X^5 - 10X^4$.

Proposition 3.1.3. *(Division euclidienne)*
Soient $A, B \in \mathbb{K}(X)$, avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) tel que

$A = BQ + R$, avec $\deg(R) < \deg(B)$.
Q s'appelle le quotient et R le reste de la division.
Si $R = 0$, on dit que B divise A ou bien A est divisible par B.

Remarque 3.1.2
L'écriture $A = BQ + R$ est équivalente à

$$\boxed{\frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}.}$$

Q s'appelle aussi partie entière de la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$.

Exemple 3.1.2
Effectuer la division euclidienne de $A = X^4 - 2X^2 - X + 1$ par $B = X^2 + X$.
Il est facile de trouver que le quotient est $X^2 - X - 1$, alors que le reste est 1.

3.1.3 Dérivée

Définition 3.1.2. *Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. Le polynôme dérivée de P est défini par*

$$P'(X) = na_n X^{n-1} + \ldots + 2a_2 X + a_1.$$

La dérivée d'ordre n de P, notée $P^{(n)}$, est définie par la relation récurrente $P^{(n)} = [P^{(n-1)}]'$ et la convention $P^{(0)} = P$.

Théorème 3.1.1. *Soit $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. Alors, pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$,*

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

Ici, $P^{(k)}(0)$ est la dérivée k-ème de $P(X)$ au point 0.

Exemple 3.1.3
Soit $P(X) = 2X^3 + X^2 + X + 2$. Calculons $P^{(3)}(0)$.
En utilisant la formule, on a $P^{(3)}(0) = a_3 \times 3! = 2 \times 6 = 12$.

3.1.4 Racine (zéro) d'un polynôme

Définition 3.1.3. *Soit $P \in \mathbb{K}(X)$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine (ou zéro) de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$.*

Proposition 3.1.4. *Soient $P \in \mathbb{K}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors*

$$P(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (X - \alpha) \ \text{divise} \ P(X),$$

i.e. il existe $Q \in \mathbb{K}(X) : P(X) = (X - \alpha)Q(X)$.

Exemple 3.1.4
Soit le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$. Vérifions que 1 est une racine de $P(X)$ et factoriser le.
Il est facile de trouver que $P(1) = 0$ et $P(X) = (X - 1)(2X^2 - X - 1)$.

Définition 3.1.4. *(Multiplicité d'une racine)*

Soient $P \in \mathbb{K}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine de multiplicité r si et seulement si $(X-\alpha)^r$ divise $P(X)$ et si $(X-\alpha)^{r+1}$ ne divise pas $P(X)$.

Remarque 3.1.3

Si $r = 2$ ou 3, on parle de racine double ou racine triple. Si $r = 1$, on parle de racine simple.

Exemple 3.1.5

Le polynôme
$$P(X) = (X-4)(X-3)^2(X-7)^4$$
admet une racine simple 4, une racine double 3 et la racine 7 de multiplicité 4.

Proposition 3.1.5. *Soient $P \in \mathbb{K}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. α est une racine de multiplicité r si et seulement si*
$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \quad et \quad P^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$
La notation $P^{(k)}(\alpha)$ désigne la dérivée k-ème de $P(X)$ au point α, ($k = 1, \ldots, r$).

Exemple 3.1.6

Soit le polynôme $P(X) = X^2 - 4X + 4$. Cherchons la multiplicité de la racine 2.
On a $P'(X) = 2X - 4$ et $P''(X) = 2$.
Ainsi, $P(2) = P'(2) = 0$ et $P''(2) = 2 \neq 0$. On conclut que la multiplicité de la racine 2 est $r = 2$.

Exemple 3.1.7

Soit le polynôme $P(X) = X^5 + aX^4 + bX^3 - bX^2 - aX - 1$. Déterminons a et b pour que P admette 1 comme racine de plus grande multiplicité possible.
Les dérivées successives de $P(X)$ sont :
$P'(X) = 5X^4 + 4aX^3 + 3bX^2 - 2bX - a$;
$P''(X) = 20X^3 + 12aX^2 + 6bX - 2b$;
$P^{(3)}(X) = 60X^2 + 24aX + 6b$;
$P^{(4)}(X) = 120X + 24a$;
$P^{(5)}(X) = 120 \neq 0$.
Pour que 1 soit une racine de multiplicité 5, il faut que $P'(1) = P''(1) = P^{(3)}(1) = P^{(4)}(1) = 0$ et $P^{(5)}(1) \neq 0$. Après calcul, on trouve $a = -5$ et $b = 10$.

Proposition 3.1.6. *(Factorisation des polynômes)*
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des racines de P de multiplicités $r_1, r_2, \ldots, r_k$, respectivement. Alors le polynôme P est divisible par $(X-\alpha_1)^{r_1}.(X-\alpha_2)^{r_2}.\ldots.(X-\alpha_k)^{r_k}$,
avec $r_1 + r_2 + \ldots + r_k \leq n$, où n est le degré de P.

3.1.5 Polynômes irréductibles

Définition 3.1.5. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. On dit que P est irréductible sur $\mathbb{K}[X]$ s'il est impossible de l'écrire sous la forme d'un produit de deux polynômes Q et R de $\mathbb{K}[X]$, tous les deux non constants. Autrement dit, $P = QR$ est une écriture impossible.*
Dans le cas contraire, le polynôme est dit réductible si sa factorisation est possible.

Exemple 3.1.8

- X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$.
- $X-1$ est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$.
- X^2-1 est réductible sur $\mathbb{R}[X]$, car $X^2-1=(X-1)(X+1)$.
- X^2+1 est réductible sur $\mathbb{C}[X]$, car $X^2+1=(X-i)(X+i)$.

Propriété 3.1.1. *(i) Tout polynôme de degré* 1 *est irréductible sur* $\mathbb{K}[X]$ *;*

(ii) Tout polynôme de degré ≥ 2 *et irréductible sur* $\mathbb{K}[X]$*, n'admet pas de racine dans* $\mathbb{K}$ *;*

(iii) Les seules polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$*, sont les polynômes de degré* 1 *;*

(iv) Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$*, sont les polynômes de degré* 1 *et les polynômes de degré* 2 *sans racine réelle (i.e. ayant la forme* ax^2+bx+c*, avec* $\Delta=b^2-4ac<0$*) ;*

(v) Tout polynôme de degré supérieur ou égal à 3 *est réductible sur* $\mathbb{R}[X]$ *(même s'il n'a pas de racine réelle) ;*

(vi) Tout polynôme réductible P *sur* $\mathbb{K}[X]$ *s'écrit comme produit de polynômes irréductibles ; c'est le principe de la décomposition.*

Exemple 3.1.9

Décomposons le polynôme $P(X)=X^4+4$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.
On a $P(X)=(X^2+2)^2-4X^2=(X^2+2X+2)(X^2-2X+2)$. Ces deux polynômes sont irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$, car leurs discriminants sont inférieurs strictement à 0.

Exemple 3.1.10

Décomposons le polynôme $P(X)=X^3-3X^2+X-3$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$.
On a $P(X)=(X^2+1)(X-3)$; donc $P(X)=(X-i)(X+i)(X-3)$ qui est la factorisation en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$.

3.2 Fractions rationnelles

3.2.1 Définitions

1. On appelle fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), tout rapport de deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;

2. Une fraction rationnelle $F=\frac{A}{B}$ est une forme irréductible de F si les deux polynômes A et B ne possèdent aucune racine commune dans $\mathbb{C}$;

3. Soit $F=\frac{A}{B}$ une forme irréductible. Toute racine α de multiplicité m de B s'appelle pôle d'ordre m de F. Par exemple, si on considère la fraction

$$F=\frac{X^2+X+1}{(X-1)^4},$$

alors $m=1$ est un pôle d'ordre 4 de F ;

4. Les éléments $\frac{a}{(X-\alpha)^k}$, ($k\in\mathbb{N}^*$, $a\in\mathbb{R}^*$, $\alpha\in\mathbb{R}$), s'appellent des éléments simples du 1-ère espèce d'ordre k ;

5. Les éléments $\frac{aX+b}{(X^2+pX+q)^k}$, ($k\in\mathbb{N}^*$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2|\{(0,0)\}$, $p,q\in\mathbb{R}$), s'appellent des éléments simples du 2-ème espèce d'ordre k.

3.2.2 Décompositon des fractions rationnelles

Partie entière

Soit $\frac{A}{B}$ une fraction rationnelle ; il existe un couple unique de deux polynômes (Q, R) tel que

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B},$$

avec $\deg(R) < \deg(B)$.
Q et R s'obtiennent en effectuant la division euclidienne de A par B. On rappelle que Q s'appelle la partie entière de la fraction $\frac{A}{B}$.

Exemple 3.2.1

Considérons $A = X^4 - 2X^2 - X + 1$ et $B = X^2 + X$. En effectuant la division euclidienne de A par B, on trouve

$$\frac{A}{B} = X^2 - X - 1 + \frac{1}{X^2 + X}.$$

Dans ce cas, la partie entière de $\frac{A}{B}$ est $X^2 - X - 1$.

Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

Soit $\frac{R}{B}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{C}[X]$ écrite sous forme irréductible, avec $\deg(R) < \deg(B)$. Dans ce cas, la partie entière de la fraction est égale à 0.

Nous citons, à présent, le théorème fondamental de l'algèbre énoncé la première fois par d'Alembert[1] et démontré par Gauss.

Théorème 3.2.1. *Tout polynôme complexe de degré n admet n racines complexes (en tenant compte des multiplicités des racines).*

Appliquons le théorème précédent à B qui représente le dénominateur de la fraction $\frac{R}{B}$, on a

$$\boxed{B = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i},}$$

où $(\alpha_i)_{i=1,\ldots,r}$ sont les racines distinctes deux à deux de B dans $\mathbb{C}$ et m_i leurs multiplicités correspondantes.

Proposition 3.2.1. *(Décomposition en éléments simples du 1-ère espèce)*
La fraction rationnelle R/B se décompose de manière unique sous la forme

$$\frac{R}{B} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j},$$

où $a_{i,j}$ sont des constantes. .

Remarque 3.2.1

Pour $i = 1, \ldots, r$, chaque terme $(X - \alpha_i)^j$ donne j-termes dans la décomposition $\frac{\alpha_{i;1}}{(X-\alpha_i)}, \frac{\alpha_{i;2}}{(X-\alpha_i)^2}, \ldots, \frac{\alpha_{i;m_i}}{(X-\alpha_i)^j}$.

Exemple 3.2.2

Décomposons

$$F = \frac{R}{B} = \frac{X - 4}{X^2 - 1}.$$

[1] Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) est un mathématicien et philosophe français.

On remarque que la partie entière est égale à 0. Factorisons B, on a $B = (X-1)(X+1)$. Ainsi

$$F = \frac{X-4}{(X-1)(X+1)} = \frac{a}{(X-1)} + \frac{b}{(X+1)}.$$

En développant, on trouve par identification que $a = \frac{-3}{2}$ et $b = \frac{5}{2}$. On conclut que

$$F = \frac{-3}{2}.\frac{1}{X-1} + \frac{5}{2}.\frac{1}{X+1}.$$

Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Commençons par les fractions rationnelles irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ de la forme

$$\boxed{\frac{R}{(X^2+pX+q)^\beta},}$$

avec X^2+pX+q est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$, i.e. $\Delta = p^2 - 4q < 0$. De plus, on suppose que $\deg(R) < \deg(X^2+pX+q)^\beta$, dans le but d'avoir une partie entière nulle (sinon, on effectue la division euclidienne).

Proposition 3.2.2. *(Décomposition en éléments simples du 2-ème espèce) La fraction rationnelle se décompose de manière unique sous la forme*

$$\frac{R}{(X^2+pX+q)^\beta} = \sum_{i=1}^{\beta} \frac{a_iX+b_i}{(X^2+pX+q)^i},$$

où $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

Plus généralement, considérons la fraction $F = \frac{R}{B}$ irréductible, avec $\deg(R) < \deg(B)$.
La factorisation de B dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$\boxed{B = \prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{m_i}.\prod_{k=1}^{s}(X^2+p_kX+q_k)^{\beta_k},}$$

où $\alpha_i, q_k, p_k \in \mathbb{R} \quad : \quad p_k^2 - 4q_k < 0$.

Proposition 3.2.3. *(Décomposition en éléments simples du 1-ère espèce et 2-ème espèce)*
La fraction rationnelle $F = \frac{R}{B}$ se décompose de manière unique sous la forme

$$F = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j} + \sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{\beta_k} \frac{b_{k,l}X + c_{k,l}}{(X^2+p_kX+q_k)^l},$$

avec $a_{i,j}$, $b_{k,l}$ et $c_{k,l}$ des nombres réels.

Exemple 3.2.3

Considérons la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{X^2(X^2+1)}.$$

Le polynôme X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$ car son discriminant $\Delta < 0$. La décomposition donne

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

On doit chercher les quatre constantes a, b, c et d.
On multiplie F par X^2 pour avoir

$$X^2.F = \frac{1}{X^2+1} = aX + b + \frac{X^2(cX+d)}{X^2+1}.$$

On remplace X par 0 ; on a $b = 1$.
La fonction F est paire donc $F(-X) = F(X)$; cela implique que

$$-\frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{-cX+d}{X^2+1} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

L'unicité de la décomposition donne

$$\begin{cases} -a &= a \\ c &= -c. \end{cases}$$

Donc $a = 0$ et $c = 0$.
En remplaçant a, b et c par leurs valeurs, on obtient

$$F = \frac{1}{X^2} + \frac{d}{X^2+1}.$$

Si on attribue à X la valeur 1, on obtient $F(1) = 1/2 = 1+\frac{d}{2}$, qui donne $d = -1$.
On conclut que

$$F = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^2+1}.$$

Détermination des coefficients

Pour les éléments simples du 1-ère espèce, on obtient le coefficient $a_{i,j}$ de $(X-\alpha_i)^j$ en multipliant les deux parties de la décomposition par $(X-\alpha_i)^j$, puis on remplace X par α_i. On obtient les autres coefficients en donnant à X des valeurs autres que les pôles.
Il est aussi utile d'utiliser autres propriétés, par exemple la parité de la fraction rationnelle.

Exemple 3.2.4

Décomposons en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle

$$F = \frac{8}{(X^2-1)(X^2+1)^2}.$$

On remarque que $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ et que X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$ car son discriminant $\Delta < 0$. Ainsi

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2}.$$

La fonction F est paire, donc $F(-X) = F(X)$, ainsi

$$\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2} = -\frac{a}{X+1} - \frac{b}{X-1} + \frac{-cX+d}{X^2+1} + \frac{-eX+f}{(X^2+1)^2}.$$

L'unicité de la décomposition implique que $-a = b$, $c = -c$ et $e = -e$; donc $c = e = 0$. Par conséquent

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{-a}{X+1} + \frac{d}{X^2+1} + \frac{f}{(X^2+1)^2}.$$

Maintenant, on multiplie la dernière expression par $X-1$; on a

$$(X-1)F = a - \frac{a(X-1)}{X+1} + \frac{d(X-1)}{X^2+1} + \frac{f(X-1)}{(X^2+1)^2}.$$

Si on donne à X la valeur 1, on trouve $a = 1$.
De même, on multiplie le même expression par $(X^2+1)^2$, puis on remplace X par i ; on trouve $f = -4$.
On prend $X = 0$, on a $-8 = -2a + d + f$, qui donne $d = -2$.
On conclut que

$$F = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} - \frac{2}{X^2+1} - \frac{4}{(X^2+1)^2}.$$

3.2.3 Application de la décompositon

La décomposition d'une fraction rationnelle fournit une forme qui un grand intérêt pour effectuer certaines opérations : dérivation à l'ordre n, recherche d'une primitive, développement...

Exemple 3.2.5

Simplifions l'expression

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}.$$

Il est facile d'avoir la décomposition suivante :

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}.$$

On a

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exemple 3.2.6

Calculons $\int \frac{1}{X^3+1}\,dX$.
La décomposition sur $\mathbb{R}[X]$ de cette fraction donne

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3}.\frac{1}{X+1} - \frac{1}{6}.\frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{1}{2}.\frac{1}{X^2-X+1}.$$

Ainsi

$$\int \frac{1}{X^3+1}\,dX = \frac{1}{3}\ln|X+1| - \frac{1}{6}\ln|X^2-X+1| + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{X^2-X+1}dX}_{I}.$$

La valeur de I est

$$I = \frac{4}{3}\int \frac{dX}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(X-\frac{1}{2})\right]^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(X-\frac{1}{2})\right].$$

Par conséquent

$$\int \frac{1}{X^3+1}\,dX = \frac{1}{3}\ln|X+1| - \frac{1}{6}\ln|X^2-X+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(X-\frac{1}{2})\right].$$

3.3 Exercices

Exercice 1. Décomposer les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$X^4+4,\quad X^6+27,\quad X^3-1,\quad X^2+X-2.$$

Exercice 2. Décomposer les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^3 - 1, \quad X^4 + X^2 + 1.$$

Exercice 3. Soit le polynôme

$$P(X) = X^5 + 3X^4 + 3X^3 + X^2.$$

1) Vérifier que -1 et 0 sont deux racines de $P(X)$ et donner leurs multiplicités.
2) Factoriser $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$, les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(X) = \frac{X}{(X-1)^3(X-2)}, \quad F_2(X) = \frac{X^4+1}{(X+1)(X+2)},$$

$$F_3(X) = \frac{X^3+X+3}{(X^2+X+1)^2}, \quad F_4(X) = \frac{3X+2}{(X+1)^2(X^2+2X+5)}.$$

Exercice 5. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(X) = \frac{1}{X^3-1}, \quad F_2(X) = \frac{1}{X^n-1}, \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Chapitre 4

Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans ce chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.

4.1 Espaces vectoriels

4.1.1 Définition

On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, un ensemble E muni d'une loi de composition interne notée $(+)$, et d'une loi de composition externe notée $(.)$ telles que :
- Des propriétés pour la loi interne $(+)$: $\forall x, y, z \in E$,
  . $x + y = y + x$;
  . $(x + y) + z = x + (y + z)$;
  . $x + 0 = x$;
  . $x + (-x) = 0$.
- Des propriétés pour la loi externe $(.)$: $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
  . $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$;
  . $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$;
  . $(\lambda\mu).x = \lambda(\mu.x)$;
  . $1.x = x$.

Exemple 4.1.1
$\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Posons $E = \mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
Soit les deux lois définies sur E par

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\lambda.(x_1, y_1) = (\lambda.x_1, \lambda.y_1),$$

avec $\lambda, x_i, y_i \in \mathbb{K}$.
Il est simple de vérifier que $E = \mathbb{K}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

4.1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 4.1.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*
(i) $F \neq \emptyset$;
(ii) $\forall x, y \in F : x + y \in F$;
(iii) $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda.x \in F$.

Remarque 4.1.1
On peut rassembler les deux conditions (ii) et (iii) en une seule condition qui est

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \lambda.x + \mu.y \in F.$$

Exemple 4.1.2
$F = \{(x, 0) \ : \ x \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{K}^2$. En effet
(i) $F \neq \emptyset$ car $(0, 0) \in F$;
(ii) $(x, 0)$ et $(y, 0) \in F$; on a

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \in F \ ;$$

(iii) $(x, 0) \in F, \lambda \in \mathbb{K}$; on a

$$\lambda.(x, 0) = (\lambda.x, 0) \in F.$$

Proposition 4.1.1. *L'intersection d'une famille quelconque $\{F_i\}_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.*

Remarque 4.1.2
Cependant, leur réunion $\bigcup_{i\in I} F_i$ n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E.

4.1.3 Base d'un espace vectoriel

Définition 4.1.2. *(Combinaison linéaire)*
Soient E un espace vectoriel et $x \in E$. On dit que x est une combinaison linéaire d'une famille $\{x_1, \ldots, x_n\}$ d'éléments de E s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Définition 4.1.3. *(Famille libre)*
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une famille finie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ d'éléments de E est libre (ou bien ses éléments sont linéairement indépendants) si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \ : \ \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Définition 4.1.4. *(Famille liée)*
Une famille $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est dite liée (ou bien ses éléments sont linéairement dépendants) s'il existe des λ_i non tous nuls tels que la relation

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

soit vérifiée.

Exemple 4.1.3
$E = \mathbb{K}^2$ espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La famille $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est libre.
En effet, considérons $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$; on a

$$\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) = (0, 0) \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Remarque 4.1.3
Toute famille finie contenant l'élément 0 est liée.

Définition 4.1.5. *(Famille génératrice)*
Une famille $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (avec $x_i \in E$) est dite génératrice de E si tout élément x de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$, i.e. il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Exemple 4.1.4
$E = \mathbb{K}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $(x, y) \in E$. Il est clair que $(x, y) = x.(1, 0) + y.(0, 1)$. Ainsi, $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est une famille génératrice de E.

Définition 4.1.6. *(Base d'un espace vectoriel)*
Une famille $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Remarque 4.1.4
Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une base alors tout élément x de E s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$, i.e. il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ uniques tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.
Les éléments $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ s'appellent les coordonnées de x dans la base $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Définition 4.1.7. *(Dimension)*
On appelle dimension d'un espace vectoriel E, le cardinal (nombre d'éléments) d'une base quelconque de E.

Exemple 4.1.5
$E = \mathbb{K}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La famille $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est une base de E, qui s'appelle base canonique de E. Puisque son cardinal est 2, donc $\dim E = 2$.

Propriété 4.1.1. *Dans un espace vectoriel E de dimension n, toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.*

4.1.4 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 4.1.8. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On définit la somme de F et G par*
$$F + G = \{x + y \ : \ x \in F, y \in G\}.$$
Cet ensemble $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E ; c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F \bigcup G$.

Définition 4.1.9. *(Somme directe)*
Dans le cas particulier où $F \bigcap G = \{0\}$, on dit que $F + G$ est la somme directe de F et G, et on utilise la notation $F \bigoplus G$. Dans cette situation, tout élément z de $F \bigoplus G$ s'écrit de façon unique comme somme de deux éléments de F et G, i.e.
$$z = x + y, \quad \text{avec} \ \ x \in F, \ y \in G.$$

Définition 4.1.10. *(Sous-espaces supplémentaires)*
Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont dits supplémentaires si $E = F \bigoplus G$.

Proposition 4.1.2. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors*

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \bigcap G).$$

Remarque 4.1.5
Si F et G sont supplémentaires, alors

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

4.2 Applications linéaires

Définition 4.2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si*
(i) $\forall x, y \in E : f(x+y) = f(x) + f(y)$ *;*
(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Remarque 4.2.1
Si on rassemble les deux conditions de la définition, on écrit

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Remarque 4.2.2
On adopte les appellations suivantes :
- Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme ;
- Si $E = F$, on dit que f est un endomorphisme ;
- Si $E = F$ et f est bijective, on dit que f est un automorphisme.

Propriété 4.2.1. *(i) Si $f : E \to F$ est linéaire, alors $f(0) = 0$ et $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$, avec $\lambda_i \in \mathbb{K}, x_i \in E, n \in \mathbb{N}^*$;*
(ii) La composée de deux applications linéaires est une application linéaire ;
(iii) Si f est un isomorphisme alors f^{-1} l'est aussi.

Remarque 4.2.3
On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F. Cet ensemble est muni de deux lois suivantes :
- une loi interne $(+)$: $f, g \in \mathcal{L}(E, ; F) : (f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- une loi externe $(.)$: $f \in \mathcal{L}(E, F), \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda f)(x) = \lambda . f(x)$.

Il est facile de montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 4.2.2. *(Noyau et image)*
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
(i) On appelle noyau de f, et on note $\ker f$, l'ensemble $\{x \in E \ : \ f(x) = 0\}$;
(ii) On appelle image de f, et on note $\mathrm{Im}\ f$, l'ensemble $\{f(x) : x \in E\}$.

Proposition 4.2.1. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors*

(i) $\ker f$ *et* $\mathrm{Im}\ f$ *sont deux sous-espaces vectoriels de* E *et* F*, respectivement ;*
(ii) Si $\dim(E)$ *est finie, alors* $\dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im}\ f)$ *;*
(iii) f *est injective* $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0\}$ *;*
(iv) f *est surjective* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\ f = F$.

Définition 4.2.3. *(Rang)*
Soit $f : E \to F$ *une application linéaire. On appelle rang de* f*, la dimension de* $\mathrm{Im}\ f$*. On a*

$$rg(f) = \dim(\mathrm{Im}\ f).$$

Remarque 4.2.4

Les conséquences suivantes sont évidentes :
- $rg(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$;
- $rg(f) = \dim(E) \quad \Leftrightarrow f$ est injective ;
- $rg(f) = \dim(F) \quad \Leftrightarrow f$ est surjective.

Matrice d'une application linéaire :

Soient E et F deux espaces vectoriels finis, avec $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = m$. Considérons $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $B' = \{f_1, \ldots, f_m\}$ une base de F.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Pour $j = 1, \ldots, n$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} f_i$, avec $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$.
La matrice $M = (\lambda_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ s'appelle la matrice associée à f dans la base B et B'. Elle a la forme

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \ldots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}.$$

Une colonne j représente les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base B'.
Soit $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} f_i \right).$$

Posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

L'écriture matricielle de $f(x) = y$ est $MX = Y$.

Exemple 4.2.1

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = (x, 3y, x + y). \end{array}$$

$B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ et $B' = \{f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1)\}$ sont les deux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, respectivement. On a

$$f(e_1) = (1, 0, 1) = f_1 + f_3, \quad f(e_2) = (0, 3, 1) = 3f_2 + f_3.$$

La matrice de f dans les deux bases B et B' est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; on a $f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

4.3 Exercices

Exercice 1. Soit l'ensemble

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y = 0, \ x + z + t = 0\}.$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2) Prouver que $\{(1, 1, 0, -1), \ (0, 0, 1, -1)\}$ est une famille génératrice de E.

Exercice 2. La famille $\{u = (1, 1, -4), v = (3, -1, -4), w = (1, 2, 6)\}$ est-elle libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x \ , \ y \ , \ z) = (ax + y \ , \ y + az), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f est linéaire et déterminer son noyau. f est-elle injective ?

Exercice 4. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ représentée dans les bases canoniques par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donner l'image d'un vecteur quelconque X de $\mathbb{R}^3$ par f.

Exercice 5. Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leurs noyaux et leurs images, et déterminer leurs matrices dans les bases canoniques des espaces vectoriels concernés :
(i) $f \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par $f(x, y) = (2x - 3y, x + y)$;
(ii) $g \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, définie par $f(x, y) = (2x - y, x + y, x - y)$;
(iii) $h \ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, définie par $f(x, y, z) = (x + y, y - z)$.

Chapitre 5

Eléments de la théorie des ensembles

5.1 Opérations sur les ensembles

On appelle ensemble une collection d'objets ou d'éléments. Un élément x appartient à un ensemble E s'écrit symboliquement $x \in E$; la négation s'écrit $x \notin E$.

5.1.1 Parties d'un ensemble

E étant un ensemble. Un ensemble A est dit une partie de E ou un sous-ensemble de E si tous ses éléments appartiennent à E ; on écrit $A \subset E$.
L'ensemble des parties de E est noté $P(E)$. Les deux ensembles $\emptyset$ et E sont deux éléments de $P(E)$.

Propriété 5.1.1. *Si $Card(E) = n$ alors $Card[P(E)] = 2^n$.*

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On définit les parties suivantes de E :

- Complémentaire : On appelle complémentaire de A dans E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A ; on le note $\bar{A}$ ou C_E^A ;
- Différence : On appelle différence de A et B, notée A/B, l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B ;
- Réunion : On appelle réunion de A et B l'ensemble, noté $A \bigcup B$, des éléments appartenant à A ou B ;
- Intersection : On appelle intersection de A et B l'ensemble, noté $A \bigcap B$, des éléments appartenant à la fois à A et à B ;
- Différence symétrique : On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble, noté $A \triangle B$, des éléments de E qui appartiennent soit à A soit à B, sans appartenir simultanément à A et à B. Il est facile de voir que

$$A \triangle B = (A/B) \cup (B/A) = (A \cup B)/(A \cap B).$$

Les opérations de réunion et d'intersection ont les propriétés suivantes :

- Commutativité : $A \bigcap B = B \bigcap A$ et $A \bigcup B = B \bigcup A$;
- Associativité : $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$ et $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$;
- Distributivité : $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$ et $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$;
- Loi de Morgan[1] : $\overline{A \bigcap B} = \bar{A} \bigcup \bar{B}$ et $\overline{A \bigcup B} = \bar{A} \bigcap \bar{B}$.

[1] Auguste De Morgan (1806-1871) est un mathématicien anglais.

5.1.2 Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F, dans cet ordre, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$. Symboliquement

$$E \times F = \{(x, y) : \quad x \in E, \quad y \in F\}.$$

On peut généraliser cette construction à un nombre fini d'ensembles selon le schéma suivant : étant donné n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$; leur produit cartésien est l'ensemble défini par

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \quad x_i \in E_i, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

On note $E \times E = E^2$, et plus généralement $E \times E \times \ldots \times E = E^n$.

Propriété 5.1.2. $Card(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \ldots \times Card(E_n)$.

5.2 Application

Etant donné deux ensembles E et F, une application f de E vers F est une correspondance qui associe à chaque élément x de E un élément y de F. On note

$$\begin{aligned} f : \quad & E \to F \\ & x \mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

y s'appelle l'image de x par f et x s'appelle l'antécédent de y par f.

– Image d'une partie : Soient $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. L'image de A par f est la partie de F notée $f(A)$ qui est formée des images de tous les éléments de A. Symboliquement

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

– Image réciproque d'une partie : Soient $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. L'image réciproque de B par f est la partie de E notée $f^{-1}(B)$ qui est formée des antécédents de tous les éléments de B. Symboliquement

$$f^{-1}(B) = \{f^{-1}(x) : x \in B\}.$$

– Injectivité : Une application $f : E \to F$ est dite injective si deux éléments distincts de E ont deux images distinctes, ou encore si chaque élément de F a au plus un antécédent dans E. Symboliquement

$$x, x' \in E \quad : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'),$$

ou encore, par contraposée,

$$x, x' \in E \quad : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

– Surjectivité : Une application $f : E \to F$ est dite surjective si chaque élément de F a au moins un antécédent dans E. Symboliquement

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x).$$

– Bijectivité : Une application $f : E \to F$ est dite bijective si chaque élément de F a exactement un seul antécédent dans E, ce qui revient à dire que f est injective et surjective.

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x).$$

Dans ce cas, on peut définir l'application réciproque, notée f^{-1} de F vers E telle que

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \quad x \in E, y \in F.$$

5.3 Relation dans un ensemble

Soient E et F deux ensembles. Une relation R entre les éléments de E et F est une partie G de $E \times F$. On dit que x est en relation avec y et on note xRy si et seulement si $(x, y) \in G$.
Dans le cas où $E = F$, on dit que R est une relation binaire dans E.

Définition 5.3.1. *On dit qu'une relation binaire R est une relation d'équivalence si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*
- *Réflexivité : $\forall x \in E : xRx$;*
- *Symétrie : $\forall x, y \in E$: si xRy alors yRx ;*
- *Transitivité : $\forall x, y, z \in E$: si xRy et yRz alors xRz.*

Exemple 5.3.1
- L'égalité sur un ensemble quelconque de nombres (entiers, rationnels, réels, complexes) est une relation d'équivalence.
- Le parallélisme sur un ensemble de droites dans un plan est une relation d'équivalence.

Définition 5.3.2. *Soit $a \in E$. On appelle classe d'équivalence de a par une relation d'équivalence R, le sous-ensemble de E défini par $\{x \in E : xRa\}$.*
On appelle ensemble quotient de E par R l'ensemble des classes d'équivalences ; on le note E/R.

Définition 5.3.3. *On appelle relation de préordre sur un ensemble E une relation binaire sur E qui est à la fois réflexive et transitive.*

Définition 5.3.4. *Une relation binaire R sur E est dite relation d'ordre sur E si elle est à la fois réflexive et antisymétrique, i.e. pour tout $x, y \in E$: si xRy et yRx alors $x = y$.*
Elle est dite d'ordre total si deux éléments quelconques x et y de E sont comparables par cette relation, i.e. si on a xRy ou yRx. Dans le cas contraire, elle est dite partielle.

Exemple 5.3.2
- La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des entiers, sur l'ensemble des rationnels et sur l'ensemble des réels.
- La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive.

Exemple 5.3.3
- L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre $\leq$ est totalement ordonné.
- L'ensemble des entiers naturels muni de la relation de divisibilité est partiellement ordonné.

5.4 Exercices

Exercice 1. Soient les deux applications suivantes : $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$, et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = E(\frac{n}{2})$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
Les fonctions f et g sont-elles injectives ? surjectives ?

Exercice 2. Soit R la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1) Montrer que R est une relation d'équivalence.
2) Déterminer la classe d'équivalence de x, pour tout réel x.
3) Déterminer l'ensemble quotient.

Correction des exercices d'Algèbre

Le présent chapitre présente les solutions des exercices proposés dans les divers chapitres de la partie Algèbre du livre.

Correction des exercices du Chapitre 1

Solution 1. Les formats des deux matrices sont $(3,2)$ et $(2,4)$. Le produit est égal à

$$\begin{pmatrix} -3 & 16 & -3 & 11 \\ 23 & 13 & -10 & 0 \\ 26 & -3 & -7 & -11 \end{pmatrix}.$$

Solution 2.

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

(Développement par rapport à la 1-ère colonne)

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\det(B) = 2$, donc $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution 3. Montrons le résultat par récurrence :

- Pour $n = 1$, le résultat est vrai ;
- Supposons que le résultat est vrai pour n, i.e.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

- Montrons que le résultat est vrai pour $n+1$, i.e.

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  On a

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 4. On a

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observons que $A^3 = I + 3A$, donc $a = 0$, $b = -3$ et $c = -1$.
On a $A^3 - 3A = I$, ou encore $A(A^2 - 3I) = I$. Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = A^2 - 3I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction des exercices du Chapitre 2

Solution 5. **"Méthode d'élimination de Gauss"**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 & (E_1) \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 & (E_2) \\ 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 3 & (E_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 & (E_1) \\ \frac{11}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 5 & (E_2 \leftarrow E_2 - \frac{3}{2}E_1) \\ - x_2 - 4x_3 = -5 & (E_3 \leftarrow E_3 - 2E_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ \frac{11}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ - \frac{45}{11}x_3 = -\frac{45}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

L'unique solution est $(3, 1, 1)$.
"Méthode des déterminants "

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -45$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -6 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 3 \ , \ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 4 & 3 & -6 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 1.$$

Solution 6. La matrice A associée à (S) a le format $(3, 5)$ et s'écrit comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $rg(A) \leq \min(3, 5) = 3$. On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Donc $rg(A) = 3$.
Δ est le déterminant principal. x_1, x_2 et x_3 sont les inconnus principaux, et x_4 et x_5 sont les paramètres.
Le système (S) s'écrit

$$(S) : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = - x_4 + x_5 & (E_1) \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = - 2x_4 + x_5 & (E_2) \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = x_4 - 2x_5 & (E_3) \end{cases}$$

On va déterminer x_1, x_2 et x_3 en fonction de x_4 et x_5 par la méthode d'élimination de Gauss.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -x_4 + x_5 & (E_1) \\ x_2 = -x_5 & (E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1) \\ 2x_2 + 2x_3 = 2x_4 - 3x_5 & (E_3 \leftarrow E_3 - E_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -x_4 + x_5 & (E_1) \\ x_2 = -x_5 & (E_2) \\ 2x_3 = 2x_4 - x_5 & (E_3 \leftarrow E_3 - 2E_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 = -x_5 \\ x_3 = x_4 - \frac{1}{2}x_5 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\{(-2x_4 + \frac{1}{2}x_5, -x_5, x_4 - \frac{1}{2}x_5, x_4, x_5) \ : \ x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Solution 7. Le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 & (E_1) \\ & & & & & & x_4 & = & 1 & (E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1) \\ & & & & & & 0 & = & a, & (E_3 \leftarrow E_3 - 3E_1). \end{array}\right.$$

- Si $a \neq 0$, alors le système n'a pas de solution.
- Si $a = 0$, le système s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

Les solutions de ce système sont de la forme

$$\{(x_1, x_2, 1 - 3x_1 - 4x_2, 1) \ : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Solution 8. Le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 3 & (E_1) \\ & & x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0 & (E_2 \leftarrow E_2 + E_1) \\ & & 3x_2 & - & 6x_3 & + & 3x_4 & = & -6 & (E_3 \leftarrow E_3 - 2E_1) \\ & & 2x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & -3 & (E_4 \leftarrow E_4 - 3E_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 3 & (E_1) \\ & & x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -2 & (E_3 \leftarrow \frac{1}{3}E_3) \\ & & 2x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & -3 & (E_4) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 3 & (E_1) \\ & & x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ & & & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -2 & (E_3 \leftarrow E_3 - E_2) \\ & & & - & 4x_3 & + & 5x_4 & = & -3 & (E_4 \leftarrow E_4 - 2E_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 3 & (E_1) \\ & & x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ & & & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -2 & (E_3) \\ & & & & & - & x_4 & = & 1 & (E_4 \leftarrow E_4 - 2E_3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & -2 \\ x_3 & = & -\frac{1}{2} \\ x_4 & = & -1 \end{array}\right.$$

Correction des exercices du Chapitre 3

Solution 9.

- $X^4 + 4 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2)$; les deux polynômes sont irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$, car leurs discriminants sont inférieurs strictement à 0.
- $X^6 + 27 = (X^2 + 3)(X^4 - 3X^2 + 9) = (X^2 + 3)[(X^2 + 3)^2 - 9X^2]$
$= (X^2 + 3)(X^2 + 3X + 3)(X^2 - 3X + 3)$.
- $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$
($X - 1$ est irréductible, car son degré est égal à 1 et $X^2 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$, car son discriminant Δ est inférieur strictement à 0).
- $X^2 + X - 2 = (X + 2)(X - 1)$. (Les deux racines sont -2 et 1)

Solution 10.

- Sur $\mathbb{C}[X]$, les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1. On a

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1).$$

Il reste à factoriser $X^2 + X + 1$. On a $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$, donc les racines complexes sont $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. Ainsi

$$X^3 - 1 = (X-1)\left(X - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right).$$

-

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + 1 &= (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2+X+1)(X^2-X+1) \\ &= \left(X - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) \\ &\quad \times \left(X - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(X - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right). \end{aligned}$$

Solution 11. On a $P(-1) = 0, P(0) = 0$. Les dérivées successives de P sont $P'(X) = 5X^4 + 12X^3 + 9X^2 + 2X$, $P''(X) = 20X^3 + 36X^2 + 18X + 2$, $P^{(3)}(X) = 60X^2 + 72X + 18$.
On a $P(-1) = P'(-1) = P''(-1) = 0$ et $P^{(3)}(-1) = 6 \neq 0$, donc la multiplicité de -1 est 3.
On a $P(0) = P'(0) = 0$ et $P''(0) = 2 \neq 0$, donc la multiplicacité de 0 est 2.
Le polynôme $P(X)$ est divisible par $(X+1)^3\, X^2$. En fait, il y a une égalité : $P(X) = (X+1)^3\, X^2$.

Solution 12.

- La partie entière de F_1 est 0. La décomposition s'écrit

$$F_1(X) = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)} + \frac{d}{X-2}.$$

  On remplace X par 2 dans $(X-2).F_1(X)$ pour avoir $d = 2$. On remplace X par 1 dans $(X-1)^3.F_1(X)$ pour avoir $a = -1$.

  On calcule $\lim_{X\to+\infty} X.F_1(X)$ pour avoir $c + d = 0$, donc $c = -2$.

  On calcule $F_1(0) = -a + b - c - \frac{d}{2}$, donc $b = -2$.

  La décomposition est

$$F_1(X) = \frac{-1}{(X-1)^3} + \frac{-2}{(X-1)^2} + \frac{-2}{(X-1)} + \frac{2}{X-2}.$$

- Pour F_2, la partie entière n'est pas nulle car $\deg(X^4+1) > \deg((X+1)(X+2))$. La division euclidienne donne

$$F_2(X) = X^2 - 3X + 7 + \frac{-15X-13}{(X+1)(X+2)}.$$

  la partie entière de F_2 est $X^2 - 3X + 7$. Il reste à décomposer la fraction $\frac{-15X-13}{(X+1)(X+2)}$ qui s'écrit

$$\frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+2}.$$

  On trouve $a = 2$ et $b = -17$. Ainsi

$$F_2(X) = X^2 - 3X + 7 + \frac{2}{X+1} - \frac{17}{X+2}.$$

- La décomposition de F_3 est

$$F_3(X) = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{cX+d}{(X^2+X+1)^2}.$$

  On a $\lim_{X\to+\infty} X.F_3(X) = 1 = a$, donc $a = 1$.
  Or

$$\begin{cases} F_3(0) &= 3 = b + d \\ F_3(1) &= \frac{5}{9} = \frac{a+b}{3} + \frac{c+d}{9} \\ F_3(-1) &= 1 = -a + b - c + d \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} b+d &= 3 \\ 3(a+b)+c+d &= 5 \\ -a+b-c+d &= 1 \\ a &= 1 \end{cases}$$

On trouve $b=-1$, $c=1$ et $d=4$.
La décomposition est

$$F_3(X)=\frac{X-1}{X^2+X+1}+\frac{X+4}{(X^2+X+1)^2}.$$

- La décomposition de F_4 s'écrit

$$F_4(X)=\frac{a}{(X+1)^2}+\frac{b}{X+1}+\frac{cX+d}{X^2+2X+5}.$$

On remplace X par -1 dans $(X+1)^2.F_4(X)$ pour avoir $a=-1/4$. Aussi, on trouve que $b=3/4$.
On a $\lim_{X\to+\infty} X.F_4(X)=0=b+c$, donc $c=-b$, qui donne $c=-3/4$.
On a $F_4(0)=\frac{2}{5}=a+b+\frac{d}{5}$, donc $d=-1/2$.
La décomposition de F_4 est

$$F_4(X)=\frac{-\frac{1}{4}}{(X+1)^2}+\frac{\frac{3}{4}}{X+1}+\frac{-\frac{3}{4}X-\frac{1}{2}}{X^2+2X+5}.$$

Solution 13.

- $$X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)=(X-1)(X-j)(X-\overline{j}),$$

où $\overline{j}$ est le conjugué de j. La décomposition de F_1 s'écrit

$$F_1(X)=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-j}+\frac{c}{X-\overline{j}}.$$

On trouve $a=1/3$, $b=j/3$ et $c=\overline{j}/3$.
Remarquons que, sur $\mathbb{R}$, la décomposition de F_1 prend la forme

$$F_1(X)=\frac{\frac{1}{3}}{X-1}+\frac{-\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2+X+1}.$$

- Le dénominateur X^n-1 admet n racines distinctes, ce sont les racines n-èmes de 1 : $z_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k=0,1,\dots,n-1$.
La décomposition de F_2 est

$$F_2(X)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{X-z_k}.$$

On trouve $a_k=\frac{z_k}{n}$, pour $k=0,1,\dots,n-1$.
On conclut que

$$F_2(X)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}.$$

Correction des exercices du Chapitre 4

Solution 14.

1) $E\neq 0$ car $(0,0,0,0)\in E$. Soient (x,y,z,t) et $(x',y',z',t')\in E,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$; on a

$$\lambda(x,y,z,t)+\mu(x',y',z',t')=(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z',\lambda t+\mu t).$$

Pour qu'il appartient à E, il faut vérifier les deux conditions suivantes :
Première condition : $(\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y')=0$, i.e $\lambda(x-y)+\mu(x'-y')=0$; cela

est vrai car $x-y=0$ et $x'-y'=0$.
Deuxième condition : $(\lambda x+\mu x')+(\lambda z+\mu z')+(\lambda t+\mu t')=0$, i.e. $\lambda(x+z+t)+\mu(x'+z'+t')=0$; cela est vrai car $x+z+t=0$ et $x'+z'+t'=0$.
On conclut que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

2) Soit $(x,y,z,t)\in E$; on a

$$(x,y,z,t)=(x,x,z,-x)=x(1,1,0,-1)+z(0,0,1,-1).$$

Solution 15. Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$. Montrons que si $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0$, alors $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.
On a $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda_1&+&3\lambda_2&+&\lambda_3&=&0\\ \lambda_1&-&\lambda_2&+&2\lambda_3&=&0\\ -4\lambda_1&-&4\lambda_2&+&6\lambda_3&=&0.\end{array}\right.$$

La résolution de ce système donne $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Le système est alors libre.
Pour montrer que la famille est génératrice, considérons $x,y,z\in\mathbb{R}$ et montrons qu'il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $(x,y,z)=au_1+bu_2+cu_3$. Cette dernière écriture est équivalente à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl}a&+&3b&+&c&=&x\\ a&-&b&+&2c&=&y\\ -4a&-&4b&+&6c&=&z\end{array}\right.$$

On trouve $a=\frac{1}{48}(-2x+22y-7z)$, $b=\frac{1}{48}(14x-10y+z)$ et $c=\frac{1}{12}(2x+2y+z)$ (des écritures en fonction de x, y et z). On conclut que la famille est génératrice.

Solution 16. L'application f est linéaire car

$$f[\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')]=\lambda f(x,y,z)+\mu f(x',y',z').$$

On a $\ker f=\{(x,y,z)\ :\ f(x,y,z)=0\}$, i.e. $ax+y=0$ et $y+az=0$.
- Si $a\neq 0$: $y=-ax$ et $z=\frac{-y}{a}=x$ (en fonction de x).
  $\ker f=\{(x,-ax,x)\ :\ x\in\mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel engendré par $(1,-a,1)$, donc sa dimension est 1.
- Si $a=0$: $\ker f=\{(x,0,z)\ :\ x,z\in\mathbb{R}\}$ est engendré par $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$, donc il est de dimension 2.

Dans les deux cas f n'est pas injective.

Solution 17. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$; son image est

$$f(X)=MX=M.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&2\\3&2&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+y+2z\\3x+2y+4z\end{pmatrix}.$$

Solution 18.

(i) L'application f est linéaire car

$$f[\lambda(x,y)+\mu(x',y')]=\lambda f(x,y)+\mu f(x',y').$$

On a $\ker f=\{(x,y)\ :\ f(x,y)=0\}$, i.e. $2x-3y=0$ et $x+y=0$, qui donnent $x=0$ et $y=0$. Donc $\ker f=\{(0,0)\}$, qui implique que f est injective.
On a $\dim(\ker f)=0$, et puisque $\dim(\ker f)+\dim(\mathrm{Im}\ f)=\dim(\mathbb{R}^2)=2$, alors $\dim(\mathrm{Im}\ f)=2$. Ainsi $\mathrm{Im}\ f=\mathbb{R}^2$, et f est surjective.
La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $B=(e_1,e_2)$, avec $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$. On a

$$f(e_1)=(2,1)=2e_1+e_2,\quad f(e_2)=(-3,1)=-3e_1+e_2.$$

La matrice de f dans la base B est $\begin{pmatrix}2&-3\\1&1\end{pmatrix}$;

(ii) L'application g est linéaire car

$$g[\lambda(x,y)+\mu(x',y')] = \lambda g(x,y) + \mu g(x',y').$$

On a $\ker g = \{(x,y) \; : \; g(x,y)=0\}$, i.e. $2x-y=0$, $x+y=0$ et $x-y=0$, qui donnent $x=0$ et $y=0$. Donc, $\ker g = \{(0,0)\}$, qui implique que g est injective. Im g est le plan vectoriel d'équation $2X-Y-3Z=0$ ayant pour base les vecteurs $(1,2,0)$ et $(0,-3,1)$. Ainsi $\dim(\text{Im } g)=2$, et g n'est pas surjective.
La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $B=(e_1,e_2)$, avec $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $B'=(f_1,f_2,f_3)$, avec $f_1=(1,0,0)$, $f_2=(0,1,0)$ et $f_3=(0,0,1)$. On a

$$g(e_1)=(2,1,1)=2f_1+f_2+f_3, \quad g(e_2)=(-1,1,-1)=-f_1+f_2-f_3.$$

La matrice de g dans les bases B et B' est $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

(iii) L'application h est linéaire car

$$h[\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')] = \lambda h(x,y,z) + \mu h(x',y',z').$$

On a $\ker h = \{(x,y,z) \; : \; h(x,y,z)=0\}$, i.e. $x+y=0$ et $x-y=0$. Donc, $\ker h$ est la droite vectorielle de support le vecteur $(-1,1,1)$, qui implique que h n'est pas injective.
On a $\dim(\ker h)=1$, et puisque $\dim(\ker h)+\dim(\text{Im } h)=\dim(\mathbb{R}^3)=3$, alors $\dim(\text{Im } h)=2$. Ainsi, h est surjective.
La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $B=(e_1,e_2,e_3)$, avec $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $B'=(f_1,f_2)$, avec $f_1=(1,0)$ et $f_2=(0,1)$. On a

$$h(e_1)=(1,0)=f_1, \quad h(e_2)=(1,1)=f_1+f_2, \quad h(e_3)=(0,-1)=-f_3.$$

La matrice de h dans les bases B et B' est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction des exercices du Chapitre 5

Solution 19. Il est bien clair que f et g sont deux applications, car elles font correspondre à chaque entier n les deux images $2n$ et $E(\frac{n}{2})$, respectivement.

- Soient $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $f(n)=f(n')$. Alors $2n=2n'$, donc $n=n'$. On conclut que f est injective.
  L'entier naturel 3 n'est pas le double d'un entier naturel : il n'existe aucun entier naturel n vérifiant $f(n)=2n=3$. Donc f n'est pas surjective.
- Tout entier naturel n est la partie entière de la moitié de l'entier naturel $2n$. Donc g est surjective.
  La partie entière de la moitié de 2 et de 3 est la même, $g(2)=g(3)$, avec $2 \neq 3$. Ainsi g n'est pas injective.

Solution 20. 1) La relation R est bien une relation d'équivalence, en effet :

- Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}$; on a $x^2-x^2=0=x-x$, donc xRx. La relation est réflexive.
- Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que xRy ; on a

$$y^2-x^2=-(x^2-y^2)=-(x-y)=y-x.$$

  Donc $xRy \Rightarrow yRx$. La relation est symétrique.
- Transitivité. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que xRy et yRz ; on a

$$x^2-z^2=(x^2-y^2)+(y^2-z^2)=(x-y)+(y-z)=x-z.$$

  Donc xRy et $yRz \Rightarrow xRz$. La relation est transitive.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence x modulo R est l'ensemble des nombres réels y vérifiant la relation $x^2-y^2=x-y$, i.e. $(x-y)(x+y)=(x-y)$, ou encore $(x-y)(x+y-1)=0$. Cette équation (en y) possède deux solutions x et $1-x$.

La classe d'équivalence de x est l'ensemble $\{x, 1-x\}$, qui se réduit à un seul élément lorsque $x = \frac{1}{2}$.
3) L'ensemble quotient est un ensemble de représentants des classes d'équivalence. Comme les classes d'équivalences sont formées, en général, de deux nombres réels symétriques par rapport à $\frac{1}{2}$, on peut prendre pour ensemble quotient l'intervalle fermé $[\frac{1}{2}, +\infty[$. L'intervalle doit être fermé pour inclure le seul représentant de la classe d'équivalence de $\frac{1}{2}$.
L'ensemble quotient de $\mathbb{R}$ modulo R est l'intervalle fermé $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 6

Formule de Taylor et développement limité

6.1 Formule de Taylor

Soit f une fonction dérivable en un point x_0. On sait que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Il existe alors une fonction $\varepsilon(x)$ telle que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x),$$

au voisinage de x_0 (i.e. $x \simeq x_0$), avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
Ainsi f peut être approximée, au voisinage de x_0, par le polynôme de degré 1 (en x)

$$x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

La formule de Taylor[1] généralise ce résultat, en montrant qu'une fonction f, n-fois dérivable, peut être approximée par un polynôme de degré n au voisinage de x_0. Plus précisément, cette approximation est

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) \\ &\quad + R_n(x), \end{aligned}$$

avec $\lim_{x \to x_0} R_n(x) = 0$.

6.1.1 Formule de Taylor avec différents restes

Le théorème suivant donne la formule de Taylor avec deux restes : le reste de Lagrange[2] et celui de Cauchy[3].

Théorème 6.1.1. (Formule de Taylor avec deux restes)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$. Considérons $x_0 \in [a, b]$, alors, pour tout élément x au voisinage de x_0, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots \\ &\qquad \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n(x), \end{aligned}$$

où

(i) $R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$, avec c un réel compris entre x_0 et x (c'est le reste de Lagrange) ;

[1] Brook Taylor (1685-1731) est un scientifique anglais.
[2] Joseph Lagrange (1736-1813) est un mathématicien et physicien français.
[3] Augustin Louis Cauchy (1789-1857) est un mathématicien français.

(ii) ou bien, $R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n.f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]$, *avec* θ *un réel compris entre* 0 *et* 1 *(c'est le reste de Cauchy).*

Cas particulier : Lorsque $x_0 = 0$, la formule de Taylor avec reste de Lagrange s'écrit

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c),$$

avec c un réel compris entre 0 et x ; cette écriture s'appelle formule de Maclaurin[4].

Rappel de la notation de Landau[5] :

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que $g \neq 0$ sur $I|\{x_0\}$. La notation $f(x) = o[g(x)]$, au voisinage de x_0, signifie que $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Maintenant, nous présentons une autre forme de la formule de Taylor, mais avec des hypothèses en moins.

Théorème 6.1.2. *Soient* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction numérique et* $x_0 \in [a,b]$ *tels que* $f^{(n)}(x_0)$ *existe, alors,* $\forall x$ *au voisinage de* x_0*, on a*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + o[(x-x_0)^n].$$

La forme s'appelle Formule de Taylor avec reste de Young[6].

Remarques 6.1.1

- Ici le reste est $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$, au voisinage de x_0 ; cela signfie que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

  Ainsi, il existe une fonction $\varepsilon(x)$ telle que $R_n(x) = (x-x_0)^n\varepsilon(x)$, au voisinage de x_0, et $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
  Par suite la formule de Taylor-Young a une autre écriture qui est

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon(x).$$

- La formule de Maclaurin-Young est

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n),}$$

  ou bien l'autre écriture, on remplaçant $o(x^n)$ par $x^n\ \varepsilon(x)$.
  La formule de Maclaurin-Young est très utile par la suite, en particulier pour la construction des développements limités (Voir la section suivante).

6.1.2 Illustrations de la formule de Maclaurin

Dans cette partie, nous allons appliquer la formule de Maclaurin à certaines fonctions.

1. Considérons la fonction définie par $f(x) = \sin x$. Nous rappelons que $\sin^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$, donc

$$\sin^{(k)}(0) = \sin(k\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \quad \text{pair} \\ \pm 1 & \text{si} \quad k \quad \text{impair.} \end{cases}$$

   La formule de Maclaurin s'écrit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}),$$

   avec l'ordre $2n+1$.

[4]Colin Maclaurin (1698-1746) est un mathématicien écossais.
[5]Edmund Landau (1877-1938) est un mathématicien allemand.
[6]William Henry Young (1863-1942) est un mathématicien anglais.

2. Considérons la fonction définie par $f(x) = \cos x$. Nous rappelons que $\cos^{(k)}(x) = \cos(x + k\frac{\pi}{2})$, donc

$$\cos^{(k)}(0) = \cos(k\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si} \quad k \quad \text{pair} \\ 0 & \text{si} \quad k \quad \text{impair.} \end{cases}$$

La formule de Maclaurin s'écrit

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \, \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),$$

avec l'ordre $2n$.

3. Considérons la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$. On peut montrer par récurrence que $f^{(k)}(x) = (-1)^k \, k! \, (1+x)^{-1-k}$, donc

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k \, k!.$$

La formule de Maclaurin s'écrit

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n \, x^n + o(x^n),$$

avec l'ordre n.

4. Considérons la fonction définie par $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $x \in]-1, +\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On peut montrer par récurrence que $f^{(k)}(x) = (\alpha)(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, pour $k \geq 1$. Donc

$$f^{(k)}(0) = (\alpha)(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1), \quad \text{si} \quad k \geq 1$$

et $f(0) = 1$.
La formule de Maclaurin s'écrit

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{x}{1!}\alpha + \frac{x^2}{2!}\alpha(\alpha-1) + \ldots + \frac{x^n}{n!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1) + o(x^n),$$

avec l'ordre n.
Remarquons que (3) est un cas particulier de (4) ; il suffit de prendre $\alpha = -1$.

5. Considérons la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$. C'est un cas particulier de (4) ; on prend $\alpha = 1/2$.
La formule de Maclaurin s'écrit

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} \quad &= \quad 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \times 4} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 6}x^3 + \ldots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \, \frac{1 \times 3 \times 5 \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \ldots \times (2n)}x^n + o(x^n), \end{aligned}$$

avec l'ordre n.

6. Considérons la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. C'est un cas particulier de (4) ; on prend $\alpha = -1/2$.
La formule de Maclaurin s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad &= \quad 1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}x^2 - \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}x^3 + \ldots \\ &\quad + (-1)^n \, \frac{1 \times 3 \times 5 \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \ldots \times (2n)}x^n + o(x^n), \end{aligned}$$

avec l'ordre n.

6.2 Développement limité

6.2.1 Développement limité d'ordre n au voisinage de 0

Définition 6.2.1. *Soit f une fonction définie sur un voisinage I de 0, sauf peut être en 0. On dit que f admet un développement limité (D.L.) d'ordre n en 0 si et*

seulement si il existe un polynôme $P(x) = a_0 + a_1.x + \ldots + a_n.x^n$ *tel que*

$$\forall x \in I|\{0\} : f(x) = P(x) + o(x^n).$$

$P(x)$ *s'appelle la partie régulière du développement et* $o(x^n)$ *le reste d'ordre* n.

Remarque 6.2.1
Le reste $o(x^n)$ peut s'écrire $x^n\ \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$.

Théorème 6.2.1. *(i) Si une fonction admet un D.L. d'ordre* n *en* 0*, alors il est unique.*
(ii) Si une fonction paire (resp. impaire) admet un D.L. d'ordre n *en* 0*, alors sa partie régulière est un polynôme pair (resp. impair).*

La formule de Maclaurin constitue une méthode de construction des D.L. pour une large classe de fonctions.

Proposition 6.2.1. *Si* $f^{(n)}(0)$ *existe, alors* f *admet le D.L. suivant d'ordre* n *en* 0 *:*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

6.2.2 Développements limités usuels

La formule de Maclaurin permet de construire les D.L. en 0 suivants :
(i)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n\ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}),\quad \text{ordre}\ \ 2n+1\ ;$$

(ii)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\ \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),\quad \text{ordre}\ \ 2n\ ;$$

(iii)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{x}{1!}\alpha + \frac{x^2}{2!}\alpha(\alpha-1) + \ldots + \frac{x^n}{n!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1) + o(x^n)\ ;$$

(ordre n, $\alpha \in \mathbb{R}$)
(iv)

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} \quad &= \quad 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\times 4} + \frac{1\times 3}{2\times 4\times 6}x^3 + \ldots \\ &\quad +(-1)^{n-1}\ \frac{1\times 3\times 5\ldots\times(2n-3)}{2\times 4\times 6\ldots\times(2n)}x^n + o(x^n),\quad \text{ordre}\ \ n\ ;\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad &= \quad 1 - \frac{x}{2} + \frac{1\times 3}{2\times 4}x^2 - \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}x^3 + \ldots \\ &\quad +(-1)^n\frac{1\times 3\times 5\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\ldots\times(2n)}x^n + o(x^n),\quad \text{ordre}\ \ n\ ;\end{aligned}$$

(vi)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n.x^n + o(x^n)\ ,\quad \text{ordre}\ \ n\ ;$$

(vii)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n)\ ,\quad \text{ordre}\ \ n\ ;$$

(On a remplacé x par $-x$ dans le D.L. précédent)
(viii)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\quad \text{ordre}\ \ n.$$

6.2.3 Opérations sur les développements limités

Théorème 6.2.2. *Soient f et g deux fonctions admettant deux D.L. au même ordre n au point 0. Alors les fonctions $f+g$, $f.g$ et f/g admettent des D.L. d'ordre n en 0. (On exige au cas $\frac{f}{g}$ la condition $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$).*
De plus
- *La partie régulière du D.L. de $f+g$ est la somme des parties régulières des D.L. de f et g.*
- *La partie régulière du D.L. de $f.g$ s'obtient en ne gardant, dans le produit des parties régulières des D.L. de f et g, que les termes ayant des puissances inférieures ou égales à n.*
- *La partie régulière du D.L. de $\frac{f}{g}$ est le quotient à l'ordre n dans la division euclidienne selon les puissances croissantes de la partie régulière du D.L. de f par la partie régulière du D.L. de g.*

Symboliquement : Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$, alors
-
$$f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n),$$
-
$$f(x).g(x) = P(x).Q(x) + o(x^n),$$
(Ne garder que les puissances inférieures ou égales à n),
-
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} + o(x^n),$$
(Division euclidienne suivant les puissances croissantes).

Exemple 6.2.1
Ecrivons le D.L. d'ordre 4 en 0 de chacune des deux fonctions suivantes :
$$f(x) = \sqrt{1+x} + \sin x, \quad g(x) = \sqrt{1+x}.\sin x.$$
Le D.L. d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4).$$
Le D.L. d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \sin x$ est
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$
(x^4 figure dans la partie régulière en mettant $0 \times x^4$)
Par suite, le D.L. de la somme est
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}\right) + (x - \frac{x^3}{6}) + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{8} - \frac{5x^3}{48} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4). \end{aligned}$$
Le D.L. du produit est
$$\begin{aligned} g(x) &= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}\right) \times (x - \frac{x^3}{6}) + o(x^4) \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} - \frac{x^4}{48} + o(x^4). \end{aligned}$$
(En développant le produit, on ne garde que les puissances ≤ 4).

Exemple 6.2.2
Ecrivons le D.L. à l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$.
On a
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

On fait la division euclidienne selon les puissances croissantes pour avoir

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr|l}
1 & + & x & + & \frac{x^2}{2} & + & \frac{x^3}{6} & + & \frac{x^4}{24} & & & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{12-12}
-1 & + & & & \frac{x^2}{2} & & & - & \frac{x^4}{24} & & & 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} \\ \cline{1-9}
 & & x & + & x^2 & + & \frac{x^3}{6} & & & & & \\
 & - & x & & & + & \frac{x^3}{2} & - & & & \frac{x^5}{24} & \\ \cline{2-11}
 & & & & x^2 & + & \frac{2x^3}{3} & - & & & \frac{x^5}{24} & \\
 & & & - & x^2 & & & + & \frac{x^4}{2} & & & \\ \cline{4-9}
 & & & & & & \frac{2x^3}{3} & + & \frac{x^4}{2} & & & \\
 & & & & & - & \frac{2x^3}{3} & & & & & \\ \cline{6-9}
 & & & & & & & & \frac{x^4}{2} & & &
\end{array}$$

Ainsi

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Exemple 6.2.3

Donnons le D.L. à l'ordre 5 de $\tan x$.

On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

En effectuant la division euclidienne de $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ par $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, on trouve

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

Exemple 6.2.4

Donnons les D.L. en 0 des fonctions sinh et cosh.

On sait que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Ainsi

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

6.2.4 Développement limité d'une composée

Théorème 6.2.3. *Soient f et g deux fonctions admettant deux D.L. en 0 à l'ordre n, de parties régulières $P(x)$ et $Q(x)$, respectivement. Alors la fonction composée $f \circ g$ admet un D.L. d'ordre n en 0 ; de plus, sa partie régulière s'obtient en substitution dans la partie régulière $P(x)$ du D.L. de f, la partie régulière $Q(x)$ du D.L. de g, et en ne gardant que les puissances $\leq n$.*

Remarque 6.2.2

La substitution n'est possible que si $Q(0) = 0$. Dans le cas contraire, on fait des transformations pour avoir une partie régulière nulle en 0.

Exemple 6.2.5

Donnons le D.L. à l'ordre 5 en 0 de $f(x) = e^{\cos x - 1}$.

On a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5),$$

donc

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

On a aussi
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$
Ainsi
$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\cos x - 1} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{24}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^4 + \frac{1}{120}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^5 + o(x^5) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^5). \end{aligned}$$
(Après développement, on ne retient que les puissances $\leq$ à 5)

Exemple 6.2.6

Donnons le D.L. d'ordre 5 de $\cosh(\sin x)$

On a
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$
Ainsi
$$\cosh(\sin x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^5).$$

6.2.5 Intégration d'un D.L.

Théorème 6.2.4. *Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable admettant au voisinage de 0 le D.L. d'ordre n suivant :*
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n).$$
Alors la fonction $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ admet au voisinage de 0 un D.L. d'ordre $n+1$ qui a la forme
$$F(x) = a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \frac{1}{3}a_3 x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}a_n x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exemple 6.2.7

Soit le D.L.
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + o(t^n)$$
Par intégration, on a
$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \int_0^x \left[1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n\right]\, dt + o(x^{n+1}).$$
Ainsi
$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).}$$
(ordre $n+1$)

6.2.6 Dérivation d'un D.L.

Théorème 6.2.5. *Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable admettant au voisinage*

de 0 le D.L. d'ordre n suivant :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors la fonction f' admet en 0 un D.L. d'ordre $n-1$ qui a la forme

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Exemple 6.2.8

Soit le D.L.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n).$$

Par dérivation, on a

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + o(x^{n-1}), \quad \text{ordre} \quad n-1.}$$

6.2.7 Tableau des D.L. usuels

Le tableau suivant donne les D.L. usuels trouvés ci-dessus :

Fonction	DL en 0
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \frac{x}{1!}\alpha + \frac{x^2}{2!}\alpha(\alpha-1) + \ldots + \frac{x^n}{n!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1) + o(x^n)$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\times4} + \frac{1\times3}{2\times4\times6}x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1\times3\times5\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\ldots\times(2n)}x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1 - \frac{x}{2} + \frac{1\times3}{2\times4}x^2 - \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}x^3 + \ldots + (-1)^n\frac{1\times3\times5\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\ldots\times(2n)}x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n . x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n)$
$\exp x$	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$
$\frac{1}{(1-x)^2}$	$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + o(x^{n-1})$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\sinh x$	$\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + +o(x^{2n+1})$

6.2.8 Application des D.L. au calcul des limites

les D.L. représentent un outil important pour calculer certaines limites ayant des formes indéterminées.

Exemple 6.2.9

Calculons

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}.\sin 3x}{\sinh(-2x)}.$$

On remarque que la limite présente la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Il faut chercher le D.L. en 0 de la fonction

$$x \mapsto \frac{e^{2x}.\sin 3x}{\sinh(-2x)}.$$

On se limite à des ordres petits ; on travaille avec l'ordre 1 dans notre exemple. On a

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 1 + 2x + o(x), \\ \sin(3x) &= 3x + o(x), \\ \sinh(-2x) &= -2x + o(x), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{e^{2x}.\sin(3x)}{\sinh(-2x)} = \frac{(1+2x+o(x))(3x+o(x))}{-2x+o(x)} = -\frac{3}{2} + o(x).$$

Ainsi

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}.\sin(3x)}{\sinh(-2x)} = -\frac{3}{2}.$$

Remarque 6.2.3

Il n'y a pas de règle générale pour le choix de l'ordre des D.L., mais on commence par un ordre petit pour ne pas avoir des calculs assez lourds. Si l'ordre génère une forme indéterminée, on passe à un ordre supérieur.

Exemple 6.2.10

Calculons

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - 2\sinh(2x) + \sinh(3x)}{\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2}.$$

On sait que

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} \sinh x - 2\sinh(2x) + \sinh(3x) &= (x + \frac{x^3}{6}) - 2(2x + \frac{8}{6}x^3) + (3x + \frac{27}{6}x^3) + o(x^3) \\ &= 2x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2 = \left[(x+2x^2) - \tfrac{1}{2}(x+2x^2)^2 + \tfrac{1}{3}(x+2x^2)^3\right]$$

$$+ \left[1 + \tfrac{1}{2}(-2x) - \tfrac{1}{8}(-2x)^2 + \tfrac{1}{16}(-2x)^3\right] - 1 - x^2 = \tfrac{-13}{6}x^3 + o(x^3).$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - 2\sinh(2x) + \sinh(3x)}{\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-12}{13} + o(x^3)\right) = \frac{-12}{13}.$$

6.2.9 Développement limité d'ordre n au voisinage d'un point x_0

Définition 6.2.2. *On dit qu'une fonction f admet un D.L. d'ordre n en un point x_0 si la fonction $F(t) = f(x_0 + t)$ admet un D.L. d'ordre n en 0. On a alors, le D.L. de F en 0 est*

$$F(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + o(t^n).$$

Le D.L. de f en x_0 est

$$f(x) = F(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Exemple 6.2.11

Donnons le D.L. d'ordre 5 de la fonction $x \mapsto e^x$ au point $x_0 = 2$. On sait qu'au voisinage de 0

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^5}{5!} + o(t^5).$$

Le D.L. d'ordre 5 au point $x_0 = 2$ est

$$e^x = 1 + \frac{(x-2)}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x-2)^5}{5!} + o((x-2)^5).$$

6.3 Exercices

Exercice 1. Donner les développements limités en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{1+x}.\sin x \quad \text{(ordre } 2),$$

$$g(x) = \ln(\cos x) \quad \text{(ordre } 3),$$

$$h(x) = \ln\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) \quad \text{(ordre 5)}.$$

Exercice 2. 1) Donner le D.L. à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$.
2) En déduire le D.L. à l'ordre 2 en 0 de la fonction

$$f(x) = (1+x^2)^{(1+\frac{1}{x})}.$$

Exercice 3. Donner les D.L. en 0 des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3\sin 2x - 2\sin 3x \quad \text{(ordre 5)}, \quad f_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} \quad \text{(ordre 3)};$$

$$f_3(x) = \sqrt{1+\sin x} \quad \text{(ordre 3)}, \quad f_4(x) = \ln\frac{\sin x}{x} \quad \text{(ordre 4)},$$

$$f_5(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad \text{(ordre 5)} \quad f_6(x) = \arctan(\sin x + \cos x) \quad \text{(ordre 4)}.$$

Exercice 4. Déterminer le D.L. à l'ordre 7 en 0 de la fonction $x \mapsto \tan x$, en utilisant les deux formules suivantes :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x.$$

Exercice 5. Déterminer les D.L. en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}} \quad \text{(ordre 2)}, \quad g(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \quad \text{(ordre 3)}.$$

Exercice 6. Trouver au moyen des développements limités les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{\tan x - x}\right), \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - 1}\right), \quad \lim_{0}\left(\frac{\arctan\, x - x}{\sin x - x}\right).$$

Exercice 7. Trouver au moyen des développements limités les limites suivantes :

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{x}{y}\right)^y, \quad \lim_{1}\left(\frac{\ln(x-\ln x)}{\ln x}\right).$$

Chapitre 7

Intégration

7.1 Primitive

Définition 7.1.1. *Soient f et F deux fonctions numériques définies sur $I \subset \mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et $F' = f$.*

Le tableau suivant donne des primitives usuelles :

f	x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	e^x	$\cosh x$	$\sinh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
F	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\ln x$	$\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	e^x	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$

f	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{1}{1-x^2}$
F	$\coth x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$	$\operatorname{argsinh} x$	$\operatorname{argcosh} x$	$\operatorname{argtanh} x$

Proposition 7.1.1. *Soit F une primitive d'une fonction f. Alors l'ensemble des primitives de f est*

$$\{F + k, k \in \mathbb{R}\}.$$

7.2 Intégrale

Considérons une fonction f continue sur $[a, b]$, et soit F une primitive de f. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ la quantité

$$\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

On dit que f est intégrable sur $[a, b]$, lorsque la quantité précédente est finie.

Exemple 7.2.1

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\ dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Interprétation géométrique : La valeur $\int_a^b f(x)\ dx$ mesure l'aire algébrique de la portion du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses $(o, \overrightarrow{i})$, et les droites d'équations $x = a$, $x = b$.

Théorème 7.2.1. *Si f est intégrable sur $[a,b]$ et $c \in]a,b[$, alors*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\ ;$$

c'est la relation de Chasles.

Conséquences :

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0, \quad \int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx.$$

Théorème 7.2.2. *(i) Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$.*
(ii) Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(x)\ dx = 0$.

Théorème 7.2.3. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx,$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Théorème 7.2.4. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors*
(i)

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \geq 0\ ;$$

(ii)

$$f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx.$$

7.3 Procédés généraux d'intégration

Théorème 7.3.1. *(Intégration par changement de variable)*
Soient $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et f une application à valeurs réelles continue sur un segment contenant $\varphi([\alpha,\beta])$. Alors

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(x)]\ \varphi'(x)\ dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\ du.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable $u = \varphi(x)$.

Exemple 7.3.1

Calculons $I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\ \cos x\ dx$.
Considérons le changement de variable $\sin x = u$, donc $\cos x\ dx = du$. Par suite,

$$I = \int_0^1 u^2\ du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Théorème 7.3.2. *(Intégration par parties)*
Soient u et v deux fonctions de $[a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Alors

$$\int_a^b u'(x)\ v(x)\ dx = [u(x)\ v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\ v'(x)\ dx.$$

Exemple 7.3.2

Calculons $\int_0^1 \arctan x \; dx$.
Posons $u'(x) = 1$ et $v(x) = \arctan x$; on a $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} I &= [x \ \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \; dx \\ &= [x \ \arctan x]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

Parfois, on utilise simultanément les deux procédés de changement de variable et de l'intégration par parties.

Exemple 7.3.3

Calculons $I = \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \; dx$.
(Ici, nous ne précisons pas les bornes de l'intégrale, donc nous cherchons une primitive de la fonction).
Posons $y = x^2$; on a

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{\ln y}{(1+y)^2} \; dy.$$

Utilisons une intégration par parties. En posant $u'(y) = \frac{1}{(1+y)^2}$ et $v(y) = \ln y$, on a $v'(y) = \frac{1}{y}$ et $u(y) = \frac{-1}{1+y}$. Ainsi

$$I = \frac{1}{4}\left(\frac{-\ln y}{1+y} + \int \frac{1}{y(1+y)} \; dy\right).$$

Or

$$\frac{1}{y(1+y)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y},$$

donc

$$I = \frac{1}{4}\left(\frac{-\ln y}{1+y} + \ln\left|\frac{y}{1+y}\right|\right) = \frac{-1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}.$$

7.4 Méthodes de calcul des intégrales particulières

7.4.1 Intégrale d'une fonction rationnelle

Soit f une fonction rationnelle ; elle s'écrit comme rapport de deux polynômes. Un résultat d'algèbre (Voir Chapitre 13) montre que toute fraction rationnelle peut être décomposée en une somme d'un polynôme et des fractions rationnelles simples du type

$$x \mapsto \frac{a}{(x-\alpha)^k}, \quad \text{(élément du première espèce)}$$

$$x \mapsto \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}. \quad \text{(élément du deuxième espèce)}$$

L'intégrale de ces deux éléments est une opération simple ; par conséquent l'intégrale de la fonction rationnelle f est aussi simple.

Exemple 7.4.1

Calculons $I = \int \frac{x^3}{x^2-4} \; dx$.
La décomposition donne

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \int x \; dx + \int \frac{2}{x-2} \; dx + \int \frac{2}{x+2} \; dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2\ln|x-2| + 2\ln|x+2|. \end{aligned}$$

7.4.2 Intégrale d'une fonction rationnelle en sin et cos

Soit f une fonction rationnelle en sin et cos. Pour calculer l'intégrale de f, on ramène l'intégration à celle d'une fraction rationnelle, à l'aide du changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$. Ainsi

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt.$$

Exemple 7.4.2

Calculons $I = \int \frac{1}{\sin x} dx$.
Soit le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$. On a

$$I = \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t| = \ln\left|\tan(\frac{x}{2})\right|.$$

Exemple 7.4.3

Calculons $I = \int \frac{1}{\cos x}\ dx$.
Soit le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$. On a

$$I = \int \frac{2}{1-t^2}\ dt = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|.$$

Remarque 7.4.1

Parfois le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ conduit à des calculs assez lourds. On utilise alors de nouveaux changements de variable. Par exemple, pour le calcul de $I = \int \frac{\sin^5 x}{\cos x}\ dx$, on pose $\cos x = t$, donc $-\sin x\ dx = dt$ ou encore $dx = \frac{-1}{\sin x} dt$. On rappelle que $\sin^4 x = [1-\cos^2 x]^2$, et par suite on a

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\ \sin x\ dx = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t}\ dt \\ &= -\int \frac{1-2t^2+t^4}{t}\ dt = \int \left[\frac{-1}{t} + 2t - t^3\right]\ dt \\ &= -\ln|t| + t^2 - \frac{t^4}{4} = -\ln|\cos x| + \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{4}. \end{aligned}$$

7.4.3 Intégrale d'un polynôme en sin et cos

Soit f un polynôme en sin et cos. Pour calculer l'intégrale de f, on utilise la linéarisation par les formules d'Euler (Voir Chapitre 2).

Exemple 7.4.4

Calculons $I = \int \cos^3 x\ dx$.
La linéarisation donne

$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x.$$

Ainsi

$$I = \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x.$$

7.4.4 Intégrale d'une fonction rationnelle en e^x

Soit f une fonction rationnelle en e^x. Pour calculer l'intégrale de f, on utilise le changement de variable $t = e^x$.

Exemple 7.4.5

Calculons $I = \int \frac{1}{1+e^x}\ dx$.
Posons $t = e^x$, donc $dt = e^x\ dx$. On a

$$I = \int \frac{1}{1+t}\ \frac{1}{t}\ dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt = \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| = \ln\frac{e^x}{1+e^x}.$$

Remarque 7.4.2

Pour l'intégrale des fonctions rationnelles en cosh et sinh, on utilise le changement de variable $t = \tanh\frac{x}{2}$.

Exercice 1. Calculer

$$\int \frac{1}{\sinh x}\ dx.$$

7.4.5 Intégrales de Wallis

On considère les intégrales de Wallis[1]

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \; dx, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \; dx,$$

où n est un entier naturel.
Dans J_n, en effectuant le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - u$, on trouve que $I_n = J_n$.
Une intégration par parties donne

$$nI_n = [-\sin^{n-1} x \;\; \cos x]_0^{\pi/2} + (n-1)I_{n-2},$$

soit

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}.$$

Cette relation de récurrence permet de ramener, de proche en proche, le calcul de I_n à celui de I_0 ou de I_1 suivant la parité de n.

1er cas $n = 2p$ **:** On a

$$\begin{array}{rcl} 2pI_{2p} & = & (2p-1)I_{2p-2} \\ (2p-2)I_{2p-2} & = & (2p-3)I_{2p-4} \\ & \dots & \\ 2I_2 & = & I_0 \end{array}$$

En multipliant membre à membre, il vient

$$I_{2p} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2p)} \; \frac{\pi}{2},$$

car $I_0 = \frac{\pi}{2}$.

2ème cas $n = 2p+1$ **:** On a

$$\begin{array}{rcl} (2p+1)I_{2p+1} & = & 2pI_{2p-1} \\ (2p-1)I_{2p-1} & = & (2p-2)I_{2p-2} \\ & \dots & \\ 3I_3 & = & 2I_1 \end{array}$$

En multipliant membre à membre, il vient

$$I_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2p)}{3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (2p+1)},$$

car $I_1 = 1$.

7.4.6 Intégrales abéliennes

Les intégrales abéliennes sont introduites par Abel[2] au début du XIX-ème siècle. Elles font intervenir des expressions sur les radicaux.

Forme $\int \frac{dx}{\sqrt{bx+c}}$

En utilisant le changement de variable $t = bx + c$, on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx+c}} = \frac{1}{b} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{b}\sqrt{t} = \frac{2}{b}\sqrt{bx+c}.$$

[1]John Wallis (1616-1703) est un mathématicien anglais.
[2]Niels Abel (1802-1829) est un mathématicien norvégien.

Forme $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

L'écriture du trinôme ax^2+bx+c sous forme canonique donne

$$ax^2+bx+c = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

En effectuant le changement de variable $t = x + \frac{b}{2a}$, on se ramène à l'une des trois formes suivantes :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}} = \operatorname{argsinh}\left(\frac{t}{k}\right), \quad \int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+k^2}} = \arcsin\left(\frac{t}{k}\right),$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-k^2}} = \begin{cases} \operatorname{argcosh}\left(\frac{t}{k}\right) & \text{si} \quad t > k \\ \ln|t+\sqrt{t^2-k^2}| & \text{si} \quad |t| > k. \end{cases}$$

Exemple 7.4.6
Calculons $I = \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+2x+1}}$.
La forme canonique s'écrit

$$-4x^2+2x+1 = -4\left[(x-\frac{1}{4})^2 - \frac{20}{64}\right].$$

En effectuant le changement de variable $t = x - \frac{1}{4}$, on a

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+\frac{20}{64}}} = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{5/16}}\right) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-\frac{1}{4}}{\sqrt{5/16}}\right).$$

Forme $\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

En effectuant le changement de variable $t = \frac{1}{px+q}$, on se ramène au cas précédent.

Exemple 7.4.7
Calculons $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.
Posons $t = \frac{1}{x}$, donc $dt = \frac{-dx}{x^2}$. Ainsi

$$I = -\int \frac{dt}{t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\operatorname{argsinh} t = -\operatorname{argsinh}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Forme $\int \sqrt{ax^2+bx+c}$

L'écriture du trinôme ax^2+bx+c sous forme canonique donne

$$ax^2+bx+c = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

En effectuant le changement de variable $t = x + \frac{b}{2a}$, on se ramène à l'une des trois formes suivantes :

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}}, \quad J = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-k^2}}, \quad K = \int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+k^2}}.$$

- Pour le calcul de I, on utilise le changement de variable $t = k\sinh u$ pour avoir

$$I = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2+k^2} + k^2\operatorname{argsinh}\left(\frac{t}{k}\right)\right).$$

- Pour le calcul de J, on utilise le changement de variable $t = k\cosh u$, où $u \geq 0$, pour avoir

$$J = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2-k^2} - k^2\operatorname{argcosh}\left(\frac{t}{k}\right)\right).$$

– Pour le calcul de K, on utilise le changement de variable $t = k\sin u$, où $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, pour avoir

$$K = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{-t^2+k^2} + k^2 \arcsin(\frac{t}{k})\right).$$

Exemple 7.4.8

Calculons $I = \int \sqrt{5-3x^2}\ dx$.

Posons $x = \sqrt{5/3}\ t$; on a

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{\sqrt{5}(1-\sin^2 t)}\ \sqrt{5/3}\ \cos t\ dt = \int \frac{5}{\sqrt{3}} \cos^2 t\ dt \\ &= \frac{5}{2\sqrt{3}} \int (1+\cos 2t)\ dt = \frac{5}{2\sqrt{3}}\ (t + \frac{\sin 2t}{2}) \\ &= \frac{5}{2\sqrt{3}} \left(\arcsin(\sqrt{3/5}\ x) + \frac{\sqrt{3}x\sqrt{5-3x^2}}{5}\right). \end{aligned}$$

7.5 Intégrale généralisée (impropre)

Nous avons calculé jusqu'à ici des intégrales de type $\int_a^b f(x)\ dx$, où f est une fonction continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$. Nous allons étendre la notion d'intégrale au cas de fonctions définies sur un intervalle non fermé borné.

7.5.1 Intégrale sur l'intervalle $[a, +\infty[$

Définition 7.5.1. *Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est intégrable (au sens généralisé) sur $[a, +\infty[$ si*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ dt, \quad \textit{existe.}$$

Dans ce cas, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente. Dans le cas contraire, elle est dite divergente.

Exemple 7.5.1

Calculons $I = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\ dt$, avec $p > 0$.

On a

$$I = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-pt}\ dt = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{-1}{p} e^{-pt}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-px}\right] = \frac{1}{p}.$$

On conclut que I est convergente.

Exemple 7.5.2

Calculons $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt$.

On a

$$I = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\ dt = \lim_{x\to+\infty} [\ln t]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

On conclut que I est divergente.

Dans les exemples précédents, nous avons pu trouver facilement une primitive de la fonction à intégrer. En général, il est intéressant de savoir d'avance si l'intégrale est convergente ou divergente, sans passer par la recherche de la primitive. Nous allons donner des règles assurant la convergence ou la divergence de certaines intégrales.

Proposition 7.5.1. *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \le f \le g$. Alors, si $\int_a^{+\infty} g(t)\ dt$ est convergente, il en est de même de $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$, et*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ dt \le \int_a^{+\infty} g(t)\ dt.$$

De plus, si $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est divergente, il en est de même de $\int_a^{+\infty} g(t)\ dt$.

Exemple 7.5.3

Il est facile de voir que

$$\forall x > 1 : e^{-x^2} \leq e^{-x}.$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt$ est convergente (prendre $p = 1$ dans l'Exemple 8.5.1), donc il en est de même de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$.
Nous admettons que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ce résultat est fondamental en analyse.

Exemple 7.5.4

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\ dt$ est convergente.
Cela résulte du fait que $\frac{\sin^2 t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ est convergente.

Définition 7.5.2. *L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est dite absolument convergente si et seulement si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)|\ dt$ est convergente.*

Proposition 7.5.2. *Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Remarque 7.5.1

La réciproque est fausse en général. Par exemple, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt$ est convergente, mais n'est pas absolument convergente.

7.5.2 Intégrale sur l'intervalle $]-\infty, a]$

On dit qu'une fonction f est intégrable sur $]-\infty, a]$ si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)\ dt = \lim_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)\ dt \qquad \text{existe.}$$

Dans ce cas, l'intégrale $\int_{-\infty}^{a} f(t)\ dt$ est dite convergente. Dans le cas contraire, elle est dite divergente.

Exemple 7.5.5

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\ dt = \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\ dt \\ &= \lim_{x \to -\infty} [\arctan t]_x^0 = \lim_{x \to -\infty} (-\arctan x) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Remarque 7.5.2

Les résultats de la Proposition 8.5.1 s'appliquent aussi aux intégrales sur les intervalles de type $]-\infty, a]$.

7.5.3 Intégrale sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$

On dit qu'une fonction f est intégrable sur $]-\infty, +\infty]$ si et seulement si les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)\ dt, \quad \int_a^{+\infty} f(t)\ dt$$

sont convergentes, pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est dite convergente, et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\ dt + \int_a^{+\infty} f(t)\ dt.$$

Exemple 7.5.6

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \pi.$$

Remarque 7.5.3
Les résultats de la Proposition 8.5.1 s'appliquent aussi aux intégrales sur les intervalles de type $]-\infty, +\infty[$.

7.5.4 Intégrale sur les intervalles $[a, b[$ et $]a, b]$

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b[$ (resp. sur $]a, b]$), avec $a, b \in \mathbb{R}$. On définit l'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ (resp. sur $]a, b]$) par

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\, dt,$$

$$(\text{resp. } \int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\, dt).$$

Lorsque les limites existent, on dit que les intégrales sont convergentes.

Exemple 7.5.7
Calculons

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est définie sur $]0, 1]$, donc

$$I = \lim_{x\to 1} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \lim_{x\to 1} [\arcsin x]_0^x = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque 7.5.4
Les résultats de la Proposition 8.5.1 s'appliquent aussi aux intégrales sur les intervalles de type $[a, b[$ et $]a, b]$.

7.6 Exercices

Exercice 1. Intégrer par parties

$$I = \int_0^{\pi} \sin x . e^{-x}\, dx, \quad J = \int_0^{\sqrt{3}} x . \arctan x\, dx.$$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2+\sin x}\, dx, \quad J = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sin^2 x + 1}\, dx.$$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \frac{dx}{-x^2 - x + 2}, \quad \int \frac{x^2+2}{x^3-1}\, dx, \quad \int \frac{x^4}{x^3-8}\, dx.$$

Exercice 4. Soient les deux intégrales

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\, dx, \quad J = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)\, dx.$$

1) Calculer $I + J$.
2) Déduire les valeurs de I et J.

Exercice 5. On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos^2 t\, dt, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin^2 t\, dt, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t\, dt.$$

Calculer K, $I+J$ et $I-J$. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 6. Soit n un entier positif ; calculer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} \; dx.$$

Exercice 7. 1) Montrer la linéarisation suivante :

$$\cosh^4(x) = \frac{1}{8}\left[\cosh(4x) + 4\cosh(2x) + 3\right].$$

2) Calculer $I = \int \cosh^4 x \, dx$.

Exercice 8. Calculer à l'aide de trois méthodes l'intégrale suivante :

$$I_7 = \int \sin^7 x \; dx.$$

Exercice 9. *(Première formule de la moyenne).* Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On suppose de plus que g a un signe constant dans $[a,b]$.
Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x) \;\; dx = f(c)\int_a^b g(x) \;\; dx.$$

Application : étudier la limite de $\int_x^{2x} \frac{1}{t\sqrt{\sin t}} \; dt$, quand $x \to 0^+$.

Exercice 10. On pose, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1) Montrer que I_n existe et est un nombre strictement positif. Calculer I_1.
2) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$. Calculer I_2 et I_3.
3) En déduire la valeur de $I = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x)e^{-x} dx$.

Exercice 11. 1) Donner une forme de récurrence de

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \; dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2) Trouver la limite de I_n, quand $n \to +\infty$.

Exercice 12. Calculer les intégrales généralisées suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+a)(x+b)} \; dx, \quad (a,b>0), \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \; dx, \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$$

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \; dx, \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}, \quad I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}.$$

Chapitre 8

Les équations différentielles

8.1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

8.1.1 Forme et exemples

Les équations différentielles linéaires du premier ordre ont la forme suivante :

$$\boxed{(E) : y' + ay = b,}$$

où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.
Résoudre une équation différentielle revient à chercher toutes les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ qui vérifient (E).

Exemple 8.1.1
$a = 0, b = 0$; l'équation (E) devient $y' = 0$.
Il existe une infinité de solutions : $y(x) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$; c'est la solution générale de (E).

Exemple 8.1.2
$a = 0, b = \frac{1}{x}$; l'équation (E) devient $y' = \frac{1}{x}$.
La solution générale de (E) est

$$\{y(x) = \ln x + k, \quad k \in \mathbb{R}\}.$$

Définition 8.1.1. *L'équation $(E_0) : y' + ay = 0$ s'appelle équation différentielle sans second membre ou équation homogène.*

8.1.2 Résolution de l'équation sans second membre

L'équation sans second membre associée à (E) est $(E_0) : y' + ay = 0$, qui s'écrit $y' = -ay$.
Soit A une primitive de la fonction a (i.e. $A(x) = \int a(x)\ dx$).
Posons $y(x) = e^{-A(x)}$. Il est facile de voir que cette fonction vérifie l'équation (E_0) ; en effet

$$y'(x) = [e^{-A(x)}]' = -A'(x)e^{-A(x)} = -a(x)\ y(x).$$

Théorème 8.1.1. *La solution générale de l'équation $(E_0) : y' + ay = 0$ est*

$$y(x) = k.e^{-A(x)}, \quad k \in \mathbb{R},$$

avec $A(x) = \int a(x)\ dx$ une primitive de a.

Remarques 8.1.1
- Soient $x_0 \in I$ et $z_0 \in \mathbb{R}$; il existe une unique solution y telle que $y(x_0) = z_0$.
- Lorsque $a(x) = a$ (une constante), alors $A(x) = a.x$ une primitive de a. Ainsi, la solution générale de $(E_0) : y' + ay = 0$ est $y(x) = k.e^{-a.x}, \quad k \in \mathbb{R}$.

8.1.3 Résolution de l'équation avec second membre

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre $(E) : y' + ay = b$. L'équation sans second membre associée à (E) est $(E_0) : y' + ay = 0$.

> **Théorème 8.1.2.** *La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E).*

Détermination d'une solution particulière de (E) : Il existe plusieurs méthodes pour la détermination de la solution particulière de (E), nous proposons ici *"la méthode de variation de la constante"* : Soit y_0 une solution non nulle de (E_0). On cherche une solution particulière de (E) ayant la forme $y = \lambda y_0$, avec λ une fonction inconnue à déterminer.
Puisque y vérifie (E), on a $y' + ay = b$; cela implique (en remplaçant y par λy_0)

$$\lambda' y_0 + \lambda y_0' + a\lambda y_0 = b.$$

Or y_0 est une solution de (E_0) qui signifie que $y_0' + ay_0 = 0$, l'équation ci-dessus devient

$$\lambda' y_0 = b.$$

Par suite

$$\lambda' = \frac{b}{y_0}$$

ou encore

$$\lambda = \int \frac{b}{y_0}.$$

Ainsi λ est une primitive du rapport $\frac{b}{y_0}$.
On conclut qu'une solution particulière de (E) est

$$\boxed{y(x) = \left(\int \frac{b}{y_0}\right) \times y_0.}$$

Exemple 8.1.3
Résolvons l'équation différentielle

$$(E) : y' + \frac{x}{x^2+1} y = \frac{1}{x^2+1}.$$

L'équation sans second membre associée à (E) est

$$(E_0) : y' + \frac{x}{x^2+1} y = 0.$$

Ici, $a(x) = \frac{x}{x^2+1}$; par suite, une primitive de a est

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

Donc la solution générale de (E_0) est

$$x \mapsto ke^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = \frac{k}{\sqrt{x^2+1}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, on choisit une solution non nulle de (E_0) ; la plus simple est

$$y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Une solution particulière de (E) est $y = \lambda y_0$. On a

$$\lambda' = \frac{b}{y_0} = \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Par suite

$$\lambda(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Ainsi la solution particulière de (E) est

$$y(x) = \lambda(x).y_0(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Enfin, la solution générale de (E) est l'ensemble des fonctions

$$\left\{\frac{k}{\sqrt{x^2+1}} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}).\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}.$$

8.2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Ce sont des équations ayant la forme $y'' + ay' + by = g$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.

8.2.1 Résolution de l'équation sans second membre

L'équation sans second membre associée à (E) est

$$\boxed{(E_0) : y'' + ay' + by = 0.}$$

Théorème 8.2.1. *Considérons l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ (r est l'inconnu) et son discriminant $\Delta = a^2 - 4b$*

1er cas $\Delta > 0$: *L'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. La solution de (E_0) est*

$$x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ ;$$

2ème cas $\Delta = 0$: *L'équation caractéristique admet une solution double r_1. La solution générale de (E_0) est*

$$x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{r_1 x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ ;$$

3ème cas $\Delta < 0$: *L'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$. La solution générale de (E_0) est*

$$x \mapsto e^{px}(\lambda\cos(qx) + \mu\sin(qx)), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 8.2.1
Résolvons $(E_0) : y'' - 5y' + 6y = 0$.
L'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ admet deux solutions réelles 2 et 3. La solution générale de (E_0) est

$$x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 8.2.2
Résolvons $(E_0) : y'' + w^2 y = 0$, ($w \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé).
L'équation caractéristique $r^2 + w^2 = 0$ admet deux solutions complexes iw et $-iw$. La solution générale de (E_0) est

$$x \mapsto \lambda\cos(wx) + \mu\sin(wx), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 8.2.3
Résolvons $(E_0) : y'' - 4y' + 4y = 0$.
L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ admet une solution double 2. La solution générale de (E_0) est

$$x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

8.2.2 Résolution de l'équation avec second membre de type exponentielle-polynôme

Considérons l'équation différentielle du second ordre avec second membre de type exponentielle-polynôme suivante :

$$(E) : y'' + ay' + by = g,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction ayant la forme $g(x) = e^{mx}\ P(x)$, avec $m \in \mathbb{R}$ et $P(x)$ un polynôme.
L'équation sans second membre associée à (E) est $(E_0) : y'' + ay' + by = 0$.

Théorème 8.2.2. *La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E).*

Le théorème suivant donne une méthode de détermination d'une solution particulière de (E) :

Théorème 8.2.3. *La solution particulière de (E) est de la forme*

$$y(x) = e^{mx}\ Q(x),$$

où $Q(x)$ est un polynôme de degré égal à :
(i) deg $P(x)$, si m n'est pas une solution de l'équation caractéristique ;
(ii) deg $P(x) + 1$, si m est une solution simple de l'équation caractéristique ;
(iii) deg $P(x) + 2$, si m est une solution double de l'équation caractéristique.

Exemple 8.2.4
Résolvons $(E) : y'' - 4y' + 4y = e^x(x^2 + 1)$.
L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ admet une solution double 2. La solution générale de l'équation sans second membre $(E_0) : y'' - 4y' + 4y = 0$ est

$$x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Or $m = 1$, n'est pas une solution de l'équation caractéristique, donc (E) admet comme solution particulière la fonction $y(x) = e^x\ Q(x)$, avec deg $Q(x)$= deg $P(x) = 2$. Ainsi $Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sont des constantes à déterminer ?
On a

$$\begin{aligned} y(x) &= e^x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \\ y'(x) &= [(2\alpha x + \beta) + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)]e^x \\ y''(x) &= [2\alpha + 2(2\alpha x + \beta) + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)]e^x \end{aligned}$$

y vérifie $(E) : y'' - 4y' + 4y = e^x(x^2 + 1)$

$$\Leftrightarrow [(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) - 2(2\alpha x + \beta) + 2\alpha]e^x = (x^2 + 1)e^x.$$

Par identification, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha &=& 1 \\ \beta - 4\alpha &=& 0 \\ \gamma - 2\beta + 2\alpha &=& 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha &=& 1 \\ \beta &=& 4 \\ \gamma &=& 7 \end{array} \right.$$

La solution particulière de (E) est $y(x) = e^x(x^2 + 4x + 7)$.
On conclut que la solution générale de (E) est

$$x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x} + e^x(x^2 + 4x + 7), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

8.2.3 Résolution de l'équation avec second membre de type $A\cos\beta x + B\sin\beta x$

Considérons l'équation différentielle du second ordre avec second membre de type $A\cos\beta x + B\sin\beta x$. Elle est définie par

$$(E) : y'' + ay' + by = g,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction ayant la forme $g(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$.
L'équation sans second membre associée à (E) est $(E_0) : y'' + ay' + by = 0$.
Pour résoudre l'équation (E), on envisage les deux cas suivants :

- **1er cas :** $\cos\beta x$ n'est pas une solution de l'équation (E_0).
  On cherche une solution particulière de la forme
  $$y_1(x) = A_1\cos\beta x + B_1\sin\beta x\ ;$$
- **2ème cas :** $\cos\beta x$ est une solution de l'équation (E_0).
  On cherche une solution particulière de la forme
  $$y_1(x) = x(A_1\cos\beta x + B_1\sin\beta x).$$

Exemple 8.2.5
Résolvons $(E) : y'' + y' + y = 13\cos 2x$.
L'équation sans second membre associée à (E) est $(E_0) : y'' + y' + y = 0$; sa solution générale est
$$x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \mu\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
La fonction $\cos 2x$ n'est pas une solution de (E_0). La solution particulière de (E) a la forme $y_1(x) = A_1\cos 2x + B_1\sin 2x$. On a
$$y_1'(x) = -2A_1\sin 2x + 2B_1\cos 2x,$$
$$y_1''(x) = -4A_1\cos 2x - 4B_1\sin 2x.$$
Par suite $y_1''(x) + y_1'(x) + y_1(x) = 13\cos 2x$ s'écrit
$$(2B_1 - 3A_1)\cos 2x - (2A_1 - 3B_1)\sin 2x = 13\cos 2x.$$
Par identification, on a
$$\begin{cases} 2B_1 - 3A_1 &= 13 \\ 2A_1 + 3B_1 &= 0 \end{cases}$$
qui donne $A_1 = -3$ et $B_1 = 2$. Ainsi, la solution particulière de (E) est $y_1(x) = -3\cos 2x + 2\sin 2x$.
On conclut que la solution générale de (E) est
$$x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \mu\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - 3\cos 2x + 2\sin 2x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 8.2.6
Résolvons $(E) : y'' + y = \cos x$.
L'équation sans second membre associée à (E) est $(E_0) : y'' + y = 0$; sa solution générale est
$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
La fonction $\cos x$ est une solution de (E_0). La solution particulière de (E) a la forme $y_1(x) = x(A_1\cos x + B_1\sin x)$.
En substituant dans (E), on trouve $A_1 = 0$, $B_1 = \frac{1}{2}$; d'où $y_1(x) = \frac{x}{2}\sin x$.
On conclut que la solution générale de (E) est
$$x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x + \frac{x}{2}\sin x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

8.3 Exercices

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
$$(E) : y' + 2xy = 2x, \quad (E') : xy' - 2y = \sqrt{x}.$$

Exercice 2. *(Equation de Bernoulli[1])*
C'est une équation différentielle de la forme $a(x)y' + b(x)y + c(x)y^n = 0$, on la résout

[1] Jacques Bernoulli (1654-1705) est un mathématicien et physicien suisse.

sur un intervalle dans lequel y ne s'annule pas en posant $z = y^{1-n}$.
Application : résoudre l'équation différentielle

$$y' + xy + (x^2 - \frac{1}{2})y^3 = 0.$$

Exercice 3. *(Equation de Riccati[2])*
C'est une équation différentielle de la forme

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x).$$

1) Démontrer que si y_1 est une solution particulière alors $y - y_1$ vérifie une équation de Bernoulli.
2) Résoudre $y' - (x-y)^2 + 1 = 0$ en cherchant une solution particulière affine.

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E) : y'' - 3y' = xe^x, \quad (E') : y'' + 3y' + 2y = 6xe^{2x}.$$

Exercice 5. 1) Résoudre l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y' + y = \arctan x.$$

2) Plus généralement, soit u une fonction dérivable sur I telle que u' ne s'annule pas. Résoudre

$$\frac{y'}{u'(x)} + y = u(x).$$

Exercice 6. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad 2y' + y = 5e^{2x}.$$

1) Faire le changement de variable $y = z + e^{2x}$.
2) Intégrer l'équation différentielle ainsi obtenue et en déduire la solution générale de (E).

Exercice 7. On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 4y = 3\cos x,$$

dans laquelle y est une fonction inconnue.
1) On pose $y = z + a\cos x$. Former l'équation à laquelle satisfait la fonction z. Déterminer a pour que cette équation se réduise à $z'' + 4z = 0$.
2) Donner la solution générale de l'équation (E), puis la solution qui satisfait aux conditions

$$y(0) = 0, \ y'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Exercice 8. On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$(E_1) : \qquad y'' + 4y' + 3y = 0.$$

1) Vérifier que la fonction $y = e^x$ est une solution particulière de cette équation.
2) On pose $y = ze^x$.
Former l'équation du second ordre (E_2) à laquelle satisfait la fonction z. Donner la solution générale de cette équation et en déduire celle de (E_1).

[2]Jacopo Riccati (1676-1754) est un mathématicien et physicien italien.

Correction des exercices d'Analyse

Le présent chapitre présente les solutions des exercices proposés dans les divers chapitres de la partie Analyse du livre.

Correction des exercices du Chapitre 6

Solution 1. - On a $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, et $\sin x = x + o(x^2)$. Ainsi

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

- On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ et $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$. Ainsi

$$g(x) = \ln(\cos x) = \ln(1 - \frac{x^2}{2}) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(\frac{-x^2}{2})^2 + \frac{1}{3}(\frac{-x^2}{2})^3 + o(x^3).$$

(On a remplacé t par $\frac{-x^2}{2}$)
En conservant que les puissances $\leq$ à 3, on a

$$g(x) = \frac{-x^2}{2} + o(x^3).$$

- On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} + o(x^5) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2x^2}{4!} + \frac{2x^4}{6!} + o(x^5)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\ln\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = -\ln 2 + \ln\left[1 - \frac{2x^2}{4!} + \frac{2x^4}{6!} + o(x^5)\right].$$

On rappelle que $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + o(t^5)$. On utilise cette formule pour avoir

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) &= -\ln 2 + \left(-\frac{2x^2}{4!} + \frac{2x^4}{6!}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2x^2}{4!} + \frac{2x^4}{6!}\right)^2 + o(x^5) \\ &= -\ln 2 - \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{1440} + o(x^5). \end{aligned}$$

Solution 2. 1) On a

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

2)

$$f(x) = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(1+x^2)} = e^{x+x^2+o(x^2)}.$$

Or $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$; on remplace t par $x + x^2$ pour avoir

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x + x^2) + \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Solution 3.

–

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3\sin 2x - 2\sin 3x \\ &= 3\left[2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o(x^5)\right] - 2\left[3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + o(x^5)\right] \\ &= 5x^3 - \frac{13}{4}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned} f_2(x) &= (1+x)^{-1}.\ln(1+x) \\ &= (1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3))\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \sqrt{1 + \sin x} \\ &= \sqrt{1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

(On ne retient que les termes ayant des puissances inférieures ou égales à 3).

–

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \ln\frac{\sin x}{x} = \ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) \\ &= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)^2 + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4). \end{aligned}$$

– On a

$$f_5'(x) = \frac{-1}{1+x^2} = -(1 - x^2 + x^4 + o(x^4)).$$

Ainsi

$$f_5(x) = f_5(0) + \int_0^x (-1 + t^2 - t^4)\, dt + o(x^5) = \frac{\pi}{4} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

– On a

$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \frac{\cos x - \sin x}{2 + \sin 2x} \\ &= \frac{1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{2 + 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{2} - x + \frac{3x^2}{4} - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Ainsi
$$f_6(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4).$$

Solution 4. 1)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)}.$$

On obtient le développement limité de tan à l'ordre 7 en 0, en effectuant la division suivant les puissances croissantes de $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$ par $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$. On trouve
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7).$$

2) Puisque la fonction tan est C^∞ au voisinage de 0, elle admet un développement limité à tout ordre, en particulier à l'ordre 7. En raison de l'imparité de cette fonction, elle se présente sous la forme
$$\tan x = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + o(x^7).$$

$(tan)'$ étant également de classe C^∞, elle admettra un développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, dérivée du développement d'ordre 7 de tan,
$$(\tan)'(x) = a + 3bx^2 + 5cx^4 + 7dx^6 + o(x^6).$$

Nous devons donc avoir
$$(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x$$
$$a + 3bx^2 + 5cx^4 + 7dx^6 + o(x^6) = 1 + (ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + o(x^7))^2$$

soit
$$a + 3bx^2 + 5cx^4 + 7dx^6 + o(x^6) = 1 + a^2x^2 + 2abx^4 + (b^2 + 2ac)x^6 + o(x^6).$$

Par identification, on a
$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ 3b &=& a^2 \\ 5c &=& 2ab \\ 7d &=& b^2 + 2ac \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ b &=& \frac{1}{3} \\ c &=& \frac{2}{15} \\ d &=& \frac{17}{315} \end{array}\right.$$

d'où
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7).$$

Solution 5. 1) Effectons le changement de variable $x = \frac{1}{X}$. On a
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}} = \sqrt[3]{\frac{1 + X + X^2}{1 + X^2}} \\ &= \sqrt[3]{1 + X + o(X^2)} = 1 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{9}X^2 + o(X^2) \\ &= 1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + o(\frac{1}{x^2}). \end{aligned}$$

2) Effectons le changement de variable $x = \frac{1}{X}$. On a
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{X}(\sqrt{1 + X^2} - \sqrt{1 - X^2}) \\ &= \frac{1}{X}\left[\left(1 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{8}X^4 + o(X^4)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{8}X^4 + o(X^4)\right)\right] \\ &= \frac{1}{X}[X^2 + o(X^2)] = X + o(X^3). \end{aligned}$$

Ainsi
$$f(x) = \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^3}).$$

Solution 6. 1)

$$\begin{aligned}\frac{x\cos x-\sin x}{\tan x-x} &= \frac{x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-x}\\ &= \frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}=\frac{\frac{-1}{3}+o(1)}{\frac{1}{3}+o(1)}=-1+o(1).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{\tan x-x}\right)=-1.$$

2)

$$\begin{aligned}\frac{e^x-1-\sin x}{\cos x-1} &= \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1-(x+o(x^2))}{\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1}\\ &= \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=-1+o(1).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-\sin x}{\cos x-1}\right)=-1.$$

Solution 7. - On sait que $\arctan' x=\frac{1}{1+x^2}$. Or

$$\frac{1}{1+t}=1-t+o(t),$$

donc

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+o(x^2).$$

Par intégration

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

D'un autre coté, $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$. Ainsi

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x-x}{\sin x-x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\frac{x^3}{3}-x+o(x^3)}{x-\frac{x^3}{6}-x+o(x^3)}\right)=2.$$

- On pose $A=(1+\frac{x}{y})^y$; on a $\ln A=y\ln(1+\frac{x}{y})$. Or

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2).$$

Ainsi

$$\ln(1+\frac{x}{y})=\frac{x}{y}-\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^2+o((\frac{x}{y})^2).$$

Par suite

$$\begin{aligned}\ln A= &\quad y\left[\frac{x}{y}-\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^2+o((\frac{x}{y})^2)\right]\\ = &\quad x-\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^2+o((\frac{x}{y})^2)\end{aligned}$$

Enfin

$$\lim_{y\to+\infty}\ln A=x\Leftrightarrow\lim_{y\to+\infty}A=e^x.$$

- On pose $x=1+h$. La limite à calculer devient

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h-\ln(1+h))}{\ln(1+h)}.$$

On sait que $\ln(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)$ qui s'écrit $h-\ln(1+h)=\frac{h^2}{2}+o(h^2)$. Ainsi

$$\ln[1+h-\ln(1+h)]=\ln[1+\frac{h^2}{2}+o(h^2)]=\frac{h^2}{2}+o(h^2).$$

Par suite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h-\ln(1+h))}{\ln(1+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2/2+o(h^2)}{h-h^2/2+o(h^2)}=\lim_{h\to 0}\frac{h/2+o(h)}{1-h/2+o(h)}=0.$$

Correction des exercices du Chapitre 7

Solution 8. - On a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \sin x\ e^{-x}\ dx = [-\sin x\ e^{-x}]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\ e^{-x}\ dx \\ &= 0 + [-\cos x\ e^{-x}]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\ e^{-x}\ dx \\ &= 0 + 1 + e^{-\pi} - I. \end{aligned}$$

Ainsi $2I = 1 + e^{-\pi}$; ce qui implique que $I = \frac{1+e^{-\pi}}{2}$.

- On a

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x\ dx = [\frac{x^2}{2} \arctan x]_0^{\sqrt{3}} + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2(x^2+1)}\ dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} [1 - \frac{1}{x^2+1}]\ dx \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Solution 9. - On pose $t = \tan \frac{x}{2}$. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t+t^2}\ dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\ dt \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-1}^1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

- On pose $t = \sin x$. On a

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{1/2} \frac{1-4t^2}{1+t^2}\ dt = \int_0^{1/2} (-4 + \frac{5}{1+t^2})\ dt \\ &= [-4t + 5 \arctan t]_0^{1/2} = -2 + 5 \arctan(\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Solution 10. 1)

$$\frac{1}{-x^2-x+2} = \frac{1}{3(x+2)} - \frac{1}{3(x-1)}.$$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|.$$

2)

$$\frac{x^2+2}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+x+1}.$$

$$J = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} = \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

3)

$$\frac{x^4}{x^3-8} = x + \frac{4}{3(x-2)} + \frac{Ax+B}{x^2+2x+4},$$

avec $A = -4/3$, $B = 8/3$.

$$\begin{aligned} K &= \int \left[x + \frac{4}{3(x-2)} - \frac{2(2x+2)}{3(x^2+2x+4)} + \frac{4}{(x+1)^2+3}\right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x^2+2x+4| + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Solution 11. 1) Sur $[0, \frac{\pi}{4}[$, on a $1 + \tan x > 0$. par suite

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\ dx = \frac{\pi}{4}\ \ln 2.$$

2) Faisons le changement de variable $t = \frac{\pi}{4} - x$ et utilsons la formule

$$\tan(\frac{\pi}{4} - t) = \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t}.$$

On a

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t}\right)\ dt = J.$$

Donc $I = J = \frac{\pi}{8}\ \ln 2$.

Solution 12.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\left[e^{-2t}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{8}} + \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\sin 2t\ dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\sin 2t\ dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\sin 2t\ dt &= -\frac{1}{2}\left[e^{-2t}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{8}} - \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\cos 2t\ dt \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}\right] - \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\cos 2t\ dt, \end{aligned}$$

d'où $K = 1/4$.

On a

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t}\ dt = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-\frac{\pi}{4}}\right],$$

$$I - J = K,$$

d'où

$$I = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}}, \quad J = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Solution 13. On pose $t = \frac{\pi}{2} - x$. On a

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\cos^n t + \sin^n t}\ dt.$$

En sommant, on a

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n t + \sin^n t}{\cos^n t + \sin^n t}\ dt = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $I = \frac{\pi}{4}$.

Solution 14. 1) On a

$$\begin{aligned} \cosh^4 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4x} + 4e^{3x}e^{-x} + 6e^{2x}e^{-2x} + 4e^x e^{-3x} + e^{-4x}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4x} + e^{-4x} + 4(e^{2x} + e^{-2x}) + 6\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\cosh 4x + 4\cosh 2x + 3\right). \end{aligned}$$

2) On a

$$\int \cosh^4 x\ dx = \int \frac{1}{8}\left(\cosh 4x + 4\cosh 2x + 3\right)\ dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sinh 4x + 2\sinh 2x + 3x\right).$$

Solution 15. a) Posons $t = \cos x$; alors

$$\begin{aligned} I_7 &= -\int (1 - t^2)^3\ dt = -\int (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6)\ dt \\ &= -t + t^3 - \frac{3}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 \\ &= -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x. \end{aligned}$$

b) Intégration par parties :

$$I_7 = -\frac{1}{7}\sin^6 x\cos x + \frac{6}{7}I_5,$$
$$I_5 = -\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x + \frac{4}{5}I_3,$$
$$I_3 = -\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x + \frac{2}{3}I_1.$$

Comme $I_1 = -\cos x$, nous voyons que

$$I_7 = -\frac{1}{7}\sin^6 x\cos x - \frac{6}{35}\sin^4 x\cos x - \frac{8}{35}\sin^2 x\cos x - \frac{16}{35}\cos x.$$

c) Linéarisons $\sin^7 x$; d'après les formules d'Euler,

$$\begin{aligned}
\sin^7 x &= \frac{1}{(2i)^7}(e^{ix} - e^{-ix})^7 \\
&= -\frac{1}{2^6}\left[\frac{e^{7ix} - e^{-7ix}}{2i} - 7\frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{2i} + 21\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 35\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right] \\
&= -\frac{1}{64}(\sin 7x - 7\sin 5x + 21\sin 3x - 35\sin x) \\
&= \frac{1}{64}(\frac{1}{7}\cos 7x - \frac{7}{5}\cos 5x + 7\cos 3x - 35\cos x).
\end{aligned}$$

Solution 16. 1) On suppose que g est positive. Puisque f est continue sur $[a, b]$, il existe

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Ainsi

$$\forall x \in [a, b] : m\ g(x) \leq f(x)\ g(x) \leq M\ g(x).$$

Puis, en intégrant,

$$\int m\ g(x)\ dx \leq \int f(x)\ g(x)\ dx \leq \int M\ g(x)\ dx$$

ou encore

$$m \leq \frac{\int f(x)g(x)\ dx}{\int g(x)\ dx} \leq M.$$

Posons $\lambda = \frac{\int f(x)g(x)\ dx}{\int g(x)\ dx}$. Le théorème des valeurs intermédiares donne l'existence d'un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

2) Soit $x > 0$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\sin t}}$ est continue sur $[x, 2x]$. La fonction $g(t) = \frac{1}{t}$ est continue et positive sur $[x, 2x]$.

Il existe $c \in [x, 2x]$ tel que

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t\sqrt{\sin t}}\ dt = \frac{1}{\sqrt{\sin c}}\int_x^{2x}\frac{1}{t}\ dt = \frac{\ln 2}{\sqrt{\sin c}}.$$

Lorsque $x \to 0$, on a $c \to 0$, et ainsi

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{1}{t\sqrt{\sin t}}\ dt = +\infty.$$

Solution 17. 1) La fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $[0, 1]$ donc intégrable. On a de plus, $\forall x \in]0, 1]$, $x^n e^{-x} > 0$. L'intégrale sur $[a, b]$ (avec $b > a$) d'une fonction continue positive non nulle est strictement positve. On en déduit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n > 0$

On a $I_1 = \int_0^1 xe^{-x}dx$. Intégrons par partie $u = x$ et $v' = e^{-x}$. On obtient

$$I_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \left[e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

2) Intégrons I_n par partie : $u = e^{-x}$, $v' = x^n$. On obtient

$$I_n = \left[\frac{e^{-x}x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}e^{-x}dx.$$

On en déduit
$$I_n = \frac{1}{e(n+1)} + \frac{1}{n+1} I_{n+1},$$
ou encore
$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$
Ainsi
$$I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = 2 - \frac{5}{e}, \quad I_3 = -\frac{1}{e} + 3I_2 = 6 - \frac{16}{e}.$$

3) On a
$$I = -I_3 + 2I_2 - I_1 = \frac{8}{e} - 3.$$

Solution 18. On a
$$I_n = \int_1^e 1.(\ln x)^n \; dx = [x.(\ln x)^n]_1^e - n \int_1^e (\ln x)^{n-1} \; dx.$$
Ainsi
$$I_n = e - nI_{n-1}, \quad n \geq 1.$$
Posons $u_n = \frac{I_n}{n!}$. On a
$$u_n = \frac{e}{n!} + u_{n-1}.$$
D'où
$$u_n = \frac{e}{n!} - \frac{e}{(n-1)!} + u_{n-2} = \ldots$$
Par récurrence, on a
$$u_n = e\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{1!}\right) + (-1)^n u_0,$$
avec $u_0 = I_0 = e - 1$.

Enfin
$$I_n = n! \; u_n = n! e \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} + (-1)^{n+1}\right].$$
2) On a $\forall n \in \mathbb{N} : I_n \geq 0$. Or $I_n = e - nI_{n-1} \geq 0$, d'où
$$0 \leq I_{n-1} \leq \frac{e}{n}.$$
Par passage à la limite, on a
$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.$$

Solution 19. 1) On distingue deux cas :

1er cas $a \neq b$ **:** On a
$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right).$$
Ainsi
$$I_1 = \frac{1}{b-a}\left[\ln(\frac{x+a}{x+b})\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}.$$
2ème cas $a = b$ **:** On a
$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+a)^2} \; dx.$$
On effectue le changement de variable $x + a = t$ pour avoir
$$I_1 = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2} \; dt = [\frac{-1}{t}]_a^{+\infty} = \frac{1}{a}.$$

2) On discute suivant α :

1er cas $\alpha > 1$: On a
$$I_2 = [\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}]_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1}.$$
L'intégrale converge.

2ème cas $\alpha < 1$: On a
$$I_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-\alpha+1}(x^{-\alpha+1}-1) = +\infty.$$
L'intégrale diverge.

3ème cas $\alpha = 1$: On a
$$I_2 = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty.$$
L'intégrale diverge.

3) On fait le changement de variable $t = x^2$, puis on intègre par parties :
$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt = -\frac{1}{4}\left[\frac{\ln t}{1+t}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+t)} \\ &= \frac{1}{4}\left[\ln\frac{t}{1+t}\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln 2}{4}. \end{aligned}$$

4) Le trinôme peut s'écrire comme $x^2+x+1 = (x+1/2)^2+3/4$. D'où
$$I_4 = \int\frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}).$$
Ainsi
$$I_4 = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$
5) La décomposition donne
$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1},$$
avec $A = 1$, $B = -1$ et $C = 1$. D'où
$$I_5 = \int\frac{dx}{x^2} - \int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x+1} = -\frac{1}{x} + \ln|\frac{x+1}{x}|.$$
Ainsi
$$I_5 = \left[-\frac{1}{x}+\ln|\frac{x+1}{x}|\right]_1^{+\infty} = 1-\ln 2.$$

Correction des exercices du Chapitre 8

Solution 20. 1) L'équation sans second membre est (E_0) : $y'+2xy = 0$. La solution générale de (E_0) est
$$x \mapsto \lambda e^{-x^2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$
Il est évident que $y = 1$ est une solution particulière de (E).
Ainsi la solution générale de (E) est
$$x \mapsto \lambda e^{-x^2}+1, \lambda \in \mathbb{R}.$$
2) L'équation (E') est définie pour $x \in \mathbb{R}$. L'équation sans second membre est (E'_0) : $xy'-2y = 0$. La solution générale de (E'_0) est
$$x \mapsto \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R}.$$
Une solution particulière de (E') obtenue par la méthode de variation de la constante est $y(x) = \frac{-2}{3}\sqrt{x}$.
Ainsi la solution générale de (E') est
$$x \mapsto \lambda x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solution 21. On a
$$y' + xy + (x^2 - \frac{1}{2})y^3 = 0.$$
Posons $Z = y^{1-3} = y^{-2}$. L'équation s'écrit
$$\frac{y'}{y^3} + \frac{x}{y^2} + (x^2 - \frac{1}{2}) = 0.$$
(On a divisé par y^3).
Ainsi
$$-\frac{Z'}{2} + xZ = -x^2 + \frac{1}{2}. \tag{8.1}$$
L'équation sans second membre associée est
$$Z' - 2xZ = 0 \ ;$$
sa solution générale est $Z(x) = \lambda e^{x^2}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière de (11.2) est $x \mapsto -x$.
Enfin, la solution générale de (11.2) est
$$x \mapsto \lambda e^{x^2} - x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
On conclut que la solution générale de l'équation de Bernoulli est
$$y(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{\lambda e^{x^2} - x}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solution 22. Posons $Y = y - y_1$, donc $y = Y + y_1$. Puisque y est solution de l'équation de Riccati, alors
$$(Y + y_1)' = a(x)(Y + y_1)^2 + b(x)(Y + y_1) + c(x)$$
ou, en développant,
$$\begin{aligned} Y' + y_1' &= a(x)[Y^2 + 2y_1 Y + y_1^2] + b(x)(Y + y_1) + c(x) \\ &= a(x)Y^2 + [b(x) + 2a(x)y_1]Y + a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x) \end{aligned}$$
ou encore
$$Y' = a(x)Y^2 + [b(x) + 2a(x)y_1]Y.$$
C'est une équation de Bernoulli. Pour la résoudre, on pose $Z = 1/Y = Y^{-1}$.

2) Soit l'équation $y' - (x-y)^2 + 1 = 0$. Une solution particulière affine est $x \mapsto x + \sqrt{2}$. Utilisons le changement de variable $Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{y - x - \sqrt{2}}$; on a
$$Z' + 2\sqrt{2}Z + 1 = 0 \ ;$$
sa solution générale est
$$x \mapsto \lambda e^{-2\sqrt{2}x} - \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$
On conclut que la soltion générale de l'équation de Riccati est
$$x \mapsto x + \sqrt{2} + \frac{1}{\lambda e^{-2\sqrt{2}x} - \frac{1}{2\sqrt{2}}}.$$

Solution 23. 1) L'équation caractéristique $r^2 - 3 = 0$ admet les deux racines 0 et 3. La solution générale de l'équation sans second membre $y'' - 3y' = 0$ est
$$x \mapsto A + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$
Une solution particulière de (E) est de la forme $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x$. Après calcul, on trouve $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\mu = -\frac{1}{4}$. Ainsi la solution générale de (E) est
$$x \mapsto A + Be^{3x} + (-\frac{x}{4} - \frac{1}{4})e^x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2) L'équation caractéristique $r^2 + 3r + 2 = 0$ admes les deux racines -1 et -2. La solution générale de l'équation sans second membre $y'' + 3y' + 2y = 0$ est

$$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière de (E') est de la forme $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}$. Après calcul, on trouve $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu = -\frac{7}{24}$. Ainsi la solution générale de (E') est

$$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x} + (\frac{x}{2} - \frac{7}{24})e^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution 24. 1) L'équation sans second membre est

$$(1 + x^2)y' + y = 0 \ ;$$

sa solution générale est $x \mapsto \lambda e^{-\arctan x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Une solution particulière de l'équation avec second membre est $x \mapsto \arctan(x) - 1$.
Enfin, la solution générale de l'équation avec second membre est

$$x \mapsto \arctan(x) - 1 + \lambda e^{-\arctan x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) La solution générale est

$$x \mapsto u(x) - 1 + \lambda e^{-u(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solution 25. 1) De la relation

$$y = z + e^{2x},$$

on déduit, par dérivation des deux membres,

$$y' = z' + 2e^{2x}.$$

En substituant dans (E) ces valeurs de y et y', il vient

$$2(z' + 2e^{2x}) + z + e^{2x} = 5e^{2x},$$

ou, après simplification,

$$(E_1): \qquad 2z' + z = 0.$$

2) L'équation (E_1) pouvant s'écrire ainsi

$$z' = -\frac{z}{2},$$

sa solution générale est donnée par

$$z = \lambda e^{-\frac{x}{2}},$$

avec λ une constante arbitraire.
La solution générale de l'équation (E) est donc

$$y = \lambda e^{-\frac{x}{2}} + e^{2x}.$$

Solution 26. 1) On pose

$$y = z + a\cos x \quad ;$$

on a

$$y' = z' - a\sin x \quad \text{et} \quad y'' = z'' - a\cos x.$$

En portant dans l'équation (E), on trouve

$$z'' - a\cos x + 4(z + a\cos x) = 3\cos x,$$

ou bien

$$z'' + 4z = 3(1 - a)\cos x.$$

Si on prend $a = 1$, cette équation se réduit à

$$(E_1): \quad z'' + 4z = 0.$$

2) La solution générale de l'équation (E_1) étant $z = A\cos 2x + B\sin 2x$, celle de l'équation (E) est

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x + \cos x.$$

Par ailleurs, on a

$$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - \sin x.$$

En exprimant que $y(0) = 0$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$, il vient

$$\left\{\begin{array}{rcr} 0 & = & A+1 \\ 0 & = & -2B-1 \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{rcr} A & = & -1 \\ B & = & -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

La solution cherchée est donc $y = -\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$.

Solution 27. 1) On a $y' = e^x$ et $y'' = e^x$, donc

$$y'' - 4y' + 3y = e^x - 4e^x + 3e^x = 0.$$

2) De la relation $y = ze^x$, on déduit

$$y' = z'e^x + ze^x = (z' + z)e^x$$

et

$$y'' = (z'' + z')e^x + (z' + z)e^x = (z'' + 2z' + z)e^x,$$

donc

$$y'' - 4y' + 3y = [(z'' + 2z' + z) - 4(z' + z) + 3z]e^x = (z'' - 2z')e^x\ ;$$

par conséquent, l'équation cherchée est

$$(E_2): \qquad z'' - 2z' = 0.$$

- Une première intégration donne

$$z' - 2z = 2A \quad \text{ou} \quad z' = 2(z + A),$$

ou encore

$$(z + A)' = 2(z + A),$$

avec A une constante arbitraire.
Une seconde intégration donne

$$z + A = Be^{2x},$$

Soit enfin, en changeant la constante A en $-A$,

$$z = A + Be^{2x}.$$

La solutin générale de (E_1) est

$$y = ze^x = (A + Be^{2x})e^x,$$

i.e.

$$y = Ae^x + Be^{3x}.$$