

Федеральное агентство морского и речного транспорта

Федеральное государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Морской государственный университет им. адм. Г. И. Невельского»

С. Б. Лебединская, Ю. Д. Воробьев

## **МЕХАНИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ**

Учебное пособие

Рекомендовано Дальневосточным региональным отделением  
учебно-методического объединения по образованию  
в области эксплуатации водного транспорта (ДВ РОУМО)  
в качестве учебного пособия для курсантов и студентов  
морских специальностей вузов региона

Владивосток  
2011

**УДК – 531 (07) Л 332**

**Лебединская, С. Б.** Механика поступательного и вращательного движения [Текст] : учеб. пособие / С. Б. Лебединская, Ю. Д. Воробьев. – Владивосток : Мор. гос. ун-т, 2011. – 86 с.

Пособие содержит указания к 15 типовым лабораторным работам по теме "Физические основы классической механики". Поясняется теория физических явлений, рассматриваемых в лабораторных работах, приводятся изложенные достаточно подробно и доходчиво выводы расчетных формул. Даны схемы установок, методика выполнения работ, к каждой работе прилагаются перечень контрольных вопросов и список рекомендуемой литературы. Пособие также содержит в очень краткой форме материал по расчету погрешностей и оформлению результатов измерений.

Пособие написано в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта по курсу физики для технических учебных заведений.

Предназначено для студентов и курсантов технических специальностей вузов. Ил. 42, табл. 20, библиогр. 7 назв.

Рецензенты:

А. В. Безвербный, д-р физ.-мат. наук, доцент,  
ИАПУ ДВО РАН;

Е. Н. Лебедева, канд. физ.-мат. наук, доцент, ДВГУ.

**ISBN 978-5-8343-\_\_\_\_\_**

© Лебединская С. Б., Воробьев Ю. Д., 2011

© Морской государственный университет  
им. адм. Г. И. Невельского, 2011.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	4
Расчет погрешностей и представление результатов измерений.....	5
Типы погрешностей .....	5
Расчет погрешностей при прямых измерениях .....	5
Расчет погрешностей при косвенных измерениях .....	8
Как правильно округлить и записать результат.....	10
Как строить графики .....	11
Таблица коэффициентов Стьюдента .....	12
Простейшие измерительные приборы .....	13
Штангенциркуль.....	13
Микрометр.....	15
Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (краткая теория к работам 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.14).....	18
Лабораторные работы .....	24
1.0. Определение плотности твердого тела.....	24
1.1. Исследование основного закона динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека (вариант I – постоянным остается момент инерции). .....	24
1.2. Определение момента инерции махового колеса.....	27
1.3. Определение момента инерции тела методом крутильных колебаний .....	30
1.4. Определение момента инерции физического маятника .....	33
1.5. Исследование основного закона динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека (вариант II – сравниваются рассчитанное и измеренное значения момента инерции) .....	37
1.6. Определение радиуса кривизны зеркала методом катающегося шарика.....	40
1.7. Изучение удара шаров.....	43
1.8. Определение момента инерции тела и момента сил трения в подшипнике.....	48
1.9. Изучение прецессионного движения гироскопа .....	51
1.10. Определение ускорения свободного падения с помощью математического и физического маятников .....	55
1.11. Исследование основного закона динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека (вариант III – постоянным остается момент силы).....	63
1.12. Определение скорости полета пули с помощью крутильного маятника .....	67
1.13. Определение коэффициентов трения скольжения и качения .....	72
1.14. Изучение зависимости момента инерции тела от распределения его массы относительно оси вращения .....	79

## ВВЕДЕНИЕ

Лабораторные работы преследуют несколько целей. Они позволяют студентам (курсантам): 1) познакомиться с простейшими измерительными приборами; 2) приобрести навыки в проведении эксперимента и обработке его результатов; 3) применить теоретические знания на практике.

Результат измерений в каждой лабораторной работе должен быть представлен с учетом погрешности (доверительного интервала). Поэтому, прежде чем выполнять лабораторную работу, необходимо изучить параграф "Расчет погрешностей и представление результатов измерений". Формулы и рисунки в этом параграфе нумеруются так: (П.1), (П.2) и т. д., где буква "П" значит "погрешности".

В параграфе "Простейшие измерительные приборы" формулы и рисунки нумеруются по аналогии с предыдущим параграфом: (И.1) и т. д., где буква "И" значит "измерения".

Так как выполнение лабораторных работ часто опережает знакомство с теоретическим материалом на лекциях, то методические указания содержат (в очень кратком изложении) необходимый теоретический материал. Теоретический материал по кинематике и динамике точки включен в указания к соответствующим работам, а теоретический материал по кинематике и динамике твердого тела выделен в отдельный параграф под заголовком "Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси". Формулы и рисунки в этом параграфе имеют номера (Т.1), (Т.2) и т. д., где буква "Т" значит "теория".

В номерах самих лабораторных работ первая цифра обозначает раздел курса физики ("1" значит, что данная лабораторная работа относится к первому разделу курса физики – механике – и выполняется в лаборатории механики). Остальные цифры – номер лабораторной работы в данной лаборатории. Например, работа 1.12 значит, что речь идет о работе № 12 в разделе "механика". В оглавлении в разделе "Лабораторные работы" номер параграфа совпадает с порядковым номером работы в лаборатории.

Номера формул в изложении самих лабораторных работ не содержат указания на раздел. Например, формула (12.3) – это третья формула в работе № 12.

# РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

## Типы погрешностей

Погрешности (ошибки), допускаемые при измерениях, можно разделить на три типа: грубые, систематические и случайные.

Грубые ошибки, или промахи – это очевидно ошибочные результаты. Допускаются, в основном, из-за невнимательности.

Систематические ошибки могут быть обусловлены неисправностью измерительных приборов (например, смещением нуля) или неверно выбранным методом измерений. Эти ошибки остаются постоянными на протяжении всей серии измерений, поэтому их нельзя обнаружить путем повторных измерений. Но систематические ошибки можно учесть или устранить, или сделать пренебрежимо малыми.

Случайные ошибки могут быть вызваны самыми разными причинами, учесть которые невозможно (случайное дуновение ветра, пылинки,

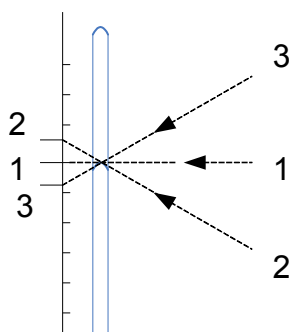


Рис. П.1

попавшая на чашку весов, и т. д.). Главным же образом, случайные погрешности обусловлены несовершенством измерительных приборов и наших органов чувств. Например, при измерении температуры мы получаем разные результаты в зависимости от направления взгляда (рис. П.1). Причем нет способа определить, какое из направлений (1-1, 2-2 или 3-3) "самое правильное".

Случайные погрешности нельзя заранее предвидеть и исключить, их надо уметь оценивать. Однако влияние этих погрешностей можно уменьшить, увеличивая число измерений.

Ниже рассматриваются только случайные ошибки.

## Расчет погрешностей при прямых измерениях

Допустим, что мы проводим серию из  $n$  измерений одной и той же величины  $x$ . Из-за наличия случайных ошибок отдельные значения  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  неодинаковы, и в качестве наилучшего значения искомой величины выбирается среднее арифметическое  $\langle x \rangle$ , равное арифметической сумме всех измеренных значений, деленной на число измерений

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad (\text{П.1})$$

где  $\sum$  – знак суммы,  $i$  – номер измерения,  $n$  – число измерений.

Итак,  $\langle x \rangle$  – значение, наиболее близкое к истинному. Истинного же значения никто не знает. Можно лишь рассчитать интервал  $\Delta x$  вблизи  $\langle x \rangle$ ,

в котором истинное значение может находиться с некоторой степенью вероятности  $p$ . Этот интервал называется **доверительным интервалом**, или **абсолютной погрешностью**. Вероятность, с которой истинное значение попадает в этот интервал, называется **доверительной вероятностью**, или **коэффициентом надежности** (так как знание доверительной вероятности позволяет оценить степень надежности полученного результата). При расчете доверительного интервала необходимая степень надежности задается заранее. Она определяется практическими потребностями (например, к деталям мотора самолета предъявляются более жесткие требования, чем к лодочному мотору). Очевидно, для получения большей надежности требуется увеличение числа измерений и их тщательности.

Благодаря тому, что случайные погрешности отдельных измерений  $(\langle x \rangle - x_i)$  подчиняются вероятностным закономерностям, методы математической статистики и теории вероятностей позволяют рассчитать среднюю квадратичную погрешность среднего арифметического значения  $\Delta x_{\text{сл}}$ . Запишем без доказательства формулу для расчета  $\Delta x_{\text{сл}}$  при малом числе измерений ( $n < 30$ ). Формулу называют формулой Стьюдента

$$\Delta x_{\text{сл}} = \pm t_{n,p} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}}, \quad (\text{П.2})$$

где  $t_{n,p}$  – коэффициент Стьюдента, зависящий от числа измерений  $n$  и доверительной вероятности  $p$ .

Коэффициент Стьюдента находят по таблице, приведенной ниже, предварительно определив, исходя из практических потребностей (как было сказано выше), величины  $n$  и  $p$ .

При обработке результатов лабораторных работ достаточно провести 3–5 измерений, а доверительную вероятность принять равной 0,68.

Но бывает так, что при многократных измерениях получаются одинаковые значения величины  $x$ . Например, 5 раз измерили диаметр проволоки и 5 раз получили одно и то же значение. Так вот, это вовсе не значит, что погрешности нет. Это говорит только о том, что случайная погрешность каждого измерения меньше *точности* прибора  $\delta$ , которую также называют *приборной*, или *инструментальной*, погрешностью. Инструментальная погрешность прибора  $\delta$  определяется по классу точности прибора, указанному в его паспорте, либо указывается на самом приборе. А иногда принимается равной цене деления прибора (цена деления прибора – значение его самого маленького деления) либо половине цены деления (если на глаз приблизительно можно определить половину цены деления прибора).

Так как каждое из значений  $x_i$  получено с погрешностью  $\delta$ , то полный доверительный интервал  $\Delta x$ , или абсолютную погрешность измерения, рассчитывают по формуле

$$\Delta x = \pm \sqrt{\Delta x_{\text{сл}}^2 + \delta^2}. \quad (\text{П.3})$$

Заметим, что если в формуле (П.3) одна из величин хотя бы в 3 раза больше другой, то меньшей пренебрегают.

Сама по себе абсолютная погрешность не отражает качества проведенных измерений. Только по информации "абсолютная погрешность равна 2 мм" нельзя судить о том, насколько хорошо было проведено данное измерение. Например, при измерении расстояния между городами 2 мм – очень маленькая погрешность, а при измерении диаметра цилиндра микрометром 2 мм – очень большая погрешность. Представление о качестве проведенных измерений дает **относительная погрешность**  $\varepsilon$ , равная отношению абсолютной погрешности к среднему значению измеряемой величины

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} 100 \%. \quad (\text{П.4})$$

Из (П.4) следует, что относительная погрешность показывает, какую долю составляет абсолютная погрешность от измеренного значения. Как правило, относительную погрешность выражают в процентах.

**Рассмотрим пример.** Пусть диаметр шара  $d$  измеряется с помощью микрометра, инструментальная погрешность которого  $\delta = 0,01$  мм. В результате трех измерений получились следующие значения диаметра:

$$d_1 = 2,42 \text{ мм}, \quad d_2 = 2,44 \text{ мм}, \quad d_3 = 2,48 \text{ мм}.$$

По формуле (П.1) определяют среднее арифметическое значение диаметра шара

$$\langle d \rangle = \frac{2,42 + 2,44 + 2,48}{3} = 2,447 \approx 2,45 \text{ мм}.$$

Затем по формуле (П.2) рассчитывают случайную погрешность измерения  $\Delta d_{\text{сл}}$ , предварительно определив по таблице коэффициентов Стьюдента (с. 12) коэффициент  $t_{n,p}$  для трех измерений. После чего, подставив в (П.2)  $t_{n,p} = 1,3$ , находят

$$\Delta d_{\text{сл}} = \pm 1,3 \sqrt{\frac{(2,42 - 2,45)^2 + (2,44 - 2,45)^2 + (2,48 - 2,45)^2}{3(3-1)}} = 0,023 \text{ мм}.$$

Так как полученная случайная погрешность всего в два раза превышает приборную погрешность, то при нахождении абсолютной погрешности измерения  $\Delta d$  по (П.3) следует учитывать и случайную погрешность, и погрешность прибора, т. е.

$$\Delta d = \pm \sqrt{0,023^2 + 0,01^2} \text{ мм} = \pm 0,025 \text{ мм} \approx \pm 0,03 \text{ мм}.$$

Погрешность округлили до сотых миллиметра, так как точность результата не может превышать точность измерительного прибора, которая в данном случае составляет одну сотую миллиметра.

Итак, диаметр проволоки равен

$$d = (2,45 \pm 0,03) \text{ мм.}$$

Данная запись говорит о том, что истинное значение диаметра шара с вероятностью 68 % лежит в интервале  $(2,42 \div 2,48)$  мм.

Относительная погрешность  $\varepsilon$  полученного значения согласно (П.4) составляет

$$\varepsilon = \pm \frac{0,03\text{мм}}{0,245\text{мм}} = \pm 0,012 = \pm 1,2\% .$$

### Расчет погрешностей при косвенных измерениях

В большинстве случаев конечной целью лабораторной работы является вычисление искомой величины с помощью некоторой формулы, в которую входят величины, измеряемые прямым путем. Такие измерения называются косвенными. В качестве примера приведем формулу плотности твердого тела цилиндрической формы

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}, \quad (\text{П.5})$$

где  $\rho$  – плотность тела,  $m$  – масса тела,  $d$  – диаметр цилиндра,  $h$  – его высота.

Зависимость (П.5) в общем виде можно представить следующим образом:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (\text{П.6})$$

где  $Y$  – косвенно измеряемая величина, в формуле (П.5) это плотность  $\rho$ ;  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – прямо измеряемые величины, в формуле (П.5) это  $m, d$ , и  $h$ .

Результат косвенного измерения не может быть точным, поскольку результаты прямых измерений величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  всегда содержат в себе погрешность. Поэтому при косвенных измерениях, как и при прямых, необходимо оценить доверительный интервал (абсолютную погрешность) полученного значения  $\Delta Y$  и относительную погрешность  $\varepsilon$ .

При расчете погрешностей в случае косвенных измерений удобно придерживаться такой последовательности действий:

1) получить средние значения каждой прямо измеряемой величины  $\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle$ ;

2) получить среднее значение косвенно измеряемой величины  $\langle Y \rangle$ , подставив в формулу (П.6) средние значения прямо измеряемых величин;

3) провести оценки абсолютных погрешностей прямо измеряемых величин  $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_n$ , воспользовавшись формулами (П.2) и (П.3);

4) основываясь на явном виде функции (П.6), получить формулу для расчета абсолютной погрешности косвенно измеряемой величины  $\Delta Y$  и рассчитать ее;

5) рассчитать относительную погрешность измерения  $\varepsilon = \Delta Y / \langle Y \rangle$ ;

6) записать результат измерения с учетом погрешности.

Ниже без вывода приводится формула, позволяющая получить формулы для расчета абсолютной погрешности, если известен явный вид функции (П.6):

$$\Delta Y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Y}{\partial X_i} \Delta X_i \right)^2} = \pm \sqrt{\left( \frac{\partial Y}{\partial X_1} \Delta X_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial X_2} \Delta X_2 \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial Y}{\partial X_n} \Delta X_n \right)^2}, \quad (\text{П.7})$$

где  $\partial Y / \partial X_i$  и т. д. – частные производные от  $Y$  по всем прямо измеряемым величинам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (когда берется частная производная, например по  $X_1$ , то все остальные величины  $X_i$  в формуле считаются постоянными),  $\Delta X_i$  – абсолютные погрешности прямо измеряемых величин, вычисленные согласно (П.3).

Рассчитав  $\Delta Y$ , находят относительную погрешность  $\varepsilon = \Delta Y / \langle Y \rangle$ .

Однако если функция (П.6) является одночленом, то намного легче сначала рассчитать относительную погрешность, а затем уже абсолютную.

Действительно, разделив обе части равенства (П.7) на  $Y$ , получим

$$\varepsilon = \frac{\Delta Y}{Y} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Y}{Y \partial X_i} \Delta X_i \right)^2}.$$

Но так как  $\frac{\partial Y}{Y \partial X} = \frac{\partial(\ln Y)}{\partial X}$ , то можно записать

$$\varepsilon = \frac{\Delta Y}{Y} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial(\ln Y)}{\partial X_i} \Delta X_i \right)^2} = \pm \sqrt{\left( \frac{\partial(\ln Y)}{\partial X_1} \Delta X_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial(\ln Y)}{\partial X_2} \Delta X_2 \right)^2 + \dots} \quad (\text{П.8})$$

Теперь, зная относительную погрешность, определяют абсолютную  $\Delta Y = \varepsilon \langle Y \rangle$ .

В качестве примера получим формулу для расчета погрешности плотности вещества, определяемой по формуле (П.5). Поскольку (П.5) является одночленом, то, как сказано выше, проще сначала рассчитать относительную погрешность измерения по (П.8). В (П.8) под корнем имеем сумму квадратов частных производных от *логарифма* измеряемой величины, поэтому сначала найдем натуральный логарифм  $\rho$ :

$$\ln \rho = \ln 4 + \ln m - \ln \pi - 2 \ln d - \ln h,$$

а потом уже воспользуемся формулой (П.8) и получим, что

$$\varepsilon = \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} = \pm \sqrt{\left( \frac{\Delta m}{\langle m \rangle} \right)^2 + \left( \frac{2 \Delta d}{\langle d \rangle} \right)^2 + \left( \frac{\Delta h}{\langle h \rangle} \right)^2}. \quad (\text{П.9})$$

Как видно, в (П.9) используются средние значения прямо измеряемых величин и их абсолютные погрешности, рассчитанные методом прямых измерений по (П.3). Погрешность, вносимую числом  $\pi$ , не учитывают, поскольку ее значение всегда можно взять с точностью, превышающей точность измерения всех других величин. Рассчитав  $\epsilon$ , находим  $\Delta\rho = \epsilon\langle\rho\rangle$ .

Если косвенные измерения являются независимыми (условия каждого последующего эксперимента отличаются от условий предыдущего), то значения величины  $Y$  вычисляются для каждого отдельного эксперимента. Произведя  $n$  опытов, получают  $n$  значений  $Y_i$ . Далее, принимая каждое из значений  $Y_i$  (где  $i$  – номер опыта) за результат прямого измерения, вычисляют  $\langle Y \rangle$  и  $\Delta Y$  по формулам (П.1) и (П.2) соответственно.

Окончательный результат как прямых, так и косвенных измерений должен выглядеть так:

$$Y = (\langle Y \rangle \pm \Delta Y) 10^m u, \quad (\text{П.10})$$

где  $m$  – показатель степени,  $u$  – единицы измерения величины  $Y$ .

### Как правильно округлить и записать результат

Полученный результат необходимо округлить, так как излишне большое число десятичных знаков создает ложное впечатление о большой точности результата. Например, среднее значение измеряемой величины  $\langle m \rangle = 7,628$  кг. Это совсем не значит, что мы нашли величину с точностью до грамма (цифр на табло калькулятора могло оказаться и больше).

*Но...округляют результат только после расчета и округления абсолютной погрешности.*

Абсолютную погрешность округляют до одной, редко двух значащих цифр, а полученный результат округляют в соответствии с погрешностью, т. е. так, чтобы число знаков после запятой в записи среднего значения и погрешности было одинаковым. Например, если оказалось, что  $\Delta m = \pm 0,0259$  кг, значит, погрешность таится уже во втором знаке после запятой, он и должен быть последним в записи результата. В этом случае и среднее значение и погрешность следует округлить до сотых и результат представить в виде

$$m = (7,63 \pm 0,03) \text{ кг.}$$

Другой пример. Предположим, что в результате расчетов получили  $\langle V \rangle = 1758,68 \text{ мм}^3$ , а  $\Delta V = \pm 42,51 \text{ мм}^3$ . Так как погрешность составляет десятки кубических миллиметров, то и погрешность, и среднее значение округляют до десятков кубических миллиметров. Результат в этом случае можно записать как в виде

$$V = (1760 \pm 40) \text{ мм}^3,$$

так и в виде

$$V = (1,76 \pm 0,04) \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Однако вторая запись предпочтительней, потому что при первом же взгляде на результат ясен порядок измеренной величины, а именно видно, что измеренный объем составляет тысячи кубических миллиметров. Когда значение величины дается готовым (берется из таблицы) без указания погрешности, то погрешность берется равной единице последнего разряда (редко его половине). Например, в таблице  $\rho = 7,86 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Следовательно,  $\Delta\rho = 0,01 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  или  $\Delta\rho = 0,005 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

Итак: 1) значение измеренной величины округляют после расчета и округления погрешности, тем не менее, переписывать все цифры с табло калькулятора не следует, но оставить 3-4 значащих цифры после запятой имеет смысл; 2) до запятой предпочтительно оставлять один знак, чтобы при первом же взгляде на результат был ясен порядок измеренной величины.

Значащие цифры в приближенных вычислениях – все цифры числа, начиная с первой слева, отличной от нуля, до последней, за правильность которой можно ручаться. Например, в записи результата взвешивания 0,03020 кг значащими цифрами являются 3, 0, 2 и 0.

### Как строить графики

Графики строят в основном для того, чтобы наглядно представить результаты эксперимента, поэтому они должны быть предельно ясными.

Прежде чем строить график, необходимо указать величины, зависимость между которыми изучается, и масштаб их измерения. Экспериментальные данные следует отметить жирными, хорошо выделяющимися точками или крестиками (рис. П.2). Затем через них провести "наилучшую" плавную кривую так, чтобы экспериментальные точки располагались как можно ближе к ней. Соединять точки ломаной линией нельзя, так как ломаная линия указывала бы на то, что зависимость между величинами  $y$  и  $x$  имеет скачкообразный характер, что маловероятно.

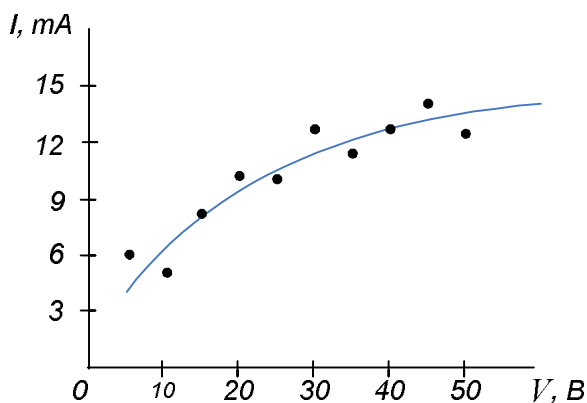
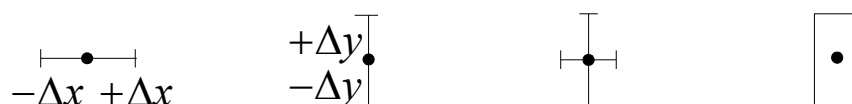


Рис. П.2

Если на графике имеется теоретическая кривая, то "плавную" кривую через экспериментальные точки лучше не проводить. Она может мешать сравнению эксперимента с теорией.

Чтобы различать экспериментальные данные, относящиеся к разным условиям или веществам, можно пользоваться разными значками: темными или светлыми кружками, крестиками и т. д. Но если график начинает выглядеть загроможденным, то лучше для каждой группы данных построить отдельный график.

Ошибки в экспериментальных значениях на графиках можно указывать следующим образом:



Поскольку нанесение таких значков – дополнительный труд и приводит к усложнению графика, то их наносят на график, когда информация об ошибках действительно нужна. Например, на рис. П.3 изображена зависимость, которую можно признать прямолинейной, только рассчитав и обозначив погрешности  $\Delta y$ .

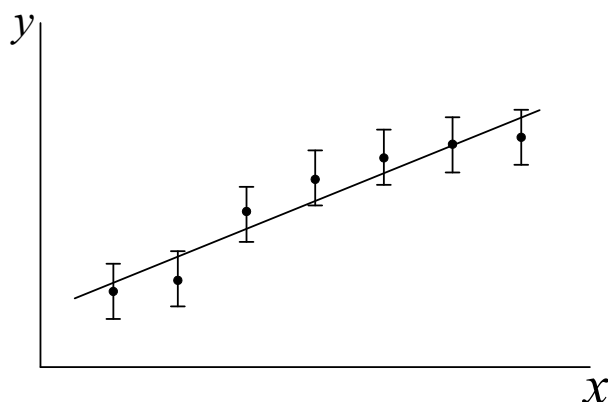


Рис. П.3

Таблица коэффициентов Стьюдента  $t_{n,p}$

$p \backslash n$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,68	0,8	0,9	0,95	0,99
2	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	63,7
3	0,29	0,45	0,62	1,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	9,9
4	0,28	0,42	0,58	1,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	5,8
5	0,27	0,41	0,57	1,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	4,6
6	0,27	0,41	0,56	1,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	4,0
7	0,27	0,40	0,55	1,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,7

## Контрольные вопросы

1. Что дает среднее значение измеряемой величины и что можно сказать о ее истинном значении?
2. Поясните, что такое доверительный интервал и доверительная вероятность.
3. Что такое относительная погрешность? Каков ее физический смысл?
4. Примените формулы (П.7) и (П.8) к конкретным случаям, предложенным преподавателем.
5. Как правильно округлить и записать результат?

## Литература

1. Зайдель, А. Н. Ошибки измерений физических величин : учеб. пособие / А. Н. Зайдель. Изд. 2-е. – СПб. : Лань, 2005. – 112 с.
2. Денисов, И. В. Обработка и представление результатов измерений: учеб. пособие / И. В. Денисов, Л. М., Сырых. – Владивосток : ДВГМА, 2000. – 37 с.
3. Мецик, М. С. Методы обработки результатов экспериментальных измерений / М. С. Мецик. – Иркутск : ИГУ, 1972. – 115 с.
4. Сквайрс Дж. Практическая физика / Дж. Сквайрс. Пер. с англ. под ред. Е. М. Лейкина. – М. : Мир, 1971. – 245 с.

## ПРОСТЕЙШИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ

### Штангенциркуль

Штангенциркуль (рис. И.1) позволяет повысить точность измерений в 10–20 раз по сравнению с обычной (миллиметровой) линейкой. Отсчетное приспособление штангенциркуля состоит из миллиметровой линейки 1, и нониуса 2. На одном конце линейки имеется неподвижный упор 3, а с нониусом скреплен подвижный упор 4. Нониус представляет собой небольшую линейку, скользящую вдоль основной шкалы.

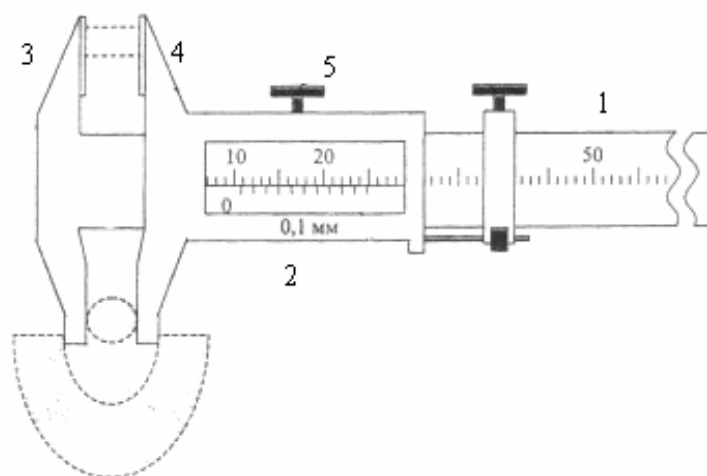


Рис. И.1

Пользуются штангенциркулем так. Когда упоры 3 и 4 соприкасаются, ноль линейки и ноль нониуса должны совпадать. Для измерения тело помещают между упорами, которые без сильного нажима сдвигают до соприкосновения с предметом. Полученный размер фиксируется с помощью стопорного винта 5. Результат считывается по линейке и нониусу. Длина тела равна числу целых миллиметров, отсчитываемых нулевой риской нониуса (на рисунке – 10 мм), плюс число десятых долей миллиметра. Число десятых долей равно номеру риски нониуса (не считая нулевой), наиболее точно совпадающей с делением основной шкалы, умноженному на точность нониуса (на рисунке 0,1 мм). В случае, представленном на рисунке, наиболее точно с делением шкалы совпадает третья риска. Следовательно, длина измеряемого предмета составляет 10,8 мм.

**Рассмотрим нониус подробнее.** Нониус (линейный или круговой) изготавливают таким образом, чтобы длина  $N$  делений нониуса равнялась длине  $(kN - 1)$  делений шкалы, где  $k$  – целое число. Если обозначить цену деления основной шкалы  $x$ , а цену деления нониуса –  $y$ , то

$$(kN - 1)x = Ny.$$

Разность  $(x - y)$  называется точностью нониуса. Точность нониуса есть инструментальная погрешность штангенциркуля.

Простейший нониус, для которого  $k = 1$ , а  $N = 10$ , изображен на рис. И.2. Для определенности принято, что цена деления основной шкалы  $x = 1$  мм. В этом случае для изготовления нониуса надо 9 мм разделить на 10 равных частей. Тогда одно деление нониуса  $y = 0,9$  мм, а его точность  $(x - y) = 0,1$  мм.



Рис. И.2

А теперь с помощью штангенциркуля, изображенного на рис. И.2, измерим длину какого-нибудь предмета (рис. И.3).

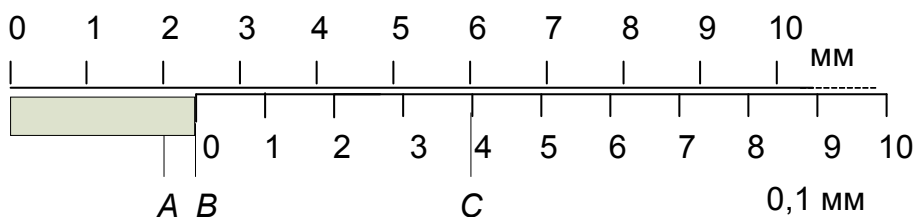


Рис. И.3

На рис. И.3 начало предмета совпадает с нулем основной шкалы, а конец находится между 2 и 3-й рисками шкалы. Таким образом, длина предмета составляет 2 мм плюс отрезок  $AB$ . Длину отрезка  $AB$  находят с помощью нониуса, определив номер риски нониуса  $n$  (не считая нулевую), наиболее точно совпадающей с риской шкалы. На рис. И.3 наиболее хорошо с риской шкалы совпадает четвертая риска нониуса. Это значит, что отрезок  $AC$  включает в себя отрезок  $AB$  и четыре деления нониуса. В общем виде можно записать:

$$AC = AB + nu,$$

где  $n$  – номер риски нониуса, которая совпала с риской шкалы.

Подставив в последнюю формулу числовые значения величин, соответствующие рис. И.3, получим:

$$(6 - 2) \text{ мм} = AB + 4 \cdot 0,9 \text{ мм}.$$

$$\text{Откуда} \quad AB = 4 \text{ мм} - 4 \cdot 0,9 \text{ мм} = 0,4 \text{ мм},$$

т. е. длина отрезка  $AB$  равна номеру риски нониуса, наиболее точно совпавшей с делением основной шкалы, умноженному на точность нониуса.

Длина же предмета, изображенного на рис. И.3, составляет 2,4 мм.

### Микрометр

Микрометр позволяет повысить точность измерений по сравнению со штангенциркулем на порядок, т. е. в 10 раз. Микрометры бывают нескольких типов: для наружных измерений, микрометрический глубиномер и микрометрический нутромер.

Микрометр для наружных измерений изображен на рис. И.4. Для измерения предмет помещают между неподвижным упором 1 и подвижным торцом микрометрического винта 2. Микрометрический винт, жестко связанный с барабаном 3, перемещается внутри полого неподвижного цилиндра 4. Микрометрический винт имеет шаг 0,5 мм.

Отсчетное устройство микрометра состоит из двух шкал – горизонтальной и круговой. Горизонтальная шкала, размещенная на неподвижном цилиндре, вдоль которого перемещается барабан, имеет цену деления 0,5 мм. Она представляет собой двойную шкалу, нанесенную по обе стороны продольной черты таким образом, что верхняя шкала сдвинута относительно нижней на 0,5 мм. Следовательно, когда микрометрический винт делает полный оборот, барабан перемещается от верхнего деления до нижнего. Цена деления круговой шкалы, размещенной на конической части барабана, равна 0,01 мм. Действительно, число делений на барабане  $n = 50$ . Значит, при повороте на 50 делений барабан перемещается на 0,5 мм, а при повороте на одно деление – на 0,01 мм.

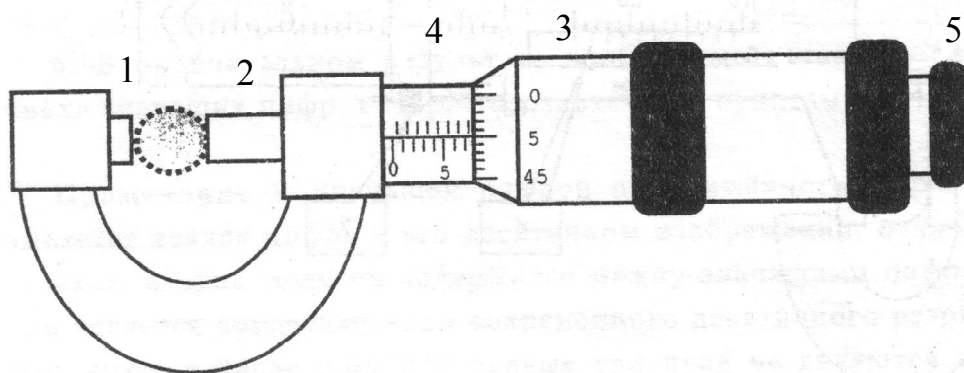


Рис. И.4

Отсчет производится следующим образом: по горизонтальной шкале цилиндра отсчитывается размер измеряемого предмета с точностью до 0,5 мм. Сотые доли миллиметра отсчитываются по круговой шкале барабана. Причем число сотых долей соответствует делению шкалы, расположенному против продольной черты цилиндра. Полученные результаты складываются.

**Внимание:** 1) микрометрический винт необходимо вращать только за трещотку 5 до возникновения характерного звука, это предотвращает поломку прибора; 2) перед измерениями необходимо выявить и оценить возможную систематическую погрешность для того чтобы в дальнейшем ее учитывать; для этого надо привести в соприкосновение упор 1 и винт 2 и снять соответствующее этому положению показание.

Ни в коем случае нельзя пытаться исправить прибор самостоятельно.

## ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

краткая теория к лабораторным работам

1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.14

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся по концентрическим окружностям (рис. Т.1), центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения  $ОО$ . Как видно из рисунка, при вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные его точки, например, точки  $A$  и  $B$ , за один и тот же промежуток времени  $\Delta t$  проходят разные пути  $\Delta S$  ( $AA'$  больше  $BB'$ ). Это значит, что модули их линейных скоростей  $\dot{v}$  и ускорений  $\dot{\alpha}$  различны. Тело же в целом (его центр масс) не проходит никакого пути и не имеет скорости и ускорения. Эти понятия относятся к отдельным точкам тела.

Вращение тела как целого можно характеризовать только такими величинами, которые в данный момент **одинаковы** для всех его точек. Таковыми величинами являются: **угол поворота**  $\Delta\phi$ , **угловая скорость**  $\dot{\omega}$  и

**угловое ускорение**  $\dot{\varepsilon}$ . Действительно, точки  $A$  и  $B$  пробегают разные расстояния по своим окружностям, но поворачиваются на один и тот же угол  $\Delta\varphi$ .

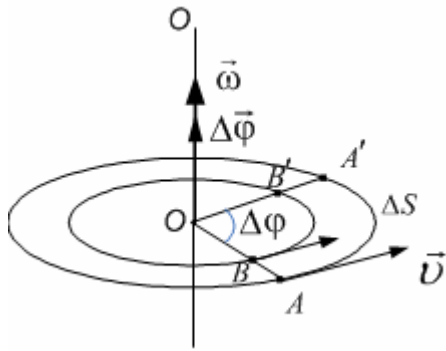


Рис. Т.1

Если тело за промежуток времени  $\Delta t$  повернулось на угол  $\Delta\varphi$ , то его средняя угловая скорость  $\langle\omega\rangle$  определяется соотношением

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad (\text{T.1})$$

из которого следует, что угловая скорость численно равна углу, на который тело поворачивается за единицу времени (за одну секунду, одну минуту и т. д.).

В тех случаях, когда известна зависимость угла поворота от времени, т. е. функция  $\varphi(t)$ , можно найти мгновенную угловую скорость как производную от угла поворота по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (\text{T.2})$$

Если угловая скорость тела изменяется, его вращение характеризуют угловым ускорением. Если за промежуток времени  $\Delta t$  угловая скорость изменилась на  $\Delta\omega$ , то среднее угловое ускорение  $\langle\varepsilon\rangle$  тела определяется соотношением

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad (\text{T.3})$$

из которого видно, что угловое ускорение численно равно изменению угловой скорости в единицу времени.

Мгновенное угловое ускорение можно найти как производную от угловой скорости по времени, если известна функция  $\omega(t)$ ,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (\text{T.4})$$

Угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение – величины векторные (точнее, они являются псевдовекторами, так как связаны с направлением вращения условно). Векторы  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\omega}$  направлены вдоль оси вращения и связаны с направлением вращения правилом правого винта (рис. Т.1), а вектор  $\dot{\varepsilon}$  направлен так же, как вектор  $\dot{\omega}$ , если вращение ускоренное, и противоположно вектору  $\dot{\omega}$ , если движение замедленное.

Угловые величины, характеризующие вращательное движение тела, связаны с линейными величинами, характеризующими движение отдельных точек тела, соотношениями

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}, \quad \omega = \frac{v}{R}, \quad \varepsilon = \frac{a_\tau}{R}, \quad (\text{T.5})$$

где  $R$  – радиусы окружностей, по которым движутся точки,  $a_t$  – тангенциальное ускорение точек.

При изучении вращательного движения наряду с понятиями силы и массы вводят понятия **момента силы** и **момента инерции**.

**Момент силы.** Покажем, что для характеристики вращательного движения понятия силы недостаточно. Пусть к коромыслу (рис. Т.2) слева от оси вращения  $O$  (перпендикулярной плоскости рисунка) на расстоянии  $l_1 = 0,2$  м (плечо силы)

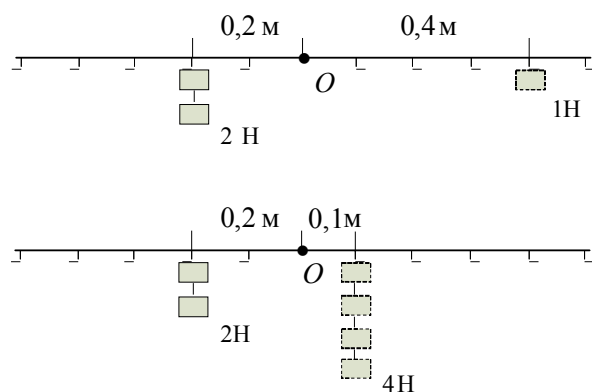


Рис. Т.2

а приложена сила 2 Н, которая стремится повернуть коромысло против часовой стрелки. Опыт говорит о том, что уравновесить коромысло можно несколькими способами. Например, можно справа от оси на расстоянии 0,4 м приложить силу 1 Н (рис. Т.2а), а можно поступить наоборот – приложить силу 4 Н, но на расстоянии 0,1 м от оси вращения (рис. Т.2б).

Итак, вращающий эффект силы в равной степени зависит от силы и от ее плеча (о нем будет сказано ниже). Величина, характеризующая вращающий эффект силы, называется **моментом силы**. Различают момент силы относительно точки и момент силы относительно оси. Для выполнения лабораторных работ достаточно знать момент силы относительно неподвижной оси.

**Момент силы относительно оси** характеризует способность силы вращать тело вокруг данной оси. Предположим, что к телу овальной формы  $N$ , закрепленному на вертикальной оси  $OO$  (рис. Т.3), в точке  $A$  приложена сила  $\vec{F}'$ . Эту силу можно

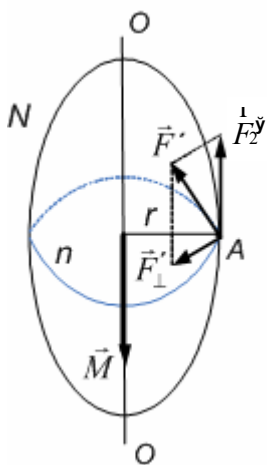


Рис. Т.3

разложить на две составляющие:  $\vec{F}'_2$  – параллельную оси  $OO$ , и  $\vec{F}'_{\perp}$  – лежащую в плоскости  $n$ , перпендикулярной оси  $OO$ . Очевидно, что сила  $\vec{F}'_2$  не может вызвать вращение вокруг оси  $OO$ . Вращение тела вокруг оси  $OO$  может вызвать только сила  $\vec{F}'_{\perp}$ .

Таким образом, момент силы  $\vec{F}'$  относительно оси  $OO$  равен моменту составляющей этой силы  $\vec{F}'_{\perp}$ , лежащей в плоскости, перпендикулярной этой оси.

На рис. Т.4 изображено сечение рассматриваемого тела, перпендикулярное его оси вращения  $OO$ , в котором лежит сила  $\vec{F}'_{\perp}$ , обо-

значенная просто  $\vec{F}$  (так как других сил на рисунке нет). Момент силы  $\vec{F}$  может вызвать вращение тела  $N$  (если окажется больше моментов сил сопротивления).

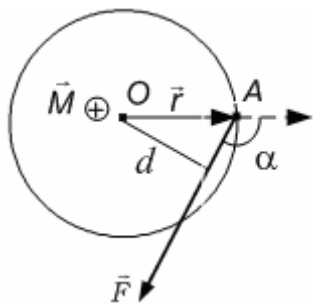


Рис. Т.4

**Момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $O$**  (рис. Т.4) **равен произведению модуля силы на ее плечо:**

$$M = Fd, \quad (\text{Т.6})$$

где  $M$  – модуль момента силы,  $F$  – модуль силы  $\vec{F}$ ,  $d$  – ее плечо.

**Плечом силы  $d$  называется минимальное расстояние от оси вращения  $O$  до прямой, вдоль которой действует сила.**

**Направление** момента силы относительно оси определяют **по правилу правого винта**: если винт поворачивать по направлению действия силы, то поступательное движение винта совпадает с направлением момента силы. В случае, изображенном на рис. Т.3, момент силы направлен вдоль оси  $OO$  вниз (направление показано стрелкой), а на рис. Т.4 – вдоль оси вращения  $O$ , т. е. от нас (направление показано крестиком в кружочке).

Момент силы можно представить в виде векторного произведения (векторный вид хорош тем, что определяет одновременно и модуль, и направление момента силы)

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}], \quad (\text{Т.7})$$

где  $\vec{M}$  – вектор момента силы,  $\vec{F}$  – сила,  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки приложения силы (т. е. вектор, проведенный из точки  $O$  в точку приложения силы  $A$ ).

Согласно (Т.7) направление вектора  $\vec{M}$  определяется, как направление любого векторного произведения, а модуль – как модуль векторного произведения

$$M = rF \sin \alpha = Fd, \quad (\text{Т.8})$$

где  $r \sin \alpha = d$  – плечо силы  $\vec{F}$  относительно оси  $O$ ,  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ .

*Момент силы при вращательном движении играет ту же роль, что сила при поступательном – является причиной углового ускорения и деформации тела. Другими словами, момент силы есть величина, аналогичная силе.*

**Момент инерции.** Пусть имеется система (рис. Т.5), состоящая из жесткого невесомого стержня и грузов массы  $m$ , которые могут перемещаться вдоль стержня. Опыт говорит о том, что в случае, изображенном на рис. Т.5а, раскрутить систему (или остановить, если она вращается) намного труд-

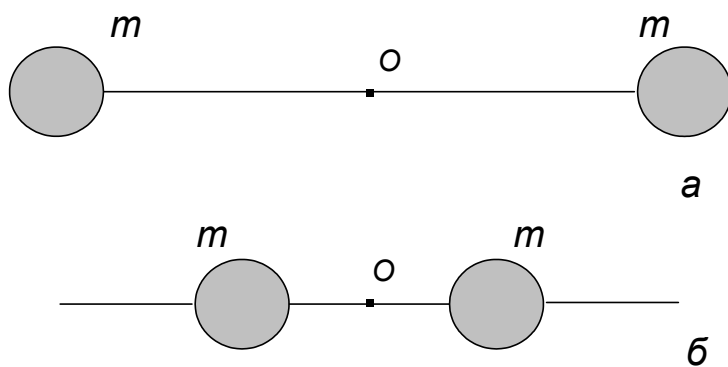


Рис. Т.5

нее, чем в случае, изображенном на рис. Т.5б. Это значит, что инертность системы (инертность – способность системы сохранять свою скорость) больше, когда грузы находятся на краях стержня, чем тогда, когда они находятся вблизи середины стержня.

При перемещении грузов масса системы не изменилась, а инертность изменилась. Таким образом, при вращательном движении инертность тела (системы тел) зависит не только от массы тела, но и от расположения массы относительно оси вращения. Величина, характеризующая инертность тела при вращательном движении, называется моментом инерции.

Момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции его точек относительно этой оси. Момент инерции  $i$  – й точки тела  $I_i$  массой  $m_i$ , находящейся на расстоянии  $r_i$  от оси вращения, равен

$$I_i = m_i r_i^2. \quad (\text{Т.9})$$

Следовательно, момент инерции тела

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad (\text{Т.10})$$

где  $I$  – момент инерции тела,  $n$  – число точек, из которых состоит тело.

В случае непрерывного распределения массы тела суммирование сводится к интегрированию по объему тела  $V$

$$I = \int_V dm r^2, \quad (\text{Т.11})$$

где  $dm$  – масса элементарного объема тела.

Формулы (Т.10) и (Т.11) позволяют сравнительно просто рассчитать моменты инерции только для однородных тел правильной формы относительно осей симметрии, проходящих через центр масс. Момент инерции относительно любой другой оси легко рассчитывается по теореме Штейнера:

$$I = I_c + m l^2, \quad (\text{Т.12})$$

где  $I$  – момент инерции тела массой  $m$  относительно произвольной оси,  $I_c$  – момент инерции этого тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела,  $l$  – расстояние между осями.

В случае сложной формы тела прибегают к экспериментальным методам.

*Момент инерции при вращательном движении играет ту же роль, что масса при поступательном. Другими словами, момент инерции – величина, аналогичная массе.*

Итак, вращательное и поступательное движения характеризуют аналогичными величинами и, следовательно, аналогичными соотношениями.

**Аналогия величин и соотношений, характеризующих  
поступательное и вращательное движения**

Поступательное движение		Вращательное движение	
Пройденный путь	$\Delta S$	Угол поворота	$\Delta \varphi$
Скорость средняя	$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}$	Угловая скорость средняя	$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$
мгновенная	$v = \frac{dS}{dt}$	мгновенная	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение среднее	$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	Угловое ускорение среднее	$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$
мгновенное	$a = \frac{dv}{dt}$	мгновенное	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Уравнение равномерного поступательного движения	$\Delta S = vt$	Уравнение равномерного вращательного движения	$\Delta \varphi = \omega t$
Уравнения равнопеременного поступательного движения	$\Delta S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$ $v = v_0 \pm at$	Уравнения равнопеременного вращательного движения	$\Delta \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$
Масса	$m$	Момент инерции точки твердого тела	$I = mr^2$ $I = \int r^2 dm$
Сила	$\vec{F}$	Момент силы относительно оси	$M = Fd$ $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$
Основной закон динамики	$\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	Основной закон динамики вращательного движения	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Импульс точки Момент импульса точки	$\vec{P} = m\vec{v}$ $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$	Момент импульса твердого тела	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Работа силы	$A = \int_s \vec{F} d\vec{s}$	Работа момента силы	$A = \int_0^\varphi M d\varphi$
Кинетическая энергия точки	$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия вращающегося тела	$E_{\text{кин}} = \frac{I \omega^2}{2}$

**Литература**

1. Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И. В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 94–116.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 34–46.

# ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

## Работа 1.0

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Цель работы:** 1) определить плотность тела, имеющего форму цилиндра; 2) научиться пользоваться штангенциркулем, микрометром, техническими весами; 3) научиться рассчитывать абсолютную и относительную погрешности измерений и правильно представлять результат.

**Приборы и принадлежности:** весы, штангенциркуль, микрометр, тело цилиндрической формы.

#### Краткая теория и описание метода измерений

Плотностью тела  $\rho$  называется физическая величина, численно равная отношению массы тела  $m$  к его объёму  $V$

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (0.1)$$

Из формулы (0.1) следует, что плотность тела численно равна массе единицы (одного  $\text{м}^3$  или одного  $\text{мм}^3$  и т. д.) его объема.

Масса тела может быть определена взвешиванием на технических весах. Объём тела цилиндрической формы можно определить, предварительно измерив его диаметр  $d$  и высоту  $h$ ,

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4}. \quad (0.2)$$

Подставив (0.2) в (0.1), получим расчётную формулу для плотности тела

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}. \quad (0.3)$$

#### Порядок выполнения работы

1. Определить массу цилиндра взвешиванием на технических весах (однократное прямое измерение).
2. С помощью штангенциркуля произвести многократные прямые измерения высоты цилиндра и найти ее среднее значение  $\langle h \rangle$ .
3. С помощью микрометра произвести многократные прямые измерения диаметра цилиндра и найти его среднее значение  $\langle d \rangle$ . При этом следует измерять диаметр разных по высоте цилиндра сечений.
4. Рассчитать среднее значение плотности тела  $\langle \rho \rangle$  по формуле (0.3), подставив в неё средние значения измеренных величин.
5. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу

№	$m$ , г	$h$ , мм	$\langle h \rangle$	$d$ , мм	$\langle d \rangle$	$\langle \rho \rangle$
1						
2						
3						
4						
5						

6. Рассчитать случайные погрешности  $\Delta d_{сл}$  и  $\Delta h_{сл}$  по формуле (П.2), приведенной на с. 6,

$$\Delta d_{сл} = \pm t_{n,p} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\langle d \rangle - d_i)^2}{n(n-1)}} \quad \text{и} \quad \Delta h_{сл} = \pm t_{n,p} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\langle h \rangle - h_i)^2}{n(n-1)}},$$

где  $t_{n,p}$  – коэффициент Стьюдента, зависящий от числа измерений  $n$  и доверительной вероятности  $p$  (определяется по таблице коэффициентов Стьюдента, приведенной на с. 12).

7. Рассчитать полные абсолютные погрешности измерений  $\Delta h$  и  $\Delta d$  по формуле (П.3)

$$\Delta d = \pm \sqrt{\Delta d_{сл}^2 + \delta^2} \quad \text{и} \quad \Delta h = \pm \sqrt{\Delta h_{сл}^2 + \delta^2},$$

где  $\delta$  – приборные погрешности, которые в данной работе совпадают с точностью приборов.

8. Рассчитать относительную погрешность измерения плотности  $\varepsilon$  по формуле (П.8)

$$\varepsilon = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta d}{\langle d \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\langle h \rangle}\right)^2},$$

где  $\Delta m$  – приборная погрешность весов.

9. Рассчитать абсолютную погрешность измерения плотности по (П.4)

$$\Delta \rho = \pm \varepsilon \cdot \langle \rho \rangle.$$

10. Записать окончательный результат в соответствии с (П.11), в виде

$$\rho = \langle \rho \rangle \pm \Delta \rho$$

и правильно его округлить.

### Контрольные вопросы

1. Что такое плотность вещества? Поясните ее физический смысл. Из какого металла изготовлен Ваш образец?
2. Какие погрешности называются систематическими, какие – случайными?
3. Какие измерения называются прямыми, какие – косвенными?

4. Что характеризует среднее арифметическое измеряемой величины?
5. Что такое доверительный интервал и доверительная вероятность?
6. По какой формуле рассчитывается доверительный интервал при прямых измерениях?
7. Чему равна относительная погрешность? Каков ее смысл?
8. Выведите формулу для расчета относительной погрешности в данной работе, воспользовавшись формулой (П.8).

### Литература

1. Денисов, И. В. Обработка и представление результатов измерений: учеб. пособие / И. В. Денисов, Л. М. Сырых. – Владивосток : ДВГМА, 2000. – 37 с.

#### Работа 1.1

### ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНОГО ЗАКОНА ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

(вариант I – постоянным остается момент инерции)

**Цель работы:** 1) показать, что при неизменном моменте инерции маятника Обербека отношение момента силы к угловому ускорению  $M/\varepsilon$  остается постоянным; 2) найти момент инерции маятника.

**Приборы и принадлежности:** маятник Обербека, набор грузов, секундомер, штангенциркуль, масштабная линейка.

#### Описание установки и метода измерений

Маятник Обербека (рис. 1.1), с помощью которого производится исследование, состоит из шкива радиуса  $R$ , закреплённого на оси  $O$ , двух стержней  $D$ , расположенных под углом  $90^\circ$  друг к другу, и четырёх одинаковых цилиндрических грузов  $C$ , которые можно перемещать вдоль стержней и закреплять на разных расстояниях от оси, а также кольца  $A$ . Грузы закрепляются симметрично, так, чтобы центр масс маятника совпадал с осью его вращения. Прибор приводится в движение с помощью груза  $B$  массой  $m$ , прикрепленного к концу шнура, навитого на шкив.

Основной закон динамики вращательного движения в данной работе удобно записать в виде

$$M = I\varepsilon, \quad (1.1)$$

где  $M$  – модуль результирующего момента сил, действующего на маятник,  $I$  – момент инерции маятника,  $\varepsilon$  – угловое ускорение маятника.

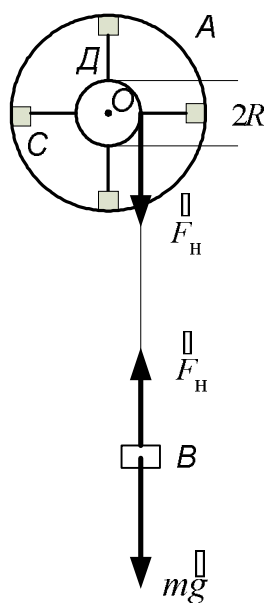


Рис. 1.1

Из (1.1) следует, что при неизменном моменте инерции угловое ускорение маятника должно изменяться пропорционально результирующему моменту сил. Это значит, во сколько раз изменится момент сил, во столько же раз должно измениться угловое ускорение, т. е. при неизменном моменте инерции

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad \frac{M_2}{M_3} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}, \quad \frac{M_1}{M_3} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}. \quad (1.2)$$

Проверка соотношений (1.2) и является целью данной работы.

На маятник действуют сила натяжения нити и сила трения в подшипниках. Соответственно результирующий момент сил представляет собой сумму двух моментов: момента  $M_{\text{н}}$ , создаваемого силой натяжения нити  $\vec{F}_{\text{н}}$ , и момента силы трения в подшипниках  $M_{\text{тр}}$ .

Силу натяжения нити  $\vec{F}_{\text{н}}$  легко найти, записав II закон Ньютона для груза  $B$ , движущегося поступательно с ускорением  $\vec{a}$ , сначала в векторном виде

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{н}} = m\vec{a},$$

а затем в скалярном виде

$$mg - F_{\text{н}} = ma. \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что

$$F_{\text{н}} = m(g - a). \quad (1.4)$$

Так как плечо силы натяжения равно радиусу шкива  $R$ , то ее момент

$$M_{\text{н}} = m(g - a)R. \quad (1.5)$$

В формулу (1.5) входит ускорение груза. Так как груз движется с постоянным ускорением без начальной скорости, то уравнение его движения имеет вид:

$$h = \frac{at^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad a = \frac{2h}{t^2}, \quad (1.6)$$

где  $h$  – высота падения груза,  $t$  – время падения.

Для определения момента силы трения  $M_{\text{тр}}$  пользуются набором гирек массой  $m_1$  от 10 до 50 г. К нити поочередно прикрепляют гири и подбирают такую, при которой вращение маятника оказывается равномерным (для того, чтобы маятник начал вращаться, его надо подтолкнуть). Равномерное вращение указывает на то, что момент, созданный гирей массой  $m_1$ , уравновешивает момент силы трения. Таким образом, момент силы трения равен

$$M_{\text{тр}} = m_1 g R.$$

Моменты  $M_n$  и  $M_{тр}$  имеют противоположные направления, поэтому результирующий момент сил  $M$ , действующий на маятник, равен

$$M = M_n - M_{тр}. \quad (1.7)$$

Если окажется, что  $a \ll g$ , то ускорением  $a$  в (1.5) можно пренебречь и формулу (1.7) записать в виде

$$M = (m - m_1)gR. \quad (1.8)$$

Угловое ускорение маятника Обербека, соответствующее данному вращающему моменту, находят, руководствуясь следующими соображениями. Если нить, на которой подвешен груз  $m$ , считать нерастяжимой, то все точки нити и любая точка поверхности шкива имеют то же тангенциальное ускорение, что и груз, следовательно, согласно (Т.5), угловое ускорение маятника

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{2h}{t^2 R}. \quad (1.9)$$

### Порядок выполнения работы

1. Передвигая грузы  $C$  вдоль стержней, добиться безразличного равновесия маятника.
2. Измерить диаметр шкива и рассчитать его радиус  $R$ .
3. Определить высоту падения грузов  $h$ .
4. Найти массу груза  $m_1$ , уравнивающего момент силы трения.
5. Поместив на платформу груз массой  $m$ , определить время его падения (не менее 3-х раз).
6. Указанное в п. 5 проделать с тремя грузами (указанными преподавателем).
7. Данные измерений занести в таблицу

№	$R$	$h$	$m_1$	$m$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$\langle t \rangle$	$M$	$\varepsilon$	$I$
1											
2											
3											

8. Предварительно убедившись, что  $a \ll g$ , рассчитать для каждого из грузов вращающий момент по формуле (1.8).
9. Рассчитать угловое ускорение маятника Обербека по формуле (1.9).
10. Убедиться в выполнении равенств (1.2).
11. Построить график зависимости углового ускорения маятника  $\varepsilon$  от вращающего момента  $M$ .
12. Определить момент инерции маятника с помощью графика.
13. По указанию преподавателя оценить погрешности измерения величин  $\varepsilon$  и  $M$  и показать их на графике.

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение момента инерции тела. Поясните его физический смысл. В каких единицах измеряется момент инерции? Как можно изменить момент инерции маятника в данной работе?
2. Чему равен момент силы относительно неподвижной оси? Что он характеризует? В каких единицах измеряется?
3. Что называется плечом силы?
4. Что такое угловая скорость, угловое ускорение? Каков смысл этих величин? В каких единицах они измеряются?
5. Какие направления имеют в данной работе моменты сил трения и натяжения, угловая скорость, угловое ускорение?
6. Напишите основной закон динамики для поступательного и вращательного движений.
7. Выведите формулу для расчета силы натяжения (1.4).
8. Выведите расчётные формулы для вращающего момента (1.8) и углового ускорения (1.9).
9. Докажите, что момент инерции маятника при выполнении работы действительно остается постоянным

### Литература

1. Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И. В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 38-39, 94–116.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 15-17, 34–46.
3. Зисман, Г. А. Курс общей физики. Т.1 / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. – М. : Наука, 1972. – С. 59–70.

### Работа 1.2

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАХОВОГО КОЛЕСА

**Цель работы:** вычислить момент инерции махового колеса с помощью падающего груза.

**Приборы и принадлежности:** маховое колесо, набор грузов, масштабная линейка, штангенциркуль, секундомер.

#### Описание установки и метода измерений

Маховое колесо  $M$  и шкив радиуса  $R$  насажены на единую ось  $O$  (рис. 1.2). На шкив навит шнурок, к которому прикреплен груз массой  $m$ . Грузу сообщают потенциальную энергию, подняв его на высоту  $h_1$  по отношению к некоторому уровню, высота которого принята за ноль. При падении груза его потенциальная энергия  $mgh_1$  переходит в кинетическую энергию поступательного движения груза  $mv^2/2$  и кинетическую энергию

вращательного движения маховика  $I\omega^2/2$ , а также расходуется на преодоление сил трения в подшипнике. Таким образом, закон сохранения механической энергии для данной системы имеет вид

$$mgh_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + A_{\text{тр}}, \quad (2.1)$$

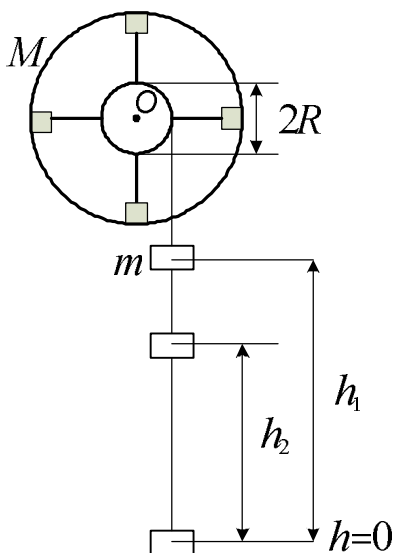


Рис. 2.1

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $h_1$  – высота, на которую поднят груз,  $v$  – скорость груза в нижней точке падения,  $\omega$  – угловая скорость маховика в тот же момент времени,  $I$  – момент инерции махового колеса,  $A_{\text{тр}}$  – работа по преодолению сил трения в подшипнике при движении груза вниз.

С помощью уравнения (2.1) можно экспериментально определить момент инерции махового колеса, если известны остальные величины:  $m$ ,  $h_1$ ,  $v$ ,  $\omega$  и  $A_{\text{тр}}$ .

Работа сил трения в подшипнике может быть найдена по формуле

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} h_1, \quad (2.2)$$

где  $F_{\text{тр}}$  – сила трения в подшипнике, которую можно найти исходя из следующих соображений. Если колесо не останавливать, то оно, вращаясь по инерции, поднимет груз на меньшую высоту  $h_2$ . Работа силы трения на всем пути  $(h_1 + h_2)$  равна разности потенциальных энергий груза в конечном и начальном положениях, т. е.

$$F_{\text{тр}}(h_1 + h_2) = mg(h_1 - h_2),$$

откуда

$$F_{\text{тр}} = \frac{mg(h_1 - h_2)}{h_1 + h_2}. \quad (2.3)$$

Подставив (2.3) в (2.2), получим формулу для расчета работы силы трения при движении груза вниз

$$A_{\text{тр}} = \frac{mg(h_1 - h_2)}{h_1 + h_2} h_1. \quad (2.4)$$

На груз действуют постоянные силы, поэтому его движение является равноускоренным и описывается уравнениями

$$h_1 = \frac{at^2}{2} \quad \text{и} \quad v = at.$$

Исключив из этих уравнений ускорение, получим выражение для линейной скорости груза в нижней точке

$$v = \frac{2h_1}{t}. \quad (2.5)$$

Нить, на которой подвешен груз, практически нерастяжима, следовательно, линейная скорость точек обода шкива равна скорости груза. И угловую скорость махового колеса можно получить, используя соотношение между линейной и угловой скоростями (Т.5)  $v = \omega R$ . В момент, когда груз находится в нижней точке траектории, угловая скорость махового колеса равна

$$\omega = \frac{2h_1}{tR}, \quad (2.6)$$

где  $t$  – время падения груза с высоты  $h_1$ .

Подставив выражения (2.4), (2.5) и (2.6) в (2.1), получим формулу для вычисления момента инерции махового колеса в данной работе

$$I = mR^2 \left( \frac{h_2}{h_1 + h_2} \cdot \frac{gt^2}{h_1} - 1 \right). \quad (2.7)$$

### Порядок выполнения работы

1. Прикрепить к шнуру груз, указанный преподавателем. При полностью размотанном шнуре отметить положение груза, которое в дальнейшем принимается за нулевое. Вращая колесо, поднять груз на некоторую высоту  $h_1$  и измерить её.
2. Отпустить колесо и одновременно включить секундомер. Когда груз достигнет нижней точки, выключить секундомер, но колесо не останавливать. Для данного груза и данной высоты  $h_1$  определить 3 раза время падения  $t$  и высоту  $h_2$ , на которую поднимается груз. Найти их средние значения.
3. Указанное в п. 2 проделать для трех разных грузов.
4. Измерить радиус шкива и вычислить момент инерции махового колеса по формуле (2.7).
5. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу

№	$R$	$h_1$	$m$	$t$	$\langle t \rangle$	$h_2$	$\langle h_2 \rangle$	$I$	$\langle I \rangle$	
1										
2										
3										

6. Вычислить абсолютную и относительную погрешности измерений момента инерции махового колеса (так как полученные значения момента инерции независимы, то погрешность можно вычислить методом прямых измерений, по формуле Стюдента).
7. Записать результат с учётом погрешности.

### **Контрольные вопросы**

1. Дайте определение момента инерции твёрдого тела. Каков его физический смысл? От чего он зависит? В каких единицах измеряется?
2. Как можно изменить момент инерции данного махового колеса?
3. Какие величины необходимо знать, чтобы рассчитать теоретически момент инерции махового колеса в данной работе?
4. Запишите формулы кинетической энергии поступательного и вращательного движений, потенциальной энергии. Запишите закон сохранения энергии для данной системы.
5. Как найти угловую скорость махового колеса? Как она направлена?
6. Выведите формулу работы силы трения (2.4) при движении груза вниз.
7. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения.
8. Выведите расчетную формулу (2.7).

### **Литература**

1. Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 67–70, 94–116.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 23–28, 34–46.
3. Зисман, Г. А. Курс общей физики. Т.1 / Г. А. Зисман, О. М Тодес. – М.: Наука, 1972. – С. 59–70.

### **Работа 1.3**

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

**Цель работы:** 1) определить момент инерции стержня методом крутильных колебаний; 2) рассчитать момент инерции стержня теоретически; 3) сравнить полученные значения.

**Приборы и принадлежности:** штатив с цилиндром, закрепленным на проволоке, стержень, секундомер, штангенциркуль, линейка.

### **Описание установки и метода измерений**

В настоящей работе для определения момента инерции тела, масса и размеры которого неизвестны (круглого стержня А), используют тело с известным моментом инерции (сплошной цилиндр В). Цилиндр, жёстко связанный с проволочным подвесом С, закреплен на штативе К (рис. 3.1). Если цилиндр вывести из положения равновесия, повернув его на небольшой

угол  $\varphi$ , и предоставить самому себе, он будет совершать крутильные колебания. При деформации кручения в проволоке возникает возвращающий момент сил  $M$ , пропорциональный углу поворота

$$M = -D\varphi, \quad (3.1)$$

где  $D$  – модуль кручения проволоки. Знак “–” говорит о том, что момент сил и угол поворота имеют противоположные направления: момент сил возвращает систему в положение равновесия.

Как видно из (3.1), момент сил, действующий на цилиндр, изменяется с изменением поворота цилиндра, поэтому основной закон динамики вращательного движения

$$M = I\varepsilon \quad (3.2)$$

для него в дифференциальной форме

$$-D\varphi = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (3.3)$$

где  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon$  – угловое ускорение цилиндра,  $I$  – его момент инерции.

Далее, если в уравнении (3.3) оба слагаемых перенести влево, затем разделить его на момент инерции  $I$  и ввести обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{D}{I}, \quad (3.4)$$

то оно примет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) является однородным дифференциальным уравнением второго порядка. Из него следует, что угол поворота тела представляет собой следующую функцию времени:

$$\varphi = \varphi_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha_0), \quad (3.6)$$

т. е. под действием момента силы, пропорционального углу поворота, тело совершает гармоническое колебательное движение.

Анализ уравнения (3.6) позволяет установить, что постоянные интегрирования  $\varphi_{\max}$  и  $\alpha_0$  представляют собой амплитуду и начальную фазу колебаний соответственно, а  $\omega_0$  – циклическую частоту, которая связана с периодом колебаний соотношением  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ .

Из последней формулы с учетом (3.4) находим период крутильных колебаний  $T$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (3.7)$$

Если известен модуль кручения, то, используя формулу (3.7), можно найти момент инерции тела, совершающего крутильные колебания, так как

период колебаний легко определяется на опыте путем измерения времени  $t$ , за которое тело совершает  $n$  колебаний

$$T = t/n. \quad (3.8)$$

В настоящей работе модуль кручения проволоки неизвестен. Поэтому формулу (3.7) записывают для периода колебаний цилиндра  $T_{\text{ц}}$  и для периода колебаний системы "цилиндр – стержень"  $T_{\text{ц+с}}$ :

$$T_{\text{ц+с}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{ц+с}}}{D}}, \quad (3.9)$$

$$T_{\text{ц}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{ц}}}{D}}, \quad (3.10)$$

где  $I_{\text{ц}}$  – момент инерции цилиндра,  $I_{\text{ц+с}}$  – момент инерции системы "цилиндр – стержень", равный сумме  $I_{\text{ц+с}} = I_{\text{ц}} + I_{\text{с}}$ .

Возведя уравнения (3.9) и (3.10) в квадрат и разделив их друг на друга, получают, что

$$\frac{T_{\text{ц+с}}^2}{T_{\text{ц}}^2} = \frac{I_{\text{ц}} + I_{\text{с}}}{I_{\text{ц}}} = 1 + \frac{I_{\text{с}}}{I_{\text{ц}}},$$

откуда момент инерции стержня  $I_{\text{с}}$  равен

$$I_{\text{с}} = I_{\text{ц}} \left( \frac{T_{\text{ц+с}}^2}{T_{\text{ц}}^2} - 1 \right). \quad (3.11)$$

Момент инерции цилиндра относительно оси вращения, совпадающей с его осью симметрии, известен

$$I_{\text{ц}} = \frac{m_{\text{ц}} R_{\text{ц}}^2}{2}. \quad (3.12)$$

Подставив (3.12) в (3.11), получают окончательную формулу для экспериментального расчёта момента инерции стержня:

$$I_{\text{с.эксп}} = \frac{1}{2} m_{\text{ц}} R_{\text{ц}}^2 \left( \frac{T_{\text{ц+с}}^2}{T_{\text{ц}}^2} - 1 \right). \quad (3.13)$$

Теоретически момент инерции сплошного круглого стержня радиусом  $R_{\text{с}}$  относительно оси симметрии, перпендикулярной его длине  $l_{\text{с}}$ , рассчитывается по формуле

$$I_{\text{с.теор}} = \frac{m}{12} (3R_{\text{с}}^2 + l_{\text{с}}^2). \quad (3.14)$$

### Порядок выполнения работы

1. Повернув цилиндр на небольшой угол, дать ему возможность колебаться. Для определения периода колебаний цилиндра  $T_{\text{ц}}$  3 раза определить время  $t_{\text{ц}}$  10-15 полных колебаний.
2. Поместить стержень в цилиндр так, чтобы его центр масс находился на оси вращения системы. Как и в предыдущем случае, 3 раза определить время  $t_{\text{ц+с}}$  10-15 полных колебаний.
3. Определить массу цилиндра  $m_{\text{ц}}$  и его диаметр  $d_{\text{ц}}$ .
4. Определить массу стержня  $m_{\text{с}}$ , его длину  $l_{\text{с}}$  и диаметр  $d_{\text{с}}$ .
5. По средним значениям периодов рассчитать экспериментальное значение момента инерции стержня.
6. Рассчитать теоретическое значение момента инерции стержня.
7. Рассчитать (по указанию преподавателя) погрешности экспериментального и теоретического значений момента инерции.
8. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу

№	$m_{\text{ц}}$	$m_{\text{с}}$	$d_{\text{ц}}$	$d_{\text{с}}$	$l_{\text{с}}$	$n$	$t_{\text{ц}}$	$T_{\text{ц}}$	$\langle T_{\text{ц}} \rangle$	$t_{\text{ц+с}}$	$T_{\text{ц+с}}$	$\langle T_{\text{ц+с}} \rangle$	$I_{\text{с}}$ эксп	$I_{\text{с}}$ теор
1														
2														
3														

### Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции твёрдого тела? От чего он зависит? В каких единицах измеряется? Каков его физический смысл?
2. Чему равен момент силы, вызывающий крутильные колебания?
3. Запишите основной закон динамики вращательного движения в общем виде и конкретно для данной работы.
4. Выведите формулу периода крутильных колебаний. Что такое период колебаний маятника?
5. Выведите формулу для экспериментального расчета момента инерции стержня (3.14).
6. Оцените, насколько совпали теоретическое и экспериментальное значения момента инерции маятника. Чем объясняется их разница?

### Литература

1. Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 94–116.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 34–46, 255–258.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

**Цель работы:** определить моменты инерции физического маятника относительно разных осей вращения, предварительно определив положение его центра масс.

**Приборы и принадлежности:** физический маятник, секундомер, линейка.

### Описание установки и метода измерений

Физическим маятником называется любое твёрдое тело, закрепленное на оси, не проходящей через его центр масс (рис. 4.1). При отклонении маятника от положения равновесия на некоторый угол  $\alpha$  сила тяжести  $m\vec{g}$ , приложенная в его центре масс  $C$ , и сила реакции, возникающая в оси  $N$ , создают пару сил. Момент этой пары  $M$  возвращает маятник в положение равновесия. По определению момент пары сил равен произведению одной из сил на плечо пары, т. е.

$$M = -mgd = -mgl \sin \alpha, \quad (4.1)$$

где  $d$  – плечо пары сил, равное расстоянию между линиями действия сил,  $l$  – расстояние от оси вращения маятника  $O$  до его центра масс  $C$ . Из рисунка видно, что  $d = l \sin \alpha$ . Знак "–" указывает на то, что момент пары сил направлен противоположно углу отклонения маятника.

Подставив (4.1) в основной закон динамики вращательного движения

$$M = I\epsilon,$$

получим для физического маятника уравнение

$$-mgl \sin \alpha = I\ddot{\alpha}, \quad (4.2)$$

где  $I$  – момент инерции маятника относительно оси вращения,  $\ddot{\alpha} = \epsilon$  – угловое ускорение маятника.

Так как синусы (и тангенсы) малых углов примерно равны самим углам в радианах, то  $\sin \alpha \cong \alpha$ ,

и (4.2) принимает вид

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I} \alpha = 0. \quad (4.3)$$

Введя обозначение

$$mgl / I = \omega_0^2, \quad (4.4)$$

уравнению (4.3) придают вид

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (4.5)$$

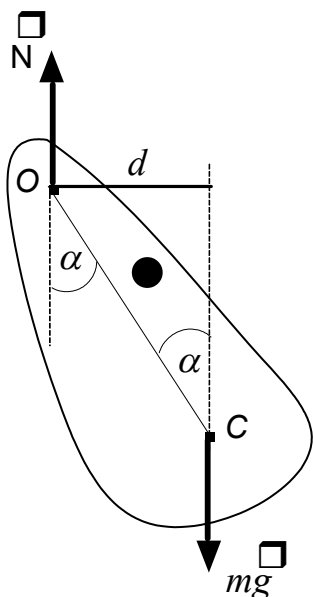


Рис. 4.1

Уравнение (4.5) представляет собой динамическое уравнение гармонического колебательного движения. Решив его, находят уравнение движения физического маятника

$$\alpha = \alpha_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.6)$$

Итак, маятник совершает гармоническое колебательное движение. Анализ уравнения (4.6) показывает, что  $\alpha_{\max}$  и  $\varphi_0$  – амплитуда и начальная фаза колебаний, а постоянная  $\omega_0$  – циклическая частота, связанная с периодом колебаний соотношением

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.7)$$

Воспользовавшись обозначением (4.4), из (4.7) получают формулу для периода колебаний  $T$  физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (4.8)$$

Формула (4.8) позволяет легко найти момент инерции маятника, если известно  $l$ , так как период колебаний можно измерить на опыте, определив время  $t$ , за которое маятник совершает  $n$  колебаний

$$T = t/n.$$

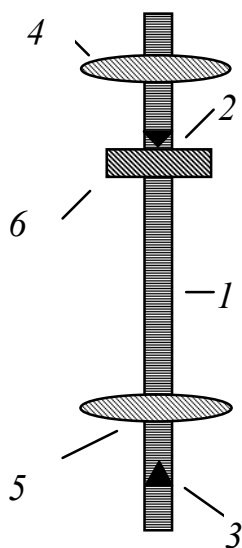


Рис. 4.2

В данной работе физический маятник (рис. 4.2) представляет собой однородный стержень  $l$ , на котором крепятся опорные призмы 2 и 3 равной массы и два одинаковых груза 4 и 5. С помощью опорных призм маятник устанавливается на горизонтально закреплённую планку 6.

Согласно формуле (4.8), момент инерции маятника относительно одной из осей (например, проходящей через опорную призму 2) равен

$$I_1 = \frac{mgl T_1^2}{4\pi^2}. \quad (4.9)$$

Но так как положение центра масс маятника и, следовательно,  $l$  неизвестно, поступают следующим образом. Маятник переворачивают. Относительно оси, проходящей через другую опорную призму, его момент инерции равен

$$I_2 = \frac{mg(L-l)T_2^2}{4\pi^2}, \quad (4.10)$$

где  $L$  – расстояние между опорными призмами.

Уравнения (4.9) и (4.10) содержат три неизвестные величины:  $I_1$ ,  $I_2$ , и  $l$ , поэтому для нахождения моментов инерции необходимы дополнительные уравнения.

В качестве дополнительных уравнений записывают теорему Штейнера для  $I_1$  и  $I_2$ :

$$I_1 = I_c + ml^2, \quad (4.11)$$

$$I_2 = I_c + m(L-l)^2, \quad (4.12)$$

где  $I_c$  – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс стержня параллельно осям вращения, проходящим через призмы.

Решив систему из четырёх уравнений (4.9), (4.10), (4.11) и (4.12), получают формулу для расчета положения центра масс маятника

$$l = \frac{4\pi^2 L^2 - gLT_2^2}{8\pi^2 L - g(T_2^2 + T_1^2)}. \quad (4.13)$$

Вычислив  $l$ , рассчитывают  $I_1$  и  $I_2$ .

### Порядок выполнения работы

1. Закрепить грузы на стержне так, как укажет преподаватель.
2. Измерить расстояние между опорными призмами  $L$ .
3. Установить маятник одной из опорных призм на площадку б. Привести его в колебательное движение, отклонив на угол не более  $15-20^\circ$ , и измерить время 20-30 полных колебаний. Измерения проделать не менее 3-х раз. Найти среднее время колебаний  $\langle t_1 \rangle$ .
4. Перевернуть маятник и вновь не менее 3-х раз найти время 20-30 полных колебаний, а затем – среднее время  $\langle t_2 \rangle$ .
5. Рассчитать средние значения периодов колебаний  $\langle T_1 \rangle$  и  $\langle T_2 \rangle$  по средним значениям времени.
6. Рассчитать положение центра масс маятника  $l$  с помощью (4.13).
7. Рассчитать моменты инерции маятника  $I_1$  и  $I_2$  по формулам (4.9) и (4.10).
8. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу

№	$m$	$L$	$n$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$t_2$	$\langle t_2 \rangle$	$\langle T_1 \rangle$	$\langle T_2 \rangle$	$l$	$I_1$	$I_2$
1												
2												
3												

### Контрольные вопросы

1. Чему равен момент инерции точки, твердого тела? От чего зависит момент инерции тела? Каков его физический смысл?

2. Запишите (выведите) формулу периода колебаний физического маятника (4.8) исходя из основного закона динамики вращательного движения.
3. Сформулируйте теорему Штейнера.
4. Чему равен момент пары сил, действующий на маятник? Как он направлен?
5. Выведите формулы для расчета моментов инерции  $I_1$  и  $I_2$  в данной работе.
6. Выведите формулу (4.13) для расчета положения центра масс маятника.

### Литература

1. Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И. В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 94–116.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 34–46, 255–258.
3. Зисман, Г. А. Курс общей физики. Т.1 / Г. А. Зисман, О. М Тодес. – М.: Наука, 1972. – С. 59–70, 263–270.

### Работа 1.5

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНОГО ЗАКОНА ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

(вариант II – сравниваются теоретическое и экспериментальное значения момента инерции маятника)

**Цель работы:** 1) определить момент инерции маятника экспериментально; 2) рассчитать момент инерции маятника теоретически; 3) проанализировать результат.

**Приборы и принадлежности:** маятник Обербека, набор грузов, секундомер, штангенциркуль, масштабная линейка.

### Описание установки и метода измерений

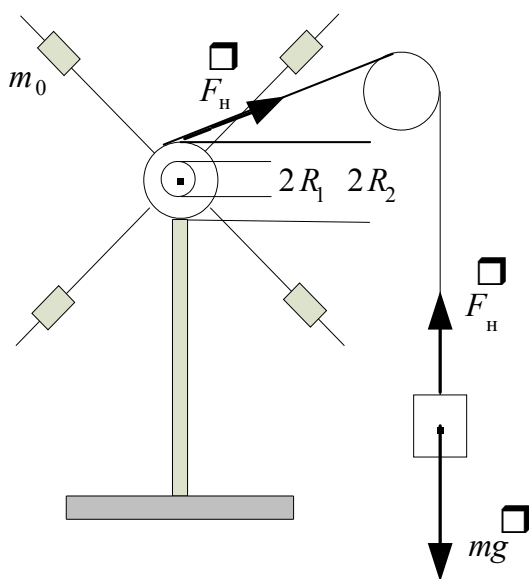


Рис. 5.1

Маятник Обербека, используемый в данной работе, изображен на рис. 5.1. Он состоит из двух шкивов различного радиуса  $R_1$  и  $R_2$ , укрепленных на одной горизонтальной оси (на рисунке отмечена точкой), четырех стержней и четырех одинаковых передвигаемых грузов массой  $m_0$ , которые надеваются на стержни. Грузы  $m_0$  могут быть закреплены на разных расстояниях  $l$  от оси вращения маятника. На один из шкивов навивается нить, которая перебрасывается через блок изменения направления

движения нити. К свободному концу нити прикрепляется груз массой  $m$ , под действием которого маятник приводится во вращательное движение. Расстояние  $h$ , пройденное грузом за время  $t$ , отмечается по вертикальной шкале.

Основной закон динамики вращательного движения в данной работе удобно записать в виде

$$M = I\varepsilon, \quad (5.1)$$

где  $M$  – вращающий момент, действующий на маятник,  $I$  – момент инерции маятника,  $\varepsilon$  – угловое ускорение маятника.

Для того чтобы убедиться в выполнении закона (5.1), в данной работе предлагается рассчитать момент инерции маятника теоретически и сравнить полученное значение с рассчитанным экспериментально по формуле (5.1).

Теоретическое значение момента инерции маятника  $I_{\text{теор}}$  рассчитывается как сумма моментов инерции составляющих его частей, т. е.

$$I_{\text{теор}} = I_0 + 4I_{\text{ст}} + 4I_{\text{гр}}, \quad (5.2)$$

где  $I_0$  – суммарный момент инерции двухступенчатого шкива и бобышки, на которой закреплены стержни,  $I_{\text{ст}}$  – момент инерции одного стержня,  $I_{\text{гр}}$  – момент инерции подвижного груза.

Учитывая, что оси вращения стержней проходят через их концы, расположенные на оси вращения маятника ( $I_{\text{ст}} = 1/3 m_{\text{ст}} l_{\text{ст}}^2$ ), и считая подвижные грузы материальными точками ( $I_{\text{гр}} = m_0 l^2$ ), поскольку их размеры малы по сравнению с расстоянием до оси вращения, можно (5.2) представить в виде

$$I_{\text{теор}} = I_0 + \frac{4}{3} m_{\text{ст}} l_{\text{ст}}^2 + 4m_0 l^2, \quad (5.3)$$

где  $m_{\text{ст}}$  – масса стержня,  $m_0$  – масса подвижного груза,  $l_{\text{ст}}$  – длина стержня,  $l$  – расстояние от центра масс грузов до оси вращения маятника.

Экспериментальное значение момента инерции маятника  $I_{\text{экс}}$  находят с помощью формулы (5.1), из которой

$$I_{\text{экс}} = M / \varepsilon. \quad (5.4)$$

В данной работе силой трения в подшипниках можно пренебречь и считать, что вращение крестовины происходит под действием только момента силы натяжения нити  $\vec{F}_{\text{н}}$ , которую легко найти, записав основной закон динамики (II закон Ньютона) для падающего груза (рис. 5.1) в векторном виде

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{н}} = m\vec{a},$$

затем – в скалярном виде

$$mg - F_{\text{н}} = ma. \quad (5.5)$$

Из (5.5) следует, что

$$F_{\text{н}} = m(g - a), \quad (5.6)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $a$  – ускорение падения груза.

Груз падает равноускоренно, поэтому его ускорение  $a$  можно найти, воспользовавшись уравнением равноускоренного движения

$$h = \frac{at^2}{2}, \text{ откуда } a = \frac{2h}{t^2}. \quad (5.7)$$

Подставив (5.7) в (5.6), получим

$$F_n = m(g - \frac{2h}{t^2}). \quad (5.8)$$

Из рис. 5.1 видно, что плечо силы натяжения равно радиусу шкива  $R$ , на который навита нить, следовательно,

$$M = m(g - \frac{2h}{t^2})R. \quad (5.9)$$

Для нахождения углового ускорения маятника можно считать, что нить нерастяжима, поэтому ускорение всех точек нити и любой точки обода шкива одинаково и равно ускорению груза. Это значит, что угловое ускорение крестовины можно найти по формуле

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{2h}{t^2 R}, \quad (5.10)$$

Подставив в формулу (5.4) выражения (5.9) и (5.10), получим формулу для расчета экспериментального значения момента инерции маятника

$$I_{\text{экс}} = \frac{mR^2(gt^2 - 2h)}{2h}. \quad (5.11)$$

### Порядок выполнения работы

1. Закрепить грузы  $m_0$  на расстоянии  $l$  от оси вращения маятника (указанном преподавателем), добившись его безразличного равновесия.
2. Определить пять раз время падения груза  $m$ .
3. Рассчитать экспериментальное и теоретическое значения момента инерции маятника при данном расположении грузов  $m_0$  по (5.3) и (5.11).
4. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу

№	$m$	$R$	$m_0$	$l$	$t$	$\langle t \rangle$	$h$	$m_{\text{ст}}$	$l_{\text{ст}}$	$I_{\text{экс}}$	$I_{\text{теор}}$
1											
2											
3											
4											
5											

5. Рассчитать (по указанию преподавателя) погрешности  $\Delta I_{\text{экс}}$  и  $\Delta I_{\text{теор}}$ .
6. Убедиться в равенстве значений  $I_{\text{экс}}$  и  $I_{\text{теор}}$ . Проанализировать несовпадение результатов, если оно имеется.
7. По предложению преподавателя повторить эксперимент, изменив массу груза  $m$  или расстояние  $l$ , или то и другое одновременно.

Величины, считающиеся известными в данной работе:

$$I_0 = (0,0021 \pm 0,0001) \text{ кгм}^2, \quad m_0 = (200,0 \pm 0,1) \text{ г},$$

$$m_{\text{ст}} = (62,0 \pm 0,1) \text{ г}, \quad l_{\text{ст}} = (27,0 \pm 0,5) \text{ см}.$$

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение момента инерции тела и поясните его физический смысл. Как рассчитать теоретически момент инерции маятника?
2. Дайте определение момента силы относительно оси. Выведите формулу для расчета момента силы в данной работе.
3. Поясните смысл углового ускорения. Как оно направлено? В каких единицах измеряется? Как находят угловое ускорение в данной работе?
4. Запишите основной закон динамики вращательного движения. Выведите формулу (5.11) для экспериментального расчета момента инерции.

### Литература

1. Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 36–38, 94–116.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 14–17, 34–46.

### Работа 1.6

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИУСА КРИВИЗНЫ ВОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ МЕТОДОМ КАТАЮЩЕГОСЯ ШАРИКА

**Цель работы:** определить радиус кривизны поверхности зеркала.

**Приборы и принадлежности:** вогнутое зеркало, шарики, секундомер, микрометр.

### Описание установки и метода измерений

На рис. 6.1 показано сечение сферического зеркала  $MLN$  плоскостью чертежа.  $L$  – наинизшая точка зеркала. Если шарик поместить в произвольную точку  $C$ , а затем отпустить, он будет совершать колебательное движение. Для нахождения радиуса кривизны зеркала  $R$  используют закон сохранения механической энергии. В точке  $C$  механическая энергия шарика равна его потенциальной энергии  $mgh$ , так как шарик неподвижен, а в точке  $L$  механическая энергия шарика равна его кинетической энергии, которая складывается из кинетической энергии поступательного движения  $mv^2/2$  и кинетической энергии вращательного движения  $I\omega^2/2$ .

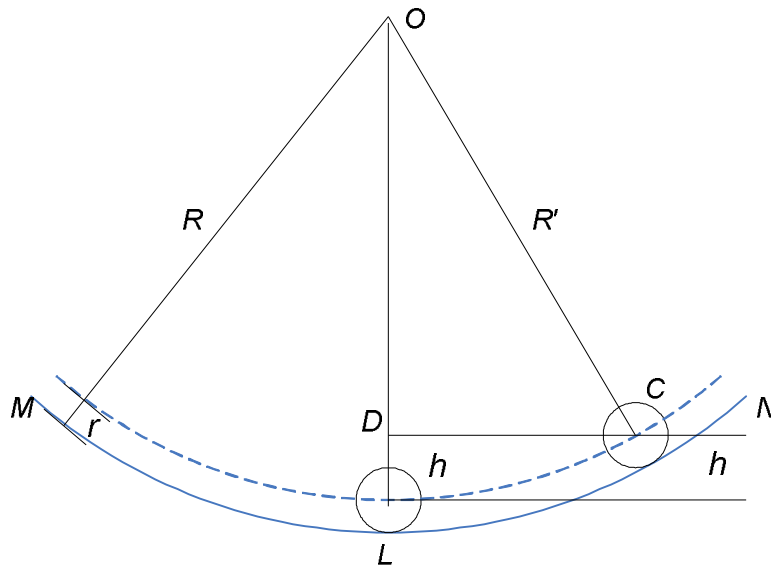


Рис. 6.1

Если пренебречь трением между шариком и поверхностью зеркала, то закон сохранения механической энергии для шарика будет иметь вид

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad (6.1)$$

где  $m$  – масса шарика,  $h$  – высота точки  $C$  по отношению к точке  $L$ ,  $v$  – скорость поступательного движения шарика в точке  $L$ ,  $\omega$  – угловая скорость вращательного движения шарика в той же точке,  $I$  – момент инерции шарика относительно оси, проходящей через его диаметр.

Учитывая, что момент инерции шарика  $I = \frac{2}{5}mr^2$ , и, согласно (Т.5),

$\omega = \frac{v}{r}$  (где  $r$  – радиус шарика), уравнение (6.1) можно преобразовать

$$mgh = 0,7mv^2. \quad (6.2)$$

Высоту  $h$ , на которую поднимается центр масс шарика при его отклонении от положения равновесия, можно выразить через радиус кривизны поверхности, по которой движется центр масс шарика  $R'$ . Рассмотрим треугольник  $COD$ , в котором  $OC = R'$ ,  $OD = R' - h$ ,  $DC = A$  (отрезок  $DC$  можно считать равным амплитуде колебаний шарика  $A$ , так как при сравнительно малых отклонениях от положения равновесия хорда и стягиваемая ею дуга практически совпадают). Поскольку треугольник  $COD$  прямоугольный, то для него можно записать теорему Пифагора

$$R'^2 = (R' - h)^2 + A^2.$$

Если в последнем выражении раскрыть скобки и пренебречь величиной второго порядка малости (каковой является  $h^2$ ), то получим, что

$$h = \frac{A^2}{2R'}. \quad (6.3)$$

Для нахождения скорости шарика необходимо знать уравнение его движения. Шарик совершает затухающие колебания, но при расчете радиуса кривизны не будет большой ошибкой считать, что он совершает незатухающие колебания, так как при малых коэффициентах затухания периоды затухающих и незатухающих колебаний различаются незначительно. Итак, будем считать, что шарик совершает гармоническое колебательное движение, описываемое уравнением

$$x = A \cos(\omega t + \alpha_0), \quad (6.4)$$

где  $x$  – смещение шарика от положения равновесия в момент времени  $t$ ,  $A$  – амплитуда колебаний шарика,  $\omega$  – циклическая (или круговая) частота колебаний, связанная с периодом колебаний  $T$  соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (6.5)$$

Взяв первую производную от смещения (6.4) по времени, получим скорость шарика как функцию времени

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t. \quad (6.6)$$

Из (6.6) следует, что максимальное значение скорости имеет при  $\sin \omega t = 1$ , т. е. в точке  $L$  скорость шарика равна

$$v = A\omega = \frac{2\pi A}{T}. \quad (6.7)$$

Подставив (6.7) и (6.3) в (6.2), получим формулу для расчёта радиуса кривизны поверхности, по которой движется центр масс шарика

$$R' = \frac{5T^2}{28\pi^2} g. \quad (6.8)$$

Как видно из (6.8), для расчета  $R$  необходимо знать только период колебаний шарика, который легко найти, измерив время  $t$ , за которое шарик совершает  $n$  колебаний:  $T = t/n$ .

Из рис. 6.1 видно, что радиус кривизны поверхности зеркала  $R$  равен

$$R = R' + r. \quad (6.9)$$

### Порядок выполнения работы

1. С помощью секундомера определить время 5-10 полных колебаний шарика и найти период его колебаний. Прodelать не менее 3 раз. Найти среднее значение периода  $\langle T \rangle$ .
2. По среднему значению периода по (6.8) вычислить значение  $R'$ .

- Измерить диаметр шарика  $d$  и найти его радиус. Найти радиус кривизны поверхности зеркала  $R$ .
- Результаты измерений и вычислений занести в таблицу

№	$n$	$t$	$T$	$\langle T \rangle$	$R'$	$d$	$r$	$\langle r \rangle$	$R$
1									
2									
3									

- Вычислить погрешность измерения радиуса кривизны зеркала  $\Delta R$ .
- Записать результат с учётом погрешности.

### Контрольные вопросы

- В каких движениях участвует шарик? Запишите формулы полной механической энергии шарика в положениях  $C$  и  $L$  и закон сохранения механической энергии для него.
- Как связаны высота подъема шарика  $h$  с амплитудой его колебаний  $A$  и радиусом  $R$ ? Выведите формулу (6.3)
- Запишите уравнение движения центра масс шарика. Найдите скорость его движения. Чему равна максимальная скорость шарика? Выведите формулу (6.7).
- Выведите формулу (6.8) для расчета радиуса поверхности  $R'$ , по которой движется центр масс шарика.
- Какие силы действуют на шарик в каждой точке его траектории? Нарисуйте эти силы и запишите II закон Ньютона в векторном и скалярном виде для одного из положений шарика.
- Что такое момент инерции твёрдого тела? Его физический смысл? Чему равен момент инерции шара?

### Литература

- Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 67–70, 94–116.
- Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 23–28, 34–46, 255–258.

### Работа 1.7

### ИЗУЧЕНИЕ УДАРА ШАРОВ

**Цель работы:** 1) проверить выполнение закона сохранения импульса при ударе шаров; 2) определить коэффициент восстановления энергии.

**Приборы и принадлежности:** кронштейн с бифилярными подвесами, набор шаров, градусная шкала.

## Краткая теория

Удар – любое кратковременное взаимодействие двух или нескольких тел. При ударе время взаимодействия мало, а возникающие силы велики, поэтому действием внешних сил можно пренебречь и рассматривать соударяющиеся тела как замкнутую систему. В замкнутой системе выполняется закон сохранения *импульса*, а в консервативной системе также выполняется закон сохранения *механической энергии*.

Напомним, что импульс системы тел равен геометрической сумме импульсов входящих в нее тел, а импульс тела  $\vec{P}$  – произведению его массы  $m$  на скорость  $\vec{v}$ , т. е.  $\vec{P} = m\vec{v}$ . Механическая энергия системы в общем случае складывается из кинетических энергий входящих в нее тел и потенциальной энергии их взаимодействия. Так как потенциальная энергия тел в результате удара не изменяется, то механическую энергию системы считают равной сумме кинетических энергий тел.

Кинетическая энергия тела  $E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$ .

Предельными, идеальными случаями соударения являются абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары.

Абсолютно упругий удар – столкновение тел, в результате которого механическая энергия системы не изменяется (система консервативна). Таким образом, для абсолютно упругого удара выполняются и закон сохранения импульса, и закон сохранения механической энергии. Пусть система состоит из двух абсолютно упругих шаров массами  $m_1$  и  $m_2$ . Обозначим скорости шаров до удара  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , а после удара –  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$ . Законы сохранения импульса и энергии для такой системы имеют вид

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \quad (7.1)$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}. \quad (7.2)$$

Абсолютно неупругий удар – столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое (продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина). При таком ударе выполняется только закон сохранения импульса

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}, \quad (7.3)$$

где  $\vec{u}$  – одинаковая скорость шаров после удара.

Механическая энергия в этом случае не сохраняется. Вследствие пластической деформации шаров она частично переходит во внутреннюю (тепловую) энергию. Потерю механической энергии  $\Delta E$  можно найти как разность кинетических энергий тел до и после удара

$$\Delta E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}. \quad (7.4)$$

Рассеяние механической энергии при ударе наглядней можно оценить с помощью коэффициента восстановления кинетической энергии  $K$ . Коэффициент восстановления энергии определяется как отношение энергии, оставшейся у шаров после удара  $E'$ , к энергии, которой они обладали до удара  $E$ , т. е.

$$K = \frac{E'}{E}. \quad (7.5)$$

### Описание установки и метода измерений

На опыте абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары практически не встречаются. Чаще всего имеют место случаи, когда тела после удара расходятся, но при этом механическая энергия не сохраняется, а частично переходит во внутреннюю (тепловую). Такие удары исследуются в настоящей работе.

Установка для исследования взаимодействия шаров при ударе (рис. 7.1) состоит из треноги, кронштейнов, к которым через бифилярные подвесы подвешены шары, и градусной шкалы.

В работе до удара движется один шар массой  $m_1$ , а после удара оба, поэтому закон сохранения импульса в векторном виде записывается так:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2. \quad (7.6)$$

При записи закона в скалярном виде необходимо учитывать направления движения шаров.

Из (7.6) следует, что, для того чтобы проверить выполнение закона сохранения импульса и рассчитать коэффициент восстановления энергии, необходимо знать скорости шаров непосредственно перед ударом и после удара.

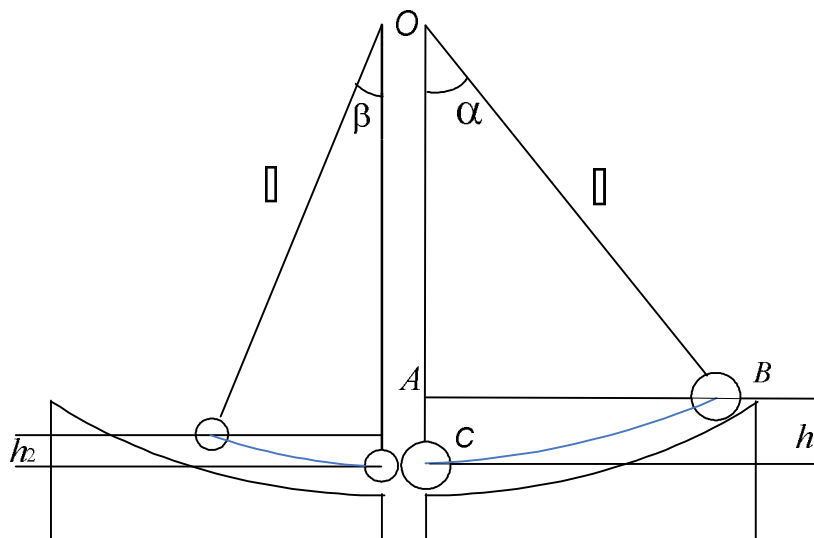


Рис. 7.1

Скорости шаров находят следующим образом. Для сообщения шару  $m_1$  скорости его отклоняют от положения равновесия на угол  $\alpha$  и затем отпускают. В наивысшем положении  $B$  скорость шара равна нулю, и он обладает только потенциальной энергией, а в наинизшем положении  $C$  его высота равна нулю и он обладает только кинетической энергией. Если сопротивлением воздуха пренебречь, то можно считать, что для шара выполняется закон сохранения механической энергии

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2},$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}, \quad (7.7)$$

где  $h_1$  – высота, на которую поднимается шар при отклонении на угол  $\alpha$ ,  $v_1$  – скорость шара непосредственно перед ударом.

Высоту, на которую поднимается центр масс шара при отклонении от положения равновесия, измерить невозможно, но ее можно выразить через угол  $\alpha$ . Рассмотрев треугольник  $AOB$ , в котором гипотенуза равна длине подвеса  $OB = l$ , а прилежащий катет  $AO = l - h_1$ , найдем, что

$$= \frac{l - h_1}{l},$$

откуда

$$h_1 = l(1 - \cos \alpha) = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (7.8)$$

Подставив (7.8) в (7.7), найдем скорость шара перед ударом

$$v_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (7.9)$$

Скорости первого и второго шаров после удара находят также по формуле (7.9), в которой  $\alpha$  меняют соответственно на  $\alpha'$  – угол отклонения первого шара после удара – и  $\beta$  – угол отклонения второго шара после удара

$$u_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha'}{2}, \quad (7.10)$$

$$u_2 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\beta}{2}. \quad (7.11)$$

Подставив (7.9), (7.10) и (7.11) в (7.6), получают формулу для проверки закона сохранения импульса в данной работе

$$m_1 \sin \frac{\alpha}{2} = m_1 \sin \frac{\alpha'}{2} + m_2 \sin \frac{\beta}{2}. \quad (7.12)$$

В (7.12) скорость первого шара до удара считают положительной, остальным скоростям приписывают знак в зависимости от направления отклонения шаров.

Подставив (7.9), (7.10) и (7.11) в (7.5), получают формулу для расчета коэффициента восстановления энергии

$$K = \frac{m_1 \sin^2 \frac{\alpha'}{2} + m_2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{m_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (7.13)$$

### Порядок выполнения работы

1. Расположить центры шаров на одной горизонтальной линии. Отклонить первый шар на угол  $\alpha$ , затем отпустить его.
2. Определить (по первому отбросу) углы отклонения шаров после удара  $\alpha'$  и  $\beta$ . Одному наблюдателю практически невозможно снять одновременно два отсчёта, поэтому поступают так: сначала берут отсчёт  $\alpha'$ , затем производят повторный удар из того же положения  $\alpha$  и берут отсчёт  $\beta$ . Для каждого угла отклонения  $\alpha$  необходимо получить не менее пяти значений  $\alpha'$  и  $\beta$ . Результаты усреднить.
3. Прodelать указанное в п. 2 для трёх различных углов  $\alpha$ .
4. Результаты измерений занести в таблицу

№	$\alpha$	Отбросы после удара	1	2	3	4	5	$\langle \alpha' \rangle$	$\langle \beta \rangle$
1		$\alpha'$							
		$\beta$							
2		$\alpha'$							
		$\beta$							
3		$\alpha'$							
		$\beta$							

5. Убедиться в выполнении закона сохранения импульса с помощью формулы (7.12).
6. Вычислить коэффициент восстановления энергии по формуле (7.13).
7. Оценить погрешности измерений (по указанию преподавателя).

### Контрольные вопросы

1. Какие системы тел называются замкнутыми, какие – консервативными?
2. Почему система соударяющихся тел может считаться замкнутой?
3. Какая величина называется импульсом тела, импульсом системы тел?
4. Сформулируйте закон сохранения импульса и запишите его для абсолютно упругого и абсолютно неупругого ударов.
5. Запишите закон сохранения энергии для абсолютно упругого и абсолютно неупругого ударов.

6. Запишите законы сохранения импульса и энергии для удара, рассматриваемого в данной работе.
7. Выведите формулу (7.7) для расчета скоростей шаров до и после удара.
8. Выведите формулу (7.12) для проверки закона сохранения импульса.
9. Что такое коэффициент восстановления энергии? Каков его физический смысл? Получите формулу (7.13) для расчета коэффициента восстановления энергии.

### Литература

1. Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 67–70, 81–83, 94–116.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 23–28, 30–33, 34–46.
3. Зисман, Г. А. Курс общей физики. Т.1 / Г. А. Зисман, О. М Тодес. – М.: Наука, 1972. – С. 50–55, 59–70.

### Работа 1.8

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА И МОМЕНТА СИЛ ТРЕНИЯ В ПОДШИПНИКЕ

**Цель работы:** определить момент инерции вращающегося тела неправильной формы и момент сил трения в подшипнике.

**Приборы и принадлежности:** вращающееся тело, шарик, секундомер, масштабная линейка.

#### Описание установки и метода измерений

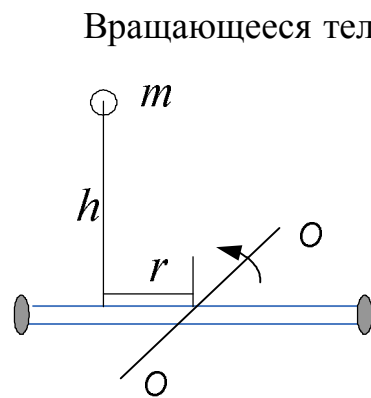


Рис. 8.1

Вращающееся тело в виде стержня неправильной формы закреплено на оси  $OO$ , проходящей через его центр масс (рис. 8.1). Шарик массой  $m$ , свободно падающий с высоты  $h$ , ударяется о стержень на расстоянии  $r$  от оси вращения. В результате удара стержень начинает вращаться, а шарик либо отскакивает вверх, либо продолжает движение вниз с изменившейся скоростью. Из-за трения в подшипнике спустя некоторое время  $t$  стержень останавливается, сделав  $n$  оборотов.

При ударе систему "шарик – тело" можно считать замкнутой и поэтому для неё можно записать закон сохранения момента импульса.

Перед ударом стержень неподвижен, следовательно, момент импульса системы непосредственно перед ударом  $\vec{L}_1$  равен только моменту импульса шарика, который можно считать точкой,

$$\vec{L}_1 = \vec{r} \times (m\vec{v}), \quad (8.1)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки, в которой происходит удар,  $\vec{v}$  – скорость шарика перед ударом.

После удара момент импульса системы  $\vec{L}_2$  складывается из момента импульса шарика и момента импульса стержня

$$\vec{L}_2 = \vec{r} \times (m\vec{v}') + I\vec{\omega}_0, \quad (8.2)$$

где  $\vec{v}'$  – скорость шарика после удара,  $I$  – момент инерции стержня,  $\vec{\omega}_0$  – начальная скорость вращения, которую стержень приобретает в момент удара.

Итак, закон сохранения момента импульса для системы "шарик – тело" имеет вид

$$\vec{r} \times (m\vec{v}) = \vec{r} \times (m\vec{v}') + I\vec{\omega}_0.$$

Так как в последнем выражении все моменты импульса направлены по одной прямой, вдоль оси вращения, то его можно записать в скалярном виде:

$$mvr = mv'r + I\omega_0. \quad (8.3)$$

Уравнения (8.3) недостаточно для определения момента инерции тела  $I$ . Но если удар считать абсолютно упругим (практически так оно и есть), то для системы "шарик – тело" можно записать и закон сохранения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2}, \quad (8.4)$$

где  $\frac{mv^2}{2}$  и  $\frac{mv'^2}{2}$  – кинетические энергии шарика до и после удара,  $\frac{I\omega_0^2}{2}$  – кинетическая энергия стержня непосредственно после удара.

Исключив из системы уравнений (8.3) и (8.4) скорость шарика после удара (которую практически невозможно найти), получим формулу для расчета момента инерции стержня

$$I = \frac{mr}{\omega_0}(2v - \omega_0 r). \quad (8.5)$$

Скорости  $v$  и  $\omega_0$  легко определить на опыте. Если сопротивлением воздуха пренебречь, то для шарика можно записать закон сохранения механической энергии

$$mgh = \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (8.6)$$

Начальную угловую скорость тела  $\omega_0$  находят, руководствуясь следующими соображениями. После удара вращение стержня является равнозамедленным, следовательно, описывается уравнениями

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t, \quad (8.7)$$

где  $t$  – время, в течение которого стержень останавливается;  $\varphi$  – угол, на который он поворачивается за это время,  $\varepsilon$  – угловое ускорение стержня;  $\omega$  – угловая скорость тела в момент времени  $t$ .

Поскольку  $\omega = 0$ , то из (8.7) получается

$$\omega_0 = \frac{2\varphi}{t}. \quad (8.8)$$

Угол  $\varphi$  можно найти, зная число оборотов  $n$ , совершенных телом до остановки. Так как поворот на один оборот соответствует повороту на угол  $2\pi$  радиан, то  $\varphi = 2\pi n$ , и (8.8) принимает вид

$$\omega_0 = \frac{4\pi n}{t}. \quad (8.9)$$

Рассчитав момент инерции стержня, можно, пользуясь основным законом динамики вращательного движения, найти момент силы трения в подшипнике

$$M_{\text{тр}} = I\varepsilon. \quad (8.10)$$

Выразив угловое ускорение из (8.7) и подставив его в (8.10), получают окончательную формулу для расчета момента силы трения в подшипнике

$$M = I \frac{4\pi n}{t^2}. \quad (8.11)$$

### Порядок выполнения работы

1. Установить стержень горизонтально. Поднять шарик над стержнем на некоторую высоту (указанную преподавателем) и отпустить его.
2. В момент удара шарика о стержень включить секундомер.
3. Наблюдая за одним из концов стержня, определить число оборотов, совершенных стержнем до остановки. В момент остановки стержня выключить секундомер. Опыт повторить 5 раз.
4. Рассчитать средние значения скоростей  $\langle v \rangle$  и  $\langle \omega_0 \rangle$  по средним значениям измеренных величин.
5. Найти момент инерции стержня  $I$ .
6. Используя полученное значение момента инерции, найти момент сил трения в подшипнике оси вращения.
7. Данные измерений и вычислений занести в таблицу

№	$m$	$h$	$t$	$n$	$r$	$\omega_0$	$\langle \omega_0 \rangle$	$v$	$I$	$M_{\text{тр}}$
1										
2										
3										

8. Оценить погрешности измерений (по указанию преподавателя).

## Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции твёрдого тела? Каков его физический смысл?
2. Чему равен момент импульса материальной точки (шарика) до и после удара? Каково его направление?
3. Чему равен момент импульса твёрдого тела? Каково его направление?
4. Сформулируйте закон сохранения момента импульса. Обоснуйте его применение к системе "шарик – стержень".
5. Запишите закон сохранения механической энергии для системы "шарик – стержень" в момент удара.
6. Выведите формулу (8.6) скорости шарика перед ударом.
7. Выведите формулу (8.8) начальной угловой скорости стержня.
8. Выведите формулу (8.5) для расчета момента инерции стержня.
9. Запишите основной закон динамики вращательного движения.

## Литература

1. Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 94–116.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 27–30, 34–46.

## Работа 1.9

### ИЗУЧЕНИЕ ПРЕЦЕССИОННОГО ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА

**Цель работы:** 1) измерить скорость прецессии гироскопа; 2) рассчитать угловую скорость вращения гироскопа; 3) построить график зависимости угловой скорости прецессии гироскопа от величины внешнего момента силы.

**Приборы и принадлежности:** гироскоп, закреплённый в кардановом подвесе, угловая шкала, секундомер, масштабная линейка, набор грузов.

#### Описание установки и метода измерений

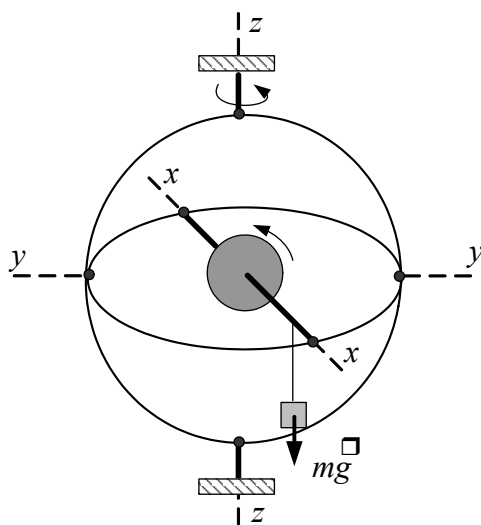


Рис. 9.1

Гироскопом называется симметричное твёрдое тело, быстро вращающееся вокруг одной из главных осей инерции. Чтобы ось гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, его закрепляют на кольцах так называемого карданова подвеса (рис. 9.1), в котором оси внутреннего  $yy$  и внешнего  $zz$  колец и ось гироскопа  $xx$  пересекаются в одной точке, называемой центром подвеса. Такой гироскоп имеет три степени свободы и может совершать любой поворот около центра подвеса.

Гироскоп характеризуется двумя основными свойствами.

Первое свойство гироскопа с тремя степенями свободы состоит в том, что его ось стремится устойчиво сохранять приданное ей первоначальное направление в мировом пространстве (относительно звезд). Если эта ось вначале направлена на какую-либо звезду, то при любых перемещениях прибора и случайных толчках она будет продолжать указывать на эту звезду, меняя свою ориентировку относительно осей, связанных с Землёй.

Второе свойство гироскопа обнаруживается, когда на его ось начинает действовать сила, приложенная в точке, не совпадающей с центром масс гироскопа. Казалось бы, что под действием силы  $m\vec{g}$  ось гироскопа должна начать поворачиваться вокруг оси  $yy$ , а она начинает поворачиваться вокруг оси  $zz$ , т. е. вокруг направления действия силы. Это свойство получило название гироскопического эффекта. Вращение же оси вращения гироскопа вокруг направления действия силы называется прецессией.

Благодаря своим свойствам хорошо сбалансированные и достаточно быстро вращающиеся гироскопы, установленные на высокосовершенных подшипниках, применяются в устройствах автоматического управления. Основные области применения гироскопов – судоходство, авиация и космонавтика.

Поведение гироскопа, на первый взгляд, противоестественное, полностью объясняется основным законом динамики вращательного движения, который в данном случае удобно записать в виде уравнения моментов

$$d\vec{L} = \vec{M}dt, \quad (9.1)$$

где  $\vec{M}$  – момент силы, действующей на ось гироскопа,  $d\vec{L}$  – изменение момента импульса гироскопа, произошедшее под действием этого момента силы за промежуток времени  $dt$ ,  $\vec{L} = I\vec{\omega}$  – момент импульса гироскопа,  $\vec{\omega}$  – угловая скорость вращения гироскопа. Из (9.1) следует, что изменение момента импульса гироскопа  $d\vec{L}$  направлено параллельно моменту силы  $\vec{M}$ .

Наглядно поведение гироскопа демонстрирует рис. 9.2.

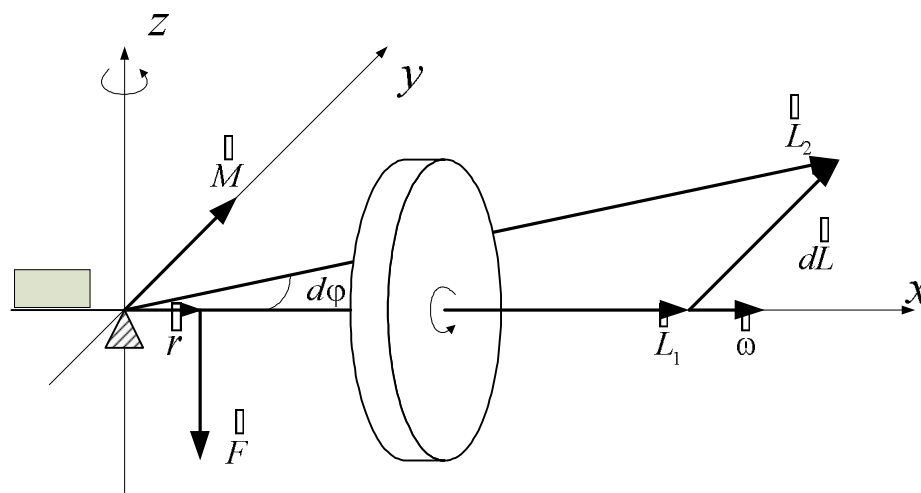


Рис. 9.2

На рис. 9.2 гироскоп вращается вокруг оси  $x$ . Следовательно, и его угловая скорость  $\dot{\omega}$ , и момент импульса  $\vec{L} = I\dot{\omega}$  направлены вдоль оси  $x$ . Сила  $\vec{F}$ , действующая на ось гироскопа, создает момент силы  $\vec{M}$ , направленный вдоль оси  $y$ , от нас (см. с. 19). Согласно (9.1) также, вдоль оси  $y$ , направлен вектор  $d\vec{L}$ . Так как момент силы перпендикулярен вектору  $\vec{L}$ , то он изменяет только направление вектора  $\vec{L}$ , модуль же его остается неизменным, т. е.  $|\vec{L}_1| = |\vec{L}_2| = |\vec{L}|$ .

Таким образом, конец вектора  $\vec{L}$ , а следовательно, ось вращения гироскопа  $x$ , описывает окружность вокруг оси  $z$ . Говорят, что ось вращения гироскопа прецессирует вокруг оси  $z$ .

При постоянном моменте сил прецессия происходит с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Ее легко измерить на опыте, определив угол  $\Delta\varphi$ , на который поворачивается ось гироскопа за время  $\Delta t$

$$\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (9.2)$$

Угловая скорость вращения гироскопа  $\omega$  велика для того, чтобы её можно было измерить непосредственно, но ее можно рассчитать, так как угловая скорость прецессии  $\Omega$  зависит не только от момента внешней силы, но и от скорости вращения гироскопа. Для установления этой зависимости рассмотрим бесконечно малый промежуток времени  $dt$ . За бесконечно малый промежуток времени ось гироскопа повернется на бесконечно малый угол  $d\varphi$  (см. рис. 9.2). Бесконечно малым будет и вектор  $d\vec{L}$ , а значит, его длина практически будет равна длине дуги, которую за это время описывает конец вектора  $\vec{L}$ . Из сказанного следует, что угол  $d\varphi$  можно представить в радианах как любой центральный угол

$$d\varphi = \frac{dL}{L}, \quad (9.3)$$

где  $dL$  – модуль вектора  $d\vec{L}$ ,  $L$  – модуль вектора  $\vec{L}$ .

Если подставить (9.3) в (9.2) и учесть (9.1), формулу (9.2) можно представить в виде:

$$\Omega = \frac{M}{L} \quad \text{или} \quad \Omega = \frac{M}{I\omega}. \quad (9.4)$$

откуда следует, что угловая скорость прецессии  $\Omega$  прямо пропорциональна модулю момента внешней силы и обратно пропорциональна угловой скорости вращения гироскопа  $\omega$ .

Формула (9.4) позволяет рассчитать вращения гироскопа, если известен его момент инерции, так как остальные величины легко измеряются на опыте:

$$\omega = \frac{M}{I\Omega}. \quad (9.5)$$

В данной работе силой  $\vec{F}$ , действующей на ось гироскопа, является сила натяжения нити, на которой подвешен груз  $m$ , которая в рассматриваемом случае равна силе тяжести груза  $m\vec{g}$ . Плечо этой силы  $l$  есть расстояние от центра карданова подвеса до линии действия силы. Таким образом, модуль момента силы равен:

$$M = mgl. \quad (9.6)$$

Подставив (9.6) в (9.5), можно получить окончательную формулу для расчета угловой скорости вращения гироскопа

$$\omega = \frac{mgl}{I\Omega}. \quad (9.7)$$

Момент инерции гироскопа считать равным  $I = 0,01 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

### Порядок выполнения работы

1. Навить на ось гироскопа прочную нить, закрепив её на оси с помощью отверстия на ней. Затем, придерживая гироскоп одной рукой, другой быстро раскрутить нить, приведя гироскоп в движение. Стараться во всех опытах по возможности придавать гироскопу одинаковую скорость вращения.
2. Подвесить на ось гироскопа один из предлагаемых грузов. Ось гироскопа начнет вращаться (прецессировать).
3. С помощью шкалы, закрепленной на основании прибора, измерить промежуток времени  $\Delta t$ , за который ось гироскопа повернется на некоторый угол  $\Delta \varphi$  (указанный преподавателем). С помощью (9.2) рассчитать угловую скорость прецессии гироскопа  $\Omega$ . Опыт проделать не менее трех раз.
4. Измерить плечо силы, действующей на ось гироскопа.
5. Рассчитать угловую скорость вращения гироскопа  $\omega$  по формуле (9.7).
6. Проделать указанное в пп. 1–5 не менее, чем с двумя грузами.
7. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу

№	$m$	$l$	$\Delta \varphi$	$\Delta t$	$\Omega$	$\langle \Omega \rangle$	$\omega$
1							
2							
3							
1							
2							
3							

8. Построить график зависимости угловой скорости прецессии от приложенного к оси гироскопа момента силы. Так как момент силы (9.5) в данной работе зависит только от массы груза, то можно строить зависимость от массы груза.

**Надо иметь в виду, что график можно построить только в том случае, если Вам удавалось при раскручивании нити придавать гироскопу одну и ту же угловую скорость.**

9. По указанию преподавателя оценить погрешности измерения величин  $\Omega$  и  $\omega$ .

Заметим, что углы во все формулы входят в радианах, а угловая скорость – в рад/с. Для перехода от градусов к радианам можно воспользоваться соотношением:  $360^\circ = 2\pi$  радиан.

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое гироскоп? Каковы его свойства? Какое явление называется прецессией гироскопа?
2. Используя основной закон динамики вращательного движения, объясните поведение гироскопа под действием внешней силы.
3. Чему равен момент импульса твердого тела? Чем определяется направление момента импульса?
4. Выведите формулу момента силы (9.6). Как найти направление момента силы относительно неподвижной оси? Почему момент силы в данной работе не изменяет момент импульса по модулю?
5. Каков смысл угловой скорости и углового ускорения? Как они направлены? В каких единицах измеряются?
6. Каким должен быть график зависимости угловой скорости прецессии: 1) от момента внешней силы при постоянной скорости вращения гироскопа; 2) от скорости вращения гироскопа при постоянном моменте силы (дайте вывод формулы (9.4))?
7. Выведите формулу для расчета скорости вращения гироскопа (9.7). От чего зависит эта скорость?

### **Литература**

1. Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 94–116.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 34–46.

### **Работа 1.10**

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКОВ**

### **Краткая теория**

Сила тяжести (рис. 10.1)  $m\vec{g}$  представляет собой геометрическую сумму гравитационной силы (силы тяготения)  $\vec{F}_g$  и центробежной силы инерции  $\vec{F}_{\text{иб}}$ , учитывающей эффект суточного вращения Земли:

$$m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_{цб}. \quad (10.1)$$

Сила тяготения  $\vec{F}_g$  направлена к центру Земли  $C$ , а модуль ее определяется по закону всемирного тяготения

$$F_g = G \frac{M_3 m}{R_3^2}, \quad (10.2)$$

где  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Нм}^2 / \text{кг}^2$  – гравитационная постоянная,  $M_3$  и  $R_3$  – масса и радиус Земли соответственно. Из-за сплюснутости Земли (ее экваториальный радиус на 22 км больше полярного) сила тяготения зависит от широты.

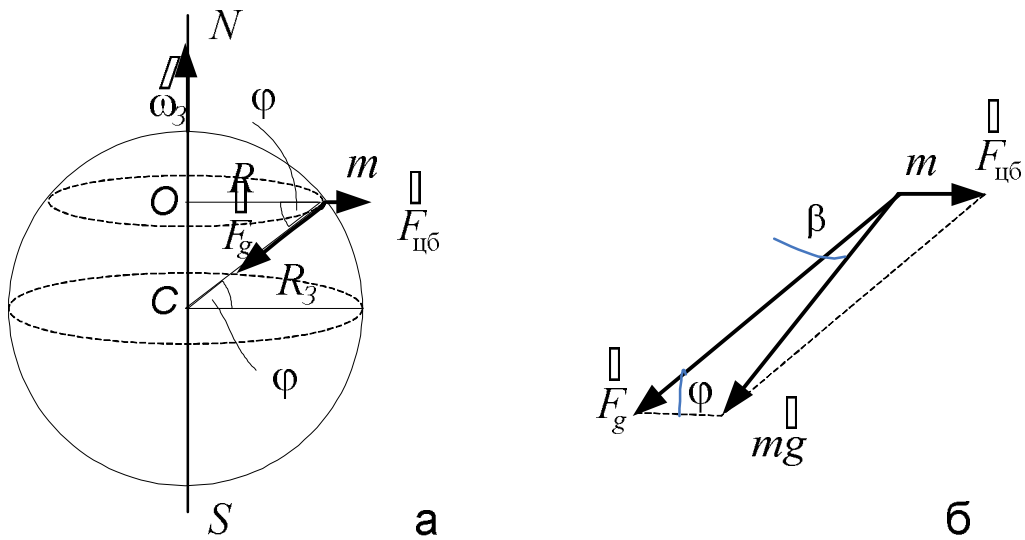


Рис. 10.1

Центробежная сила инерции  $\vec{F}_{цб}$  направлена от центра окружности, по которой движется тело, а модуль ее определяется по формуле

$$F_{цб} = m\omega_3^2 R, \quad (10.3)$$

где  $\omega_3$  – угловая скорость вращения Земли,  $R$  – радиус окружности, по которой движется тело.

Центробежная сила инерции так же, как и гравитационная, зависит от широты местоположения тела.

Из рис. 10.1а видно, что радиус окружности, по которой движется тело, находящееся вблизи поверхности Земли на широте  $\varphi$ , равен

$$R = R_3 \cos \varphi. \quad (10.4)$$

Подставив (10.4) в (10.3), находим, что

$$F_{цб} = m\omega_3^2 R_3 \cos \varphi,$$

т. е. центробежная сила равна нулю на полюсах ( $\varphi = 90^\circ$ ) и максимальна на экваторе ( $\varphi = 0^\circ$ ). Но вследствие очень малой угловой скорости вращения Земли ( $\omega_3 = 2\pi / 86400 \text{ с} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ) даже на экваторе она составляет только 1/291 часть силы тяжести.

Из рис. 10.1б видно, что наличие центробежной силы инерции приводит к тому, что направление силы тяжести, совпадающее с направлением отвеса (вертикальное направление), не совпадает с направлением к центру Земли, а образует с ним угол  $\beta$ , зависящий от широты. Расчет показывает, что

$$\sin \beta = 0,0018 \sin 2\varphi,$$

откуда следует, что на экваторе ( $\varphi = 0^\circ$ ) и на полюсах ( $\varphi = 90^\circ$ )  $\beta = 0^\circ$  и отвес направлен к центру Земли. Максимального значения отклонение отвеса достигает на широте  $45^\circ$ , где  $\beta \approx 6'$ .

Итак, центробежная сила инерции незначительно изменяет силу тяжести. Расположение тяжелых горных пород под поверхностью Земли также оказывает незначительное влияние на направление и величину силы тяжести. Вследствие незначительности этих влияний часто считают, что сила тяжести направлена к центру Земли и равна силе тяготения (10.2), а ускорение свободного падения из (10.2) равно  $g = GM_3 / R_3^2$ .

Однако иногда необходимо точное знание ускорения свободного падения. Например, в геологоразведке. Есть идея использовать точное знание ускорения свободного падения в навигации.

Ускорение свободного падения изменяется с широтой от  $9,780 \text{ м/с}^2$  на экваторе до  $9,832 \text{ м/с}^2$  на полюсах. Значение  $g = 9,806 \text{ м/с}^2$  принято в качестве нормального ускорения.

В настоящей работе ускорение свободного падения определяют с помощью математического (вариант I) и физического (вариант II) маятников.

#### Вариант I

### Определение ускорения свободного падения

#### с помощью математического маятника

#### Описание установки и метода измерений

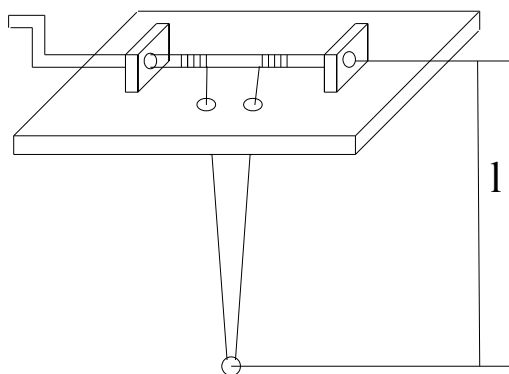


Рис. 10.2

Под математическим маятником понимают идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке. В данной работе в качестве математического маятника используется массивный свинцовый шарик, подвешенный на двух расходящихся нитях (рис. 10.2). Длину

маятника можно изменять, наматывая нить на ось.

Когда маятник отклонен от положения равновесия на угол  $\alpha$  (рис. 10.3), силу тяжести  $m\vec{g}$ , действующую на него, можно разложить на две составляющие:  $\vec{F}_n$ , направленную вдоль нити, и  $\vec{F}_\tau$ , направленную перпендикулярно нити. Составляющая силы тяжести  $\vec{F}_n$  уравнивается силой натяжения нити  $\vec{F}_H$ , а составляющая  $\vec{F}_\tau$  остается неуравновешенной.

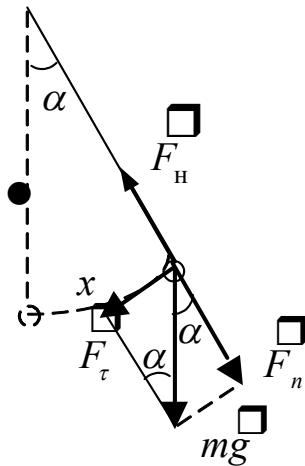


Рис. 10.3

Она возвращает шарик в положение равновесия. Из рисунка видно, что  $F_\tau = mg \sin \alpha$ . Если угол  $\alpha$  мал, то  $\sin \alpha$  примерно равен самому углу  $\alpha$ , измеренному в радианах. Т. е.  $\alpha = x/l$ , и сила, возвращающая маятник в положение равновесия,

$$F_\tau = -mg \frac{x}{l}, \quad (10.5)$$

где  $x$  — смещение шарика от положения равновесия,  $l$  — длина нити маятника, знак "—" показывает, что сила направлена в сторону, противоположную смещению (к положению равновесия).

Теперь запишем II закон Ньютона для маятника:

$$-\frac{mg}{l} x = m\ddot{x}, \quad (10.6)$$

где  $\ddot{x}$  — ускорение маятника, равное второй производной от смещения по времени.

Введя обозначение

$$g/l = \omega_0^2, \quad (10.7)$$

уравнение (10.6) можно переписать в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (10.8)$$

Уравнение (10.8) представляет собой динамическое уравнение колебательного движения, его решением является следующая функция времени (это легко проверить подстановкой)

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (10.9)$$

где  $A$  и  $\varphi_0$  — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями.

Уравнение (10.9) — кинематическое уравнение гармонического колебательного движения. Таким образом, при малых отклонениях (когда  $\sin \alpha \approx \alpha$ ) маятник совершает гармоническое колебательное движение. Анализ уравнения (10.9) показывает, что  $A$  — амплитуда колебаний (максимальное

отклонение от положения равновесия),  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний (определяет смещение в момент времени  $t = 0$ ),  $\omega_0$  – циклическая (или круговая) частота, связанная с периодом колебаний  $T$  соотношением:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (10.10)$$

С учетом введенного выше обозначения (10.7) получают формулу периода колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (10.11)$$

С помощью (10.11) можно определить ускорение свободного падения в данной точке Земли

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \quad (10.12)$$

Период колебаний маятника легко измерить на опыте, определив время  $t$ , за которое маятник совершает  $n$  колебаний:

$$T = t/n. \quad (10.13)$$

Точность измерения  $g$  зависит, главным образом, от точности измерения его длины, так как трудно определить положение центра масс маятника.

### Порядок выполнения работы

1. Определить длину математического маятника  $l$  (измеряется от уровня закрепления до центра масс маятника).
2. Отклонить маятник на  $10-15^\circ$  и отпустить. Определить время 15-30 полных колебаний. Повторить опыт 3 раза.
3. Найти среднее время  $n$  колебаний и период колебаний маятника по (10.13).
4. По средним значениям длины и периода по формуле (10.12) вычислить ускорение свободного падения в данной точке Земли.
5. Данные занести в таблицу

№	$l$	$\langle l \rangle$	$n$	$t$	$\langle t \rangle$	$\langle T \rangle$	$g$
1							
2							
3							

6. Оценить погрешность полученного значения  $g$  методом косвенных измерений, предварительно оценив методом прямых измерений погрешности длины и периода. Формулу для расчета погрешности  $g$  получить, воспользовавшись формулой (П.7) из параграфа "Расчет погрешностей...".

## Контрольные вопросы

1. Какая сила называется силой тяжести? Почему она отличается от силы тяготения? Запишите закон всемирного тяготения.
2. Запишите формулу центробежной силы инерции. Как она направлена и как ее модуль изменяется с широтой?
3. Какая сила заставляет математический маятник колебаться? Запишите для него II закон Ньютона в дифференциальной форме.
4. Запишите кинематическое уравнение гармонического колебательного движения. Как найти скорость и ускорение колеблющейся точки?
5. Что называется амплитудой и периодом колебаний? Как связаны период и циклическая частота?
6. Докажите, что функция (10.9) является решением уравнения (10.8).
7. Дайте вывод расчётной формулы (10.12).

### Вариант II

#### Определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника

##### Описание установки и метода измерений

Физическим маятником является любое реальное тело (рис. 10.4), закрепленное на оси  $O$ , не проходящей через его центр масс  $C$ . Чтобы понять, как движется физический маятник, надо записать для него основной закон динамики вращательного движения (II закон Ньютона для вращательного движения)

$$M = I\varepsilon, \quad (10.13)$$

где  $M$  – момент силы, действующий на маятник,  $I$  – момент инерции маятника относительно оси вращения,  $\varepsilon$  – его угловое ускорение.

Когда маятник отклонен от положения равновесия на угол  $\alpha$ , его силу тяжести  $m\vec{g}$ , приложенную в центре масс  $C$ , можно разложить на две составляющие:  $\vec{F}_n$ , направленную вдоль прямой  $OC$ , и  $\vec{F}_\tau$ , перпендикулярную к ней. Составляющая силы тяжести  $\vec{F}_\tau$  создает момент, возвращающий маятник в положение равновесия. Из рисунка видно, что  $F_\tau = mg \sin \alpha$ , а ее плечо равно  $l$  – расстоянию от оси вращения  $O$  до центра масс. Следовательно, момент силы  $\vec{F}_\tau$  относительно оси вращения равен

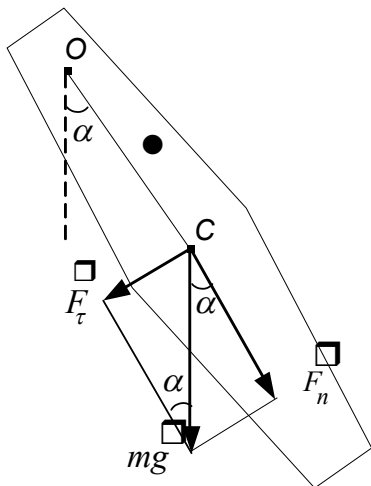


Рис. 10.4

$$M = mgsin\alpha \cdot l. \quad (10.14)$$

Подставив (10.14) в (10.13), получают II закон Ньютона для физического маятника в виде

$$-mgl \sin \alpha = I \varepsilon, \quad (10.15)$$

где  $m$  – масса маятника,  $g$  – ускорение свободного падения, знак “–” пишется потому, что момент силы и угол отклонения маятника противоположно направлены (момент силы возвращает маятник в положение равновесия).

Так как синусы (и тангенсы) малых углов примерно равны самим углам в радианах (т. е.  $\sin \alpha = \alpha$ ), а угловое ускорение равно второй производной от угла отклонения по времени (т. е.  $\varepsilon = \ddot{\alpha}$ ), то при малых отклонениях (10.15) принимает вид

$$-mgl \alpha = I \ddot{\alpha}. \quad (10.16)$$

В (10.16) все величины, кроме угла  $\alpha$ , постоянны, поэтому можно ввести обозначение

$$\frac{mgl}{I} = \omega_0^2 \quad (10.17)$$

и записать (10.17) в виде

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (10.18)$$

Дифференциальное уравнение (10.18) является динамическим уравнением колебательного движения. Решив его, находят, что угол отклонения маятника от положения равновесия  $\alpha$  является следующей функцией времени (в этом можно убедиться путем подстановки):

$$\alpha = \alpha_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (10.19)$$

Итак, при малых углах отклонения маятник движется по закону косинуса (или синуса), другими словами, маятник совершает гармоническое колебательное движение. Анализ уравнения (10.19) показывает, что  $\alpha_{\max}$  и  $\varphi_0$  – амплитуда и начальная фаза колебаний, а  $\omega_0$  – циклическая частота, связанная с периодом колебаний соотношением

$$\omega_0 = 2\pi/T, \quad (10.20)$$

откуда с учетом (10.17)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (10.21)$$

С помощью формулы (10.21) можно определить ускорение свободного падения, если известен момент инерции маятника относительно оси вращения  $I$  и расстояние от оси вращения до центра масс  $l$

Момент инерции маятника  $I$  относительно оси  $O$  можно представить с помощью теоремы Штейнера

$$I = I_0 + ml^2, \quad (10.22)$$

где  $I_0$  – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс  $C$  параллельно оси  $O$ .

С учетом (10.22) формула (10.21) принимает вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ml^2}{mgl}}. \quad (10.23)$$

Массу маятника и период его колебаний можно измерить на опыте с очень высокой точностью, но точно измерить момент инерции  $I_0$  не удастся. Для того, чтобы исключить  $I_0$  из формулы для определения  $g$ , пользуются обратным маятником. В настоящей работе обратный маятник (рис. 10.5) представляет собой массивный стержень  $1$ , на котором закреплены два груза  $2, 3$  и две трехгранные призмы  $O_1$  и  $O_2$ , из которых одна неподвижна, а другая может перемещаться вдоль стержня. Острые ребра призм, помещаемые попеременно на неподвижную опору, служат осями качаний маятника. Для каждой из осей колебаний маятника можно записать (10.23)

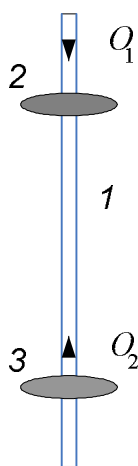


Рис. 10.5

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ml_1^2}{mgl_1}}, \\ T_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ml_2^2}{mgl_2}}, \end{aligned} \quad (10.24)$$

где  $l_1$  – расстояние от оси  $O_1$  до центра масс маятника,  $l_2$  – расстояние от оси вращения  $O_2$  до центра масс маятника.

Исключив  $I_0$  из системы (10.24), находят формулу для расчета ускорения свободного падения

$$g = \frac{4\pi^2(l_1^2 - l_2^2)}{T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2}. \quad (10.25)$$

Все величины в (10.25) легко измеряются на опыте. Периоды колебаний находят по (10.12), определив время 20-30 полных колебаний. Для определения  $l_1$  и  $l_2$  маятник снимают с консоли и располагают на специальной подставке, имеющей острую грань. Перемещая маятник, нетрудно

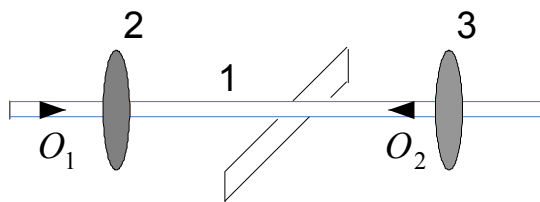


Рис. 10.6

найти положение центра масс. Расстояние от него до опорных призм и есть искомые  $l_1$  и  $l_2$ . Если  $l_1$  и  $l_2$  достаточно сильно отличаются друг от друга, а периоды  $T_1$  и  $T_2$ , наоборот, близки, то для получения достаточно точного значения  $g$  нет необходимости определять  $l_1$  и  $l_2$  с вы-

сокой степенью точности.

### Порядок выполнения работы

1. Закрепить на физическом маятнике грузы и одну из призм по указанию преподавателя.
2. Установить маятник одной из призм на опорную площадку. Отклонив его на угол  $10\text{--}15^\circ$ , определить время  $t$  20–30 полных колебаний. Опыт повторить не менее трех раз. Время усреднить. По формуле (10.13) с помощью среднего значения времени рассчитать период колебаний  $\langle T_1 \rangle$ .
3. Перевернуть маятник, установив на опорную площадку другой призмой, и так же, как сказано в п. 2, определить период колебаний  $\langle T_2 \rangle$ .
4. Снять маятник с опорной площадки и с помощью подставки с острым краем определить положение его центра масс и расстояния  $l_1$  и  $l_2$ .
5. Рассчитать ускорение свободного падения по формуле (10. 25).
6. Данные измерений занести в таблицу

№	$n$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$\langle T_1 \rangle$	$t_2$	$\langle t_2 \rangle$	$\langle T_2 \rangle$	$l_1$	$l_2$	$g$
1										
2										
3										

7. Рассчитать погрешность методом косвенных измерений. Для расчета погрешности вывести формулу, пользуясь (П.7) из параграфа "Расчет погрешностей...".

### Контрольные вопросы

1. Какая сила называется силой тяжести? Чем она отличается от силы тяготения? Запишите закон всемирного тяготения. Как сила  $\vec{F}_g$  зависит от широты?
2. Запишите формулу центробежной силы инерции. Как она направлена в разных точках Земли и как ее модуль зависит от широты?
3. Что такое центр масс (центр тяжести) тела. Каковы его свойства?
4. Дайте определение момента инерции материальной точки и твердого тела. От чего зависит момент инерции твердого тела? Каков его физический смысл? Единицы его измерения. Сформулируйте теорему Штейнера.
5. Дайте определение момента силы относительно оси. Как определяется его направление?
6. Разложите силу тяжести, действующую на маятник, на составляющие и покажите плечо каждой из сил.
6. Запишите основной закон динамики вращательного движения. Выведите формулу периода колебаний физического маятника.
7. Докажите, что функция (10.19) является решением уравнения (10.18).
8. Что называется амплитудой и периодом колебаний? Как связаны между собой период и циклическая частота?

9. Дайте вывод расчётной формулы (10.25).

### Литература

1. Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И. В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 122–124, 94–116.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 34–46, 255–258.

### Работа 1.11

#### ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНОГО ЗАКОНА ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА (вариант III – постоянным остается момент силы)

**Цель работы:** 1) проверить основной закон динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека, не изменяя момента силы, действующего на него; 2) определить момент инерции маятника.

**Приборы и принадлежности:** маятник Обербека, набор грузов, масштабная линейка, штангенциркуль, секундомер.

#### Описание установки и метода измерений

Маятник Обербека, используемый в данной работе, изображен на

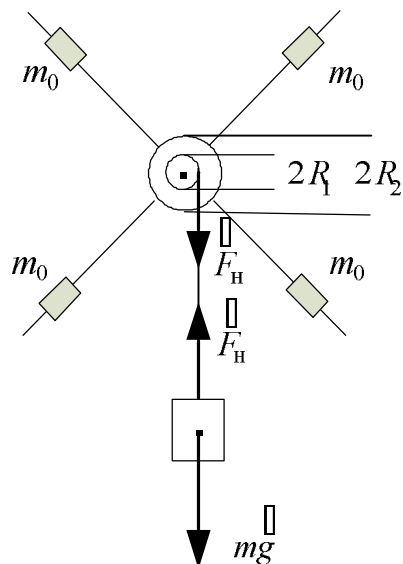


Рис. 11.1

рис. 5.1. Он состоит из четырех стержней и двух шкивов различного радиуса  $R_1$  и  $R_2$ , укрепленных на одной горизонтальной оси  $O$  (на рис. 11.1 изображена точкой). На стержни надеваются одинаковые грузики массой  $m_0$ , которые могут быть закреплены на разных расстояниях  $l$  от оси вращения маятника. На шкив наматывается нить, которая перебрасывается через вспомогательный блок. К свободному концу нити прикрепляется груз массой  $m$ , под действием которого маятник Обербека приводится в равноускоренное вращательное движение. Расстояние  $h$ , пройденное грузом за время  $t$ , отмечается по вертикальной шкале.

Основной закон динамики для вращательного движения в данной работе удобно записать в виде

$$M = I\varepsilon, \quad (11.1)$$

где  $M$  – вращающий момент, действующий на маятник,  $I$  – момент инерции маятника,  $\varepsilon$  – угловое ускорение маятника.

Из (11.1) следует, что при неизменном моменте сил угловое ускорение маятника обратно пропорционально моменту инерции, т. е. должно выполняться соотношение

$$I_1 \varepsilon_1 = I_2 \varepsilon_2, \text{ или } \varepsilon_2 / \varepsilon_1 = I_1 / I_2. \quad (11.2)$$

Найти отношение моментов инерции на опыте трудно по следующей причине. Момент инерции маятника складывается из момента инерции шкивов с крестовиной  $I_0$  и из моментов инерции четырех грузиков  $I'$ :

$$I = I_0 + 4I'. \quad (11.3)$$

Момент инерции каждого грузика определяется по теореме Штейнера

$$I' = I'_0 + m_0 l^2, \quad (11.4)$$

где  $I'_0$  – момент инерции грузика относительно оси симметрии, проходящей через центр масс грузика параллельно оси вращения маятника. Подставив (11.4) в (11.3), получим формулу

$$I = I_0 + 4I'_0 + 4m_0 l^2. \quad (11.5)$$

В (11.5) два первых слагаемых не изменяются при изменении расстояния грузиков от оси вращения. Когда грузики находятся на расстоянии  $l_1$  от оси вращения, момент инерции маятника

$$I_1 = I_0 + 4I'_0 + 4m_0 l_1^2, \quad (11.6)$$

когда грузики находятся на расстоянии  $l_2$  от оси вращения, момент инерции

$$I_2 = I_0 + 4I'_0 + 4m_0 l_2^2. \quad (11.7)$$

Но  $I_0$  и  $I'_0$  неизвестны, следовательно, в данной работе нельзя теоретически рассчитать отношение  $I_1/I_2$ , а значит, нельзя проверить соотношение (11.2).

В работе предлагается другой путь проверки закона (11.1). А именно: предлагается найти не отношение моментов инерции маятника, а их разность теоретически и экспериментально, а затем сравнить полученные значения.

Теоретически разность моментов инерции маятника находят, вычтя из уравнения (11.6) уравнение (11.7)

$$I_1 - I_2 = 4m_0(l_1^2 - l_2^2). \quad (11.8)$$

Экспериментально разность моментов инерции маятника можно найти, используя формулу (11.1)

$$I_1 - I_2 = \frac{M_1}{\varepsilon_1} - \frac{M_2}{\varepsilon_2}. \quad (11.9)$$

Силами трения в этой работе пренебрегают, поэтому вращающий момент создается только силой натяжения нити  $\vec{F}_H$ . Которую находят, рас-

смотрев движение груза  $m$ . II закон Ньютона для него в векторной и скалярной форме имеет вид соответственно

$$\begin{aligned} m\vec{g} + \vec{F}_H &= m\vec{a}, \\ mg - F_H &= ma. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Выразив силу натяжения из (11.10), получают для вращающего момента

$$M = m(g - a)R. \quad (11.11)$$

Ускорение груза  $a$  можно найти из формулы равноускоренного движения

$$h = \frac{at^2}{2}, \text{ откуда } a = \frac{2h}{t^2}. \quad (11.12)$$

Поскольку нить нерастяжима, то ускорение всех ее точек и любой точки обода шкива радиуса  $R$  равно ускорению груза  $a$ . Следовательно, угловое ускорение крестовины можно найти по формуле

$$\varepsilon = a/R. \quad (11.13)$$

Подставив (11.11), а также (11.13) с учетом (11.12) в (11.9) (при этом в (11.11) пренебрегают ускорением  $a$ , так как оно много меньше ускорения свободного падения  $g$ ), получают формулу для экспериментального расчета разности моментов инерции маятника при разных положениях грузов

$$I_1 - I_2 = \frac{mR^2g}{2h}(t_1^2 - t_2^2). \quad (11.14)$$

Очевидно, что доказательством правильности закона (11.1) является равенство (11.8) и (11.14), т. е. выполнение тождества

$$4m_0(l_1^2 - l_2^2) = \frac{mR^2g}{2h}(t_1^2 - t_2^2), \quad (11.15)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  – время прохождения грузом  $m$  высоты  $h$  при расстояниях грузиков от оси вращения  $l_1$  и  $l_2$  соответственно.

Итак, если при перемещении грузиков  $m_0$  относительно оси вращения будет выполняться тождество (11.15), то можно говорить о том, что основной закон динамики вращательного движения выполняется.

### Порядок выполнения работы

1. Закрепить грузики  $m_0$  на расстоянии  $l_1$  от оси вращения маятника (указанном преподавателем) и добиться его безразличного равновесия.
2. Навить на один из шкивов нить, прикрепить к ней груз  $m$  и три раза определить время падения  $t_1$  с высоты  $h$ .
3. Переместить грузики  $m_0$  на расстояние  $l_2$  от оси вращения и три раза определить время падения  $t_2$  с высоты  $h$ .
4. Результаты измерений занести в таблицу

№	$m_0$	$m$	$R$	$h$	$l_1$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$l_2$	$t_2$	$\langle t_2 \rangle$
1										
2										
3										

5. Используя средние значения величин, убедитесь в выполнении тождества (11.15).

$m_0 = 200$  г или 83 г (в зависимости от установки).

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение момента инерции тела, поясните его физический смысл.
2. Дайте определение момента силы относительно оси. Как он направлен?
3. Дайте определение угловой скорости, углового ускорения. Поясните физический смысл этих величин. Как определяется их направление? В каких единицах измеряются вышеперечисленные величины?
4. Сформулируйте теорему Штейнера. Запишите ее для передвижного грузика.
5. Напишите основной закон динамики вращательного движения.
6. Как в данной работе рассчитываются  $M$  и  $\varepsilon$ ?
7. Выведите формулу (11.15).

### Литература

1. Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 38–40, 94–116.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 14–17, 34–46.

### Работа 1.12

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

**Цель работы:** определить скорость полета пули.

**Приборы и принадлежности:** баллистический маятник со шкалой для определения угла его отклонения, секундомер, масштабная линейка.

### Описание установки и метода измерений

Установка для определения скорости полета пули (рис. 12.1) состоит из основания с вертикальной стойкой с тремя кронштейнами, крутильного маятника и пускового устройства. Измерительным прибором является баллистический крутильный маятник (рис. 12.2). Он выполнен в виде стержня 2, на концах которого имеются мишени 4 с пластином. По стержню могут перемещаться грузы 3. Упругая стальная проволока 1, на которой закреплен стержень, совпадает с осью вращения крутильного маятника  $OO$ . Перемещающиеся грузы 3 служат для изменения момента инерции маятника.

Пусковое устройство заряжается "пулей", после чего производится "выстрел" по мишени маятника. Максимальный угол отклонения стержня при этом "выстреле"  $\phi_{\max}$  определяется по шкале, нанесенной на кожухе. Принцип работы установки основан на зависимости максимального угла отклонения маятника от скорости полета "пули". После того как будет произведен "выстрел" и "пуля" прилипнет к мишени, маятник начнет совершать крутильные колебания, период которых зависит от момента инерции маятника и от упругих свойств подвеса.

Систему "маятник – пуля" можно считать изолированной и, следовательно, для нее можно записать закон сохранения момента импульса. Так как удар пули о мишень является абсолютно неупругим (пуля прилипает к мишени), закон сохранения момента импульса для системы "маятник–пуля" имеет вид

$$mvl = (I + ml^2)\omega_0, \quad (12.1)$$

где  $m$  – масса пули,  $v$  – скорость ее движения,  $l$  – расстояние от точки попадания пули в мишень до оси вращения маятника  $OO$  ( $mvl$  – момент импульса пули до удара),  $\omega_0$  – начальная угловая скорость маятника,  $I$  – момент инерции маятника относительно оси вращения.

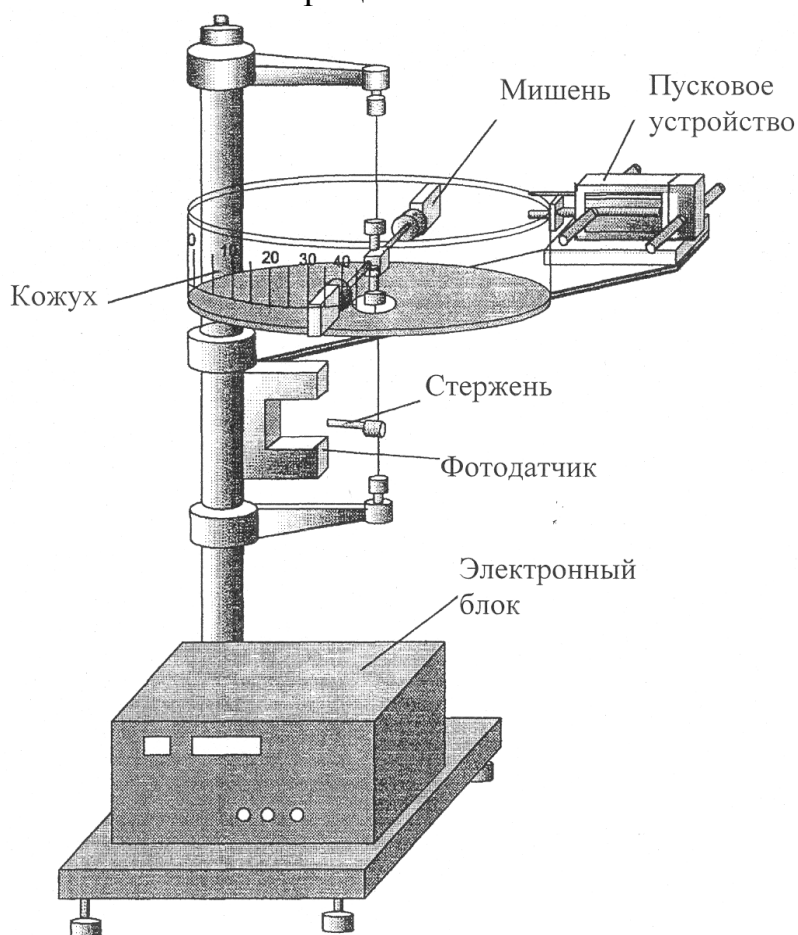


Рис. 12.1

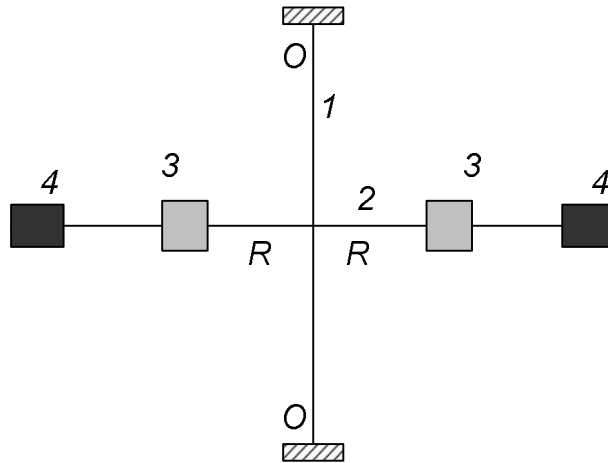


Рис. 12.2

Поскольку момент инерции пули  $ml^2$  пренебрежимо мал по сравнению с моментом инерции маятника, то им в (12.1) можно пренебречь и искомую скорость пули представить как

$$v = \frac{I\omega_0}{ml}. \quad (12.2)$$

В уравнении (12.2) три неизвестные величины: кроме скорости пули  $v$  неизвестны угловая скорость маятника, приобретенная им в момент удара  $\omega_0$ , и момент инерции маятника  $I$ . Таким образом, для нахождения скорости пули необходимы еще два уравнения.

В качестве одного уравнения используем закон сохранения механической энергии. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то кинетическая энергия маятника сразу после попадания в него пули равна потенциальной энергии закрученной упругой стальной проволоки:

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{D\phi_{\max}^2}{2}, \quad (12.3)$$

где  $D$  – коэффициент жесткости проволоки,  $\phi_{\max}$  – максимальный угол отклонения маятника в радианах.

В качестве другого уравнения используем формулу периода крутильных колебаний (вывод см. в работе 1.3)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (12.4)$$

Период колебаний маятника  $T$  легко определить на опыте, измерив с помощью секундомера время  $t$ , за которое совершается  $n$  колебаний:

$$T = \frac{t}{n}.$$

С помощью (12.3) и (12.4) можно найти  $\omega_0$ : выразив из (12.4) коэф-

эффициент  $D$  и подставив его в (12.3), получают для начальной угловой скорости маятника  $\omega_0$  выражение

$$\omega_0 = \frac{4\pi^2 \phi_{\max}}{T}. \quad (12.5)$$

После подстановки (12.5) в (12.2) получают для расчета скорости пули

$$v = \frac{4\pi^2 I \phi_{\max}}{m l T}. \quad (12.6)$$

В (12.6) все величины легко измеряются на опыте, кроме момента инерции маятника  $I$ , который можно представить как сумму момента инерции маятника без перемещающихся грузов  $I_0$  и момента инерции грузов

$$I = I_0 + 2MR^2, \quad (12.7)$$

где  $M$  – масса одного подвижного груза,  $R$  – расстояние от оси вращения до центра масс груза.

В (12.7) появилась новая величина  $I_0$  (момент инерции всех частей маятника за исключением момента инерции подвижных грузов), которую на опыте измерить невозможно. Для того чтобы от нее избавиться, поступают следующим образом. Сначала располагают грузы  $3$  как можно ближе к оси вращения маятника, на расстоянии  $R_1$ , а затем перемещают вдоль стержня на расстояние  $R_2$ . Запишем формулу момента инерции маятника для случаев, когда центры грузов находятся на расстояниях  $R_1$  и  $R_2$  от оси вращения:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 + 2MR_1^2, \\ I_2 &= I_0 + 2MR_2^2. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Непосредственно из системы уравнений (12.8), в которой три неизвестных, нельзя найти ни  $I_1$ , ни  $I_2$ , а можно найти только их разность

$$\begin{aligned} \Delta I &= I_1 - I_2, \\ \Delta I &= 2M(R_1^2 - R_2^2). \end{aligned} \quad (12.9)$$

Для нахождения самих моментов инерции вновь используют (12.4). Записывают (12.4) для двух положений грузов, соответствующих моментам инерции  $I_1$  и  $I_2$ ,

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{D}}, \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{D}}. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Затем, представив один момент инерции через другой, например  $I_2 = I_1 + \Delta I$ , и возведя (12.10) в квадрат, получают

$$I_1 = \frac{T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \Delta I. \quad (12.11)$$

Подставив (12.11) с учетом (12.9) в (12.6), получают формулу для

расчета скорости пули в данной работе

$$v = \frac{4\pi\phi_{\max}T_1}{(T_2^2 - T_1^2)ml} M(R_2^2 - R_1^2), \quad (12.12)$$

где  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $\phi_{\max}$  и  $l$  – средние значения, полученные при выполнении трех опытов, причем  $\phi_{\max}$  измеряется при моменте инерции  $I_1$ .

### Порядок выполнения работы

1. Максимально приблизить грузы 3 к оси вращения и зафиксировать их винтами. Измерить расстояние от оси вращения до центров грузов  $R_1$ . Для более точного измерения  $R_1$  определить расстояние между грузами и разделить его пополам.
2. Зарядить пусковое устройство. Для этого с помощью подвижной ручки с крючком сжать пружину и поместить пулю на край стержня пускового устройства.
3. Убедившись, что маятник находится в состоянии покоя, произвести "выстрел", отпустив пружину. По шкале на кожухе определить угол максимального отклонения маятника  $\phi_{\max}$  и выразить его в радианах.
4. Определить период колебаний маятника  $T_1$ . Для этого измерить время  $t_1$ , за которое маятник совершит 10-15 полных колебаний.
5. Определить среднее расстояние  $l$  от оси вращения до точки попадания пули в мишень. Для этого можно измерить расстояние между внешними краями мишени, разделить его пополам, и из половинки вычесть расстояние от внешнего края мишени до точки попадания в нее пули
6. Для расстояния  $R_1$  пп. 2, 3, 4, 5 повторить не менее трех раз.
7. Передвинуть грузы на максимальное расстояние от оси вращения  $R_2$ .
8. Для расстояния  $R_2$  повторить указанное в пп. 2 и 4 также не менее трех раз.
9. Результаты опытов занести в таблицу

№	$n$	$R_1$	$t_1$	$T_1$	$R_2$	$t_2$	$T_2$	$m$	$\phi_{\max}$	$l$	$v$
1											
2											
3											
Среднее	—		—			—					

10. Определить массу пули  $m$ , взвесив ее. Учесть, что масса подвижного груза  $M = 168$  г.
11. По средним значениям измеренных величин с помощью формулы (12.12) рассчитать скорость полета пули.

12. Оценить погрешность полученного значения скорости пули методом косвенных измерений, для чего получить формулу для расчета погрешности, воспользовавшись указаниями параграфа "Расчет погрешностей..."

### Контрольные вопросы

1. Чему равен момент инерции тела? Что он характеризует и от чего зависит? В каких единицах измеряется?
2. Чему равен момент импульса материальной точки и момент импульса твердого тела? Как определяется их направление?
3. Запишите формулы кинетической энергии вращающегося тела и потенциальной энергии закрученной упругой проволоки.
4. Как выглядит закон сохранения механической энергии для маятника сразу после попадания в него пули?
5. Выведите формулу периода крутильных колебаний маятника (вывод формулы дан в работе 1.3).
6. На основании каких законов выводится формула скорости пули (12.9)?
7. Запишите закон сохранения момента импульса для системы "маятник – пуля".
8. Запишите закон сохранения энергии для системы "маятник – пуля".
9. Выведите формулу (12.9) для расчета скорости пули в данной работе.

### Литература

1. Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 79–80, 94–116.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 23–28, 34–46, 255–258.

### Работа 1.13

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ И ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ НАКЛОННОГО МАЯТНИКА

**Цель работы:** изучить явления трения скольжения и трения качения; определить коэффициенты трения скольжения и трения качения.

**Приборы и принадлежности:** наклонный маятник со шкалами для измерения углов; исследуемые пластины-образцы, шарики, бруски.

### Краткая теория

Во всех реальных механических процессах имеют место силы трения. Их действие в большинстве случаев связывают с превращением механической энергии во внутреннюю энергию (тепловую).

Различают **внешнее** трение, возникающее в плоскости касания двух прижатых друг к другу тел при их относительном перемещении, и **внутреннее** трение, возникающее при перемещении слоев одной и той же среды относительно друг друга (его изучают в разделе "молекулярная физика"). В данной работе рассматривается внешнее трение.

В зависимости от вида перемещения одного тела по другому различают трение скольжения и трение качения, а по наличию промежуточной прослойки между телами различают трение сухое (твердая прослойка) и трение граничное (жидкая или консистентная прослойка). Каждый из видов внешнего трения характеризуют соответствующим коэффициентом.

Характерной особенностью внешнего трения является наличие трения покоя. Из опыта известно, что когда сила, стремящаяся привести тело в движение, недостаточно велика, тело остается в покое. Это значит, что возникает сила трения, уравнивающая приложенную извне силу – сила трения покоя. Таким образом, сила трения может существовать между соприкасающимися, но не движущимися телами. С увеличением приложенной силы увеличивается и сила трения покоя. В конце концов тело начинает двигаться. Значит, сила трения покоя может увеличиваться только до некоторого определенного предела. Когда говорят о силе трения покоя, имеют в виду ее максимальное значение, равное силе, приводящей тело в движение.

### Трение скольжения

Для определения коэффициента трения в данной работе используется метод наклонного маятника (рис. 13.1). Шарик или брусок, подвешенные в точке  $O$ , опираются на наклонную плоскость, угол наклона которой к горизонту  $\beta$  можно изменять. Если отклонить маятник от положения равновесия на угол  $\alpha_0$ , то он начнет совершать затухающие колебания. В результате за  $n$  колебаний угол отклонения уменьшится до значения  $\alpha_n$ . Затухание колебаний происходит главным образом под действием внешнего трения.

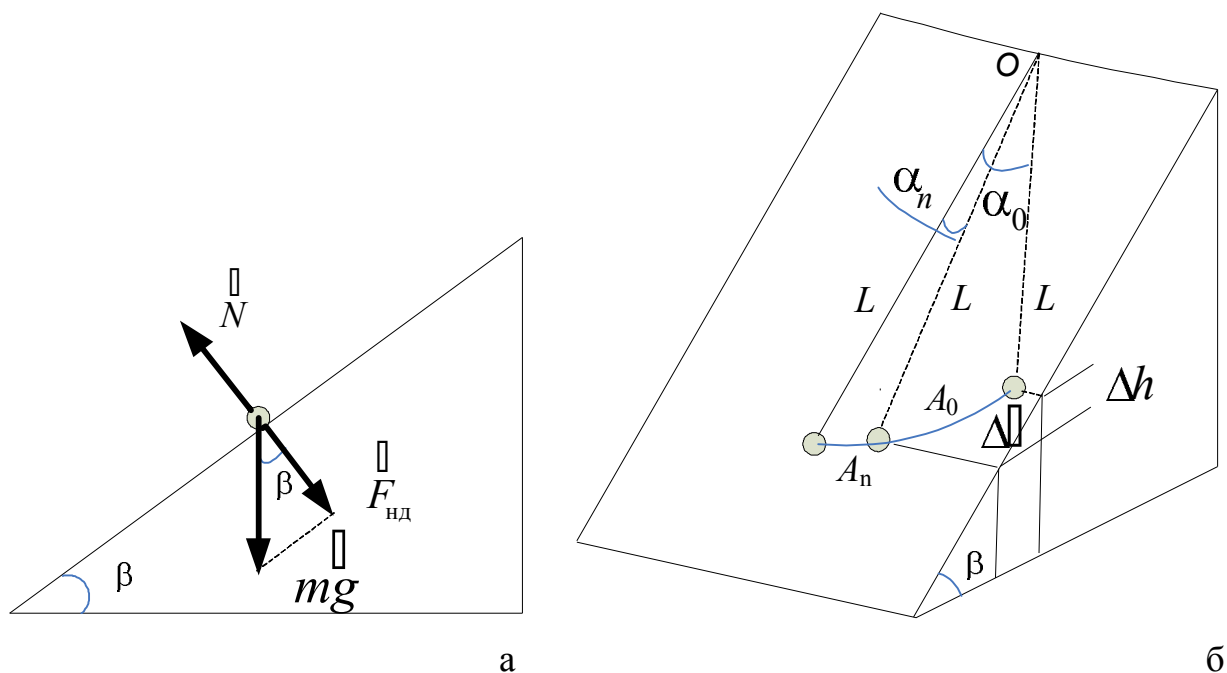


Рис. 13.1

Коэффициент трения скольжения  $\mu_c$  равен отношению силы трения  $F_{тр}$  к силе реакции опоры  $N$  (которая, согласно III закону Ньютона, всегда равна силе нормального давления  $F_{нд}$ , прижимающей тело к опоре)

$$\mu_c = \frac{F_{тр}}{N}. \quad (13.1)$$

В рассматриваемом случае (рис. 13.1а) сила реакции опоры по модулю равна составляющей силы тяжести  $m\vec{g}$ , перпендикулярной плоскости

$$N = mg \cos \beta, \quad (13.2)$$

где  $m$  – масса маятника,  $g$  – ускорение свободного падения.

Сила трения может быть найдена с помощью закона сохранения энергии, согласно которому работа, совершенная силой трения за  $n$  колебаний, равна изменению потенциальной энергии тела за то же число колебаний

$$F_{тр} S = mg \Delta h, \quad (13.3)$$

где  $F_{тр} S = A_{тр}$  – работа силы трения,  $S$  – расстояние, пройденное телом за  $n$  колебаний,  $mg \Delta h = \Delta E_{пот}$  – изменение потенциальной энергии тела за то же число колебаний,  $\Delta h$  – изменение высоты тела вследствие затухания колебаний.

С учетом формул (13.2) и (13.3) формула (13.1) принимает вид

$$\mu_c = \frac{\Delta h}{S \cos \beta}. \quad (13.4)$$

Далее, из рис. 13.1б видно, что

$$\Delta h = \Delta l \sin \beta, \quad (13.5)$$

где  $\Delta l$  – расстояние между начальным и конечным положениями тела, отсчитанное по наклонной плоскости.

Подставив (13.5) в (13.4), получим

$$\mu_c = \operatorname{tg} \beta \frac{\Delta l}{S}. \quad (13.6)$$

Теперь осталось выразить величины  $\Delta l$  и  $S$  через величины, измеряемые на опыте: число колебаний и углы отклонения маятника от положения равновесия  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$ . Рис. 13.2 поясняет, как это можно сделать. На рисунке изображены три положения тела: положение равновесия  $D$ , начальное положение  $F$ , соответствующее отклонению на угол  $\alpha_0$ , и конечное положение  $E$ , соответствующее отклонению на угол  $\alpha_n$ . Из рисунка видно, что  $\Delta l = OE' - OF'$ .  $OE'$  и  $OF'$  можно представить через длину нити маятника  $L$  и углы его отклонения от положения равновесия. Действительно, из треугольника  $EOE'$  следует, что  $OE' = L \cos \alpha_n$ , а из тре-

угольника  $FOF'$  следует, что  $OF' = L \cos \alpha_0$ . Итак,

$$\Delta l = L(\cos \alpha_0 - \cos \alpha_n).$$

Если учесть, что при малых углах  $\cos \alpha = (1 - \alpha^2/2)$ , то  $\Delta l$  можно представить в виде

$$\Delta l = L/2(\alpha_0^2 - \alpha_n^2). \quad (13.7)$$

Путь  $S$ , пройденный телом, можно найти, руководствуясь следующими соображениями. За одно полное колебание тело проходит расстояние, равное четырем амплитудам  $4A$ . За  $n$  колебаний пройденный путь  $S = 4nA$ . Но амплитуда вследствие затухания изменяется от начального значения  $A_0$ , равного дуге  $DF$ , до конечного значения  $A_n$ , равного дуге  $DE$ , поэтому надо взять ее среднее значение. Из рис. 13.16 видно, что  $A_0 \approx \alpha_0 L$ , а  $A_n \approx \alpha_n L$  (здесь углы выражены в радианах), следовательно, среднее значение амплитуды равно  $L(\alpha_0 + \alpha_n)/2$ . Тогда

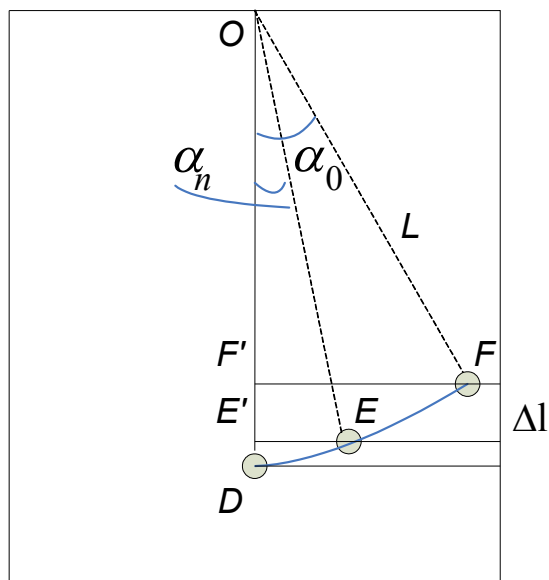


Рис. 13.2

Тогда

$$S = 2nL(\alpha_0 + \alpha_n). \quad (13.8)$$

Подставив (13.7) и (13.8) в (13.6), получим формулу для расчета коэффициента трения скольжения в данной работе

$$\mu_c = \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{4n} \operatorname{tg} \beta. \quad (13.9)$$

### Трение качения

В различных случаях силы трения оказываются как полезными, так и вредными, с которыми приходится бороться. Для уменьшения трения применяются смазки. Однако более радикальным способом уменьшения сил трения является замена трения скольжения трением качения.

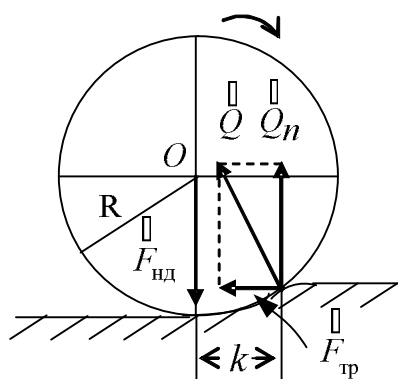


Рис. 13.3

Под трением качения понимают трение, возникающее между шарообразным или цилиндрическим телом (например, колесом), катящимся без скольжения (рис. 13.3).

Коэффициентом трения качения  $\mu_k$  называется отношение модуля момента сил сопротивления движению тела (в данной работе момента силы трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ )  $M_{\text{тр}}$  к модулю силы нормального давления  $\vec{F}_{\text{нд}}$

$$\mu_k = \frac{M_{\text{тр}}}{F_{\text{нд}}}. \quad (13.10)$$

При перекачивании цилиндра по поверхности твердого тела возникает деформация. Из-за чего линия силы, действующей на тело со стороны поверхности  $\dot{Q}$ , не совпадает с линией силы нормального давления  $\dot{F}_{\text{нд}}$ , прижимающей тело к поверхности. Составляющая силы  $\dot{Q}$ , перпендикулярная к поверхности  $\dot{Q}_n$ , практически равна силе нормального давления  $\dot{F}_{\text{нд}}$  (так как тело в вертикальном направлении не движется), а горизонтальная составляющая представляет собой силу трения  $\dot{F}_{\text{тр}}$ . Сила трения приводит к уменьшению скорости перемещения центра масс колеса, т. е. к уменьшению скорости его поступательного движения. Но она создает момент силы, который должен увеличивать скорость вращения тела. Силы же  $\dot{Q}_n$  и  $\dot{F}_{\text{нд}}$  создают пару сил, момент которой направлен в обратную сторону и замедляет вращение.

Если цилиндр движется по плоскости равномерно, то моменты сил равны. Момент пары сил равен произведению модуля силы  $F_{\text{нд}}$  на плечо пары, которое равно расстоянию между силами  $k$ , а момент силы трения скольжения равен произведению силы трения на ее плечо, которое примерно равно радиусу колеса  $R$ , т. е.,

$$F_{\text{тр}} R = F_{\text{нд}} k, \quad (13.11)$$

откуда

$$k = \frac{F_{\text{тр}} R}{F_{\text{нд}}}. \quad (13.12)$$

Сравнив (13.12) с (13.10), приходим к выводу, что  $\mu_k = k$  (так как  $F_{\text{тр}} R = M_{\text{тр}}$ ). Таким образом, *коэффициент трения качения представляет собой плечо силы, следовательно, имеет размерность длины.*

Отношение  $F_{\text{тр}} / F_{\text{нд}}$ , входящее в формулу (13.12), было выведено выше (13.9). Подставив (13.9) в (13.12), получим формулу для расчета коэффициента трения качения

$$\mu_k = k = \text{tg} \beta \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{4n} R. \quad (13.13)$$

В данной работе коэффициент трения качения определяется тем же методом наклонного маятника, что и коэффициент трения скольжения. В этом случае маятник представляет собой шарик, подвешенный на нити и катящийся с затуханием по наклонной плоскости. Безусловно, затухание колебаний шарика будет происходить медленнее, чем затухание колебаний бруска, т. е. угол отклонения шарика через  $n$  колебаний  $\alpha_n$  будет отличаться от  $\alpha_0$  меньше.

Радиусы шаров  $R$ : стального – 10,2 мм; алюминиевого – 10,3 мм; латунного – 10 мм.

## Описание установки и метода измерений

Наклонный маятник, применяемый в настоящей работе (рис. 13.4), состоит из следующих основных элементов: 1–3 – основание, стойка и нижний кронштейн, 4 – шкала измерения угла наклона плоскости-образца, 5 – шкала отсчёта амплитуды колебаний маятника, 6–8 – стержень, верхний кронштейн и маятник.

Выполнение лабораторной работы состоит из двух частей: 1 – определение коэффициента трения скольжения; 2 – определение коэффициента трения качения с помощью шарика, закрепленного на нити.

### Подготовка установки к работе:

- 1) произвести регулировку положения основания с помощью регулировочных опор таким образом, чтобы нить подвеса маятника или стержень физического маятника совпали с нулевым делением шкалы;
- 2) с помощью маховичка установить маятник в вертикальное положение, при этом должно осуществляться касание шарика или нижней части физического маятника поверхности исследуемого образца при отсутствии силы нормального давления, что достигается также с помощью регулировочных опор;
- 3) проверить, чтобы при колебаниях шарик или физический маятник перемещались по рабочей поверхности пластины-образца.

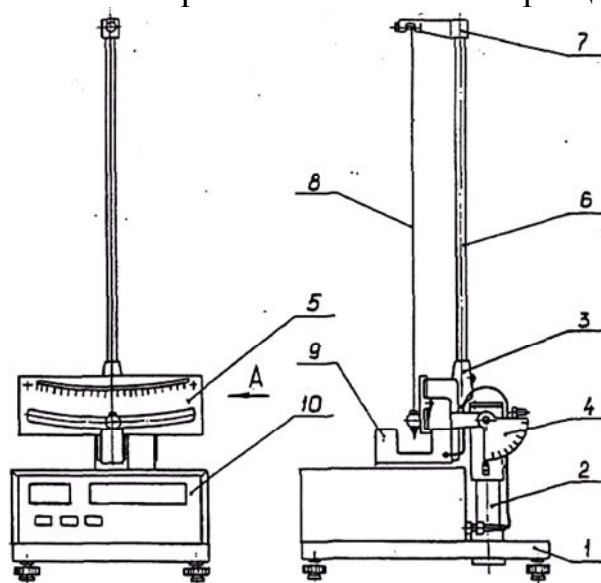


Рис. 13.4

## Часть 1

## Определение коэффициента трения скольжения

1. Установить по шкале 4 одно из трёх (указанных преподавателем) значений угла  $\gamma$  в интервале  $1-5^\circ$ , при этом  $\beta = 90^\circ - \gamma$ .
2. Отклонить маятник от положения равновесия на угол  $\alpha_0$ . Отпустить маятник и, отсчитав  $n$  колебаний, записать конечное значение ам-

плитуды  $\alpha_n$ . Опыт повторить три раза. Углы следует переводить в радианы.

3. Вычислить коэффициент трения скольжения  $\mu_c$  с помощью формулы (13.9), используя средние значения  $n$  и  $\alpha_n$ .
4. Аналогичные измерения произвести для двух других углов наклона.
5. Вычислить среднее значение коэффициента трения скольжения для данного образца по формуле (13.9).
6. Результаты измерений занести в таблицу

№ образца	$\gamma$		$\beta$		$\alpha_0$		$\alpha_n$		$n_1$	$n_2$	$n_3$	$\langle n \rangle$	$\mu_c$
	град / рад		град / рад		град / рад		град / рад						
1													
2													

7. Вычислить погрешности измерений.

## Часть 2

### Определение коэффициента трения качения

1. Установить по шкале 4 одно из трёх значений угла наклона  $\gamma$  в интервале  $30-55^\circ$  (по указанию преподавателя), при этом угол  $\beta$ , входящий в расчетные формулы равен  $\beta = 90^\circ - \gamma$ .
2. Отклонить нить с шариком от положения равновесия на угол  $\alpha_0 = 5-10^\circ$  (указанный преподавателем) с учётом того, что для больших  $\gamma$  следует брать большие  $\alpha_0$ .
3. Отпустить маятник и через  $n$  колебаний определить значение конечной амплитуды  $\alpha_n$ . Повторить опыт три раза. Углы в таблицу следует заносить в градусах, а затем переводить их в радианы ( $180^\circ = \pi$  рад). Можно делать по-другому: значения  $\alpha_n$  считать числом колебаний  $n$ , совершённых до заданного.
4. По формуле (13.13) вычислить коэффициент трения качения  $k$  с помощью среднего значения амплитуды  $\alpha_n$  или среднего значения  $n$ .
5. Аналогичные измерения произвести для двух других углов наклона  $\beta$ .
6. Вычислить среднее значение коэффициента трения качения для данного образца.
7. Вынуть образец из гнезда шкалы, перевернуть и вставить его второй рабочей поверхностью. Произвести измерения по пп. 1–6.
8. Сопоставить полученные значения коэффициентов трения качения и оценить качество обработки каждой поверхности.

## 9. Результаты измерений занести в таблицу

№ образца	$\gamma$		$\beta$		$\alpha_0$		$\alpha_n$		$n_1$	$n_2$	$n_3$	$\langle n \rangle$	$\mu_c$
	град / рад		град / рад		град / рад		град / рад						
1													
2													

## 10. Вычислить погрешности измерений.

### Контрольные вопросы

1. Какие виды трения существуют и чем они различаются?
2. Чем определяется сила трения покоя?
3. Чему равен коэффициент трения скольжения, коэффициент трения качения?
4. Что такое сила нормального давления? Чему она равна при движении тела по наклонной плоскости?
5. Как находят силу трения в данной работе?
6. Чему равна работа, совершенная силой трения в течение  $n$  колебаний?
7. Чему равно изменение потенциальной энергии образца, происшедшее в результате  $n$  колебаний?
8. Выведите формулы (13.9) и (13.13).
9. Приведите случаи полезного и вредного влияния сил трения.

### Литература

1. Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 67–70.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 23–28, 255–258.

### Работа 1.14

## ИЗУЧЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА ОТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЕГО МАССЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

**Цель работы:** 1) расчет момента инерции тела правильной формы относительно одной из главных осей инерции; 2) определение моментов инерции тела относительно других осей вращения (указанных преподавателем); 3) определение модуля кручения проволоки подвеса.

**Приборы и принадлежности:** унифилярный подвес, исследуемые тела, секундомер, штангенциркуль.

### Краткая теория

В данной работе рассматривается вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (рис. 14.1). При таком движении все точки тела движутся в

параллельных плоскостях по concentрическим окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения  $OO$  (рис. 14.1).

Основной закон динамики для тела, вращающегося относительно неподвижной оси, записывается в виде

$$M = I\varepsilon, \quad (14.1)$$

где  $M$  – результирующий момент всех внешних сил,  $I$  – момент инерции тела относительно оси вращения,  $\varepsilon$  – угловое ускорение тела.

Момент инерции тела относительно оси его вращения может быть определен по формулам (Т.10) или (Т. 11):

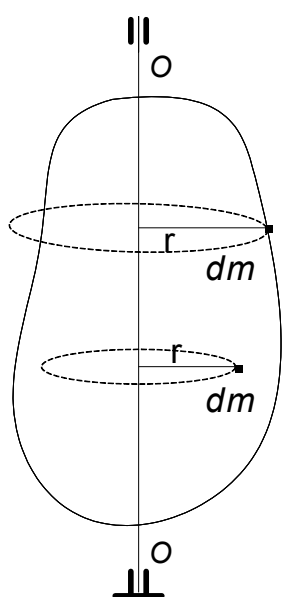


Рис. 14.1

$$I = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2, \quad (14.2)$$

$$I = \int_V dm r^2,$$

где  $\Delta m_i$  – масса малого объема тела, все точки которого можно считать удаленными от оси вращения на одинаковое расстояние  $r_i$ ,  $dm$  – элементарная масса,  $V$  – объем тела.

Первая формула предпочтительна для системы дискретных тел, вторая – для сплошных тел.

Из (14.2) следует, что момент инерции зависит от распределения массы тела относительно оси его вращения. Очевидно, что осей вращения может быть бесконечно много. Но среди всех осей особое значение имеют оси, называемые **свободными осями вращения**. Свободные оси

вращения – это такие оси, которые сами (без действия внешних сил) могут сохранять свое направление в пространстве неизменным.

Чтобы пояснить, что такое свободные оси, рассмотрим простейшую систему тел, состоящую из двух тел одинаковой массы  $m$ , закрепленных на жестком невесомом стержне  $L$  (рис. 14.2). Стержень в свою очередь закреплен в точке  $C$ , являющейся центром масс системы, на вертикальной оси  $OO$ , которая может вращаться в подшипниках  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Пусть стержень составляет с осью некоторый угол (рис. 14.2а). При вращении системы "стержень – массы" на концы стержня со стороны масс действуют силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ . Вследствие того, что тела расположены несимметрично относительно оси вращения, силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  не лежат на одной прямой и создают момент пары сил, стремящийся повернуть ось, придать ей горизонтальное направление. Чтобы ось удерживалась в неизменном положении, подшипники должны действовать на нее с силами  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$ . Таким образом, ось остается неподвижной только благодаря подшипникам. Если убрать подшипники,

ось вращения поменяет свое направление в пространстве. В рассматриваемом примере быстро изнашиваются и ось, и подшипники.

Если же ось вращения проходит через центр масс системы "стержень – массы" и при этом является осью ее симметрии (рис. 14.2б), то силы, действующие на стержень со стороны вращающихся тел, направлены по одной прямой и, следовательно, уравнивают друг друга.

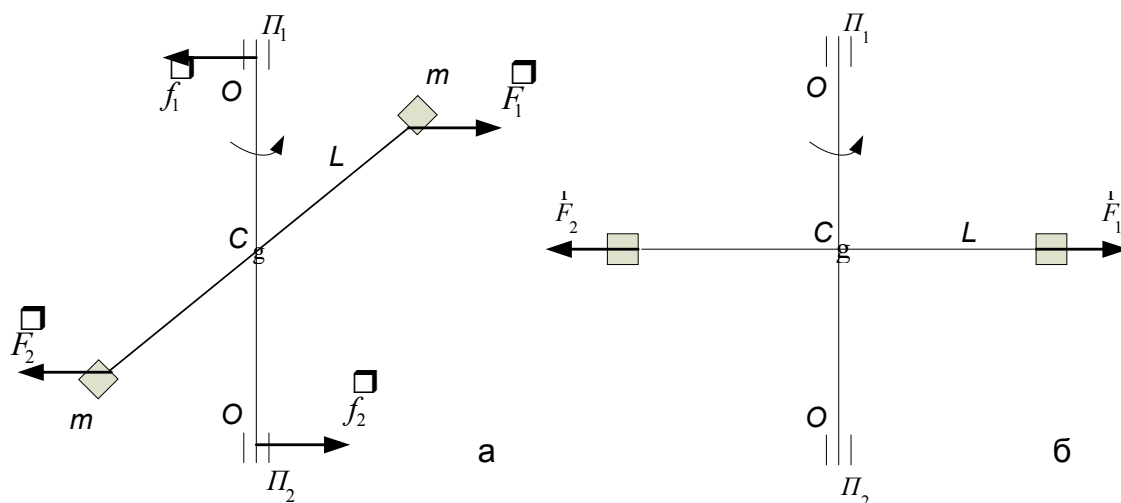


Рис. 14.2

Это значит, что стержень не действует на ось, а она – на подшипники. Если подшипники убрать, ось этого "не заметит", она будет сохранять свое направление в пространстве. Конечно, под действием силы тяжести система будет падать, но при этом будет продолжать вращаться в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси. Такие оси, которые сами (без

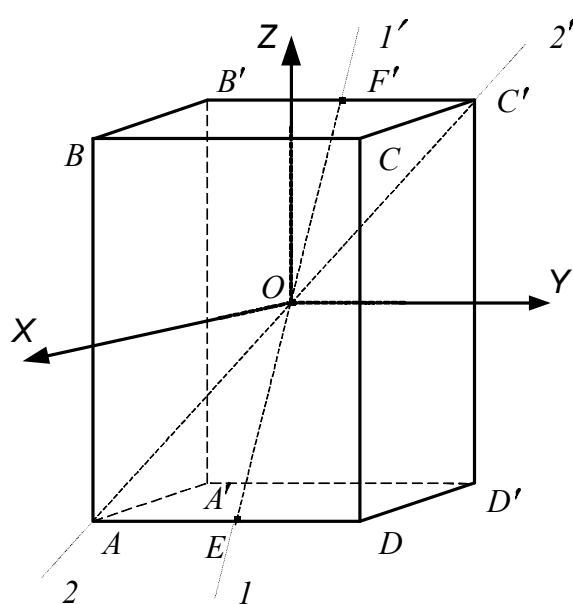


Рис. 14.3

действия внешних сил) сохраняют неизменным свое направление в пространстве, называются свободными осями вращения.

Также обстоит дело с телом какой угодно формы. Теоретически доказывается, что в нем всегда существуют такие три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр тяжести тела (он же центр масс, или центр инерции), которые могут служить свободными осями вращения. Они называются **главными осями инерции**. Для тел правильной формы эти оси инерции легко могут быть найдены. Например, главными осями

инерции прямоугольного параллелепипеда являются оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  (рис. 14.3), проведенные через центры противоположных граней.

Две из трех главных осей инерции, а именно те, относительно которых момент инерции **максимален** и **минимален** (на рис. это оси  $X$  и  $Z$ ), являются **устойчивыми**. Третья ось, относительно которой момент инерции имеет среднее значение, – неустойчива. **Ось устойчива** – это значит, что при небольших случайных отклонениях вращения от этой оси возникают силы, возвращающие тело к вращению вокруг этой оси. Следовательно, в отсутствие сил сопротивления вращение вокруг устойчивых осей продолжалось бы бесконечно долго. Но силы сопротивления всегда имеют место, поэтому для поддержания вращения даже вокруг главных осей необходимо прикладывать момент внешних сил, хотя и много меньший, чем при вращении вокруг других осей. В таком случае обычно устойчивой называется одна главная ось, а именно та, относительно которой момент инерции имеет максимальное значение. Для того чтобы машина служила долго, вращающимся частям придают форму, возможно более близкую к телам вращения, а ось как можно точнее совмещают с главной осью инерции. Однако совместить абсолютно точно ось вращения с главной осью инерции тела практически невозможно, поэтому для быстро вращающихся частей машин применяют гибкие, самоцентрирующиеся оси.

### Описание установки и метода измерений

Моменты инерции тел правильной формы относительно главных осей инерции  $I_0$  можно легко рассчитать по (14.2). Например, для прямоугольного параллелепипеда имеем

$$I_0 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2), \quad (14.3)$$

где  $m$  – масса тела,  $a$  и  $b$  – высота и ширина грани, перпендикулярной к оси вращения (размер параллелепипеда вдоль оси значения не имеет).

Если известен момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, то момент инерции относительно параллельной ей оси, но не проходящей через центр масс, можно найти по теореме Штейнера (Т. 12).

В остальных случаях (тело имеет неправильную форму или форма тела правильная, но ось вращения не является осью симметрии) момент инерции определяют опытным путем. В настоящей работе – методом крутильных колебаний.

Используемая в данной работе установка (рис. 14.4) состоит из вертикальной стойки с кронштейнами – 2; рамки подвеса – 3, закрепленной на кронштейнах с помощью проволоки; исследуемого тела – 6, имеющего углубления для более надежного закрепления в рамке (всего в комплекте установки три тела с различным типом симметрии). Для наиболее жесткого закрепления тела на рамке имеется передвижная планка 8. После

того, как с помощью углублений тело устанавливают в рамке, его положение фиксируют планкой 8 с помощью винтов 9.

Как известно (вывод дан в работе 1.3), период крутильных колебаний связан с моментом инерции тела соотношением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}, \quad (14.4)$$

где  $T$  – период крутильных колебаний тела относительно данной оси вращения,  $I$  – момент инерции относительно этой оси,  $D$  – модуль кручения проволоки, на которой подвешено тело (в данном случае рамка подвеса).

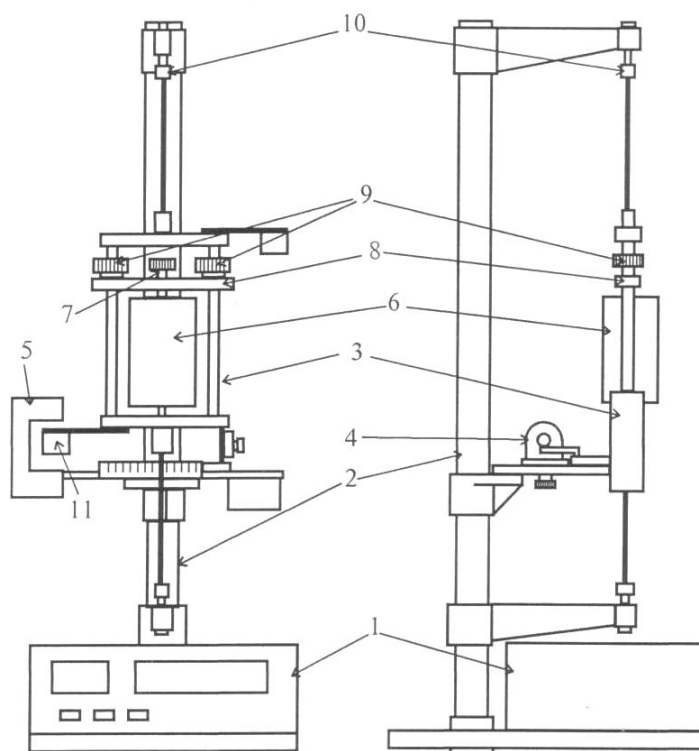


Рис. 14.4

Если известен модуль кручения проволоки, то, измерив на опыте период колебаний, легко найти момент инерции тела

$$I = \frac{DT^2}{4\pi^2}. \quad (14.5)$$

В настоящей работе сначала для одной из главных осей инерции теоретически рассчитывают момент инерции тела, затем, соответствующим образом закрепив тело в рамке подвеса, измеряют период его колебаний и рассчитывают модуль кручения проволоки, который, согласно (14.4), равен

$$D = \frac{4\pi^2 I_0}{T^2}. \quad (14.6)$$

После этого можно определять моменты инерции любых тел относительно каких угодно осей вращения.

### Порядок выполнения работы

1. Измерить параметры тела, предложенного преподавателем – высоту и ширину (масса тела известна).
2. Рассчитать по формуле (14.3) момент инерции тела относительно одной из главных устойчивых осей инерции (такowymi являются самая короткая и самая длинная оси)  $I_0$ .
3. Закрепить исследуемое тело в рамке 3 таким образом, чтобы оно могло совершать крутильные колебания относительно главной оси, для которой рассчитан момент инерции в п. 2. Для лучшего закрепления воспользоваться винтами 9.
4. Отклонить тело на некоторый угол от положения равновесия и отпустить. Измерить время  $t$ , за которое тело совершит  $n$  (15–20) полных колебаний. Опыт проделать не менее трех раз. По среднему значению времени рассчитать средний период колебаний, который, согласно определению, равен  $\langle T \rangle = \langle t \rangle / n$ .
5. Зная период колебаний  $T$  и момент инерции  $I_0$  относительно данной оси вращения, рассчитать по (14.6) модуль кручения проволоки.
6. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу

№	$m$	$a$	$b$	$I_0$	$n$	$t$	$\langle t \rangle$	$\langle T_0 \rangle$	$\langle D \rangle$
1									
2									
3									

7. Вынуть тело из рамки и закрепить его вновь, но так, чтобы осями его вращения оказались другие возможные оси (например, 1-1', 2-2'). Эти оси определяются углублениями, имеющимися на поверхности тела.
8. Определить периоды колебаний тела относительно выбранных осей так же, как указано в п. 4. По измеренным значениям периодов и рассчитанному значению модуля кручения найти с помощью (14.5) моменты инерции тела для выбранных осей вращения.
9. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу

№	$n$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$\langle T_1 \rangle$	$t_2$	$\langle t_2 \rangle$	$\langle T_2 \rangle$	$D$	$I_1$	$I_2$
1										
2										
3										

### **Контрольные вопросы**

1. Какая величина называется моментом инерции твёрдого тела? Поясните его физический смысл. В каких единицах он измеряется?
2. От чего зависит момент инерции твердого тела? Как можно рассчитать момент инерции тела правильной формы?
3. Рассчитайте с помощью теоремы Штейнера момент инерции исследуемого Вами тела относительно какой-либо оси, не проходящей через его центр масс.
4. Какие оси вращения называются свободными? Поясните на примере. Какие оси являются главными осями инерции?
5. Какие из главных осей устойчивы? Что значит "устойчивая ось"?
6. Запишите основной закон динамики вращательного движения в общем виде и конкретно для данной работы (подставив в формулу момент сил, вращающий систему).
7. Выведите формулу периода крутильных колебаний (см. работу 1.3).
8. Воспользовавшись формулой (14.2), запишите формулы для теоретического расчета моментов инерции системы тел, изображенной на рис. 14.2а и 14.2б.
9. Сопоставятся ли результаты Ваших измерений с теоретическими положениями: действительно ли относительно устойчивых осей инерции моменты инерции имеют максимальное и минимальное значение по сравнению со всеми другими?

### **Литература**

1. Савельев, И. В. Курс физики. Т. 1 / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – С. 94–116.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – С. 34–46, 255–258.

Позиция 136  
в плане издания  
учебной литературы  
МГУ на 2011г.

Учебное издание

Сима Борисовна Лебединская,  
Юрий Дмитриевич Воробьев

Механика поступательного и вращательного движения  
Учебное пособие

Редактор О. А. Веденская

Компьютерная верстка авторов

---

5,75 уч.-изд. л.  
Тираж 100 экз.

Формат 60 × 84 1/16  
Заказ №

---

Отпечатано в типографии РПК МГУ им. адм. Г. И. Невельского  
690003, Владивосток, ул. Верхнепортовая, 50а