



conecte
L I V E

GELSON IEZZI
OSVALDO DOLCE
DAVID DEGENSZAJN
ROBERTO PÉRIGO
NILZE DE ALMEIDA

CADERNO DE
ESTUDOS

Matemática

CIÊNCIA E APLICAÇÕES

2



Editora
Saraiva

plurall



CADERNO DE
ESTUDOS

Matemática

CIÊNCIA E APLICAÇÕES

GELSON IEZZI

Engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.
Ex-professor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Ex-professor da rede particular de ensino de São Paulo.

OSVALDO DOLCE

Engenheiro civil pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
Ex-professor da rede pública do Estado de São Paulo.
Ex-professor de cursos pré-vestibulares.

DAVID DEGENSZAJN

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.
Professor da rede particular de ensino de São Paulo.

ROBERTO PÉRIGO

Licenciado e bacharel em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Ex-professor da rede particular de ensino.
Ex-professor de cursos pré-vestibulares em São Paulo.

NILZE DE ALMEIDA

Mestra em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Licenciada em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.
Professora da rede pública do Estado de São Paulo.

Direção geral: Guilherme Luz

Direção editorial: Luiz Tonolli e Renata Mascarenhas

Gestão de projeto editorial: Viviane Carpegiani

Gestão e coordenação de área: Julio Cesar Augustus de Paula Santos
e Juliana Grassmann dos Santos

Edição: Thais Bueno de Moura

Gerência de produção editorial: Ricardo de Gan Braga

Planejamento e controle de produção: Paula Godo,
Roseli Said e Marcos Toledo

Revisão: Hélia de Jesus Gonsaga (ger.), Kátia Scaff Marques (coord.),
Rosângela Muricy (coord.), Brenda T. M. Morais, Daniela Lima,
Hires Heglan, Lilian M. Kumai, Luciana B. Azevedo,
Luís M. Boa Nova, Patrícia Cordeiro,
Raquel A. Taveira e Vanessa P. Santos

Arte: Daniela Amaral (ger.), André Gomes Vitale (coord.)
e Claudemir Camargo Barbosa (edição de arte)

Diagramação: Setup

Iconografia: Sílvia Klugin (ger.), Roberto Silva (coord.)
e Douglas Cometti (pesquisa iconográfica)

Licenciamento de conteúdos de terceiros: Thiago Fontana (coord.),
Flávia Zambon (licenciamento de textos), Erika Ramires,
Luciana Pedrosa Bierbauer, Luciana Cardoso Sousa
e Claudia Rodrigues (analistas adm.)

Tratamento de imagem: Cesar Wolf e Fernanda Crevin

Design: Gláucia Correa Koller (ger.),
Erika Yamauchi Asato, Filipe Dias (proj. gráfico) e Adilson Casarotti (capa)

Composição de capa: Segue Pro

Foto de capa: ZASIMOV YURII/Shutterstock, FXQuadro/Shutterstock,
Stephen Studd/Photographer's Choice/Getty Images

Todos os direitos reservados por Saraiva Educação S.A.

Avenida das Nações Unidas, 7221, 1º andar, Setor A –

Espaço 2 – Pinheiros – SP – CEP 05425-902

SAC 0800 011 7875

www.editorasaraiva.com.br

2018

Código da obra CL 800851

CAE 627981 (AL) / 627982 (PR)

3ª edição

1ª impressão



Impressão e acabamento

Uma publicação  **SOMOS**
EDUCAÇÃO

Apresentação

Caro estudante,

Este material foi elaborado especialmente para você, estudante do Ensino Médio que está se preparando para ingressar no Ensino Superior.

Além de todos os recursos do Conecte LIVE, como material digital integrados ao livro didático, banco de questões, acervo de simulados e trilhas de aprendizagem, você tem à sua disposição este Caderno de Estudos que o ajudará a se qualificar para as provas do Enem e de diversos vestibulares do Brasil.

O material foi estruturado para que você consiga utilizá-lo autonomamente, em seus estudos individuais além do horário escolar, ou sob orientação de seu professor, que poderá lhe sugerir atividades complementares às dos livros.

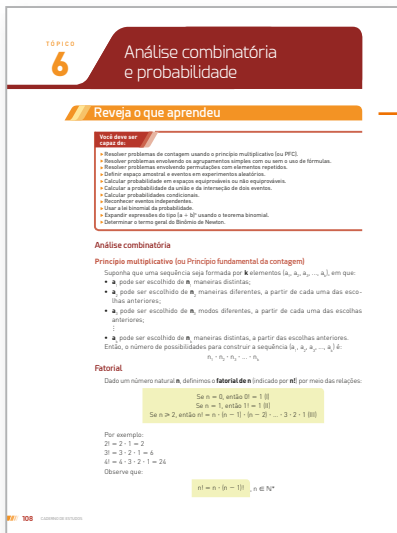
Para cada ano do Ensino Médio, há um Caderno de Estudos com uma revisão completa dos conteúdos correspondentes, atividades de aplicação imediata dos conceitos trabalhados e grande seleção de questões de provas oficiais que abordam esses temas.

No Caderno de Estudos do 3º ano, há ainda um material complementar com o qual, ao terminar de se dedicar aos conteúdos destinados a esse ano escolar, você poderá se planejar para uma retomada final do Ensino Médio! Revisões estruturadas de todos os conteúdos desse ciclo são acompanhadas de simulados, propostos para que você os resolva como se realmente estivesse participando de uma prova oficial de vestibular ou do Enem, de maneira que consiga fazer um bom uso do seu tempo.

Desejamos que seus estudos corram bem e que você tenha sucesso **Rumo ao Ensino Superior!**

Equipe Conecte LIVE!

Conheça este Caderno de Estudos

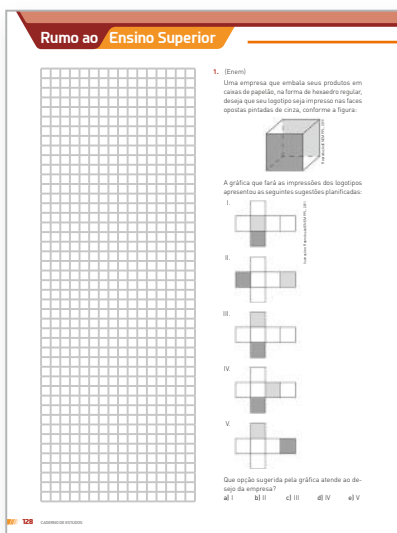
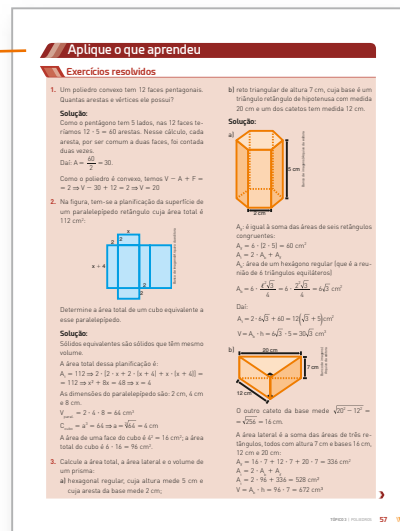


Reveja o que aprendeu

Nesta seção, os principais conceitos de cada tópico de conteúdo do livro são apresentados de maneira resumida, para que você tenha a oportunidade de, sempre que desejar, retomar aprendizagens que vem construindo ao longo do segundo ano do Ensino Médio.

Aplique o que aprendeu

Depois de retomar os conceitos no **Reveja o que aprendeu**, é o momento de aplicar esses conceitos resolvendo atividades. A seção se inicia com **Exercícios resolvidos**, que trarão uma solução detalhada de uma questão. Em seguida, haverá uma seleção de atividades para você resolver. Ao final da seção, registre a quantidade de acertos que você teve em relação ao total de atividades. Se o seu desempenho estiver aquém de suas expectativas, verifique em quais páginas do seu livro-texto os conceitos são trabalhados e procure retomá-los, individualmente ou em grupos de estudo, dedicando mais tempo para se aprofundar neles.



Rumo ao Ensino Superior

Esta seção apresenta uma seleção de atividades que envolvem conteúdos estudados ao longo de todo o primeiro ano do Ensino Médio. Você encontrará questões do Enem e de diferentes vestibulares do Brasil.

Sumário

 Já revi este conteúdo  Já apliquei este conteúdo

Tópico 1

Trigonometria na circunferência, trigonometria em um triângulo qualquer, funções trigonométricas e transformações trigonométricas 6

 Reveja o que aprendeu 6

 Aplique o que aprendeu 19

Tópico 2

Geometria espacial e de posição 30

 Reveja o que aprendeu 30

 Aplique o que aprendeu 37

Tópico 3

Poliedros 50

 Reveja o que aprendeu 50

 Aplique o que aprendeu 57

Tópico 4

Corpos redondos 72

 Reveja o que aprendeu 72

 Aplique o que aprendeu 79

Tópico 5

Matrizes, determinantes e sistemas lineares 90

 Reveja o que aprendeu 90

 Aplique o que aprendeu 96

Tópico 6

Análise combinatória e probabilidade 108

 Reveja o que aprendeu 108

 Aplique o que aprendeu 114

Rumo ao Ensino Superior 128

Respostas 197

Significado das siglas dos vestibulares 200

Trigonometria na circunferência, trigonometria em um triângulo qualquer, funções trigonométricas e transformações trigonométricas

Reveja o que aprendeu

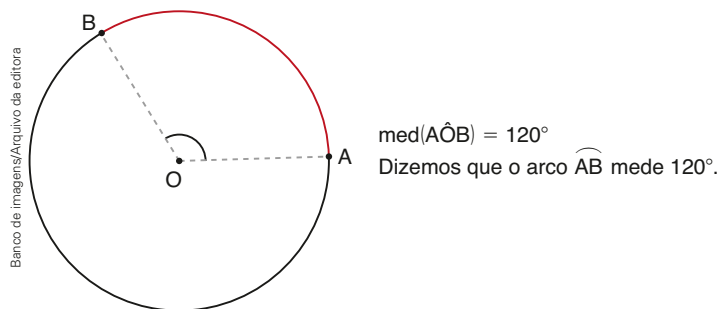
Você deve ser capaz de:

- ▶ Determinar o comprimento de um arco.
- ▶ Converter graus para radiano, e vice-versa.
- ▶ Identificar a circunferência trigonométrica.
- ▶ Reconhecer as razões trigonométricas na circunferência trigonométrica.
- ▶ Aplicar a relação fundamental da trigonometria.
- ▶ Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas.
- ▶ Resolver problemas utilizando o teorema dos senos e o dos cossenos.
- ▶ Reconhecer a periodicidade das funções trigonométricas.
- ▶ Determinar o período, o domínio e a imagem de uma função trigonométrica.
- ▶ Aplicar transformações trigonométricas.
- ▶ Construir e analisar gráficos de funções do tipo: $y = a + b \cdot \sin(px + q)$ (ou cosseno).

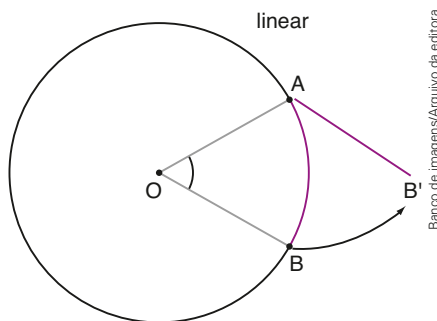
Trigonometria na circunferência

Medida e comprimento de arco

A medida de um arco é igual à medida do ângulo central correspondente.



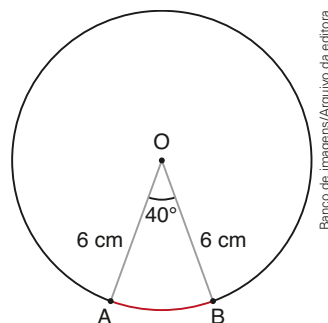
A **medida linear** de um arco refere-se ao seu **comprimento**. Quando retificamos um arco de circunferência, obtemos um segmento de reta cuja medida é igual ao **comprimento do arco**, que é medido em centímetros, metros, milímetros, quilômetros, etc.



Como o comprimento de uma circunferência é $2\pi r$, podemos determinar o comprimento de um arco por uma regra de três. Observe o exemplo:

$$\begin{cases} 2\pi \cdot 6 & \text{---} & 360^\circ \\ x & \text{---} & 40^\circ \end{cases} \rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}$$

Assim, o comprimento de \widehat{AB} é $\frac{4\pi}{3}$ cm.



Banco de imagens/Arquivo da editora

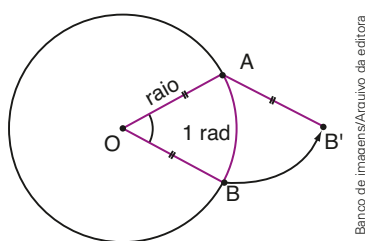
Unidades de medida de arcos e ângulos

Ao tratarmos da medida de um arco, adotamos o grau ($^\circ$) ou radiano (rad).

Submúltiplos do grau:

- O arco de 1 minuto (indica-se 1') corresponde a $\frac{1}{60}$ do arco de medida 1° , ou seja, $1^\circ = 60'$.
- O arco de 1 segundo (indica-se 1'') corresponde a $\frac{1}{60}$ do arco de medida 1', ou seja, $1' = 60''$.

1 radiano é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência correspondente.



Banco de imagens/Arquivo da editora

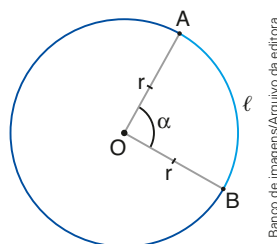
O arco \widehat{AB} , acima, bem como seu ângulo correspondente \widehat{AOB} , mede 1 rad.

Conversão de grau para unidade de medida de arco

2π rad	—	360°
π rad	—	180°
$\frac{\pi}{2}$ rad	—	90°
$\frac{\pi}{3}$ rad	—	60°
$\frac{\pi}{4}$ rad	—	45°
...		
1 rad	—	$\simeq 57^\circ 18'$

Relação entre a medida de um arco (em radianos) e seu comprimento

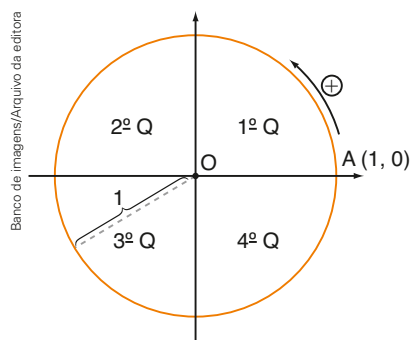
$$\alpha = \frac{\ell}{r} \quad \text{em que} \quad \begin{cases} \alpha: \text{medida do arco em radianos} \\ \ell: \text{comprimento do arco} \\ r: \text{medida do raio da circunferência} \end{cases}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

A circunferência trigonométrica

Observe a circunferência trigonométrica a seguir.

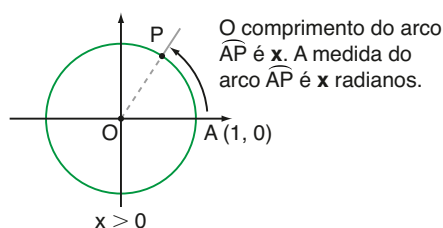
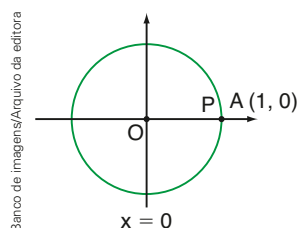


- Centro: **O** (origem do sistema de coordenadas)
- Raio: 1
- A(1, 0): origem de todos os arcos tomados nessa circunferência
- Sentido positivo: anti-horário
- Comprimento: $2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi$

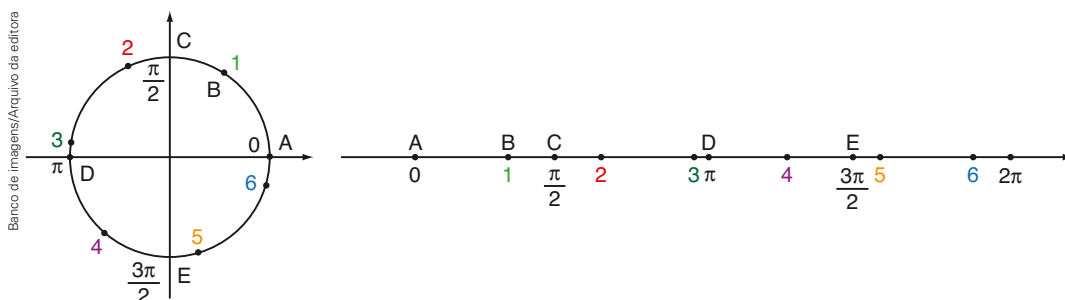
Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica

Vamos associar a cada número real x , $0 \leq x < 2\pi$, um único ponto **P** da circunferência trigonométrica, de modo que:

- se $x = 0$, o ponto **P** coincide com o ponto A(1, 0);
- se $x > 0$, descrevemos, a partir de **A**, no sentido anti-horário, um arco de comprimento x e medida x rad, cujas extremidades são **A** e **P**.

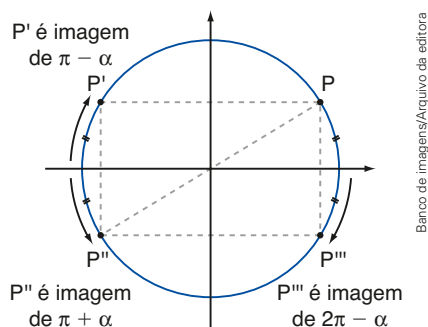


Observe a associação seguinte:



Simetrias

Considerando um arco de medida x radianos $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ e **P** sua imagem na circunferência, temos:

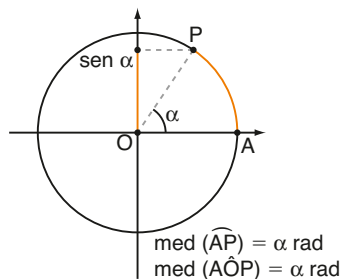


Razões trigonométricas

Seno

Seja **P** um ponto da circunferência trigonométrica, imagem de um número real α , $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Definimos o **seno de α** como a ordenada do ponto **P**:

$$\text{sen } \alpha = \text{ordenada de } \mathbf{P}$$

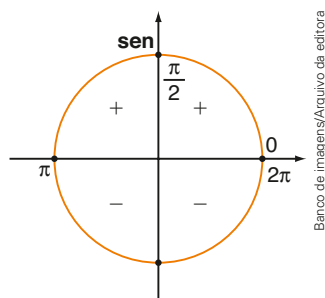


Banco de imagens/Arquivo da editora

Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário, temos que, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, $-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$, uma vez que a ordenada de qualquer ponto da circunferência trigonométrica varia de -1 a 1 .

Valores notáveis

- $\text{sen } 0 = \text{sen } \pi = \text{sen } 2\pi = 0$
- $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$
- $\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$



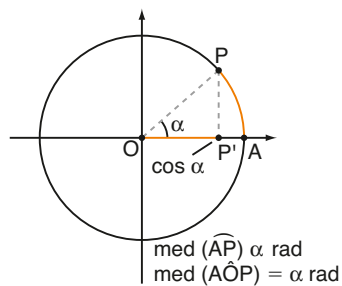
Banco de imagens/Arquivo da editora

Cosseno

Seja **P** um ponto sobre a circunferência trigonométrica, imagem do número real α , $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Definimos o **cosseno de α** como a abscissa do ponto **P**:

$$\text{cos } \alpha = \text{abscissa de } \mathbf{P}$$

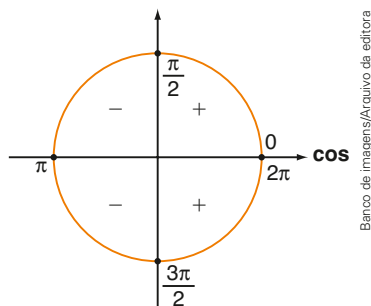


Banco de imagens/Arquivo da editora

Observe que $-1 \leq \cos x \leq 1$; para todo $x \in [0, 2\pi]$

Valores notáveis

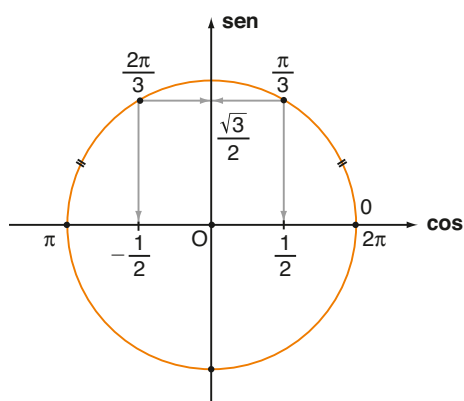
- $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$
- $\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$
- $\cos \pi = -1$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Redução ao 1º quadrante

Vamos determinar os valores de $\sin \frac{2\pi}{3}$ e $\cos \frac{2\pi}{3}$:



Observe que $\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{3} = 120^\circ$.

Como $\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ (ou 60°), temos:

- $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Relações entre seno e cosseno

Relação fundamental da trigonometria

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ para todo } \alpha \in [0, 2\pi]$$

Arcos complementares

$$\sin x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \text{ e } \cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

Tangente

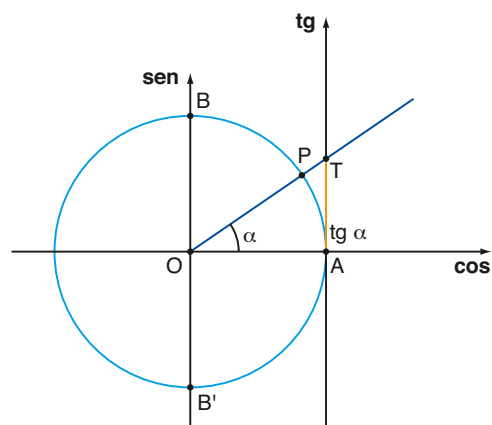
O **eixo das tangentes** é obtido ao se tangenciar, por uma reta vertical, a circunferência no ponto A(1, 0). O ponto **A** é a origem do eixo das tangentes, e seu sentido positivo (para cima) coincide com o do eixo dos senos.

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{med}(\overline{AT})$$



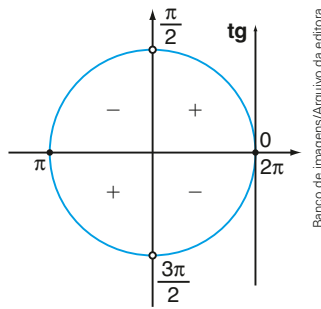
Medida algébrica do segmento

- Se **T** está acima de **A** $\Rightarrow \operatorname{med}(\overline{AT}) > 0$
- Se **T** está abaixo de **A** $\Rightarrow \operatorname{med}(\overline{AT}) < 0$



Valores notáveis

- $\operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} \pi = \operatorname{tg} 2\pi = 0$
- $\nexists \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$
- $\nexists \operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplo:

Vamos determinar, por redução do 1º quadrante, o valor de $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$.

Observe que $\frac{7\pi}{4} \text{ rad} = \frac{7 \cdot 180^\circ}{4} = 315^\circ$

Como $2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ (ou 45°), temos: $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$

Relação entre tangente, seno e cosseno

Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$, vale a relação:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

Outras razões trigonométricas

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}; \operatorname{sen} x \neq 0$$

$$\operatorname{sec} x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}; \operatorname{cos} x \neq 0$$

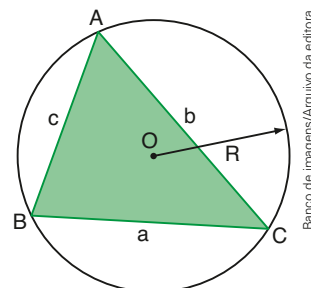
$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}; \operatorname{sen} x \neq 0$$

Trigonometria em triângulos quaisquer

Teorema dos senos

As medidas dos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos, e a constante de proporcionalidade é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R$$

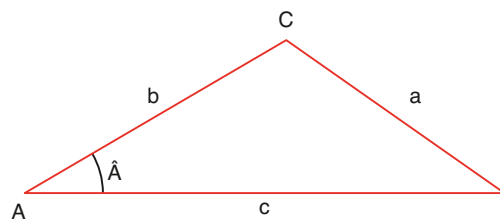


Banco de imagens/Arquivo da editora

Teorema dos cossenos

Em todo triângulo, o quadrado da medida de qualquer lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto da medida desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

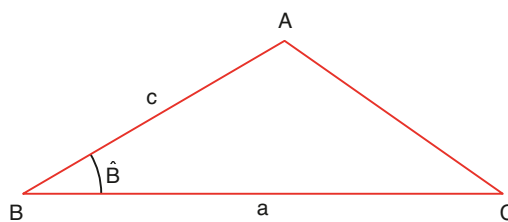
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Área do triângulo

Em qualquer triângulo, a área é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo por eles formado.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\text{Área} = \frac{a \cdot c \cdot \sin \hat{B}}{2}$$

Essa fórmula é útil quando são conhecidas as medidas de dois lados de um triângulo e o do ângulo formado por esses lados.

Funções trigonométricas

A cada número real está associado um ponto da circunferência.

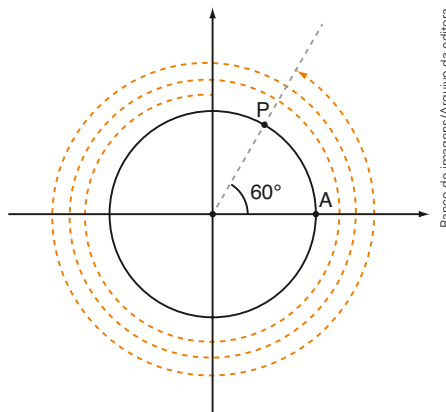
Seja $x \in \mathbb{R}$. Como podemos determinar o ponto **P**, imagem de **x**?

- Se $x > 0$, partimos do ponto **A**(1, 0) e percorremos, no sentido anti-horário, um arco de comprimento **x** (e medida x rad), cujas extremidades são **A** e **P**.

Exemplo:

P é imagem de $x = \frac{19\pi}{3}$. Observe que:

$$\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \underbrace{\frac{6\pi}{3}}_{3 \text{ voltas completas}} + \frac{\pi}{3}$$

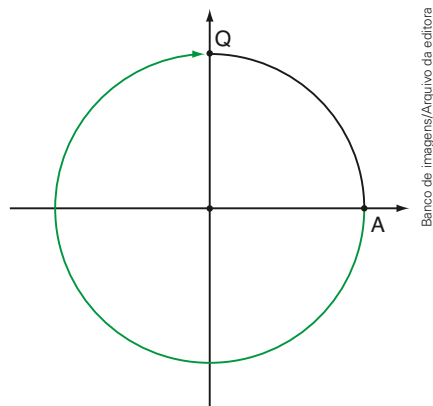


Banco de imagens/Arquivo da editora

- Se $x < 0$, partimos do ponto $A(1, 0)$ e percorremos, no sentido horário, um arco de comprimento $|x|$, cujas extremidades são **A** e **P**.

Exemplo: **Q** é imagem de $x = -\frac{3\pi}{2}$

O arco \widehat{AQ} tem comprimento igual a $\left| -\frac{3\pi}{2} \right| = \frac{3\pi}{2}$.



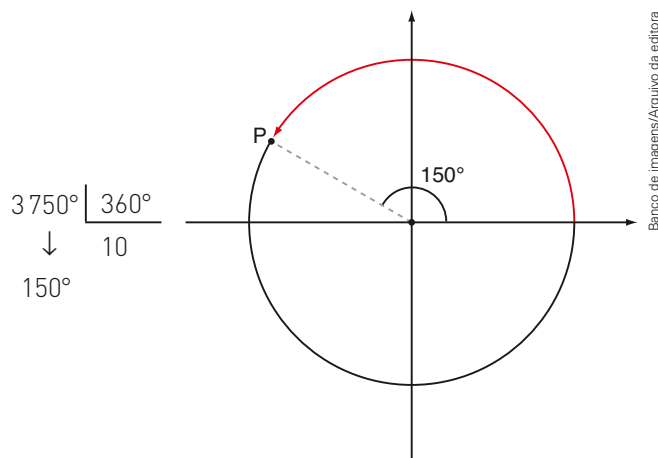
Banco de imagens/Arquivo da editora

- Se $x = 0$, a imagem **P** é o próprio ponto **A**.

Outra opção é trabalhar com a medida do arco em graus.

Por exemplo, para determinar a imagem **P** de $x = \frac{125\pi}{6}$, lembramos que a esse número real está associado um arco de medida:

$$\frac{125\pi}{6} \text{ rad} = \frac{125 \cdot 180^\circ}{6} = 3750^\circ$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Expressão geral dos números reais associados a pontos da circunferência

De modo geral, possuem imagem em **P** todos os números reais da forma:

$$\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ sendo } k \text{ um número inteiro.}$$

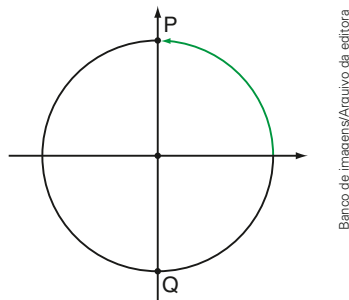
Todos os arcos assim construídos têm extremidades em **A** e **P**. Eles são chamados **arcos côngruos**.

Sejam dois pontos diametralmente opostos da circunferência trigonométrica, **P** e **Q**.

Por exemplo, o número real **x**, em que $0 \leq x < 2\pi$ com imagem em **P** é $x = \frac{\pi}{2}$.

Assim, a expressão que representa todos os números reais com imagem em **P** ou **Q** é:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$



Observe que:

- se $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ (**P**); se $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$ (**Q**)
- se $k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$ (**Q**);
- se $k = -2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$ (**P**), e assim por diante.

Funções periódicas

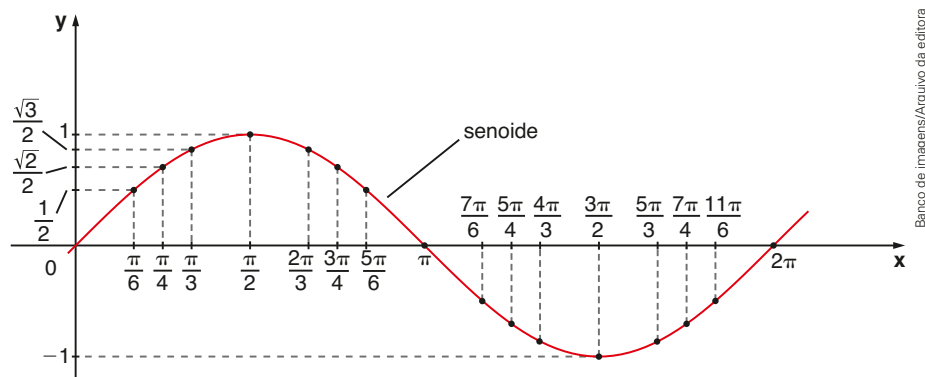
Uma função $f: A \rightarrow B$ é periódica se existir um número real positivo **p** tal que $f(x) = f(x + p)$, $\forall x \in A$.

O menor valor positivo de **p** é chamado de **período** de **f**.

Função seno

Denominamos **função seno** a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real **x** o seu seno, isto é, $f(x) = \sin x$.

Observe, abaixo, um período (de 0 a 2π) “detalhado” do gráfico de **f**:



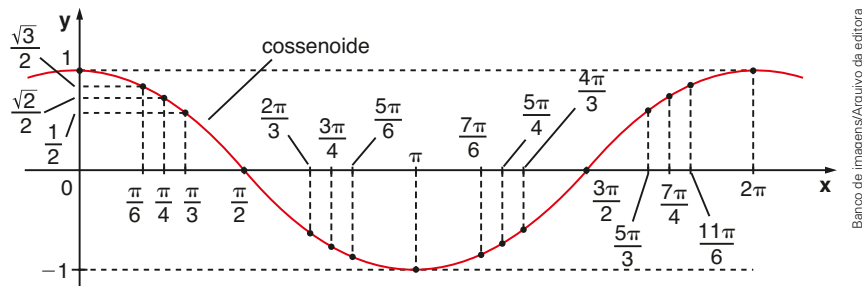
Esse gráfico recebe o nome de **senoide**.

- $D = \mathbb{R}$
- $\text{Im} = [-1, 1]$
- Período = 2π

Função cosseno

Chama-se **função cosseno** a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real x o seu cosseno, ou seja, $f(x) = \cos x$.

Observe, abaixo, um período (de 0 a 2π) “detalhado” do gráfico de f :



Esse gráfico recebe o nome de **cossenoide**.

- $D = \mathbb{R}$
- $Im = [-1, 1]$
- Período = 2π

Período

Sejam **c** e **d** números reais, com $c \neq 0$. A função definida por $y = \sin(cx + d)$ tem período **p** dado por $p = \frac{2\pi}{|c|}$.

O mesmo vale para a função $y = \cos(cx + d)$.

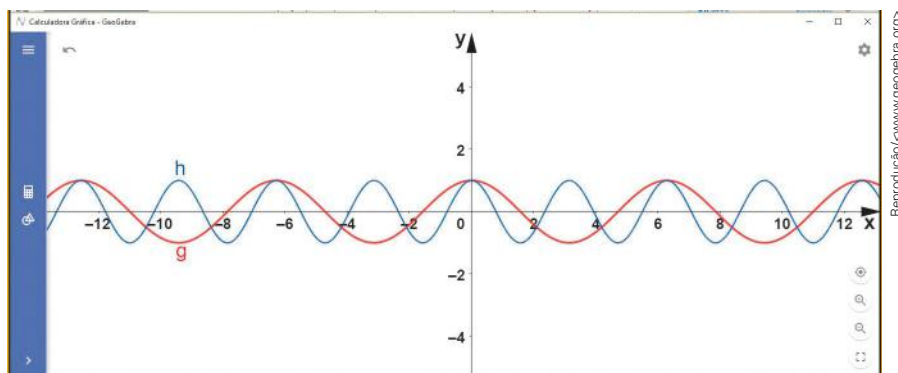
Exemplos:

- O período da função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \cos(2x)$ é $p = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$.
- O período da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = -3 \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ é $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$.

Efeitos da alteração do período no gráfico

Sejam $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \cos x$, cujo período é 2π , e $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \cos(2x)$, cujo período é π .

Compare os gráficos das funções **g** e **h** a seguir, traçados em um mesmo sistema de coordenadas, com o auxílio do GeoGebra.



O gráfico de **h** é obtido “comprimindo-se na horizontal” o gráfico de **g**.

Se o período fosse maior que 2π , como na função $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ (o período é 4π), o gráfico obtido corresponderia a uma “dilatação na horizontal” do gráfico de **g**.

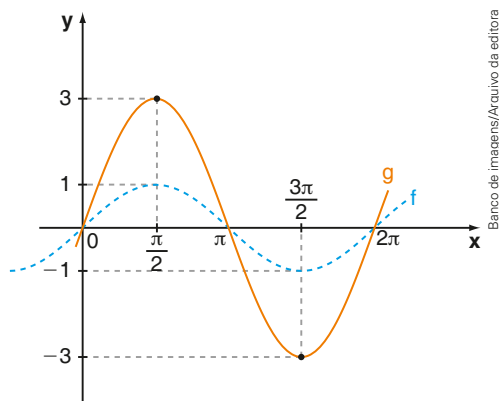
Efeitos sobre o conjunto imagem

Na lei $y = a + b \cdot \cos(cx + d)$ ou $y = a + b \cdot \sin(cx + d)$, os valores de **a** e **b** influenciam o conjunto imagem da função.

Sejam **f** e **g** funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} dadas por $f(x) = \sin x$ e $g(x) = 3 \cdot \sin x$.

O conjunto imagem de **f** é $[-1, 1]$; o conjunto imagem de **g** é $[-3, 3]$.

O gráfico de **g** é obtido a partir do gráfico de **f**, “alongando-o na vertical”.



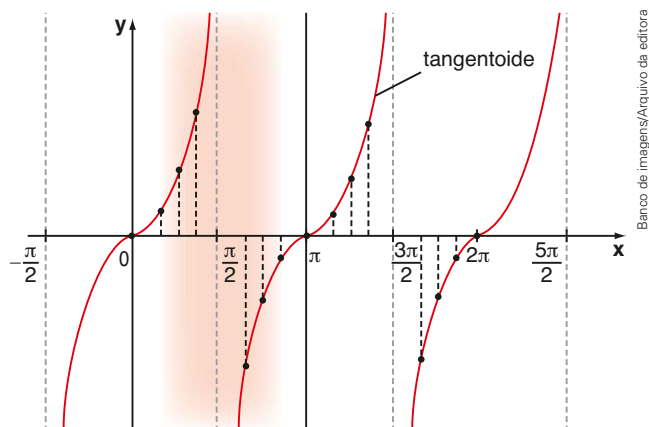
Podemos determinar o conjunto imagem de $y = -3 + 5 \cdot \sin(3x)$, por exemplo, sem construir o gráfico:

$-1 \leq \sin(3x) \leq 1 \Rightarrow -5 \leq 5 \cdot \sin(3x) \leq 5 \Rightarrow -3 - 5 \leq -3 + 5 \cdot \sin(3x) < -3 + 5$, isto é, $-8 \leq y \leq 2$ e o conjunto imagem é $[-8, 2]$.

Função tangente

Denominamos **função tangente** a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real $x \in D$ o número real $\operatorname{tg} x$, isto é, $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Observe o gráfico da função tangente, que recebe o nome de **tangente**.



- $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$
- Período = π

Transformações trigonométricas

Adição e subtração

Dados os números reais **a** e **b** valem as relações:

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Com auxílio dessas fórmulas é possível, por exemplo, calcular $\sin 105^\circ$, $\cos 105^\circ$ e $\operatorname{tg} 105^\circ$:

- $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
- $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
- $\operatorname{tg} 105^\circ = \frac{\sin 105^\circ}{\cos 105^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{2 + 2\sqrt{12} + 6}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{-4} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{-4} = -2 - \sqrt{3}$

Razões trigonométricas de $2a$

Considerando $2a = a + a$, $a \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\sin(2a) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\operatorname{tg}(2a) = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Transformação em produto

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

Equações trigonométricas fundamentais

De modo geral, quase todas as equações trigonométricas se reduzem a uma destas três:

$$\text{sen } x = \text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } x = \text{cos } \alpha$$

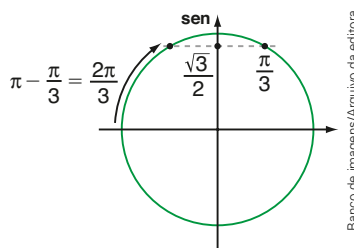
$$\text{tg } x = \text{tg } \alpha$$

em que x é a variável real e α é um número conhecido.

Por exemplo, vamos resolver em $[0, 2\pi]$:

$$\bullet \text{ sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

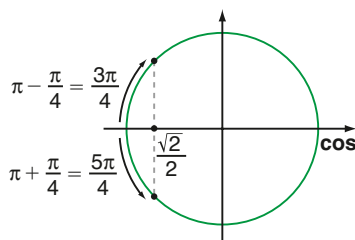
$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\bullet \text{ cos } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

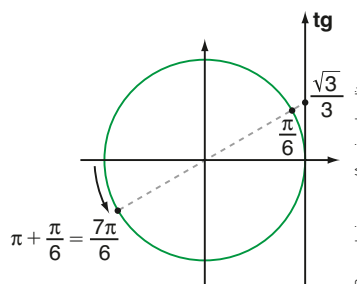
$$S = \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\bullet \text{ tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução geral de uma equação

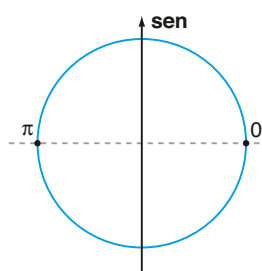
Por exemplo, vamos resolver em \mathbb{R} :

$$\bullet \text{ sen } (4x) = 0$$

$$4x = 0 + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{k \cdot \pi}{4}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

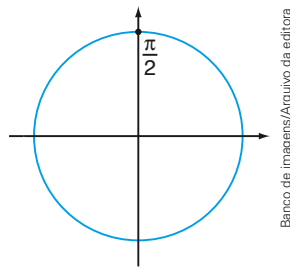
- $\operatorname{cosec}^2 x = 2 \cotg x$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = 2 \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}; \operatorname{sen} x \neq 0$$

$$1 = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$1 = \operatorname{sen}(2x)$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Soluções em determinado intervalo

Por exemplo, vamos resolver em $[0, \pi]$ $\cos(3x) = \frac{1}{2}$.

$$3x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} (*) \text{ (Solução geral)}$$

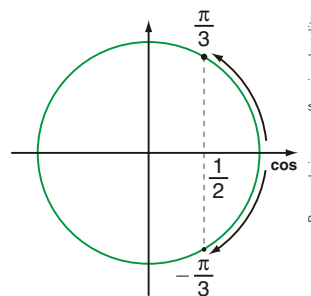
A partir de (*), determinamos as soluções em $[0, \pi]$:

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} \text{ (serve) ou } x = -\frac{\pi}{9} \text{ (não serve)}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9} \text{ (serve) ou } x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{9} \text{ (serve)}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} > \pi \text{ (não serve) ou } x = -\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{9} > \pi \text{ (não serve)}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{5\pi}{9} \right\}$$



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Aplique o que aprendeu

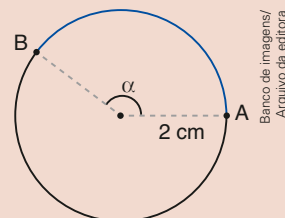
Exercícios resolvidos

1. O comprimento do arco \widehat{AB} é 5 cm. Determine a medida α , em radianos.

Solução:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ rad}$$

Observe que $2,5 \text{ rad} \approx 143^\circ$.



Banco de Imagens/
Arquivo da editora

2. Dados $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, determine o valor de $\operatorname{sen} x$.

Solução:

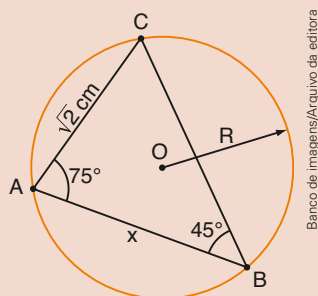
$$\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \cos x = -\frac{3 \operatorname{sen} x}{4}$$

Usando a relação fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \left(-\frac{3 \operatorname{sen} x}{4} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{25 \operatorname{sen}^2 x}{16} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{4}{5}$$

Como x está no 2º quadrante, temos $\operatorname{sen} x = \frac{4}{5}$.

3. Observe a figura abaixo e determine as medidas x e R .



Solução:

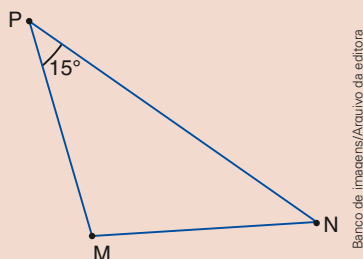
O ângulo \hat{C} mede $180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{x}{\sin 60^\circ} = 2R, \text{ isto é:}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Como } \frac{\sqrt{2}}{2} = 2R \Rightarrow R = 1 \text{ cm.}$$

4. Na figura, o triângulo MNP é isósceles de base \overline{PN} . Sabendo que $MN = 2$ cm, determine PN.



Solução:

Como o triângulo é isósceles, temos:

$$PM = MN = 2 \text{ cm}$$

$$\text{med}(\widehat{PNM}) = 15^\circ \Rightarrow \text{med}(\widehat{PMN}) = 150^\circ$$

Daí:

$$(PN)^2 = (PM)^2 + (MN)^2 - 2 \cdot (PM) \cdot (MN) \cdot \cos 150^\circ$$

$$(PN)^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ$$

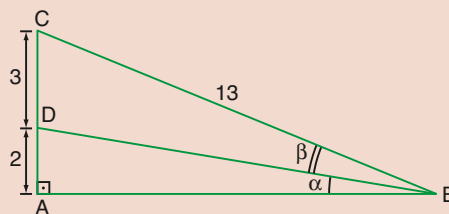
$$(PN)^2 = 8 - 8 \cdot \cos 150^\circ; \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(PN)^2 = 8 - 8 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(PN)^2 = 4 \cdot (2 + \sqrt{3}) \Rightarrow PN = \sqrt{4(2 + \sqrt{3})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PN = 2 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \text{ cm}$$

5. Na figura, determine o valor de $\text{tg } \beta$.



Solução:

No $\triangle ABC$, vem:

$$13^2 = 5^2 + (AB)^2 \Rightarrow AB = 12 \text{ cm}$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{12} (*)$$

No $\triangle ABD$, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} (**)$$

Como $\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}$, de (*) e (**) vem:

$$\frac{5}{12} = \frac{\frac{1}{6} + \text{tg } \beta}{1 - \frac{1}{6} \cdot \text{tg } \beta} \Rightarrow 2 + 12 \text{tg } \beta = 5 - \frac{5 \text{tg } \beta}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg } \beta = \frac{18}{77}$$

6. Qual é o valor de $\sin 22^\circ 30'$?

Solução:

Note que $2 \cdot (22^\circ 30') = 45^\circ$. Podemos então utilizar a fórmula do arco duplo:

$$\cos(2 \cdot 22^\circ 30') = \underbrace{\cos^2(22^\circ 30') - \sin^2(22^\circ 30')}_{\text{Relação fund.}}$$

$$\Rightarrow \cos 45^\circ = 1 - \sin^2(22^\circ 30') - \sin^2(22^\circ 30') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2(22^\circ 30') = 1 - \cos 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2(22^\circ 30') = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2(22^\circ 30') = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(22^\circ 30') = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

7. Quais são o período, o domínio e o conjunto imagem da função $y = \sin(3x) \cdot \cos(3x)$?

Solução:

$$y = \sin(3x) \cdot \cos(3x) \Rightarrow 2y = \underbrace{2 \sin(3x) \cdot \cos(3x)}_{(I)} \Rightarrow$$

$$2y = \sin(6x) \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \sin(6x)$$

$D = \mathbb{R}$;

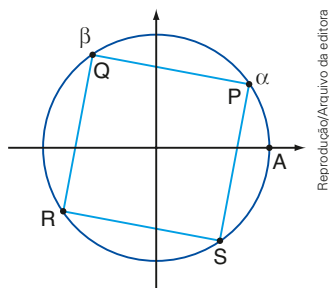
Daí: $\text{Im} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, pois mín. e máx. de $\sin(6x)$

são -1 e 1 ; o período é $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Questões

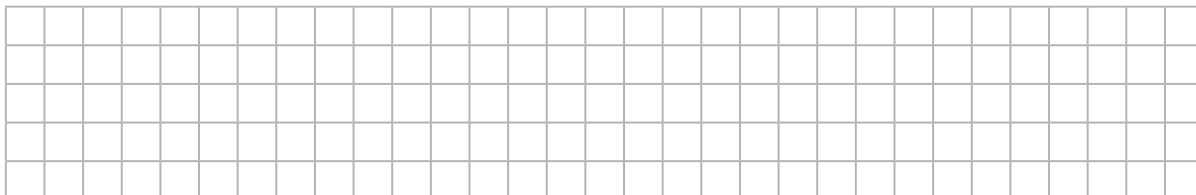
1. (Insper-SP)

Na figura abaixo, em que o quadrado PQRS está inscrito na circunferência trigonométrica, os arcos \widehat{AP} e \widehat{AQ} têm medidas iguais a α e β respectivamente, com $0 < \alpha < \beta < \pi$.



Sabendo que $\cos \alpha = 0,8$ pode-se concluir que o valor de $\cos \beta$ é

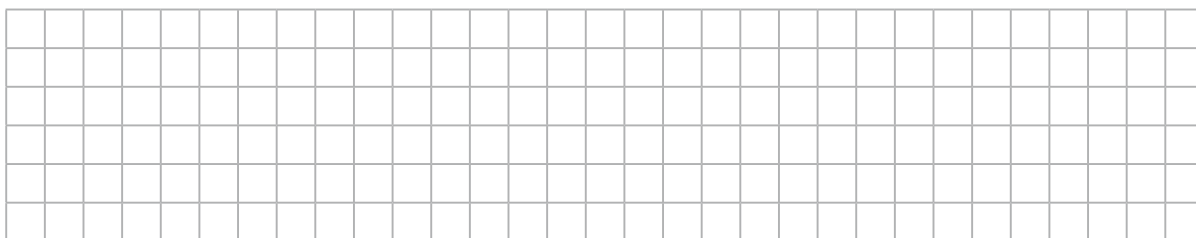
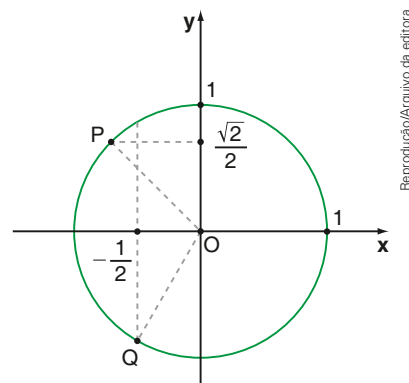
- a) $-0,8$.
- b) $0,8$.
- c) $-0,6$.
- d) $0,6$.
- e) $-0,2$.



2. (EsPCEEx-SP)

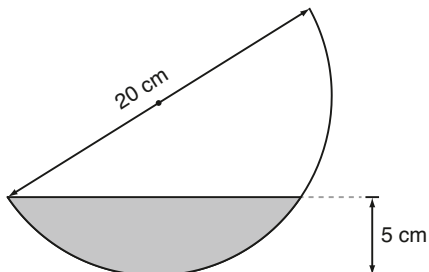
Os pontos **P** e **Q** representados no círculo trigonométrico ao lado correspondem às extremidades de dois arcos, ambos com origem em $(1, 0)$, denominados respectivamente α e β medidos no sentido positivo. O valor de $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ é

- a) $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$
- b) $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$
- c) $2 + \sqrt{3}$
- d) $2 - \sqrt{3}$
- e) $-1 + \sqrt{3}$



5. (UFPR)

Um recipiente, no formato de hemisfério, contém um líquido que tem profundidade máxima de 5 cm. Sabendo que a medida do diâmetro do recipiente é de 20 cm, qual o maior ângulo, em relação à horizontal, em que ele pode ser inclinado até que o líquido alcance a borda, antes de começar a derramar?



Reprodução/Arquivo da editora

- a) 75°.
b) 60°.

- c) 45°.
d) 30°.

- e) 15°.



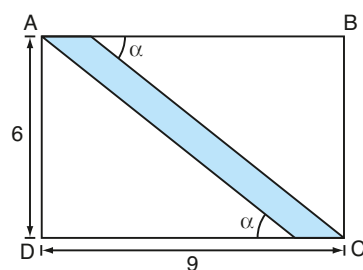
6. (UFRGS-RS)

Na figura ao lado, o retângulo ABCD tem lados que medem 6 e 9. Se a área do paralelogramo sombreado é 6, o cosseno de α é

- a) $\frac{3}{5}$.
b) $\frac{2}{3}$.

- c) $\frac{3}{4}$.
d) $\frac{4}{5}$.

- e) $\frac{8}{9}$.



Reprodução/Arquivo da editora



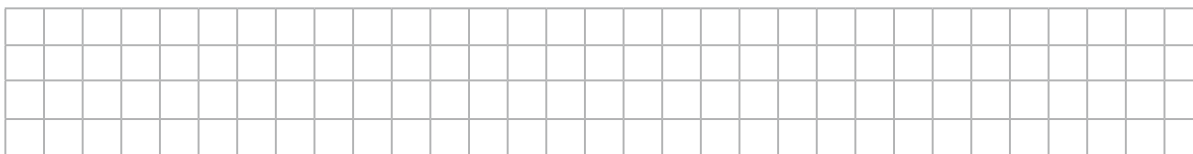
7. (PUC-PR)

O termo acessibilidade significa incluir a pessoa com deficiência na participação de atividades. Um exemplo é o acesso para cadeira de rodas através de rampas. A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) regulamentou a construção dessas rampas. A inclinação com o plano horizontal deve variar de 5% a 8,33% de acordo com a tabela abaixo.

Desnível	Inclinação máxima
Mais de 1 m	5%
De 80 cm a 1 m	6,25%
Até 80 cm	8,33%

Suponha que seja preciso construir uma rampa para um desnível cuja altura é de 0,90 m. De quanto deve ser o afastamento mínimo, a fim de que essa rampa fique de acordo com o regulamento estabelecido pela ABNT?

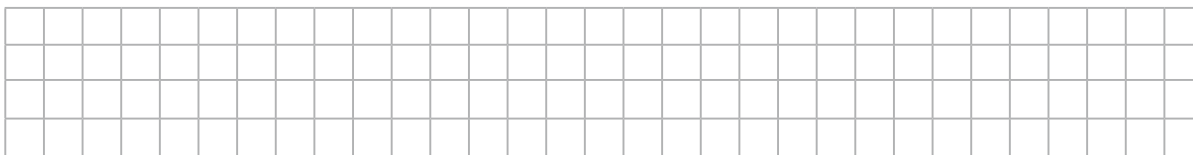
- a) 14,4 cm b) 69 cm c) 1,44 m d) 6,9 m e) 14,4 m



8. (Uece)

As diagonais de um retângulo dividem cada um de seus ângulos internos em dois ângulos cujas medidas são respectivamente 30° e 60° . Se x é a medida do maior lado e y é a medida do menor lado do retângulo, então a relação entre x e y é

- a) $x^2 - 4y^2 = 0$ b) $x^2 - 2y^2 = 0$ c) $x^2 - 6y^2 = 0$ d) $x^2 - 3y^2 = 0$



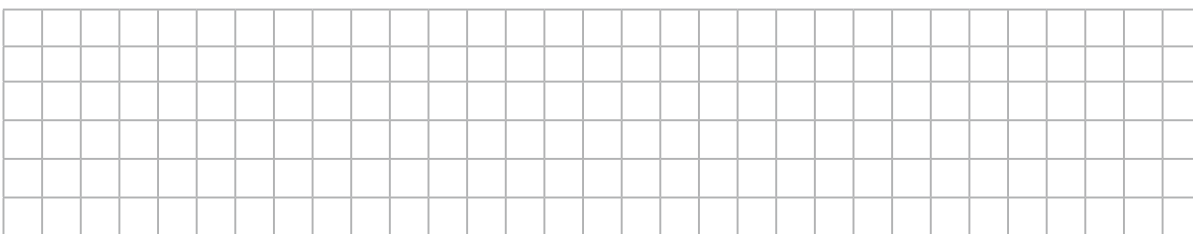
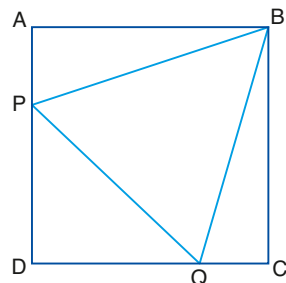
9. (UFMG)

Observe esta figura ao lado.

Nessa figura, o quadrado ABCD tem área igual a 1; o triângulo BPQ é equilátero; e os pontos **P** e **Q** pertencem, respectivamente, aos lados AD e CD.

Assim sendo, a área do triângulo BCQ é

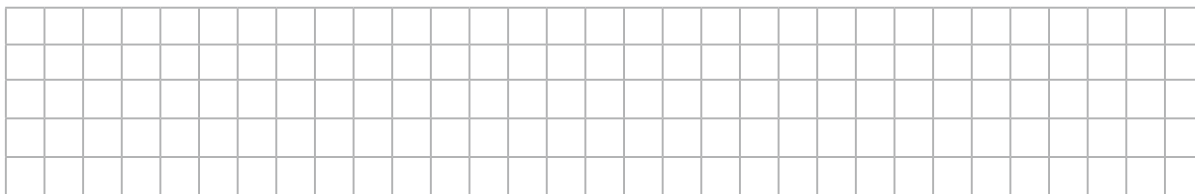
- a) $\frac{[(\sqrt{3}) - 1]}{2}$ b) $\frac{(2 + \sqrt{3})}{2}$ c) $\frac{(2 - \sqrt{3})}{2}$ d) $\frac{(3 - \sqrt{3})}{2}$



10. (UFPI)

Em um triângulo, um dos ângulos mede 60° e os lados adjacentes a este ângulo medem 1 cm e 2 cm. O valor do perímetro deste triângulo, em centímetros, é:

- a) $3 + \sqrt{5}$ b) $5 + \sqrt{3}$ c) $3 + \sqrt{3}$ d) $3 + \sqrt{7}$ e) $5 + \sqrt{7}$



11. (UEMG)

Observe a figura:

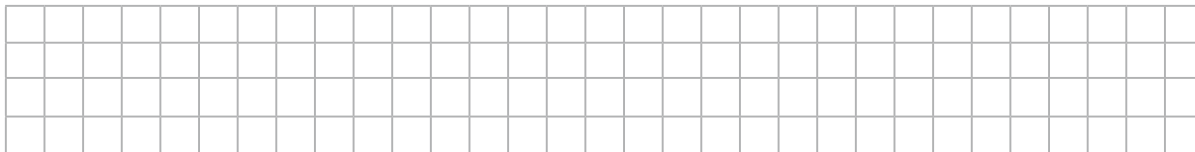
Tendo como vista lateral da escada com 6 degraus, um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $\sqrt{10}$ metros, Magali observa que todos os degraus da escada têm a mesma altura.

A medida em cm de cada degrau, corresponde aproximadamente a:

- a) 37 c) 75
b) 60 d) 83



Reprodução/UEMG



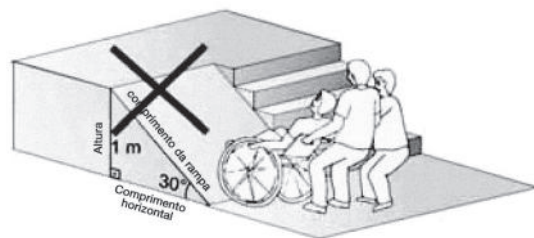
12. (UEL-PR)

Analise a figura ao lado.

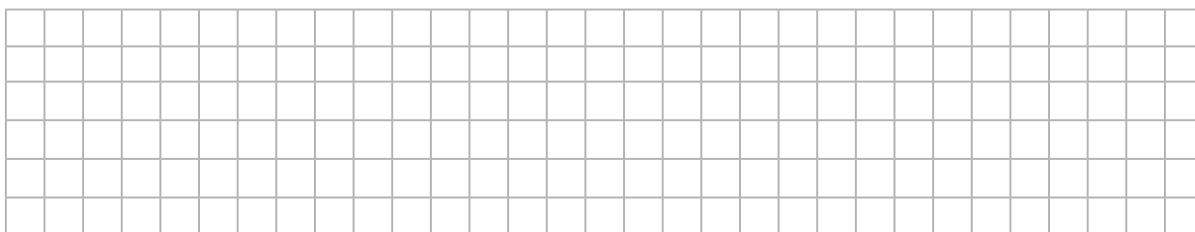
A questão da acessibilidade nas cidades é um desafio para o poder público. A fim de implementar as políticas inclusivas, a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) criou normas para acessibilidade arquitetônica e urbanística. Entre elas estão as de construção de rampas de acesso, cuja inclinação com o plano horizontal deve variar de 5% a 8,33%. Uma inclinação de 5% significa que, para cada metro percorrido na horizontal, a rampa sobe 0,05 m. Recorrentemente, os acessos por rampas não respeitam essas normas, gerando percursos longos em inclinações exageradas. Conforme a figura, observou-se uma rampa de acesso, com altura de 1 metro e comprimento da rampa igual a 2 metros.

Se essa rampa fosse construída seguindo as normas da ABNT, com inclinação de 5%, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a diferença de comprimento dessas rampas, em metros.

- a) 5 b) 20 c) $2 + \frac{1}{20}$ d) $\sqrt{401} - 2$ e) $\sqrt{4,01} + \frac{1}{20}$



Reprodução/UEL, 2014

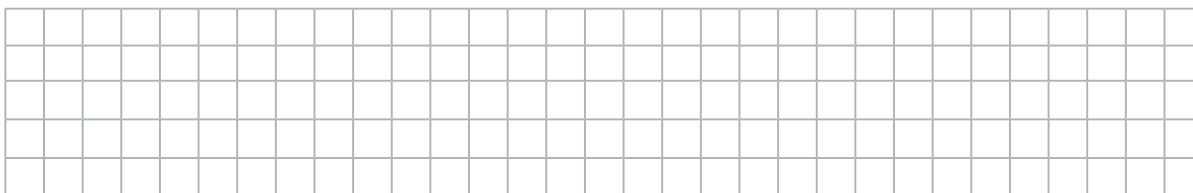


13. (UCS-RS)

Suponha que, em determinado lugar, a temperatura média diária T , em $^{\circ}\text{C}$, possa ser expressa, em função do tempo t , em dias decorridos desde o início do ano, por $T(t) = 14 + 12\sin\left(\frac{2\pi(t-105)}{364}\right)$.

Segundo esse modelo matemático, a temperatura média máxima nesse lugar ocorre no mês de

- a) julho. d) dezembro.
b) setembro. e) março.
c) junho.



14. (Uepa)

A ornamentação de carrocerias de veículos é uma tradição antiga que se inicia com o uso de transportes de carga motorizados no Brasil. A tradição de decorar carrocerias particulariza e traz personalidade a cada veículo por meio de cores, grafismos e elementos visuais pertinentes a cada cultura onde estão inseridos. Um dos moldes utilizados para pintar, fabricado em chapa metálica galvanizada e desenho cortado a laser, está representado na figura 1 abaixo. Inserindo um sistema cartesiano ortogonal na figura 1, obtém-se a figura 2, onde estão representadas as funções trigonométricas f_1 , f_2 , f_3 , e f_4 . Nessas condições e considerando que a lei de formação de cada uma das funções representadas na figura 2 são do tipo $y = f(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$, com a , b , c e d números reais, é correto afirmar que:

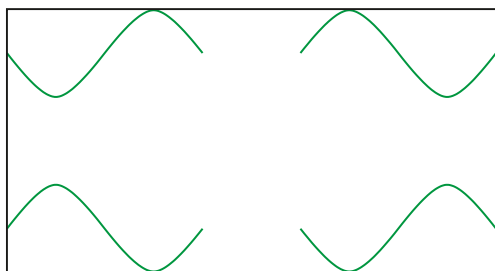


Figura 1: Moldes

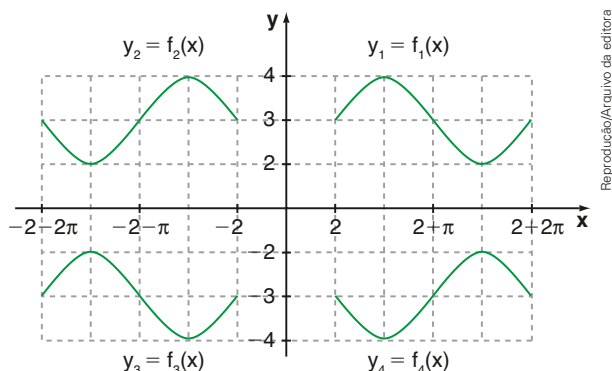
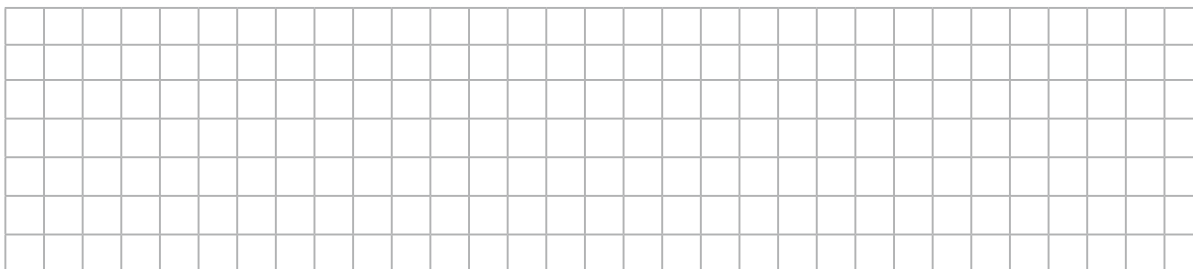


Figura 2: Moldes no sistema cartesiano

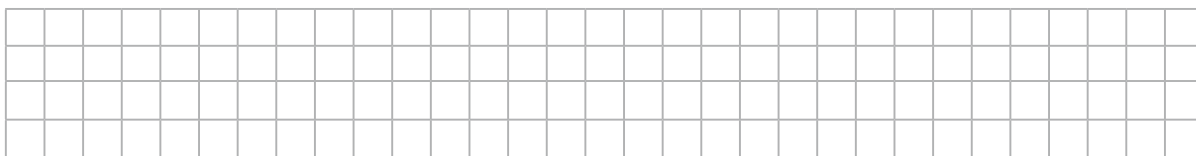
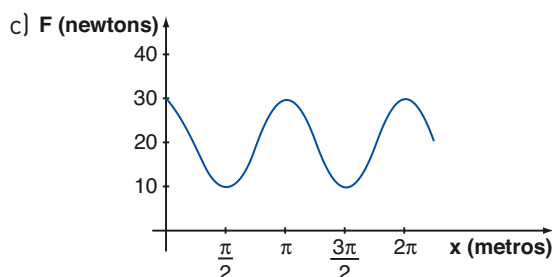
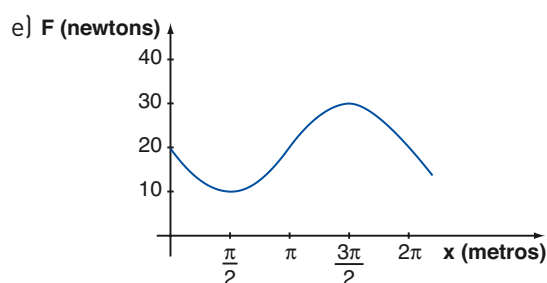
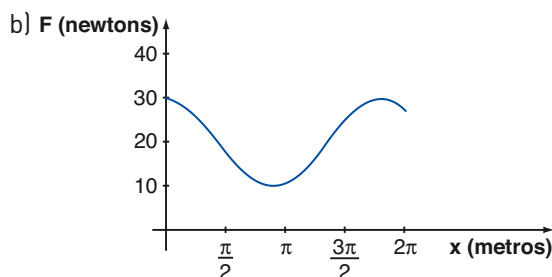
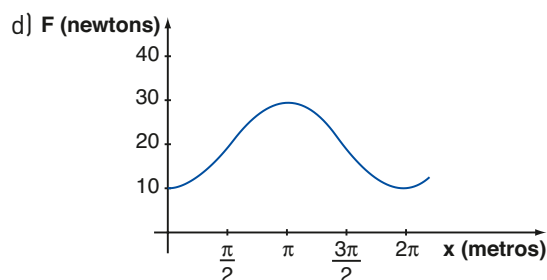
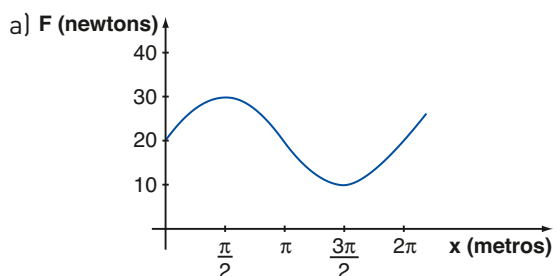
- a) $y = f_1(x) = 3 + \sin(x + 2)$ d) $y = f_4(x) = -3 - \sin(x - 2)$
b) $y = f_2(x) = 3 + \sin(x - 2)$ e) $y = f_1(x) = 3 - \sin(x - 2)$
c) $y = f_3(x) = -3 + \sin(x - 2)$



15. (UCS-RS)

Para colocar um objeto em movimento e deslocá-lo sobre uma trajetória retilínea por x metros, é necessário aplicar uma força de $20 + 10 \sin(x)$ newtons sobre ele.

Em qual dos gráficos abaixo, no intervalo $[0, 3]$, está representada a relação entre a força aplicada e a distância, quando o objeto é deslocado até 3 metros?



16. (PUC-RS)

Na equação $\tan(x) = \cot(x)$ em \mathbb{R} , onde $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o valor de x é

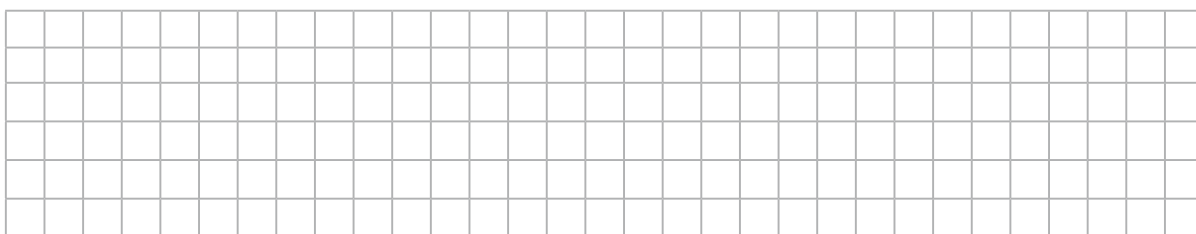
a) -1

c) $\frac{\pi}{3}$

e) $\frac{\pi}{6}$

b) 1

d) $\frac{\pi}{4}$



17. (UFMS-RS)

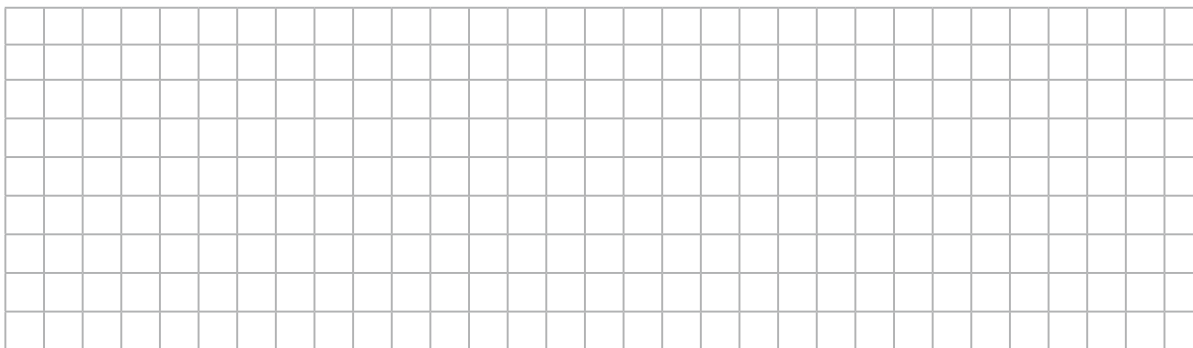
Cerca de 24,3% da população brasileira é hipertensa, quadro que pode ser agravado pelo consumo excessivo de sal. A variação da pressão sanguínea **P** (em mmHg) de um certo indivíduo é expressa em função do tempo por $P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$ onde **t** é dado em segundos. Cada período dessa função representa um batimento cardíaco.

Analise as afirmativas:

- I. A frequência cardíaca desse indivíduo é de 80 batimentos por minuto.
- II. A pressão em $t = 2$ segundos é de 110 mmHg.
- III. A amplitude da função $P(t)$ é de 30 mmHg.

Está(ão) correta(s)

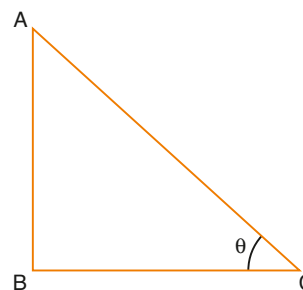
- a) apenas I.
- b) apenas I e II.
- c) apenas III.
- d) apenas II e III.
- e) I, II e III.



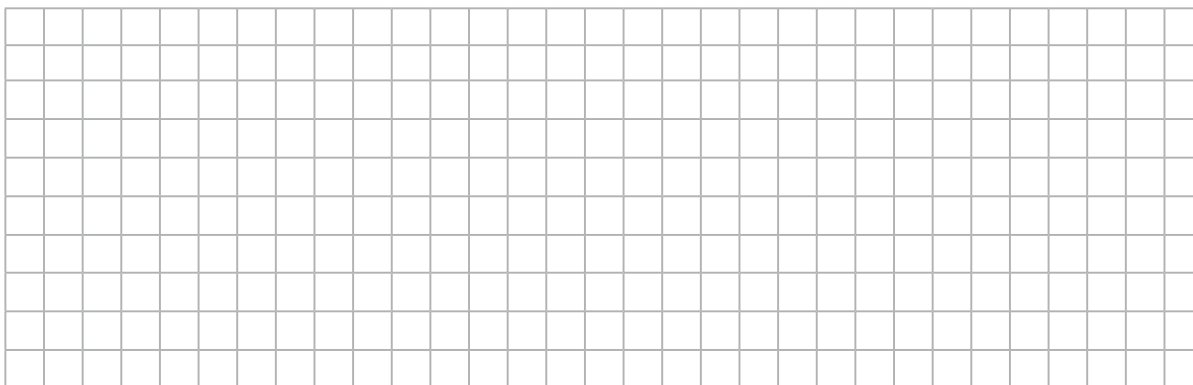
18. (Acafe-SC)

O triângulo ABC da figura ao lado é retângulo. As medidas, em metros, de \overline{AB} e \overline{BC} são $(x + 8)$ e $3x$, respectivamente. Se $\sin \theta - 3 \cos \theta = 0$, então, a área do triângulo retângulo ABC, em metros quadrados, é um número compreendido entre:

- a) 12 e 13.
- b) 13 e 14.
- c) 14 e 15.
- d) 11 e 12.



Reprodução/Arquivo da editora



19. (Ucpel-RS)

Se $\operatorname{tg} \alpha = 2$ com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ então $\operatorname{sen} 2\alpha$ é igual

- a) $\frac{4}{5}$

- d) $\frac{2}{5}$

- b) $\frac{5}{4}$

- e) $\frac{4}{3}$

- c) $\frac{5}{3}$

[illegible]

20. (UFRGS-RS)

O período da função definida por $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ é

- a) $\frac{\pi}{2}$

- c) $\frac{5\pi}{6}$

- e) 2π

- b)
- $\frac{2\pi}{3}$

- d)
- π

[illegible]

21. (UCS-RS)

Suponha que o deslocamento de uma partícula sobre uma corda vibrante seja dado pela equação $s(t) = 10 + \frac{1}{4} \sin(10\pi t)$, em que **t** é o tempo, em segundos, após iniciado o movimento, e **s**, medido em centímetros, indica a posição.

Meio segundo após iniciado o movimento da corda, qual é, em cm, o afastamento da partícula da posição de repouso?

- a) 0

- c) 0,25

- e) 10,25

- b) 0,125

- d) 10

[illegible]

Geometria espacial e de posição

Reveja o que aprendeu

Você deve ser capaz de:

- ▶ Abstrair as noções primitivas da Geometria e conhecer os principais postulados.
- ▶ Reconhecer os modos de determinar um plano.
- ▶ Identificar as posições relativas entre duas retas.
- ▶ Identificar as posições relativas entre reta e plano.
- ▶ Identificar as posições relativas entre dois planos.
- ▶ Conceituar distâncias entre dois pontos, entre um ponto e um plano, entre um ponto e uma reta, etc.
- ▶ Reconhecer projeções ortogonais de um ponto sobre um plano, de uma reta sobre um plano e de uma figura sobre um plano.

Noções primitivas (ou iniciais)

São noções primitivas da Geometria: o ponto, a reta e o plano.

Proposições primitivas (ou iniciais)

As proposições iniciais, proposições primitivas ou postulados são propriedades aceitas sem demonstração.

Postulados da existência

- Em uma reta e fora dela existem infinitos pontos.
- Em um plano e fora dele existem infinitos pontos.

Postulados da determinação

- Dois pontos distintos determinam uma única reta.
- Três pontos não colineares determinam um único plano.

Postulado da inclusão

Se uma reta possui dois pontos distintos em um plano, ela está contida nesse plano.

Postulado das paralelas (ou postulado de Euclides)

Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.

Determinação de planos

Há quatro modos de determinar a posição de um plano no espaço. Vejamos:

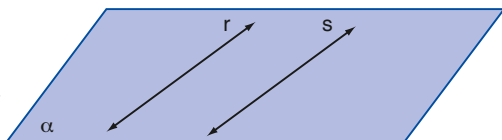
- 1ª) [POSTULADO] Por meio de três pontos não colineares.
- 2ª) [PROPOSIÇÃO] Por meio de uma reta e um ponto fora dela.
- 3ª) [PROPOSIÇÃO] Por meio de duas retas concorrentes.
- 4ª) [PROPOSIÇÃO] Por meio de duas retas paralelas e distintas.

Proposição é uma propriedade cuja validade poder ser demonstrada.

Posições relativas entre duas retas

- [DEF] As duas retas não têm nenhum ponto em comum, mas existe um plano que as contém; nesse caso, elas são **paralelas**.

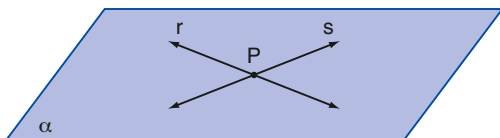
Banco de imagens/
Arquivo da editora



$$r \cap s = \emptyset, r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha$$

- [DEF] As duas retas têm em comum um único ponto; nesse caso, elas são **concorrentes** e existe um único plano que as contém.

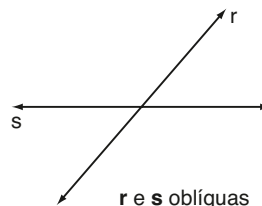
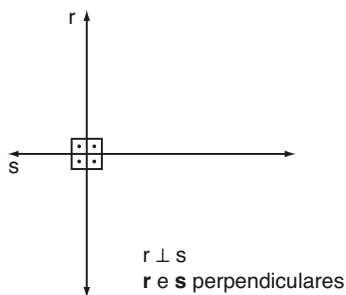
Banco de imagens/
Arquivo da editora



$$r \cap s = \{P\}$$

Observe que duas retas concorrentes formam quatro ângulos. Quando esses quatro ângulos são congruentes, cada um deles é chamado **ângulo reto** e as retas são chamadas **retas perpendiculares**.

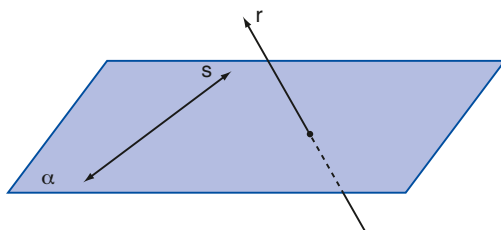
- [DEF] Se duas retas são concorrentes e não são perpendiculares, diz-se que elas são **obíquas**.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- [DEF] As duas retas não têm nenhum ponto em comum e não existe plano que as contenha; nesse caso, elas são **reversas**.

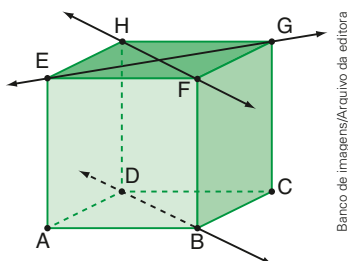
Banco de imagens/Arquivo da editora



$$r \cap s = \emptyset, s \subset \alpha \text{ e } r \not\subset \alpha$$

- [DEF] Se duas retas são reversas e formam ângulo reto, as retas são chamadas **ortogonais**.

Exemplo:



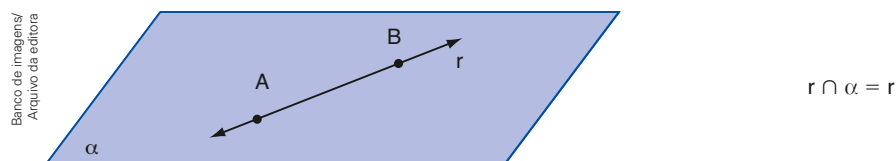
Banco de imagens/Arquivo da editora

No cubo, temos:

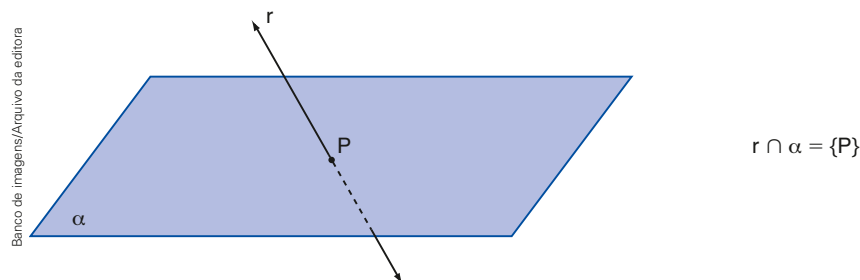
- as retas \overleftrightarrow{EF} e \overleftrightarrow{GH} são paralelas;
- as retas \overleftrightarrow{EF} e \overleftrightarrow{FH} são oblíquas, isto é, concorrentes não perpendiculares;
- as retas \overleftrightarrow{AE} e \overleftrightarrow{AB} são perpendiculares;
- as retas \overleftrightarrow{AE} e \overleftrightarrow{CG} são paralelas;
- as retas \overleftrightarrow{AE} e \overleftrightarrow{BG} são reversas (não ortogonais);
- as retas \overleftrightarrow{AE} e \overleftrightarrow{GH} são (reversas) ortogonais: observe que $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{AE}$;
- as retas \overleftrightarrow{EG} e \overleftrightarrow{BD} são (reversas) ortogonais: observe que $\overleftrightarrow{FH} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{FH} \perp \overleftrightarrow{EG}$ (as diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si).

Posições relativas de uma reta e um plano

- A reta e o plano têm em comum dois pontos distintos; nesse caso, conforme o postulado da inclusão, a reta está contida no plano.

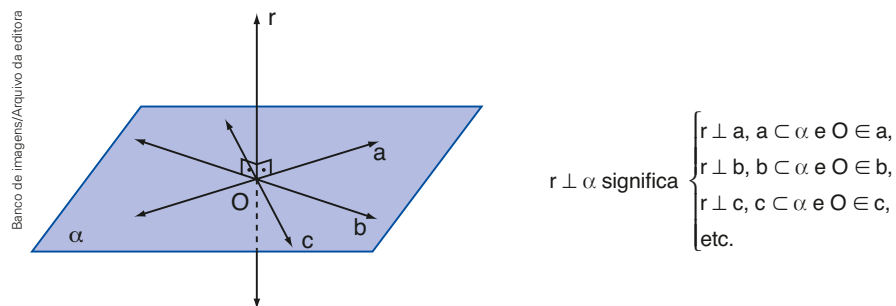


- [DEF] A reta e o plano têm em comum um único ponto; nesse caso, a reta e o plano são **secantes**.



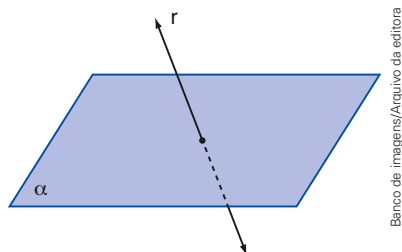
O ponto **P** é aquele em que a reta **r** intersecta o plano α . Dizemos que **P** é o traço de **r** sobre α .

- [DEF] Se uma reta é secante com um plano em um ponto **O** e é perpendicular a todas as retas do plano que passam por **O**, diz-se que a reta é **perpendicular ao plano**.

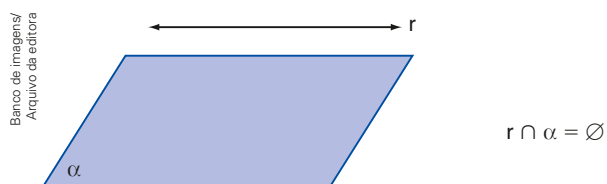


Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

- [DEF] Se uma reta e um plano são secantes e a reta não é perpendicular ao plano, diz-se que a reta é **oblíqua** ao plano.



- [DEF] A reta e o plano não têm nenhum ponto comum; nesse caso, a reta e o plano são **paralelos**.

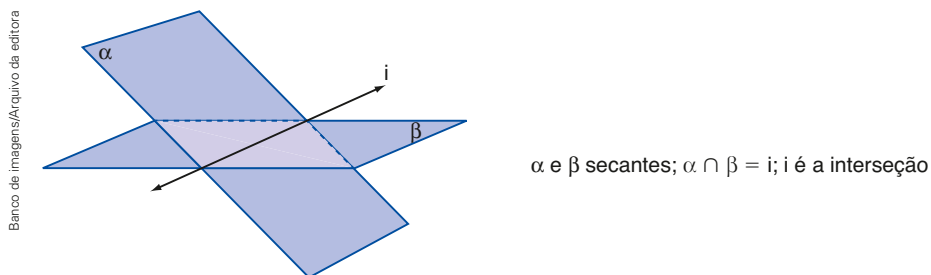


- [PROPOSIÇÃO] Se uma reta não está contida em um plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

Posições relativas de dois planos

Planos secantes

- [DEF] Dois planos distintos que têm um ponto comum são chamados **planos secantes**.

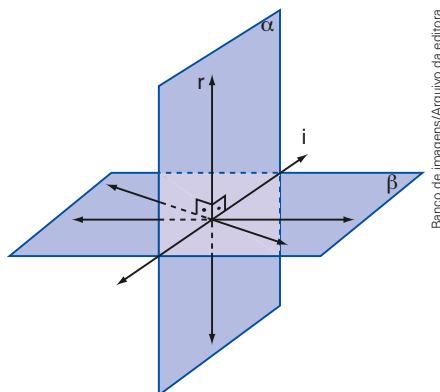


- [PROPOSIÇÃO] Se dois planos distintos têm um ponto comum, então a interseção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto. Essa reta é denominada **interseção** ou traço de um deles no outro.

Planos perpendiculares

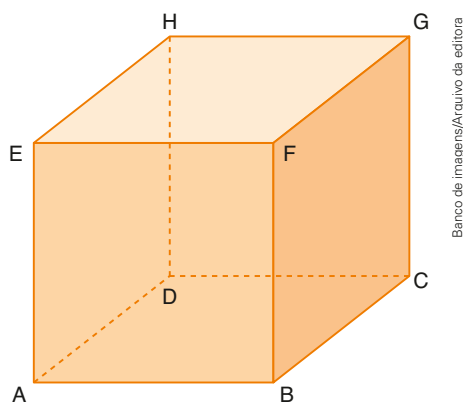
[DEF] Se dois planos são secantes e um deles contém uma reta perpendicular ao outro, diz-se que os planos são **perpendiculares**.

$$\alpha \perp \beta \text{ significa } \begin{cases} \alpha \cap \beta = i \\ r \subset \alpha \\ r \perp \beta \end{cases}$$



Se dois planos são secantes e não perpendiculares, diz-se que são **oblíquos**.

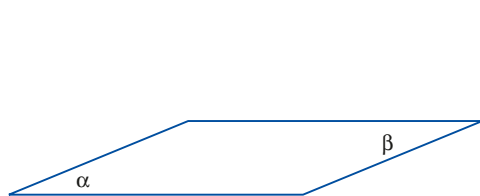
Exemplo:
Observe o cubo ABCDEFGH a seguir.



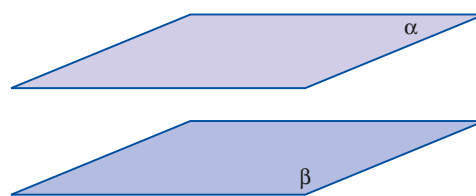
Os planos (ABC) e (ADE) são secantes (sua interseção é \overline{AD}), \overline{AE} é perpendicular ao plano (ABC) e \overline{AE} está contida no plano (ADE). Assim, os planos (ABC) e (ADE) são perpendiculares.

Planos paralelos

- [DEF] Dois planos são **paralelos** se não têm ponto comum ou são coincidentes.



α e β paralelos coincidentes

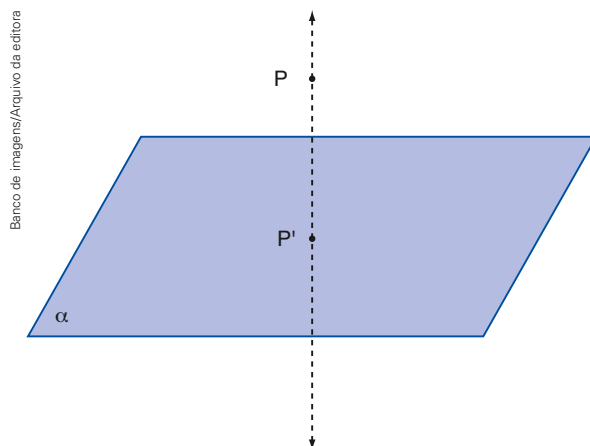


α e β paralelos distintos

- [PROPOSIÇÃO] Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a outro plano, então esses planos são paralelos.

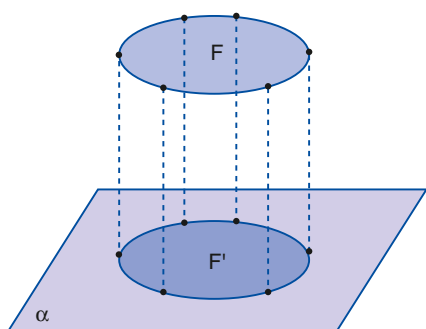
Projeções ortogonais

- [DEF] Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é o ponto de interseção entre a reta perpendicular ao plano conduzida pelo ponto e o plano.

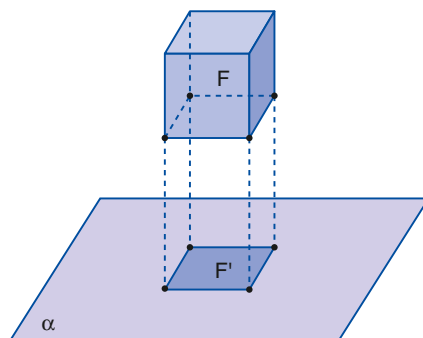


$P' = \text{proj}_{\alpha} P$
 α = plano de projeção
 $\overline{PP'}$ = reta projetante de P

- [DEF] Projeção ortogonal de uma figura plana, ou não plana, sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos da figura sobre esse plano.



$$F' = \text{proj}_{\alpha} F$$

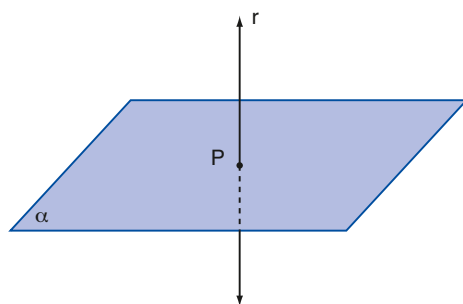


$$F' = \text{proj}_{\alpha} F$$

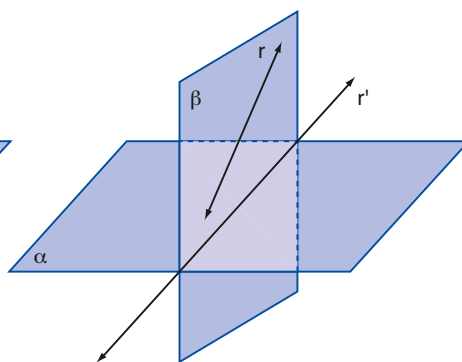
Banco de imagens/Arquivo da editora

A projeção ortogonal de uma reta r sobre um plano α é assim definida:

- [DEF] Se r é perpendicular a α , a projeção de r sobre α é o ponto P em que r intersecta α ;
- [DEF] Se r não é perpendicular a α , a projeção de r sobre α é a reta r' , interseção de α com o plano β , perpendicular a α conduzido por r .



$$P = \text{proj}_{\alpha} r$$

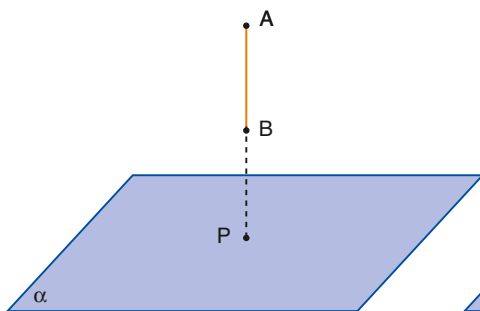


$$r' = \text{proj}_{\alpha} r$$

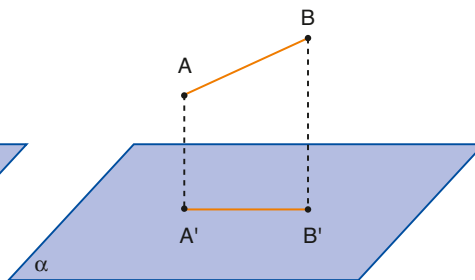
Banco de imagens/Arquivo da editora

A projeção ortogonal de um segmento de reta \overline{AB} sobre um plano α é assim definida:

- [DEF] Se \overline{AB} é perpendicular a α , a projeção de \overline{AB} sobre α é o ponto P em que a reta \overline{AB} intersecta α .
- [DEF] Se \overline{AB} não é perpendicular a α , a projeção de \overline{AB} sobre α é o segmento $\overline{A'B'}$ tal que A' e B' são, respectivamente, as projeções de A e B sobre α .



$$P = \text{proj}_{\alpha} \overline{AB}$$

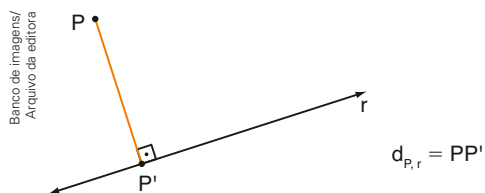


$$\overline{A'B'} = \text{proj}_{\alpha} \overline{AB}$$

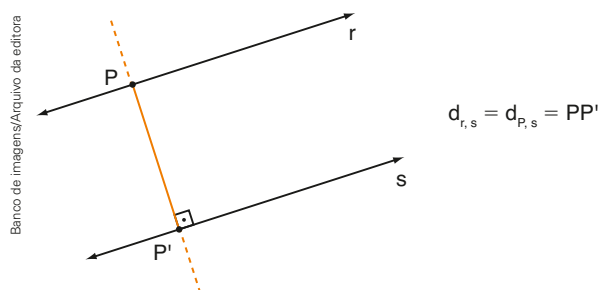
Banco de imagens/Arquivo da editora

Distâncias

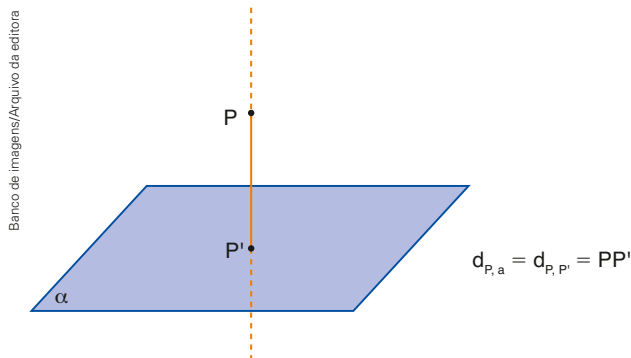
- [DEF] A distância de um ponto P a uma reta r é a distância de P a P' , em que P' é a interseção entre a reta perpendicular a r , conduzida por P , e a reta r .



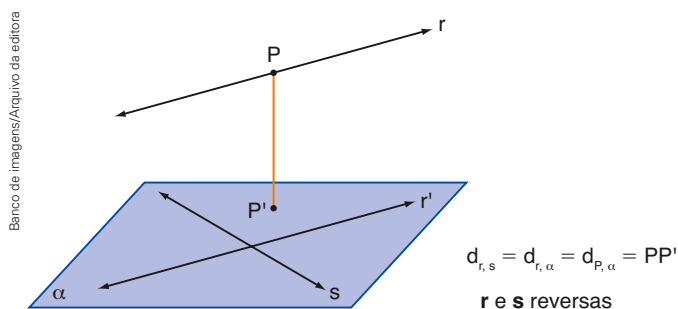
- [DEF] A distância entre duas retas r e s paralelas é a distância de um ponto P qualquer de uma delas até a outra.



- [DEF] A distância de um ponto P a um plano α é a distância de P a P' , em que P' é o ponto de interseção entre a reta perpendicular a α , conduzida por P , e o plano α .



- [DEF] A distância entre dois planos α e β paralelos é a distância de um ponto P qualquer de um deles ao outro plano.
- [DEF] A distância entre duas retas reversas r e s é a distância de um ponto qualquer P da reta r ao plano α que contém s e é paralelo à reta r .



Aplique o que aprendeu

Exercícios resolvidos

1. (EsPCEEx-SP)

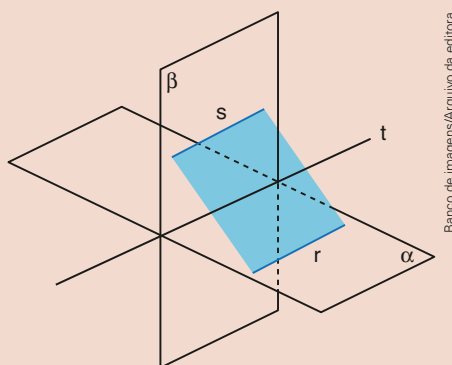
Considere dois planos α e β perpendiculares e três retas distintas r , s e t tais que $r \subset \alpha$, $s \subset \beta$ e $t = \alpha \cap \beta$.

Sobre essas retas e os planos é correto afirmar que

- a) as retas r e s somente definirão um plano se forem concorrentes com t em um único ponto.
- b) as retas r e s podem definir um plano paralelo à reta t .
- c) as retas r e s são necessariamente concorrentes.
- d) se r e s forem paralelas, então elas definem um plano perpendicular a α e β .
- e) o plano definido por r e t é necessariamente paralelo a s .

Solução:

Entre as opções descritas para os dois planos perpendiculares é possível traçar r e s paralelas a t , tal que:



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Portanto, é possível traçar um plano por r e s paralelo a t .

Alternativa B.

2. (UEM-PR)

Sobre geometria espacial, assinale o que for **correto**.

- 01) Dois planos sempre se interceptam.
- 02) Duas retas perpendiculares determinam um único plano.
- 04) Dado um ponto qualquer P em um plano π , existe uma única reta passando por P perpendicular ao plano.
- 08) Se duas retas não são paralelas, então elas são reversas.
- 16) Se uma reta não intercepta um determinado plano, então necessariamente ela é paralela a ele.

Solução:

- 01) Incorreto. Os planos podem ser paralelos.
- 02) Correto. Retas concorrentes pertencem a um único plano.
- 04) Correto. A projeção ortogonal de P sobre o plano é única.
- 08) Incorreto. Podem ser concorrentes.
- 16) Correto. Se a reta não for paralela sempre existirá um ponto de interseção.

$$02 + 04 + 16 = 22$$

Questões

1. (PUC-SP)

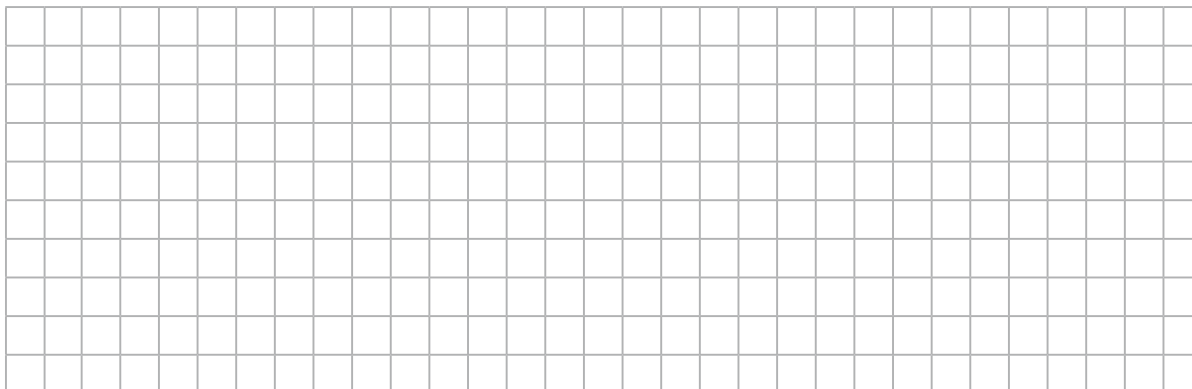
Seja uma reta r e os planos secantes α e β , de modo que $\alpha \cap \beta = r$. Seja s uma reta paralela à reta r , de modo que $s \cap \beta = \emptyset$. Seja t uma reta secante ao plano β no ponto P , de modo que $P \in r$. De acordo com essas informações, necessariamente

a) $s \cap \alpha = s$

b) $t \cap \beta = \emptyset$

c) $P \notin \alpha$

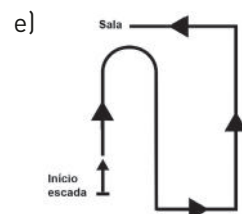
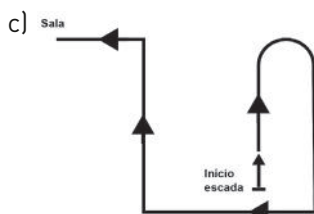
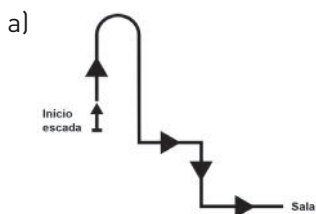
d) $r \cap t \neq \emptyset$



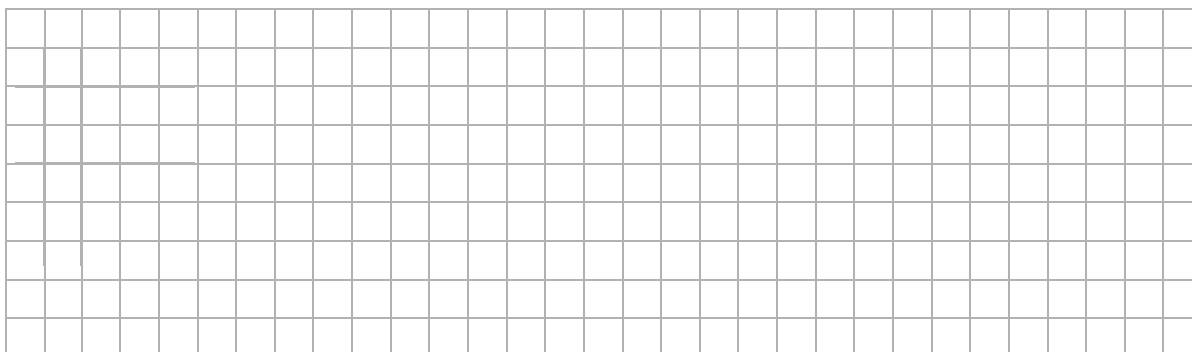
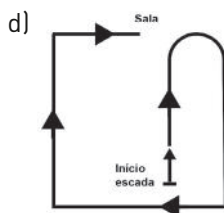
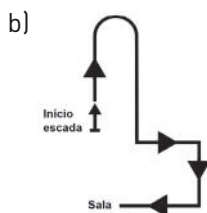
2. (Enem)

Uma pessoa pede informação na recepção de um prédio comercial de como chegar a uma sala, e recebe as seguintes instruções: suba a escada em forma de **U** à frente, ao final dela vire à esquerda, siga um pouco à frente e em seguida vire à direita e siga pelo corredor. Ao final do corredor, vire à direita.

Uma possível projeção vertical dessa trajetória no plano da base do prédio é:



Ilustrações: Reprodução/ENEM, 2017



3. (UEPG-PR)

Considerando os planos α e β , e as retas r e s , assinale o que for correto.

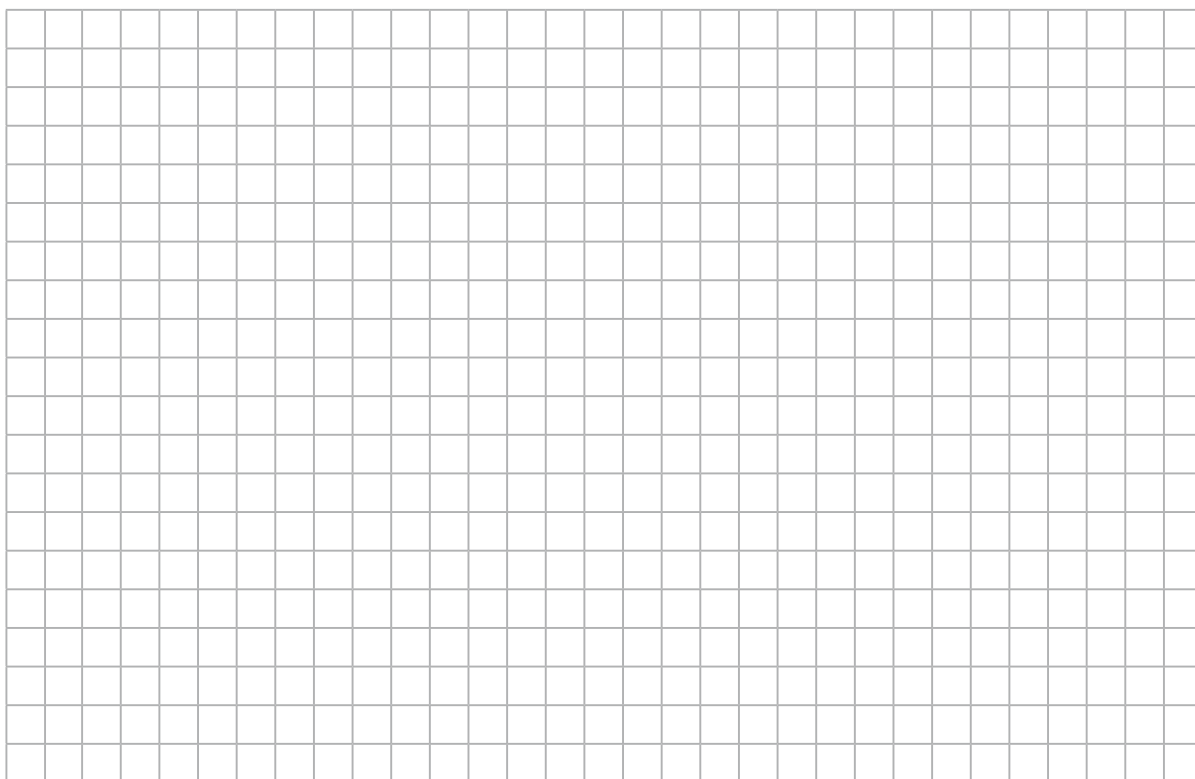
01) Se $\alpha \cap \beta = s$, $r \parallel s$, $r \not\subset \alpha$ e $r \not\subset \beta$, então $r \parallel \alpha$ e $r \parallel \beta$.

02) Se $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = r$, $s \subset \alpha$, $s \perp r$, então $s \perp \beta$.

04) Se $r \subset \beta$ e $s \perp r$, então $s \perp \beta$.

08) Se $\alpha \parallel \beta$, $r \perp \alpha$, então $r \perp \beta$.

16) Se $r \parallel \alpha$ e $r \parallel \beta$, então $\alpha \parallel \beta$.

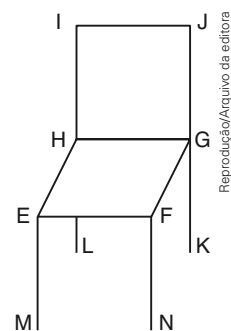


4. (UFRN)

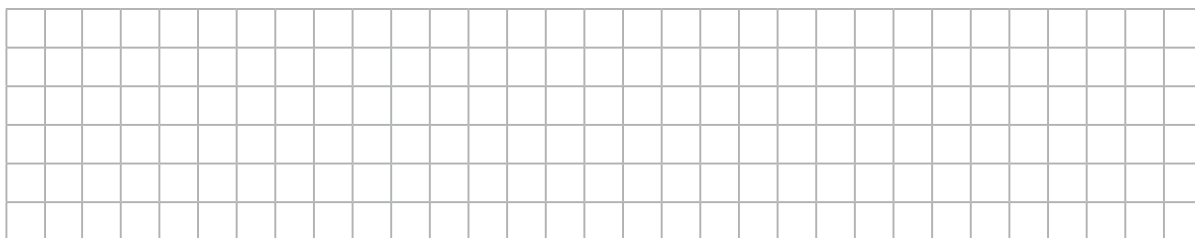
Na cadeira representada na figura ao lado, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.

Sendo assim,

- Os planos EFN e FGJ são paralelos.
- HG é um segmento de reta comum aos planos EFN e EFH.
- Os planos HIJ e EGN são paralelos.
- EF é um segmento de reta comum aos planos EFN e EHG.



Reprodução/Arquivo da editora



5. (UEL-PR)

Considere uma reta \mathbf{s} , contida em um plano α , e uma reta \mathbf{r} perpendicular a \mathbf{s} . Então, necessariamente:

- a) \mathbf{r} é perpendicular a α .
b) \mathbf{r} e \mathbf{s} são coplanares.
c) \mathbf{r} é paralela a α .
d) \mathbf{r} está contida em α .
e) Todas as retas paralelas a \mathbf{r} interceptam \mathbf{s} .

[illegible]

6. (Fatec-SP)

Seja **A** um ponto pertencente à reta **r**, contida no plano **α**.

É verdade que

- a) existe uma única reta que é perpendicular à reta \mathbf{r} no ponto \mathbf{A} .
b) existe uma única reta, não contida no plano α , que é paralela à reta \mathbf{r} .
c) existem infinitos planos distintos entre si, paralelos ao plano α , que contêm a reta \mathbf{r} .
d) existem infinitos planos distintos entre si, perpendiculares ao plano α e que contêm a reta \mathbf{r} .
e) existem infinitas retas distintas entre si, contidas no plano α e que são paralelas à reta \mathbf{r} .

[illegible]

7. (Ufal)

Analise as afirmativas a seguir.

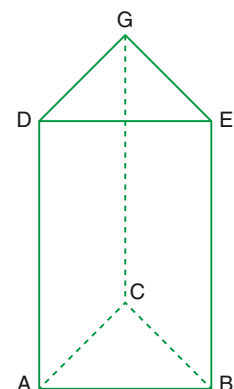
- () Duas retas que não têm pontos comuns sempre são paralelas.
- () Duas retas distintas sempre determinam um plano.
- () Uma reta pertence a infinitos planos distintos.
- () Três pontos distintos sempre determinam um plano.
- () Duas retas coplanares distintas são paralelas ou concorrentes.

[illegible]

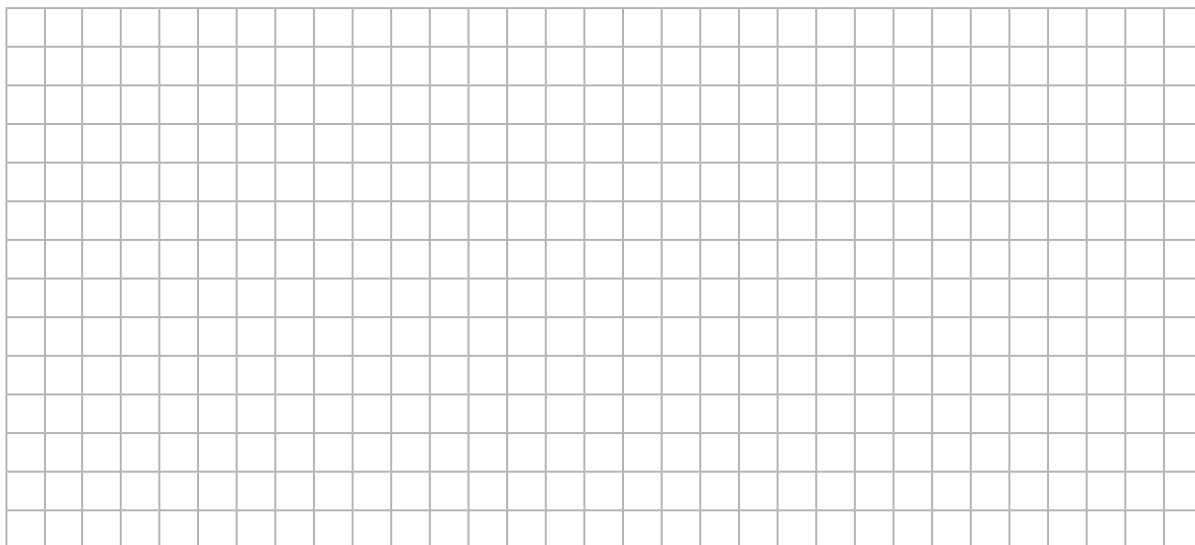
8. (Fuvest-SP)

Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG, seguindo um trajeto especial. Ela partiu do vértice **G**, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face ADGC e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a CG. A formiga chegou ao vértice

- a) A
- b) B
- c) C
- d) D
- e) E

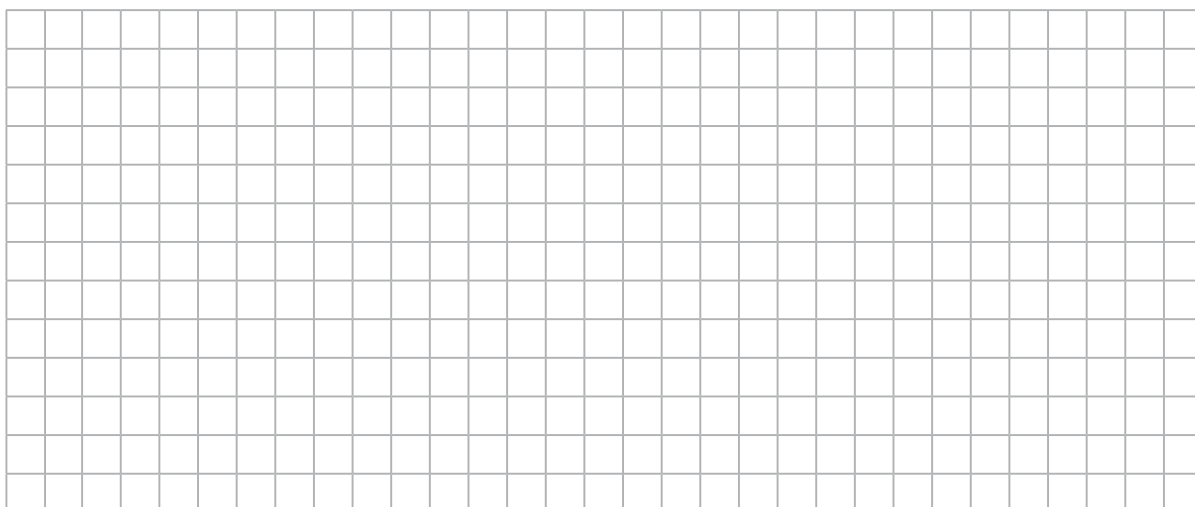


Reprodução/Arquivo de editora



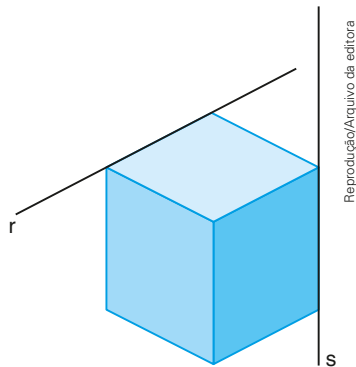
9. (Unicamp-SP)

É comum encontrarmos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas se a quisermos firme. Explique usando argumentos de geometria, por que isso não acontece com uma mesa de 3 pernas.



10. (UEL-PR)

As retas **r** e **s** foram obtidas prolongando-se duas arestas de um cubo, como está representado na figura a seguir.



Sobre a situação dada, assinale a afirmação INCORRETA.

- a) **r** e **s** são retas paralelas.
b) **r** e **s** são retas reversas.
c) **r** e **s** são retas ortogonais.
d) não existe plano contendo **r** e **s**.
e) $r \cap s = \emptyset$

[illegible]

11. (UFBA)

Sobre pontos, retas e planos, pode-se afirmar:

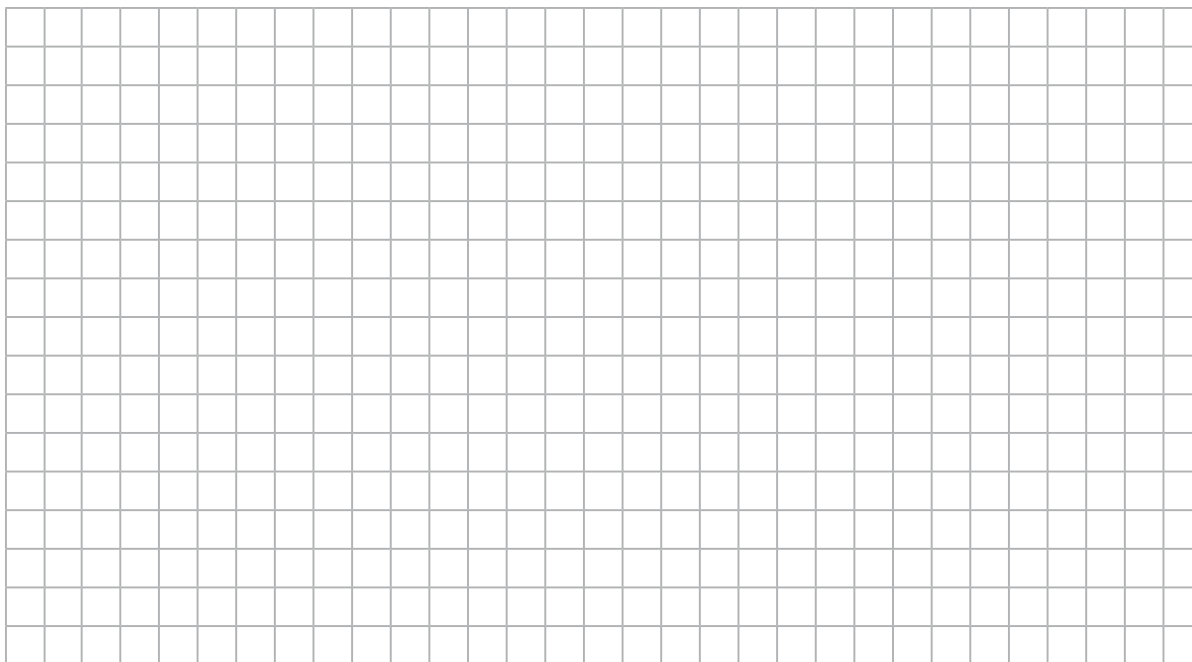
- 01) Por três pontos passa uma única reta.
- 02) Por três pontos passa um único plano.
- 04) Por um ponto fora de um plano passa uma única reta perpendicular a esse plano.
- 08) Planos paralelos interceptam duas retas distintas quaisquer, determinando sobre elas segmentos proporcionais.
- 16) O plano que contém uma perpendicular a outro plano é perpendicular a esse segundo plano.
- 32) Toda reta paralela a um plano é paralela a qualquer reta desse plano.

[illegible]

15. (Fuvest-SP)

São dados cinco pontos não coplanares **A**, **B**, **C**, **D** e **E**. Sabe-se que ABCD é um retângulo, $AE \perp AB$ e $AE \perp AD$. Pode-se concluir que são perpendiculares as retas:

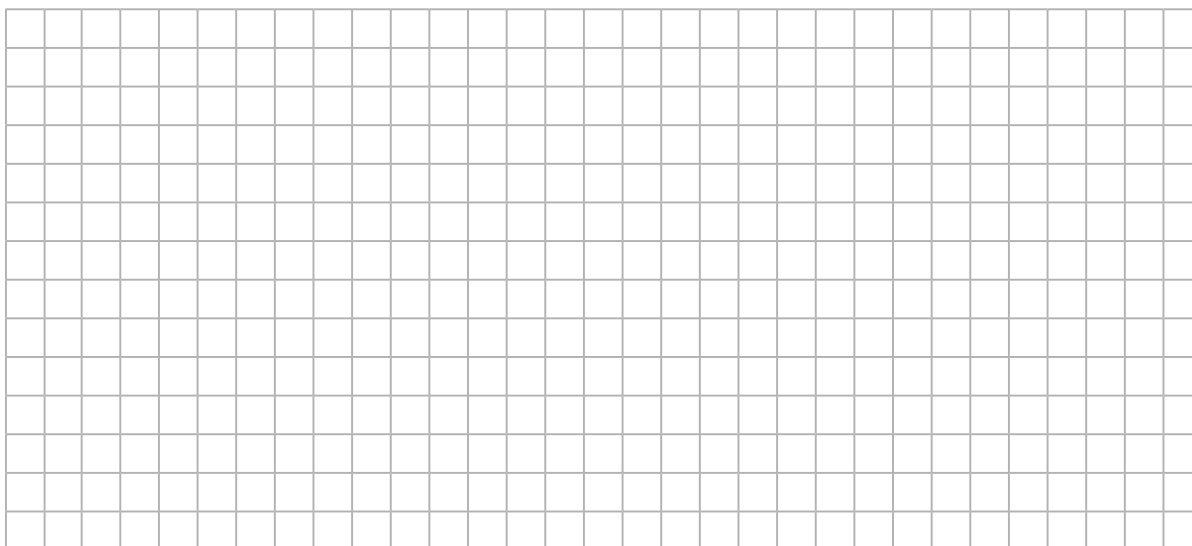
- a) EA e EB
- b) EB e BA
- c) EA e AC
- d) EC e CA
- e) AC e BE



16. (Escola Naval Brasileira-RJ)

Se α é um plano e **P** é um ponto não pertencente a α , quantos planos e quantas retas, respectivamente, contêm **P** e são perpendiculares a α ?

- a) 1 e 1
- b) infinitos e zero
- c) infinitos e 1
- d) zero e 1
- e) infinitos e infinitas



17.

Assinale a proposição falsa.

- a) Por uma reta perpendicular a um plano α , passa pelo menos um plano perpendicular a α .
b) A projeção ortogonal sobre um plano α de um segmento oblíquo a α é menor do que o segmento.
c) Uma reta ortogonal a duas retas concorrentes de um plano α é perpendicular ao plano α .
d) Um plano perpendicular a dois planos concorrentes é perpendicular à intersecção deles.
e) No espaço, duas retas perpendiculares a uma terceira reta são paralelas.

A large grid of graph paper with 20 columns and 10 rows. The grid is composed of small squares, with a slightly larger margin on the left side for writing.

18.

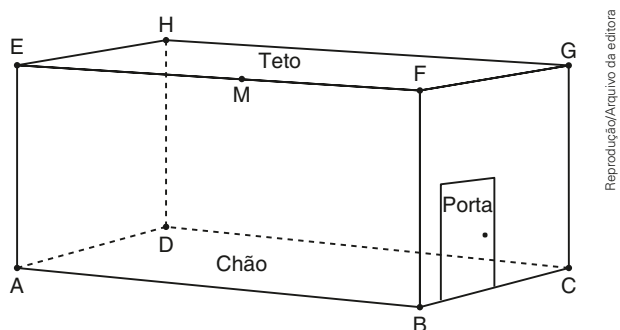
Assinale o que for correto.

- 01) Sejam a reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$, onde π_1 e π_2 são planos, e a reta s paralela a r , de tal forma que $s \notin \pi_1 \cup \pi_2$. Então, toda reta perpendicular a r contida em um desses dois planos é reversa a s .
- 02) Dados um ponto P pertencente a um plano π e uma reta r perpendicular a π , tal que $P \in r$, temos que toda reta contendo P perpendicular a r está em π .
- 04) Dadas duas retas reversas, existe um plano que as contém.
- 08) Considere 6 retas contendo as arestas de um tetraedro regular. Fixada uma das retas, então ela é reversa a apenas uma dessas 6 retas.
- 16) A intersecção de um poliedro convexo com um plano é uma região convexa.

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines forming small squares across the entire page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

19. (Enem)

Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.



Reprodução/Arquivo da editora

A lagartixa parte do ponto **B** e vai até o ponto **A**. A seguir, de **A** ela se desloca, pela parede, até o ponto **M**, que é o ponto médio do segmento EF. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto **M** até o ponto **H**. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

a) —————

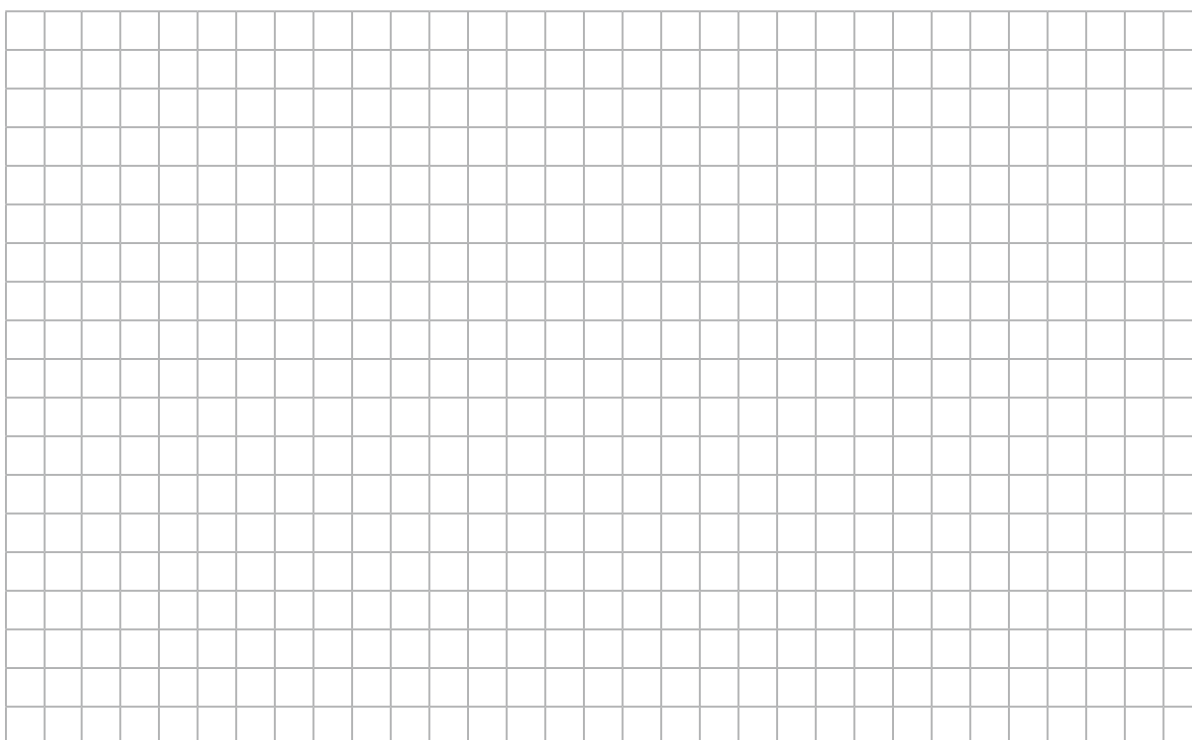
c)

e)

Reprodução/Arquivo da editora

b)

d)



20. (UEM-PR)

Considerando conhecimentos sobre Geometria Espacial, assinale o que for **correto**.

- 01) Se **r** e **s** são duas retas no espaço, com $r \cap s = \emptyset$, então a única possibilidade para **r** e **s** é que sejam paralelas.
- 02) Dados três pontos colineares **A**, **B** e **C**, no espaço, então não existe nenhum plano que contenha esses três pontos.
- 04) Se π , ρ e σ são planos distintos no espaço, então $\pi \cap \rho \cap \sigma$ pode determinar uma única reta, ou um único ponto, ou pode ser vazia.
- 08) Se **r** e **s** são duas retas reversas no espaço, então existe um plano que contém a reta **s** e é paralelo à reta **r**.
- 16) Seja α um plano e $P \notin \alpha$. Para calcular a distância do plano α ao ponto **P** basta escolher um ponto $Q \in \alpha$ qualquer e calcular a distância entre **P** e **Q**.

[illegible]

21. (UFJF-MG)

Sejam r uma reta e β_1 e β_2 dois planos no espaço, considere as seguintes afirmações:

- I. Se $r \cap \beta_1 = \{P_1\}$ e $r \cap \beta_2 = \{P_2\}$, com P_1 e P_2 pontos distintos, então β_1 é paralelo a β_2 .
- II. $r \cap \beta_1 = \emptyset$ e $r \cap \beta_2 = \emptyset$, então β_1 é paralelo a β_2 ou β_1 é coincidente de β_2 .
- III. Se existem dois pontos distintos em $r \cap \beta_1$, então $r \cap \beta_1 = r$.

É **CORRETO** afirmar que:

- a) Apenas I é verdadeira. c) Apenas III é verdadeira. e) Apenas II e III são verdadeiras.
- b) Apenas II é verdadeira. d) Apenas I e II são verdadeiras.

[illegible]

22. (UEM-PR)

Sobre as posições relativas entre pontos, retas e planos no espaço, assinale o que for **correto**.

- 01) Duas retas **r** e **s** são ortogonais quando são reversas e existe uma reta **t**, paralela a **s** e perpendicular a **r**.
- 02) Se um plano α é paralelo a uma reta **r**, então todas as retas do plano α são paralelas a **r**.
- 04) É possível ter retas paralelas contidas em planos que não sejam paralelos.
- 08) Se um plano α intercepta os planos β e γ formando um ângulo de 90° , então os planos β e γ são paralelos.
- 16) Considere as retas **r**, **s** e **t**. Se **r** é reversa a **s** e a reta **s** é concorrente a **t**, então **r** e **t** são reversas.

[illegible]

23. (UEM-PR)

No espaço tridimensional, considere um plano π e as retas \mathbf{r} , \mathbf{s} e \mathbf{t} , distintas duas a duas, de modo que \mathbf{r} e \mathbf{s} são perpendiculares ao plano π e a reta \mathbf{t} não possua qualquer ponto em comum com o plano π e seja concorrente com as retas \mathbf{s} e \mathbf{r} . Sobre a situação descrita, assinale o que for correto.

- 01) As retas **r** e **s** são paralelas.
- 02) As retas **s** e **t** são reversas.
- 04) A reta **t** é paralela ao plano π .
- 08) A reta **s** é perpendicular a qualquer reta do plano π concorrente a ela.
- 16) Se **A** e **B** são pontos distintos de **r**, e **P** e **Q** são pontos distintos de **s**, então os triângulos APQ e BPQ possuem a mesma área.

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines forming small squares across the entire page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Poliedros

Reveja o que aprendeu

Você deve ser capaz de:

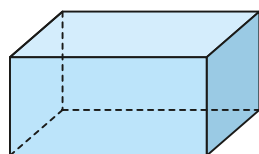
- ▶ Associar objetos do dia a dia aos sólidos geométricos.
- ▶ Reconhecer faces, arestas e vértices de um poliedro.
- ▶ Classificar um poliedro em convexo e não convexo.
- ▶ Calcular áreas e volumes de prismas e pirâmides.
- ▶ Utilizar a relação de Euler.
- ▶ Identificar os poliedros de Platão.
- ▶ Identificar e classificar prismas.
- ▶ Reconhecer as unidades de medida de volume.
- ▶ Identificar e classificar pirâmides.
- ▶ Reconhecer um tronco de pirâmide.

Sólidos geométricos

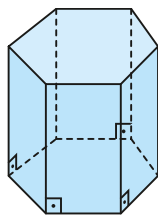
As figuras tridimensionais idealizadas pela Geometria são chamadas **sólidos geométricos**. Os sólidos geométricos mais simples podem ser de dois tipos:

- **Poliedros:** são sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos (triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc.). A palavra *poliedro* vem do grego antigo, em que *poli* significa “vários”, e *edro*, “face”.

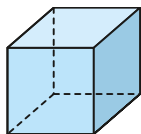
Veja alguns exemplos de poliedros:



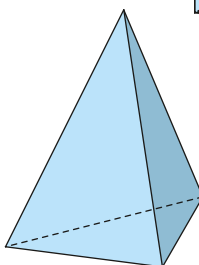
paralelepípedo



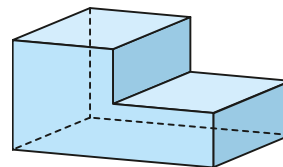
prisma hexagonal



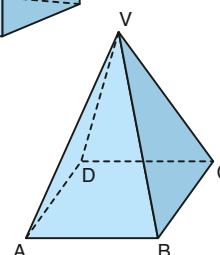
cubo



pirâmide triangular



poliedro



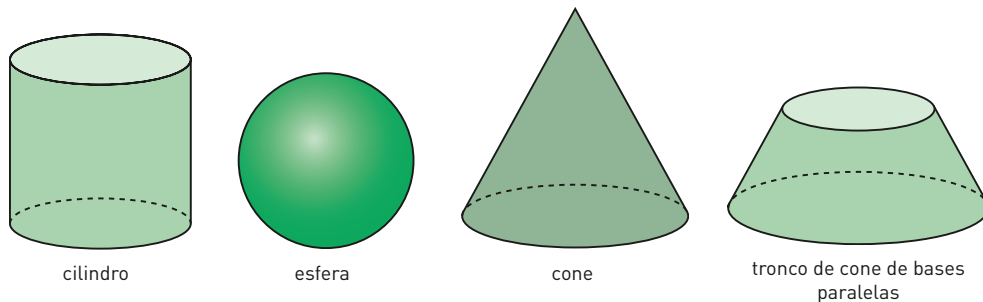
pirâmide quadrangular

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Em um poliedro podemos distinguir:

- **faces:** são polígonos que formam a superfície do poliedro. Observe, por exemplo, que o prisma hexagonal apresenta 8 faces: 2 hexágonos e 6 quadriláteros (retângulos).
- **arestas:** são os lados dos polígonos que constituem as faces do poliedro. Cada aresta é um segmento de reta determinado pela interseção de duas faces. Observe, por exemplo, que a pirâmide triangular possui 6 arestas.

- **vértices:** são as extremidades das arestas. Cada vértice é a interseção de duas ou mais arestas. Observe, por exemplo, que, na pirâmide quadrangular, os 5 vértices são: **A, B, C, D, V**. No vértice **A** concorrem 3 arestas e o vértice **V** é o “ponto de encontro” das 4 arestas.
- **Corpos redondos:** são sólidos geométricos cujas superfícies têm ao menos uma parte que é arredondada (não plana). Veja os exemplos:



Ilustrações: Banco de Imagens/Arquivo da editora

Poliedros convexos e não convexos

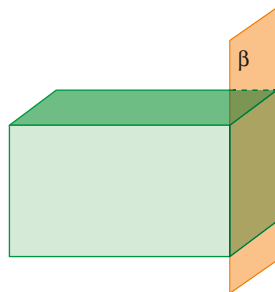


Figura 1

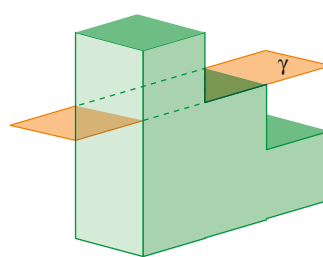


Figura 2

Banco de Imagens/Arquivo da editora

No poliedro da figura 1, qualquer plano que contenha uma face deixa as demais faces no mesmo semiespaço. Veja, por exemplo, o plano β . Poliedros que satisfazem essa condição são chamados de **poliedros convexos**.

No poliedro da figura 2, existe pelo menos um plano que contém uma face mas deixa as demais faces em dois semiespaços opostos. Veja, por exemplo, o plano γ . Por isso, esse poliedro é denominado **poliedro não convexo**.

Relação de Euler

Pode-se mostrar que para todo **poliedro convexo** vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

em que **V**, **A** e **F** são, respectivamente, a quantidade de vértices, arestas e faces do poliedro. Um poliedro **não convexo** pode ou não satisfazer a relação de Euler.

Poliedros de Platão

Um poliedro é chamado poliedro de Platão se satisfaz três condições:

- 1ª) todas as faces têm o mesmo número **n** de arestas.
- 2ª) todos os vértices são pontos em que concorre o mesmo número **m** de arestas.
- 3ª) o poliedro é euleriano, isto é, satisfaz a relação de Euler.

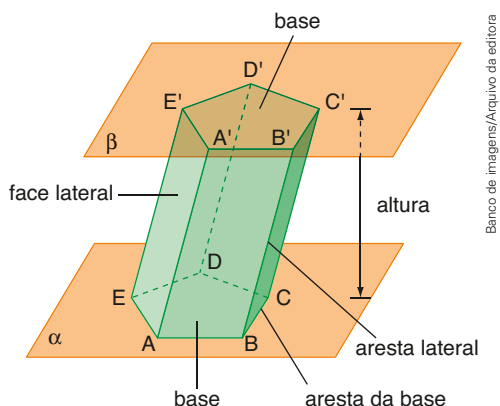


Prismas

Os sólidos geométricos com as seguintes características são chamados **prismas**:

- suas superfícies são constituídas de polígonos;
- têm pelo menos dois polígonos congruentes contidos em planos paralelos;
- os outros polígonos são paralelogramos.

Elementos e classificação

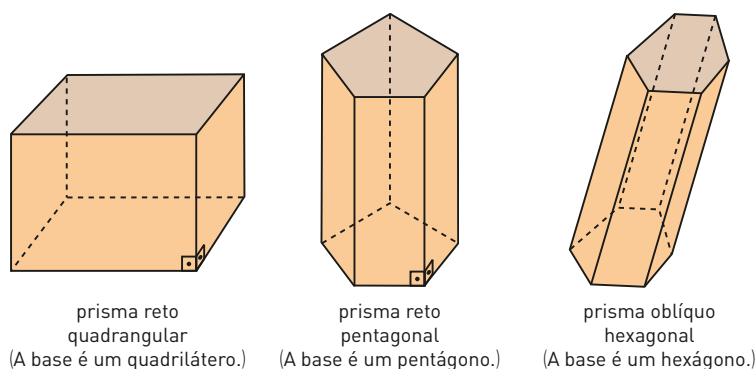


Observe que:

- os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$, chamados **bases** do prisma, são congruentes e estão contidos em planos paralelos entre si (α e β);
- os paralelogramos $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'D'D$, $DD'E'E$ e $EE'A'A$ são chamados **faces laterais**;
- a distância entre os planos α e β , que contêm as bases, é a **altura** do prisma.

Os nomes dados aos prismas referem-se ao número de lados de cada polígono da base. Quanto à inclinação das arestas laterais em relação aos planos das bases, os prismas são classificados em:

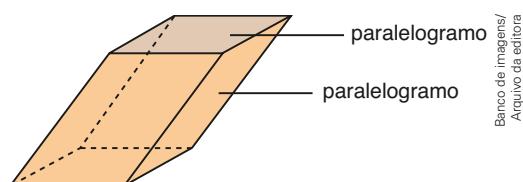
- **prisma oblíquo**: se as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases;
- **prisma reto**: se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Observe que, nesse caso, as faces laterais são retângulos.



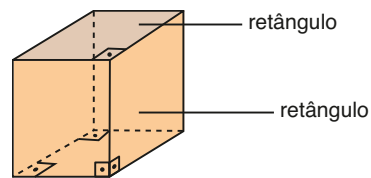
Se as bases de um prisma reto são polígonos regulares, ele é chamado **prisma regular**.

Paralelepípedo

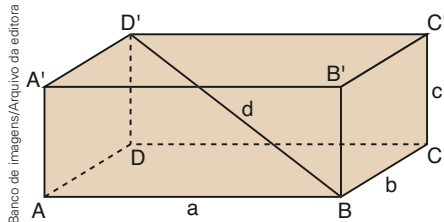
Todo prisma cujas bases são paralelogramos é chamado **paralelepípedo**. Sua superfície total é a reunião de seis paralelogramos.



Paralelepípedo retângulo ou **reto-retângulo**: é um paralelepípedo cuja superfície total é a reunião de seis retângulos.



Banco de imagens/
Arquivo da editora



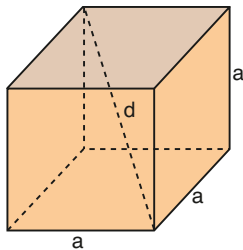
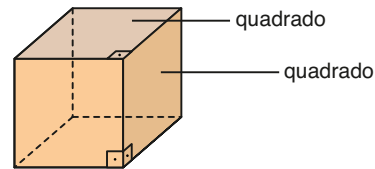
Banco de imagens/
Arquivo da editora

$$\text{Área total: } A_t = 2(ab + ac + bc)$$

$$\text{Diagonal: } d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\text{Volume: } V = a \cdot b \cdot c$$

Cubo: é um paralelepípedo cuja superfície total é a reunião de seis quadrados. Note que o cubo é um paralelepípedo retângulo em que todas as arestas são congruentes.



$$\text{Área total: } A_t = 6a^2$$

$$\text{Diagonal: } d = a\sqrt{3}$$

$$\text{Volume: } V = a^3$$

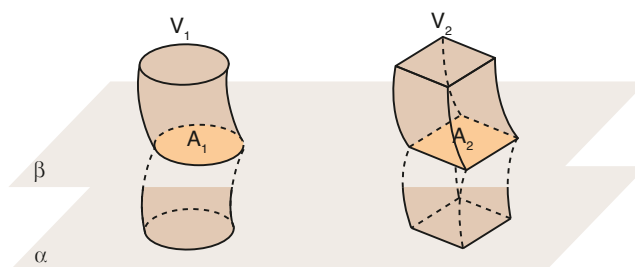
Ilustrações: Banco de imagens/
Arquivo da editora

Unidades de medida de volume

- 1 L = 1000 mL = 1 dm³
- 1 m³ = 1000 L
- 1 cm³ = 1 mL

Princípio de Cavalieri

Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).



Banco de imagens/
Arquivo da editora

$$A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$$

Por meio desse princípio, é possível provar que o volume (**V**) de qualquer prisma é:

$$V = A_b \cdot h$$

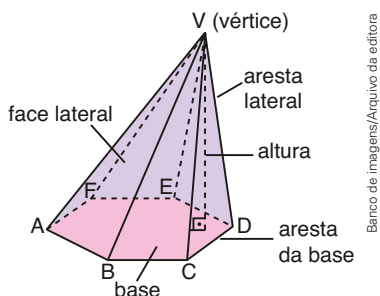
A_b: área da base do prisma

h: altura do prisma

Pirâmides

Dados um polígono convexo **P** contido em um plano α e um ponto **V** não pertencente a α , tracemos todos os possíveis segmentos de reta que têm uma extremidade em **V** e a outra em um ponto do polígono. A reunião desses segmentos é um sólido chamado **pirâmide**.

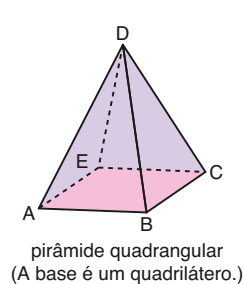
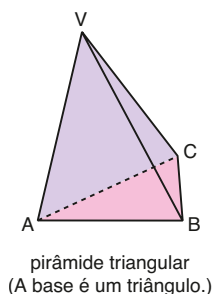
Elementos e classificação



Banco de imagens/Arquivo da editora

- O ponto **V** é o **vértice** da pirâmide.
- O polígono ABCDEF é a **base** da pirâmide.
- Os triângulos VAB, VBC, VCD, VDE, VEF e VFA são as **faces laterais**.
- A **altura** da pirâmide é a distância de **V** ao plano da base.

As pirâmides podem ser classificadas de acordo com o polígono da base. Por exemplo:



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

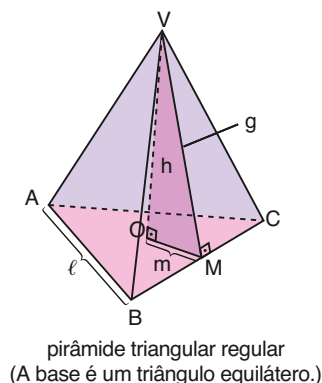
Pirâmide regular

A **pirâmide regular** é aquela cuja base é um polígono regular e cujas arestas laterais são congruentes entre si.

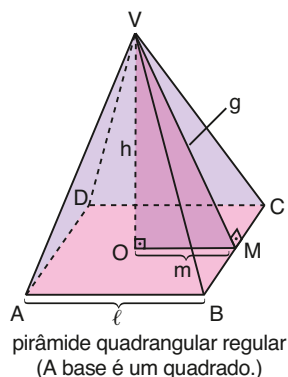
Uma pirâmide regular tem as seguintes características:

- a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base;
- as faces laterais são triângulos isósceles congruentes;
- o apótema da pirâmide regular, que indicamos por **g**, é a altura de uma face lateral, relativa à aresta da base.

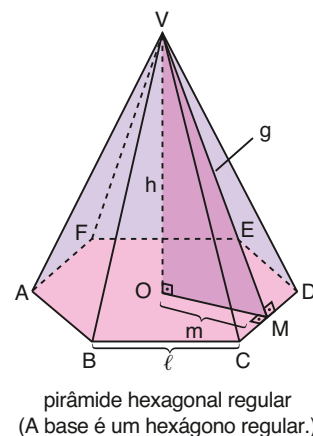
Observe as pirâmides seguintes:



$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6} \rightarrow \text{apótema do triângulo equilátero}$$



$$m = \frac{\ell}{2} \rightarrow \text{apótema do quadrado}$$



$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \rightarrow \text{apótema do hexágono}$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Em qualquer **pirâmide regular** vale a relação:

$$g^2 = h^2 + m^2$$

g: apótema da pirâmide

h: altura da pirâmide

m: apótema da base

Volume

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

O volume de uma pirâmide qualquer é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela medida da altura.

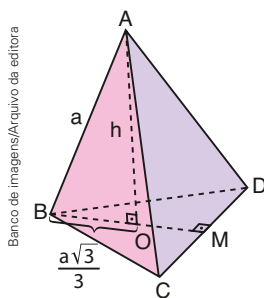
Tetraedro regular

Chama-se **tetraedro** toda pirâmide de base triangular.

Se as quatro faces de um tetraedro são triângulos equiláteros congruentes, ele é chamado **tetraedro regular**.

Observe que, em um tetraedro regular:

- as seis arestas são congruentes, ou seja, $AB = AC = AD = BC = CD = DB$;
- qualquer face – ABC, ACD, ABD ou BCD – pode ser considerada como base, já que são triângulos equiláteros congruentes.



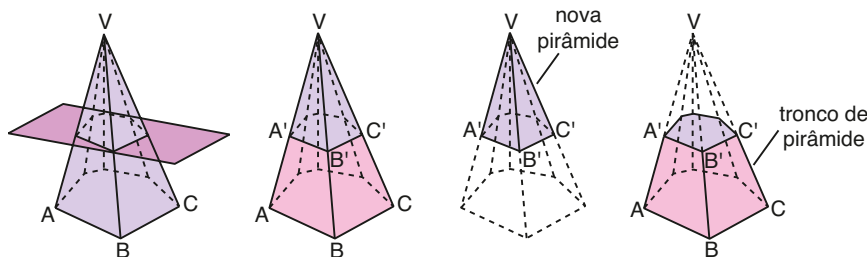
$$\text{Área total: } A_t = 4 \cdot A_{\triangle \text{ equilátero}} = a^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{Altura: } h = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3}$$

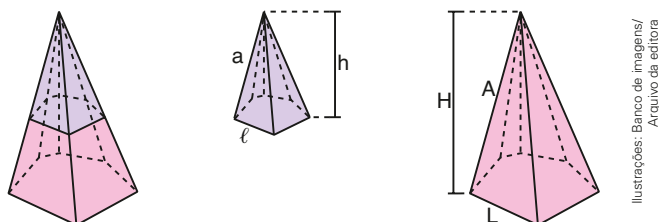
Note que $OB = \frac{2}{3} \cdot BM$.

Pirâmides semelhantes

Quando seccionamos uma pirâmide por um plano paralelo à base de modo que este plano não contenha o vértice da pirâmide, ela fica dividida em dois sólidos.



A nova pirâmide é uma “cópia reduzida” da pirâmide original. As duas pirâmides são semelhantes.



A razão **k** entre dois elementos lineares homólogos — arestas ou alturas — é chamada **razão de semelhança** entre as pirâmides.

Considerando duas pirâmides regulares semelhantes, temos as seguintes propriedades:

- razão entre elementos lineares:

$$\frac{a}{A} = \frac{\ell}{L} = \frac{h}{H} = k$$

- razão entre áreas:

$$\frac{A_b}{A_B} = k^2; \frac{A_\ell}{A_L} = k^2 \text{ e } \frac{A_t}{A_T} = k^2$$

- razão entre volumes:

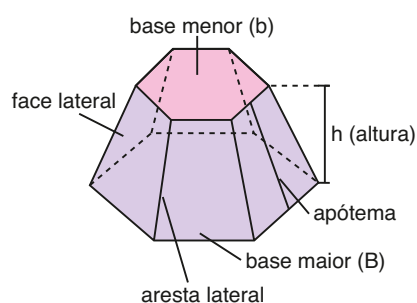
$$\frac{V}{V} = k^3$$

Tronco de pirâmide regular

O tronco de bases paralelas obtido de uma pirâmide regular é denominado **tronco de pirâmide regular**.

Em um tronco de pirâmide regular:

- as **arestas laterais** são congruentes entre si;
- as **bases** são polígonos regulares semelhantes;
- as **faces laterais** são trapézios isósceles congruentes entre si;
- a altura de qualquer face lateral chama-se **apótema do tronco**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$A_t = A_B + A_b + A_r$$

Volume

O volume de um tronco de pirâmide pode ser calculado por meio da diferença entre o volume da pirâmide original e o volume da pirâmide obtida a partir da seção.

Pode-se também usar a fórmula:

$$V = \frac{h}{3} \cdot [A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b]$$

Aplique o que aprendeu

Exercícios resolvidos

1. Um poliedro convexo tem 12 faces pentagonais. Quantas arestas e vértices ele possui?

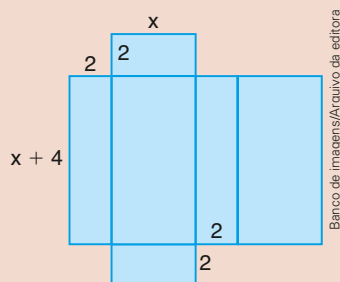
Solução:

Como o pentágono tem 5 lados, nas 12 faces teríamos $12 \cdot 5 = 60$ arestas. Nesse cálculo, cada aresta, por ser comum a duas faces, foi contada duas vezes.

$$\text{Daí: } A = \frac{60}{2} = 30.$$

Como o poliedro é convexo, temos $V - A + F = 2 \Rightarrow V - 30 + 12 = 2 \Rightarrow V = 20$

2. Na figura, tem-se a planificação da superfície de um paralelepípedo retângulo cuja área total é 112 cm^2 :



Determine a área total de um cubo equivalente a esse paralelepípedo.

Solução:

Sólidos equivalentes são sólidos que têm mesmo volume.

A área total dessa planificação é:

$$A_t = 112 \Rightarrow 2 \cdot [2 \cdot x + 2 \cdot (x + 4) + x \cdot (x + 4)] = 112 \Rightarrow x^2 + 8x = 48 \Rightarrow x = 4$$

As dimensões do paralelepípedo são: 2 cm, 4 cm e 8 cm.

$$V_{\text{paral.}} = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^3$$

$$C_{\text{cubo}} = a^3 = 64 \Rightarrow a = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ cm}$$

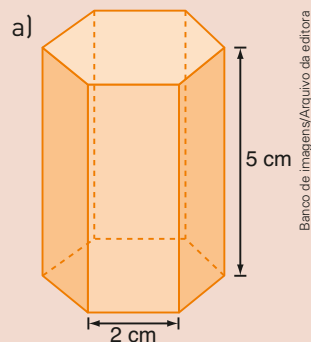
A área de uma face do cubo é $4^2 = 16 \text{ cm}^2$; a área total do cubo é $6 \cdot 16 = 96 \text{ cm}^2$.

3. Calcule a área total, a área lateral e o volume de um prisma:

- a) hexagonal regular, cuja altura mede 5 cm e cuja aresta da base mede 2 cm;

- b) reto triangular de altura 7 cm, cuja base é um triângulo retângulo de hipotenusa com medida 20 cm e um dos catetos tem medida 12 cm.

Solução:



A_ℓ : é igual à soma das áreas de seis retângulos congruentes:

$$A_\ell = 6 \cdot (2 \cdot 5) = 60 \text{ cm}^2$$

$$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell$$

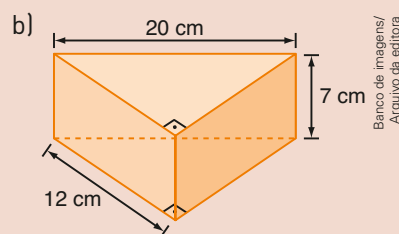
A_b : área de um hexágono regular (que é a reunião de 6 triângulos equiláteros)

$$A_b = 6 \cdot \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Daí:

$$A_t = 2 \cdot 6\sqrt{3} + 60 = 12(\sqrt{3} + 5) \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 6\sqrt{3} \cdot 5 = 30\sqrt{3} \text{ cm}^3$$



O outro cateto da base mede $\sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16 \text{ cm}$.

A área lateral é a soma das áreas de três retângulos, todos com altura 7 cm e bases 16 cm, 12 cm e 20 cm:

$$A_\ell = 16 \cdot 7 + 12 \cdot 7 + 20 \cdot 7 = 336 \text{ cm}^2$$

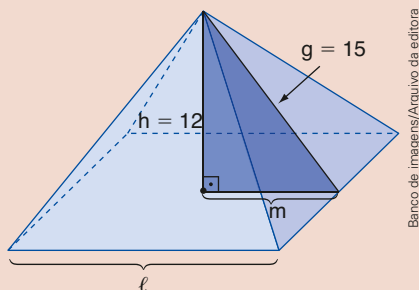
$$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell$$

$$A_t = 2 \cdot 96 + 336 = 528 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 96 \cdot 7 = 672 \text{ cm}^3$$

4. Em uma pirâmide regular quadrangular, a altura e o apótema medem, respectivamente, 12 cm e 15 cm. Determine a área total e o volume dessa pirâmide.

Solução:



$$g^2 = h^2 + m^2$$

$$15^2 = 12^2 + m^2 \Rightarrow m^2 = 81 \Rightarrow m = 9 \text{ cm}$$

Como $m = \frac{\ell}{2}$, segue que $\ell = 2 \cdot 9 = 18 \text{ cm}$.

Daí:

$$A_b = \ell^2 = 18^2 = 324 \text{ cm}^2$$

$$A_\ell = 4 \cdot A_{\Delta \text{ sombreado}}$$

$$A_\ell = 4 \cdot \left(\frac{\ell \cdot g}{2} \right) = 4 \cdot \left(\frac{18 \cdot 15}{2} \right) = 540 \text{ cm}^2$$

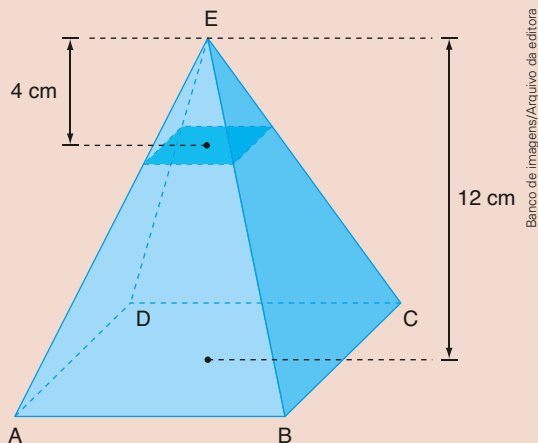
$$A_t = A_b + A_\ell$$

$$A_t = 324 + 540 = 864 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{324 \cdot 12}{3} = 1296 \text{ cm}^3$$

5. Um plano paralelo à base da pirâmide EABCD intersecta a pirâmide a 4 cm de E.

Se a altura da pirâmide mede 12 cm, determine a razão entre o volume do tronco e o volume da pirâmide obtida pela seção.



Solução:

$$k = \frac{h}{H} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow k^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{v}{V} = \frac{1}{27} \Rightarrow \Rightarrow V = 27 \cdot v$$

$$\text{Como } v + v_{\text{tronco}} = V \Rightarrow v_{\text{tronco}} = V - v = 27v - v = = 26v$$

$$\text{Daí, } \frac{v_{\text{tronco}}}{v} = 26.$$

Questões

1. (IFSC)

Uma caixa de leite de determinada marca possui 22 cm de altura e perímetro da base medindo 28 cm. Sabendo-se que a base da caixa é formada por um quadrado, calcule a quantidade de papel necessária, em cm^2 , para confeccionar a caixa, desprezando-se as dobras.

Assinale a alternativa CORRETA.

a) 600

b) 665

c) 714

d) 564

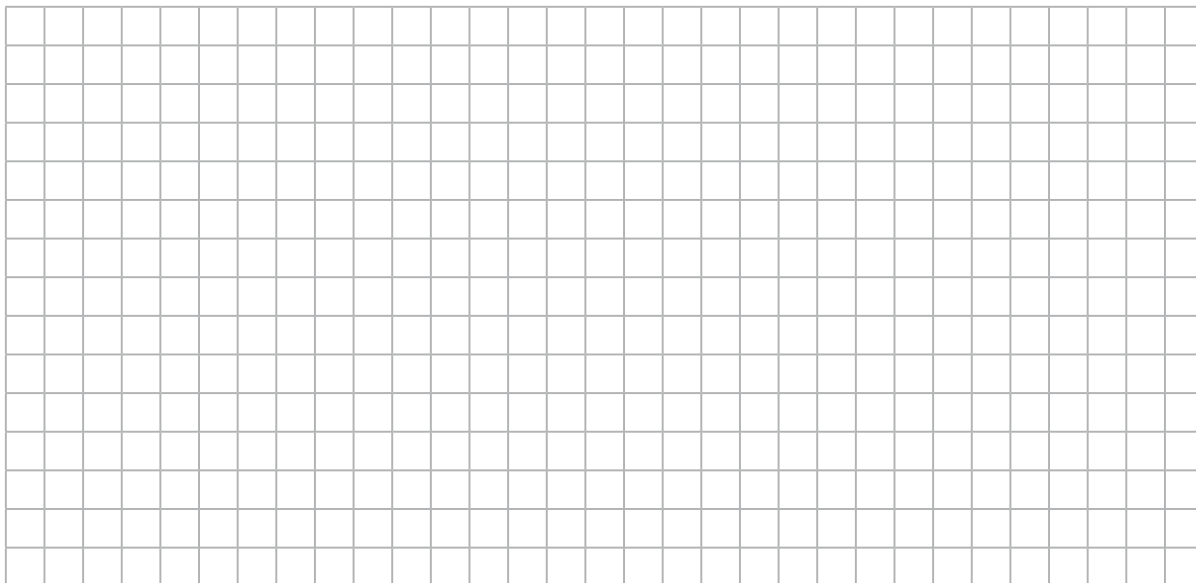
e) 832



2. (ITA-SP)

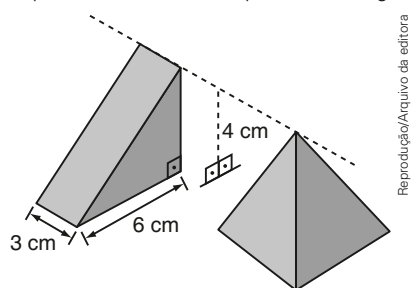
Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm^3 :

- a) 10. b) 12. c) 15. d) 20. e) 30.



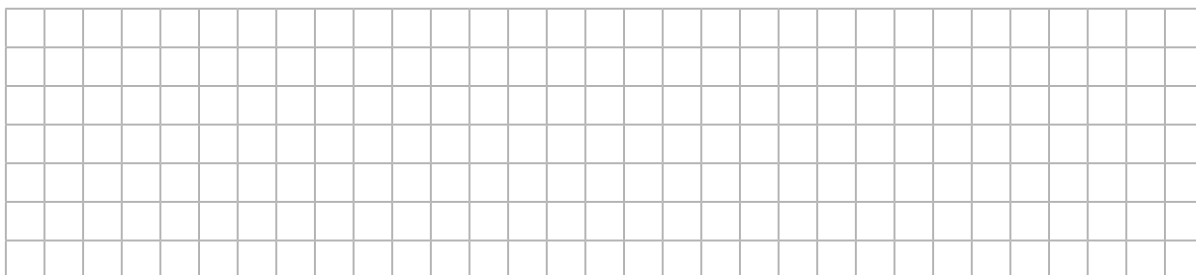
3. (Famerp-SP)

A figura indica um prisma reto triangular e uma pirâmide regular de base quadrada. A altura desses sólidos, em relação ao plano em que ambos estão apoiados, é igual a 4 cm, como indicam as figuras.



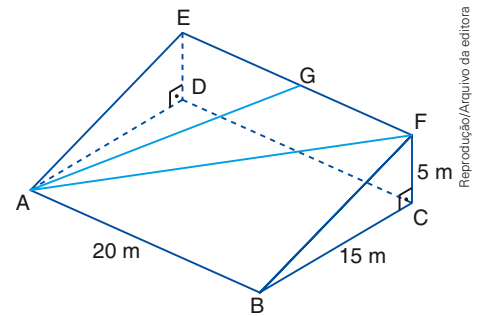
Se os sólidos possuírem o mesmo volume, a aresta da base da pirâmide, em centímetros, será igual a

- a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$



4. (Unesp-SP)

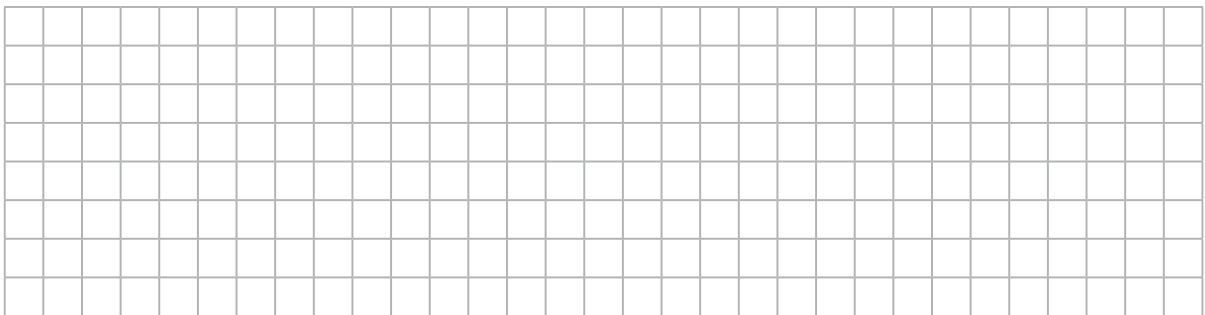
Uma rampa, com a forma de prisma reto, possui triângulos retângulos ADE e BCF nas bases do prisma, e retângulos nas demais faces. Sabe-se que $AB = 20$ m, $BC = 15$ m e $CF = 5$ m. Sobre a face ABFE da rampa estão marcados os caminhos retilíneos \overline{AE} , \overline{AG} e \overline{AF} , com **G** sendo um ponto de \overline{EF} , como mostra a figura.



- a) Calcule a medida do segmento \overline{AE} . Em seguida, assuma que a inclinação de subida (razão entre vertical e horizontal) pelo caminho \overline{AG} seja igual a $\frac{1}{4}$ e calcule a medida do segmento \overline{EG} .
- b) Considere os seguintes dados para responder a este item:

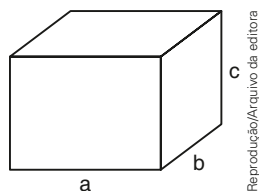
α	7,1°	11,3°	14,0°	18,4°
$\text{tg } \alpha$	0,125	0,200	0,250	0,333

Comparando-se o caminho \overline{AF} com o caminho \overline{AE} , nota-se que o ângulo de inclinação de \overline{AF} e de \overline{AE} , em relação ao plano que contém o retângulo ABCD, aumentou. Calcule a diferença aproximada, em graus, desses ângulos.



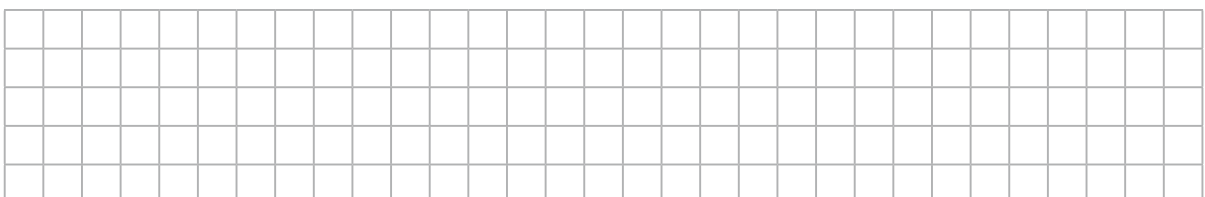
5. (IFPE)

Podemos calcular o volume de uma caixa retangular, como na figura abaixo, de dimensões **a**, **b** e **c** fazendo $V = a \cdot b \cdot c$.



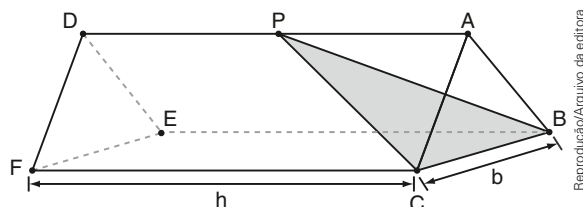
Sabendo que $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$, calcule, em litros, o volume de água necessária para encher um tanque retangular de largura $a = 80$ cm, profundidade $b = 40$ cm e altura $c = 60$ cm.

- a) 1920 L. b) 192 L. c) 19,2 L. d) 19200 L e) 192000 L



6. (Uerj)

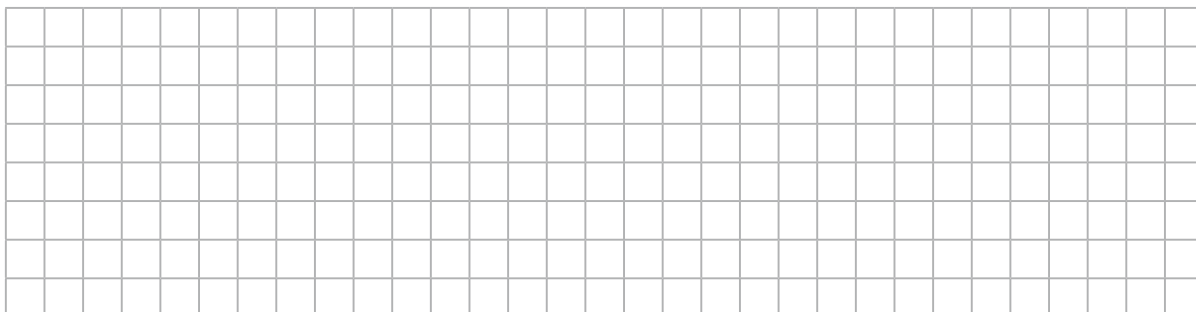
A imagem a seguir ilustra um prisma triangular regular. Sua aresta da base mede **b** e sua aresta lateral mede **h**.



Esse prisma é seccionado por um plano BCP, de modo que o volume da pirâmide ABCP seja exatamente $\frac{1}{9}$ do volume total do prisma.

Logo, a medida de \overline{AP} é igual a:

- a) $\frac{h}{9}$ b) $\frac{h}{3}$ c) $\frac{2h}{3}$ d) $\frac{5h}{6}$

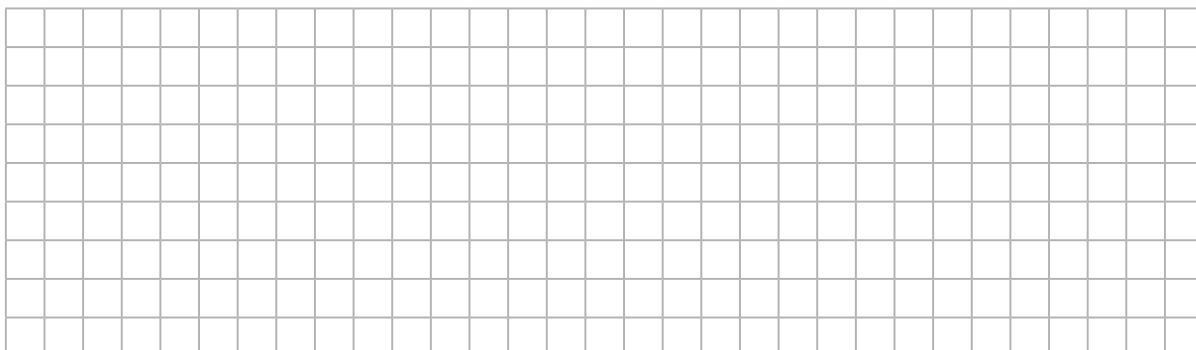


7. (Enem)

O hábito cristalino é um termo utilizado por mineralogistas para descrever a aparência típica de um cristal em termos de tamanho e forma. A granada é um mineral cujo hábito cristalino é um poliedro com 30 arestas e 20 vértices. Um mineralogista construiu um modelo ilustrativo de um cristal de granada pela junção dos polígonos correspondentes às faces.

Supondo que o poliedro ilustrativo de um cristal de granada é convexo, então a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal é igual a

- a) 10. d) 42.
b) 12. e) 50.
c) 25.

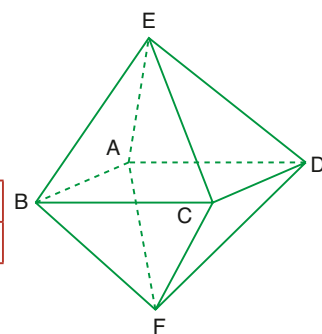


8. (Uerj)

A figura ao lado representa um objeto com a forma de um octaedro. Admita que suas arestas, feitas de arames fixados nos vértices, possuem os comprimentos indicados na tabela.

Arestas	AB	AD	AE	AF	BC	BE	BF	CD	CE	CF	DE	DF
Comprimento (cm)	10	11	12	10	11	12	11	12	11	10	12	12

Calcule o menor comprimento do arame, em centímetros, necessário para construir esse objeto.



Reprodução/Arquivo da editora

[illegible]

9. (Ucpel-RS)

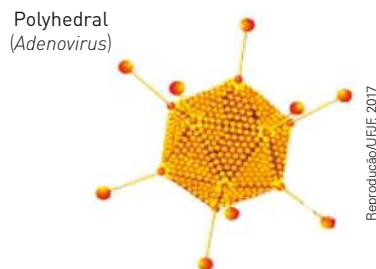
A área de um quadrado de lado x cm aumenta em 28 cm^2 se o seu lado for aumentado em 2 cm. Considerando que a medida da aresta de um tetraedro regular é igual ao lado x deste quadrado, então a altura h deste tetraedro vale

- a) $2\sqrt{6}$ cm b) $2\sqrt{3}$ cm c) $2\sqrt{2}$ cm d) $3\sqrt{2}$ cm e) $4\sqrt{6}$ cm

[illegible]

10. (UFJF-MG)

Observe, abaixo, uma imagem desse vírus que tem a forma de um sólido geométrico.



Disponível em: <<http://www.thinkstockphotos.com/image/stockillustration-shapes-of-viruses/507687357>>. Acesso em: 14 set. 2016.

Qual é a planificação do sólido representado por esse vírus?

-

Ilustrações: Reprodução/
Arquivo da editora

[illegible]

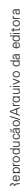
11.

Ao olharmos para o interior do caleidoscópio através do furo da base opaca, podemos ver as imagens obtidas pelas inúmeras reflexões dos objetos nos espelhos.



desenho 1

Desejando construir seu caleidoscópio, João o fez com papel cartão escuro (desenho 2).



desenho 2

O número de imagens distintas (**N**) que se formam de um objeto colocado entre dois espelhos pode ser calculado pela relação

$$N = \frac{360^\circ}{\left(\text{medidas do ângulo entre as superfícies refletoras} \right)} - 1$$

O número máximo de imagens distintas do botão, que podem ser vistas por João é

- a) uma. b) duas. c) três. d) cinco. e) seis.

[illegible]

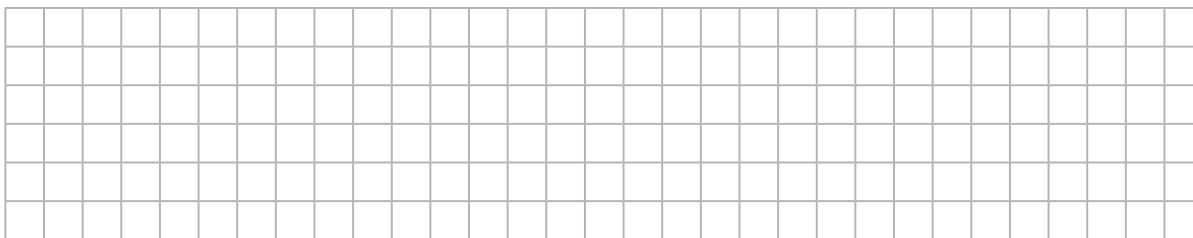
12. (FGV-RJ)

Cada aresta de um cubo é pintada de verde ou de amarelo.

Após a pintura, em cada face desse cubo há pelo menos uma aresta pintada de verde.

O número máximo de arestas desse cubo pintadas de amarelo é:

- a) 6 b) 9 c) 8 d) 10 e) 4

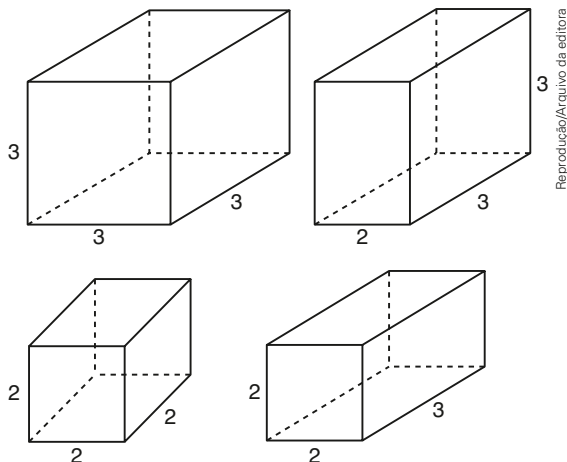
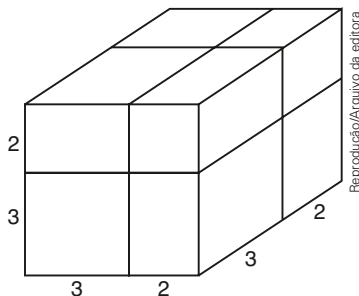


13. (UFJF-MG)

Um quebra-cabeça tem 8 peças, sendo:

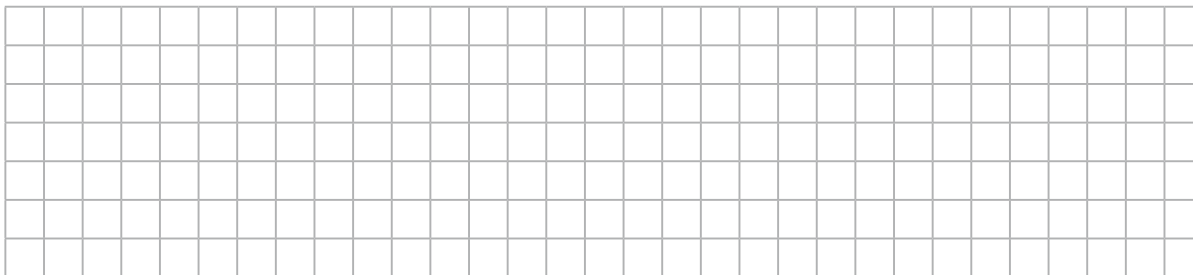
- 01 peça cúbica com 2 cm de lado
- 01 peça cúbica com 3 cm de lado
- 03 peças em forma de paralelepípedo retangular com medidas 2 cm \times 2 cm \times 3 cm
- 03 peças em forma de paralelepípedo retangular com medidas 3 cm \times 3 cm \times 2 cm

Além disso, o quebra-cabeça montado é um cubo 5 \times 5 \times 5 conforme ilustração abaixo.



Se pintarmos todas as faces do cubo montado, após desmontá-lo podemos afirmar que as peças:

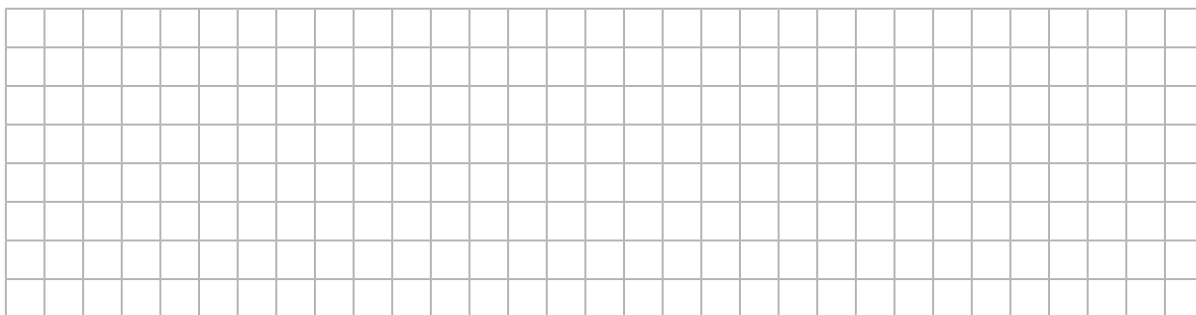
- a) cúbicas totalizam 5 faces não pintadas.
 b) cúbicas totalizam 5 faces pintadas.
 c) 2 \times 2 \times 3 totalizam 16 cm² de área de faces não pintadas.
 d) 3 \times 3 \times 2 totalizam 63 cm² de área de faces não pintadas.
 e) não cúbicas totalizam 15 faces não pintadas.



14. (UEM-PR)

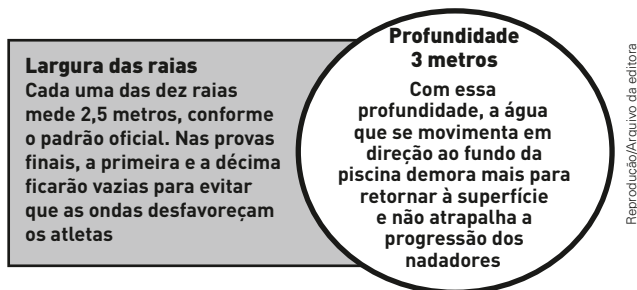
Sejam: Q_1 um quadrado de lado ℓ e C_1 a circunferência inscrita em Q_1 ; Q_2 um quadrado inscrito em C_1 e C_2 a circunferência inscrita em Q_2 ; Q_3 um quadrado inscrito em C_2 e C_3 a circunferência inscrita em Q_3 . Assinale o que for **correto**.

- 01) A área entre Q_1 e Q_3 é $\frac{3}{2}$ da área de Q_2 .
- 02) As medidas dos lados dos quadrados Q_1 , Q_2 e Q_3 são três termos consecutivos de alguma progressão geométrica decrescente.
- 04) As medidas dos raios das circunferências C_1 , C_2 e C_3 são três termos consecutivos da progressão geométrica de primeiro termo $\frac{\ell}{2}$ e razão $\sqrt{2}$.
- 08) A área de C_2 é o dobro da área de C_3 .
- 16) A diagonal de um cubo que tem Q_3 como face mede $\ell \cdot \sin \frac{\pi}{3}$.



15. (Enem)

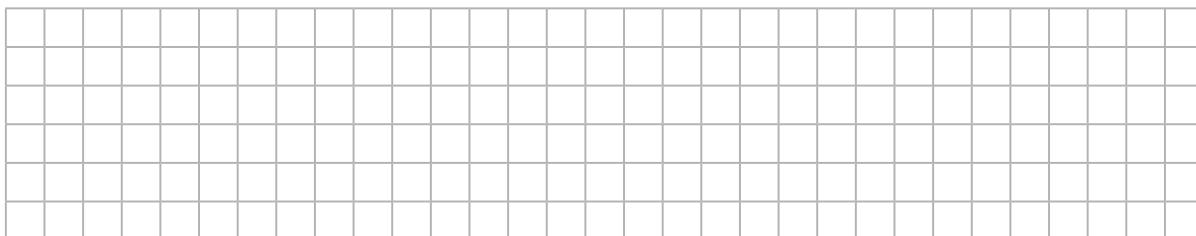
Para a Olimpíada de 2012, a piscina principal do Centro Aquático de Londres, medindo 50 metros de comprimento, foi remodelada para ajudar os atletas a melhorar suas marcas. Observe duas das melhorias:



Veja, n. 2278, jul. 2012 (adaptado).

A capacidade da piscina em destaque, em metro cúbico, é igual a

- a) 3 750. b) 1 500. c) 1 250. d) 375. e) 150.



16. (EBMSP-BA)

Uma pesquisa realizada durante 75 anos nos Estados Unidos mostrou que não é uma carreira de sucesso, a fama ou os bens adquiridos durante a vida a fórmula da felicidade para uma jornada tranquila. Segundo o estudo, as pessoas que participam de grupos sociais, se relacionam bem com a família, com os amigos e com a comunidade são mais felizes, fisicamente mais saudáveis e vivem mais tempo do que as pessoas que têm menos relações sociais.

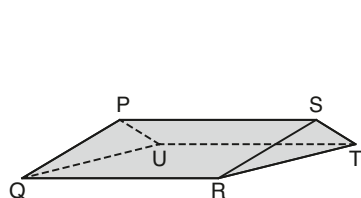


Figura 1

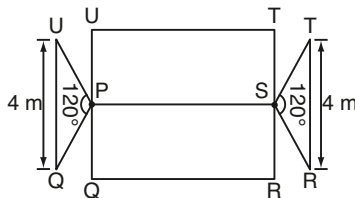
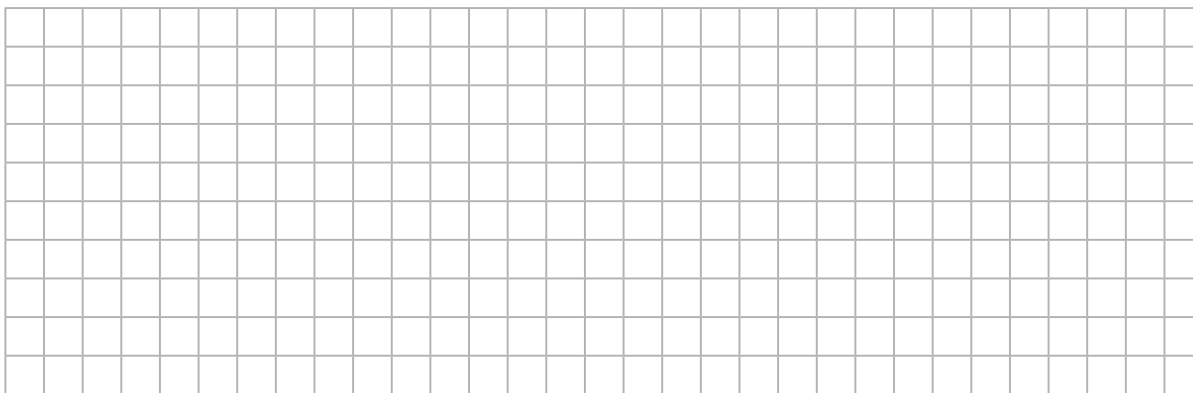


Figura 2

Reprodução/Arquivo da editora

Uma pessoa para realizar um evento ao ar livre, com familiares e amigos, está planejando instalar um toldo cuja cobertura tem a forma do sólido, de volume igual a $\frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ m}^3$, representado na figura 1.

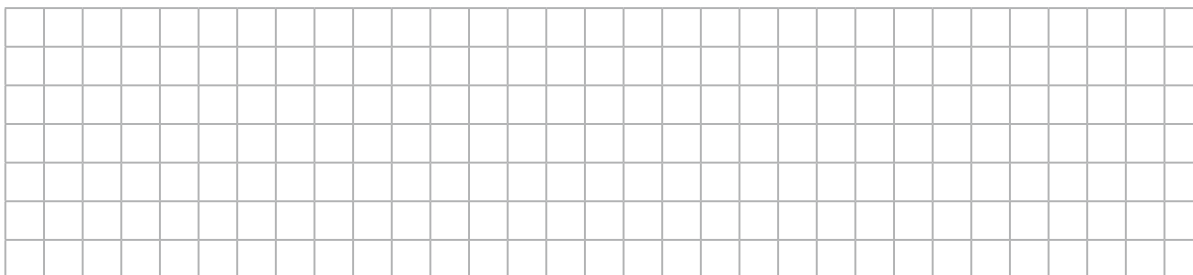
Com base nessa informação, calcule a área total da planificação dessa cobertura, constituída por dois retângulos congruentes e dois triângulos, representada na figura 2.



17. (UEPG-PR)

Uma caixa **A** tem a forma de um prisma regular triangular e uma caixa **B** tem a forma de um prisma hexagonal regular. Se o lado da base da caixa **A** tem o dobro da medida do lado da base da caixa **B**, assinale o que for correto.

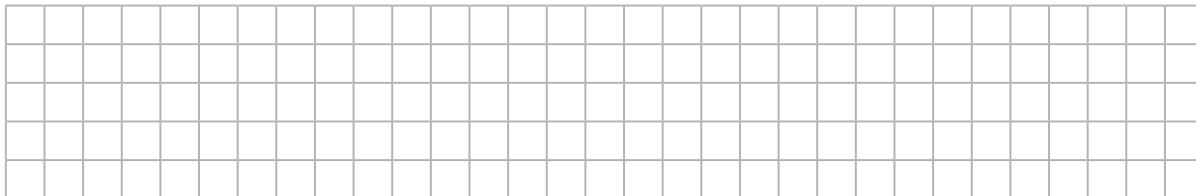
- 01) A razão entre as áreas da base de **A** e **B** é $\frac{2}{3}$.
- 02) Se a altura de **A** for a metade da altura de **B**, então, o volume de **B** é igual ao triplo do volume de **A**.
- 04) Para que os volumes sejam iguais, a altura de **B** deve ser o dobro da altura de **A**.
- 08) Se as alturas das caixas são iguais, a área lateral de **B** é o dobro da de **A**.



18. (Unigranrio)

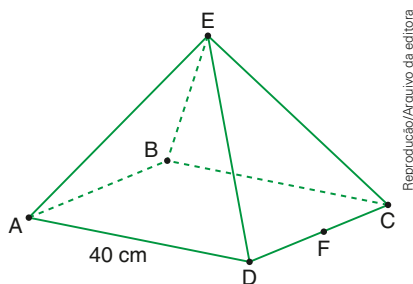
Um prisma reto tem como base um hexágono regular, que pode ser inscrito em uma circunferência de raio 2 m. Se a altura desse prisma é igual ao dobro do lado do hexágono regular que forma a sua base, então, pode-se afirmar que seu volume, em m^3 , é igual a:

- a) $4\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{3}$ c) $24\sqrt{3}$ d) $30\sqrt{3}$ e) $48\sqrt{3}$



19. (UFU-MG)

Um *designer* de jogos virtuais está simulando alguns deslocamentos associados com uma pirâmide quadrangular regular, em que o lado do quadrado da base mede 40 cm.



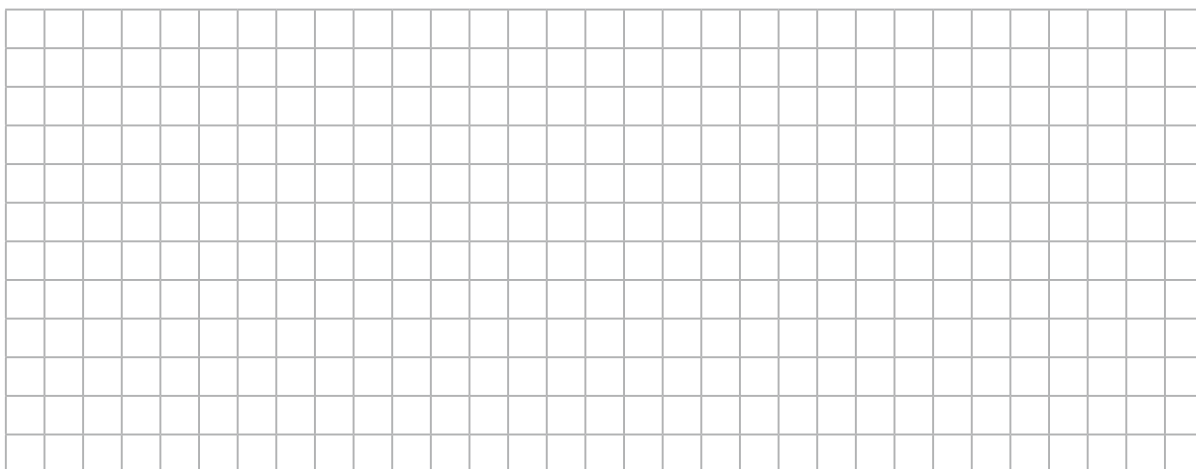
(Figura ilustrativa e sem escalas)

Ele simula a trajetória de um lagarto pelas faces da pirâmide. Inicialmente o lagarto desloca-se de **A** até **E** e, posteriormente, de **E** até **F**, em que **F** é o ponto médio de **CD**. Cada um desses dois trechos da trajetória ocorre em linha reta.

A projeção perpendicular dessa trajetória em **ABCD**, presente no plano da base da pirâmide, descreve uma curva **R**, a qual é a união de dois segmentos.

Nessas condições, o comprimento de **R**, em cm, é igual a

- a) $20\sqrt{2}$ b) $40\sqrt{2}$ c) $40(1 + \sqrt{2})$ d) $20(1 + \sqrt{2})$



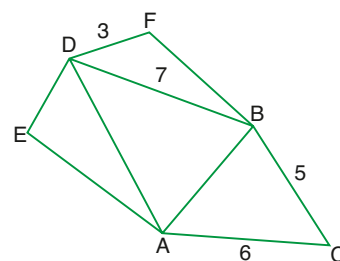
20. (UFRGS-RS)

Considere a planificação de um tetraedro, conforme a figura ao lado.

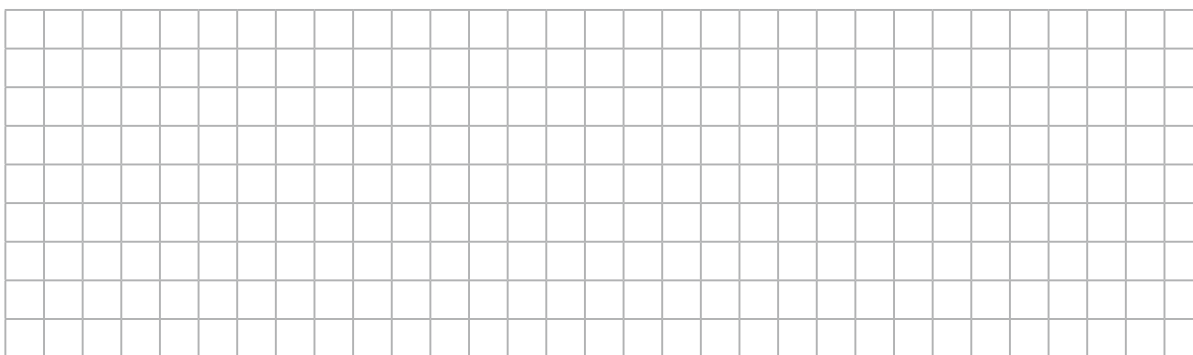
Os triângulos ABC e ABD são isósceles respectivamente em **B** e **D**. As medidas dos segmentos \overline{AC} , \overline{BC} , \overline{BD} e \overline{DF} estão indicadas na figura.

A soma das medidas de todas as arestas do tetraedro é

- a) 33. c) 43. e) 48.
b) 34. d) 47.



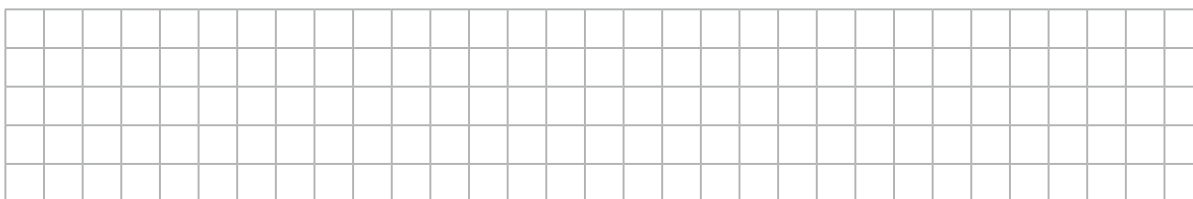
Reprodução/Arquivo da editora



21. (Uece)

A medida da altura de uma pirâmide é 10 m e sua base é um triângulo retângulo isósceles cuja medida da hipotenusa é 6 m. Pode-se afirmar corretamente que a medida do volume dessa pirâmide, em m^3 , é igual a

- a) 60. b) 30. c) 15. d) 45.

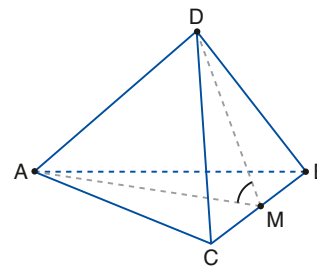


22. (Uerj)

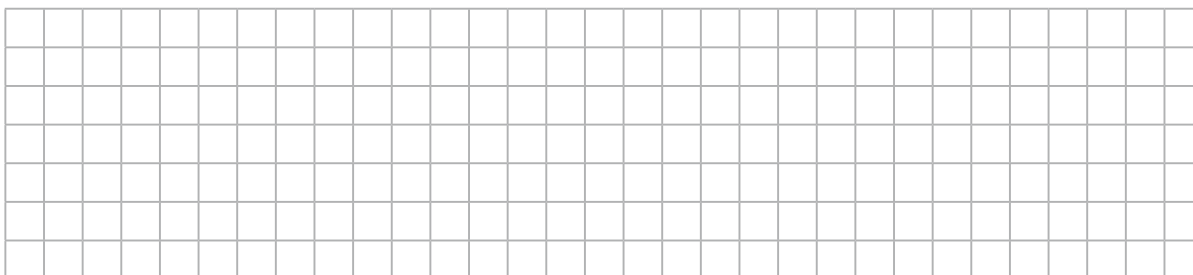
Uma pirâmide com exatamente seis arestas congruentes é denominada tetraedro regular. Admita que a aresta do tetraedro regular ilustrado ao lado, de vértices ABCD, mede 6 cm e que o ponto médio da aresta BC é **M**.

O cosseno do ângulo \widehat{AMD} equivale a:

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{5}$



Reprodução/Arquivo da editora



23. (UEM-PR)

Uma pirâmide quadrangular regular **P**, de altura **h** e aresta da base medindo **a** foi seccionada transversalmente por um plano de modo que se obtêm um tronco de pirâmide **T** e uma pirâmide **P'**, cujo vértice coincide com o vértice da pirâmide **P**. Sabendo-se que o volume de **P'** é $\frac{1}{7}$ do volume de **T**, é **correto** afirmar que

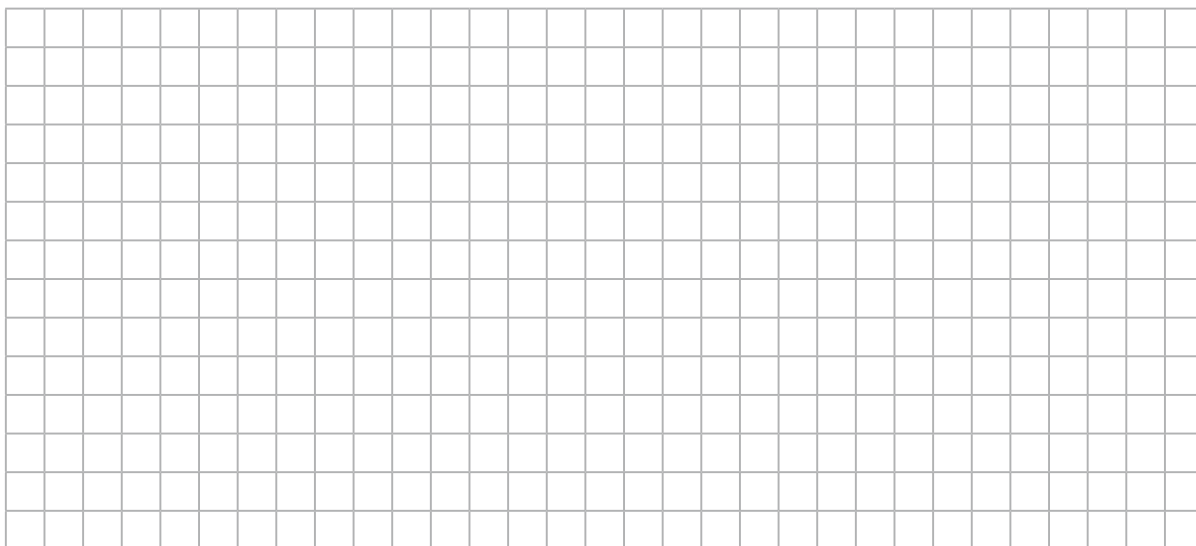
01) o volume de **T** é $\frac{7}{8} a^2 h$.

02) a área da base de **P'** é $\frac{a^2}{4}$.

04) a altura de **P'** é $\frac{h}{2}$.

08) o apótema de **P'** mede $\frac{1}{4}$ do apótema de **P**.

16) a área total de **P'** é $\frac{a^3 + 4a^2 + 4ah^2}{16}$.



24. (IME-RJ)

Um tronco de pirâmide regular possui 12 vértices. A soma dos perímetros das bases é 36 cm, a soma das áreas das bases é $30\sqrt{3} \text{ cm}^2$ e sua altura mede 3 cm. Calcule o volume do tronco de pirâmide.

a) 50 cm^3

b) $42 \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$

c) $43 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$

d) $43\sqrt{2} \text{ cm}^3$

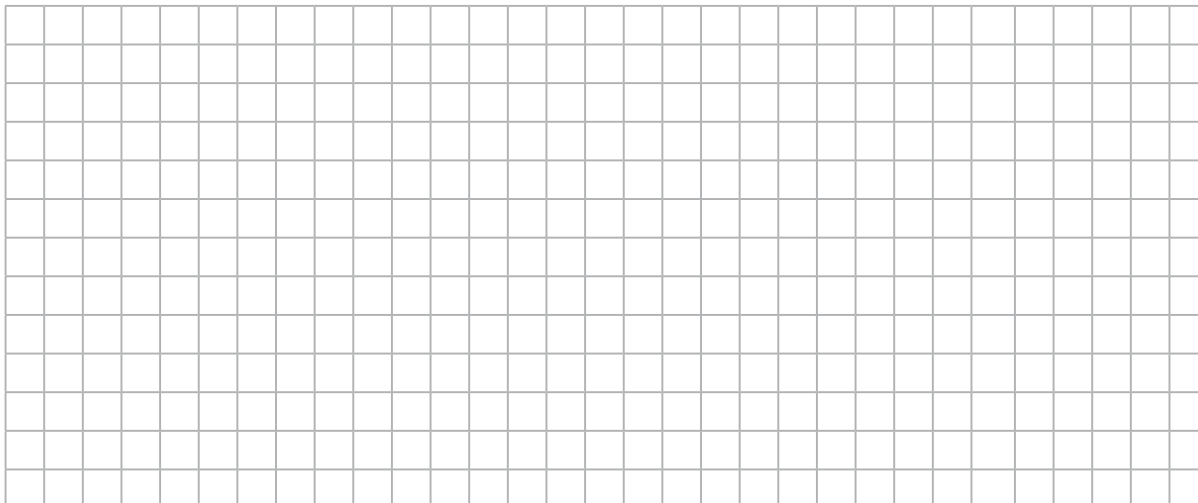
e) $42\sqrt{3} \text{ cm}^3$



25. (EsPCEEx-SP)

Determine o volume (em cm^3) de uma pirâmide retangular de altura "**a**" e lados da base "**b**" e "**c**" (**a**, **b** e **c** em centímetros), sabendo que $a + b + c = 36$ e "**a**", "**b**" e "**c**" são, respectivamente, números diretamente proporcionais a 6, 4 e 2.

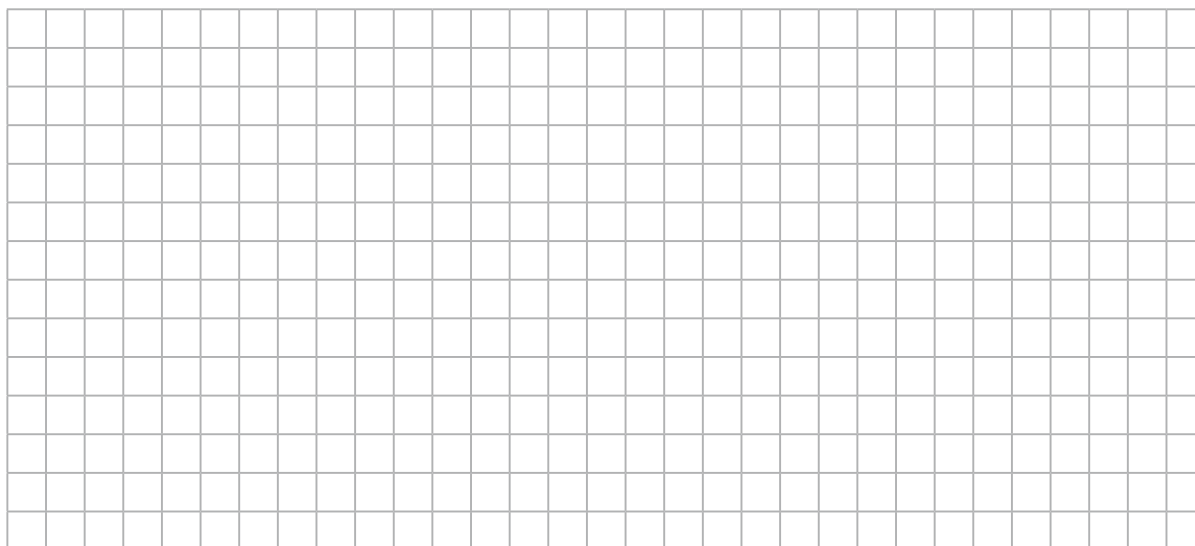
- a) 16 b) 36 c) 108 d) 432 e) 648



26. (UEPG-PR)

Numa pirâmide quadrangular regular **P**₁, uma diagonal da base mede 12 cm e uma aresta lateral vale 10 cm. Essa pirâmide é seccionada por um plano paralelo a sua base, originando um tronco **T** e uma nova pirâmide **P**₂, de aresta da base igual a $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm. Nesse contexto, assinale o que for correto.

- 01) A aresta lateral de **P**₂ é menor que 3 cm.
 02) A razão entre a altura de **P**₁ e a altura de **T** é 2.
 04) O volume de **T** é igual a 189 cm^3 .
 08) A razão entre o volume de **P**₁ e o volume de **P**₂ é 64.
 16) O volume de **P**₂ vale 3 cm^3 .



27. (PUCC-SP)

Considere dois troncos de pirâmides retas exatamente iguais. A base maior é um quadrado de lado igual a 2 metros, a base menor um quadrado de lado igual a 1 metro, e a distância entre as bases igual a 1 metro. Um monumento foi construído justapondo-se esses dois troncos nas bases menores, apoiando-se em um piso plano por meio de uma das bases maiores, formando um sólido. Desta maneira, a medida da área da superfície exposta do monumento é, em m^2 , igual a

- a) $4 + 6\sqrt{5}$. c) $12\sqrt{2} + 4$. e) $12\sqrt{2} - 8$.
b) 8. d) $\frac{16}{3}$.

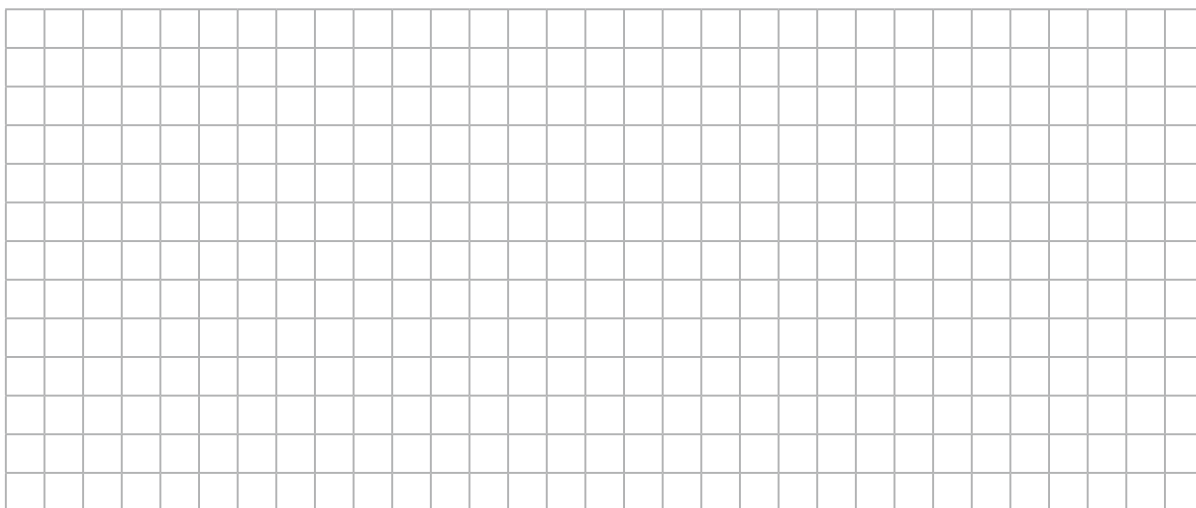


28. (FGV-RJ)

Dado um tetraedro regular de aresta 6 cm, assinale os pontos que dividem cada aresta em três partes iguais. Corte o tetraedro pelos planos que passam pelos três pontos de divisão mais próximos de cada vértice e remova os pequenos tetraedros regulares que ficaram formados.

A soma dos comprimentos de todas as arestas do sólido resultante, em centímetros, é

- a) 56. b) 32. c) 30. d) 36. e) 48.



Corpos redondos

Reveja o que aprendeu

Você deve ser capaz de:

- ▶ Identificar e classificar um cilindro.
- ▶ Reconhecer os elementos de um cilindro.
- ▶ Reconhecer cone, identificar e classificar seus elementos.
- ▶ Calcular o volume do tronco de cone.
- ▶ Identificar uma esfera e seus elementos.
- ▶ Calcular o volume da esfera e a área de sua superfície.
- ▶ Reconhecer fuso esférico e calcular a área de sua superfície.
- ▶ Reconhecer cunha esférica e calcular sua área e seu volume.

Cilindros

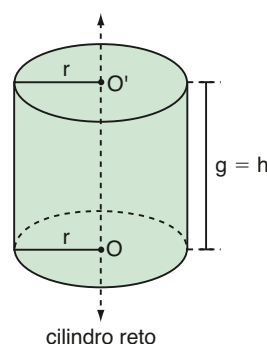
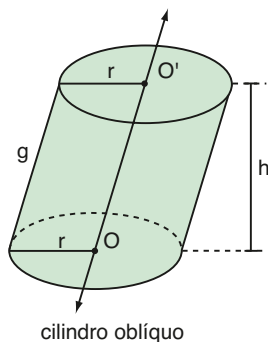
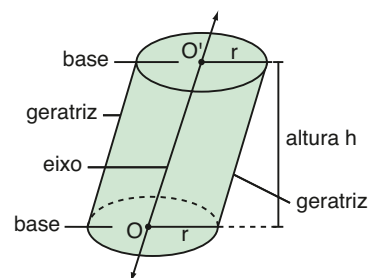
Consideremos um círculo de centro O e raio de medida r , contido em um plano α , e um segmento de reta \overline{PQ} , cuja reta suporte intersecta α . Tomemos segmentos de reta paralelos e congruentes a \overline{PQ} , cada um deles com uma extremidade em um mesmo semiespaço determinado por α . A reunião de todos esses segmentos é um sólido chamado **cilindro**.

Elementos e classificação

- A distância entre os planos das bases é a **altura** do cilindro.
- Os segmentos paralelos a $\overline{OO'}$, com extremidades em pontos das circunferências das bases, são as **geratrizes**.
- A reta $\overline{OO'}$ é o **eixo** do cilindro.

Diz-se:

- **cilindro oblíquo**, se a geratriz é oblíqua aos planos das bases;
- **cilindro reto**, se a geratriz é perpendicular aos planos das bases. Nesse caso, a geratriz é a altura do cilindro.



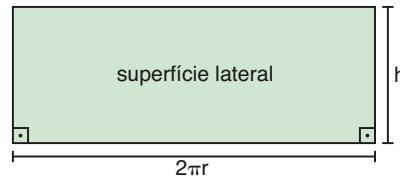
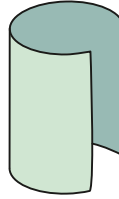
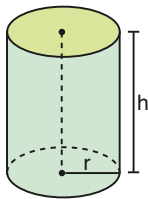
Ilustrações: Banco de Imagens/Arquivo da editora

Áreas do cilindro circular reto

Área da base (A_b)

$$A_b = \pi r^2$$

Área lateral (A_ℓ)



Ilustrações: Banco de imagens/
Arquivo da editora

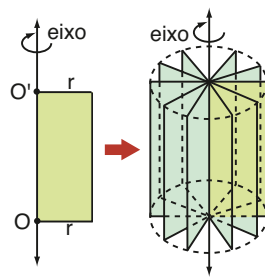
$$A_\ell = \text{área de um retângulo} \Rightarrow A_\ell = 2\pi r \cdot h$$

Área total (A_t)

$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b \Rightarrow 2\pi r \cdot (h + r)$$

O cilindro circular reto é também chamado **cilindro de revolução**, pelo fato de ser gerado pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados.

A reta $\overline{OO'}$ é o eixo de rotação.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

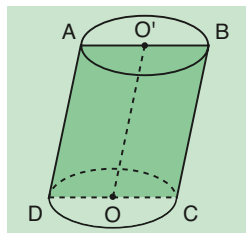
Volume do cilindro

O volume de um cilindro qualquer é:

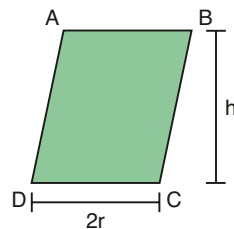
$$V = A_b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Seção meridiana e cilindro equilátero

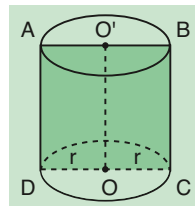
Seção meridiana é a interseção do cilindro com um plano que contém o segmento $\overline{OO'}$.



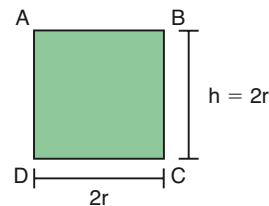
cilindro oblíquo



A seção meridiana é um paralelogramo.



cilindro reto



A seção meridiana é um retângulo.

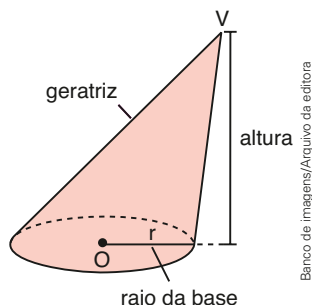
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Cilindro equilátero é um cilindro reto cuja seção meridiana é um quadrado. Em um cilindro equilátero, $g = h = 2r$.

Cones

Consideremos um círculo de centro **O** e raio de medida **r**, contido em um plano α , e um ponto **V**, não pertencente a α . Chama-se **cone circular**, ou apenas cone, a reunião dos segmentos com uma extremidade em **V** e a outra em um ponto do círculo.

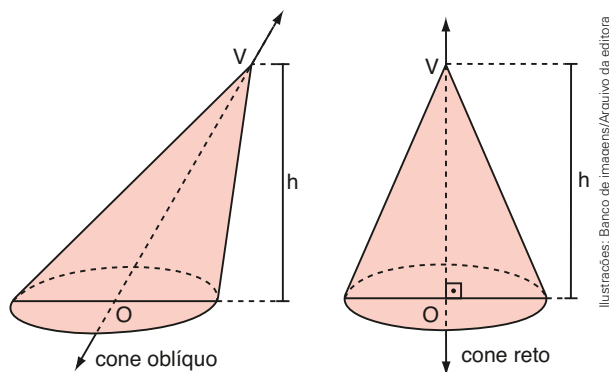
Elementos e classificação



- Cada segmento com uma extremidade em **V** e a outra em um ponto da circunferência da base é uma **geratriz do cone**.
- A distância do vértice ao plano da base é a **altura** do cone.

Diz-se:

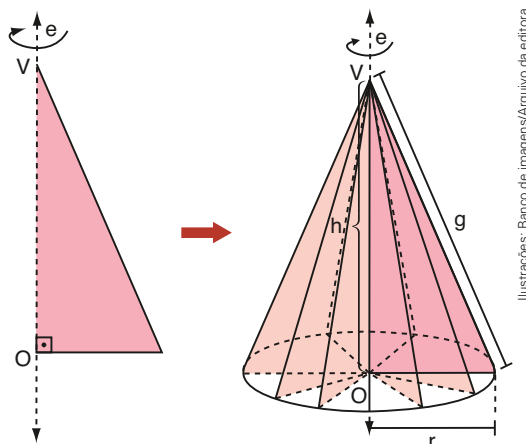
- **cone oblíquo**, se a reta \overline{VO} é oblíqua ao plano da base;
- **cone reto**, se a reta \overline{VO} é perpendicular ao plano da base. Nesse caso, \overline{VO} é a altura do cone.



O cone circular reto é também chamado **cone de revolução**, pelo fato de ser gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.

Observe que em um cone de revolução vale a relação:

$$r^2 + h^2 = g^2$$

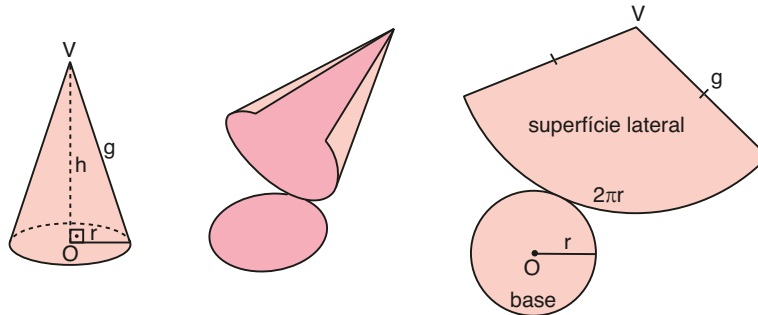


Áreas do cone circular reto

Área da base (A_b)

A base do cone é um círculo de raio de medida r , então a **área da base** é:

$$A_b = \pi \cdot r^2$$



Área lateral (A_ℓ)

Área lateral é a área de um setor circular cujo raio mede g (medida da geratriz do cone) e cujo comprimento do arco é $2\pi r$ (perímetro da base).

$$A_\ell = \pi \cdot r \cdot g$$

Área total (A_t)

A superfície total de um cone é a reunião da superfície lateral com o círculo da base. Assim, a **área total** do cone é dada por:

$$A_t = A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = \pi \cdot r \cdot (g + r)$$

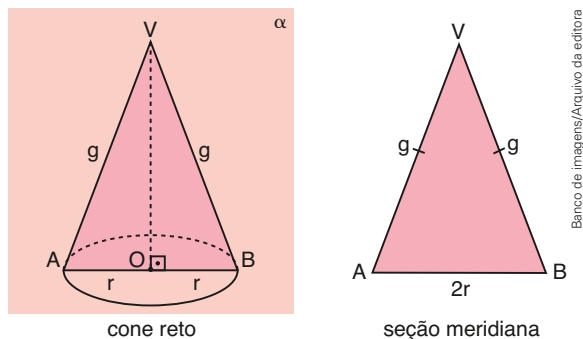
Volume do cone

O volume de um cone qualquer é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

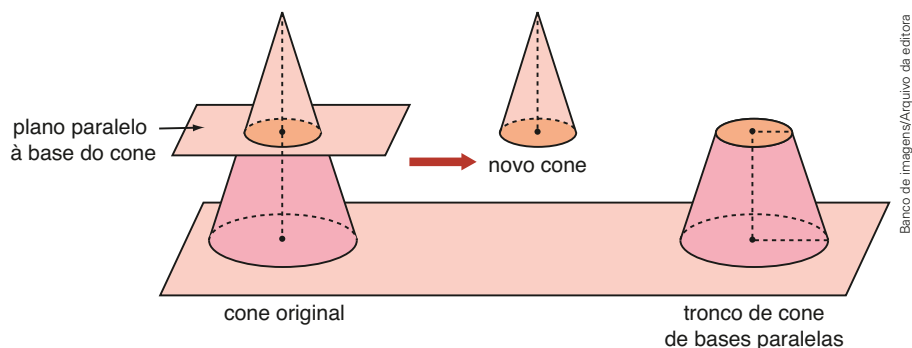
Seção meridiana e cone equilátero

Seção meridiana de um cone é a interseção dele com um plano que contém o segmento \overline{VO} . A seção meridiana de um cone reto é um triângulo isósceles.



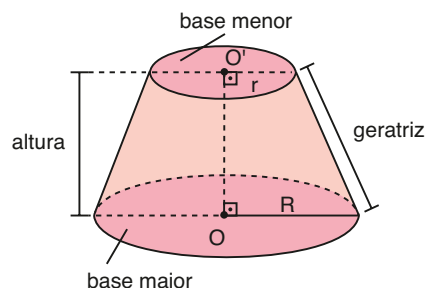
Cone equilátero é um cone reto cuja seção meridiana é um triângulo equilátero. Em um cone equilátero, $g = 2r$.

Tronco de cone



Elementos de um tronco de cone:

- **base maior do tronco:** é a base do cone original ou primitivo;
- **base menor do tronco:** é a seção determinada pelo plano ao intersectar o cone. Essa seção é um círculo e corresponde à base do novo cone;
- **altura do tronco:** é a distância entre os planos das bases;
- **geratriz do tronco:** é um segmento contido em uma geratriz do cone original, cujas extremidades são pontos das circunferências das bases (sendo um ponto em cada base).



Áreas do tronco de cone

$$A_{\ell} = \pi \cdot g \cdot (R + r)$$

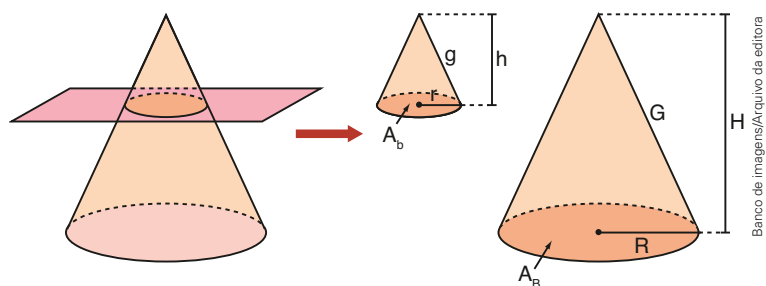
$$A_t = A_B + A_b + A_{\ell}$$

Volume do tronco de cone

$$V = \frac{\pi h}{3} \cdot [R^2 + Rr + r^2]$$

Pode-se também fazer a diferença entre os volumes dos dois cones.

Cones semelhantes

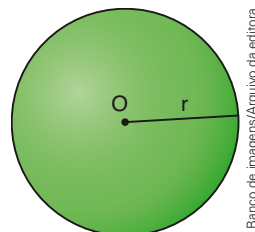
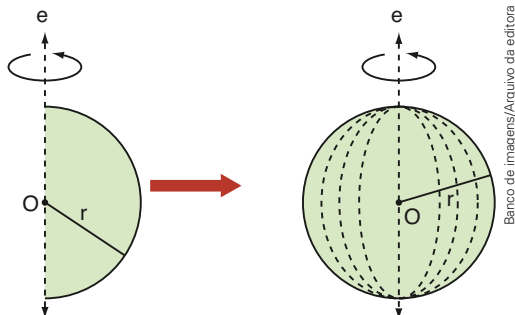


- razão entre elementos lineares: $\frac{h}{H} = \frac{g}{G} = \frac{r}{R} = k$
- razão entre áreas: $\frac{A_b}{A_B} = k^2$; $\frac{A_{\ell}}{A_L} = k^2$; $\frac{A_t}{A_T} = k^2$
- razão entre volumes: $\frac{V}{V} = k^3$

Esfera

Consideremos um ponto **O** e um segmento de medida **r**. Denomina-se esfera de centro **O** e raio **r** o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto **O** é menor ou igual a **r**.

A esfera de centro **O** e raio **r** é o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

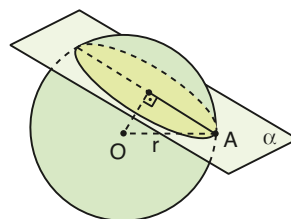


Banco de imagens/Arquivo da editora

Seção de uma esfera

Quando um plano α intersecta, em mais de um ponto, uma esfera de centro **O** e raio de medida **r**, o conjunto de pontos comuns ao plano e à esfera é um **círculo**, como mostra a figura. Esse círculo é chamado de **seção da esfera**.

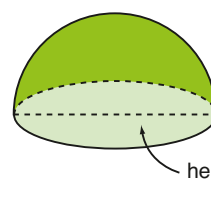
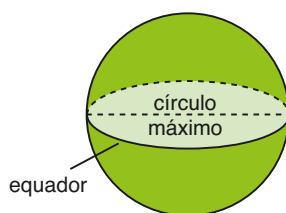
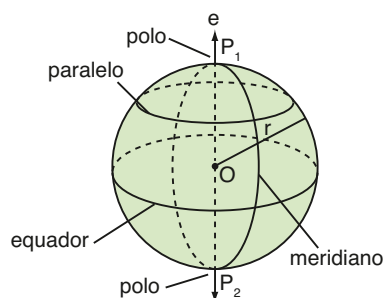
Se α passar pelo centro **O**, o raio da seção determinada será o próprio raio da esfera e, nesse caso, a seção recebe o nome de **círculo máximo da esfera**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Elementos de uma esfera

O círculo associado ao **equador** (círculo máximo da esfera) divide a esfera em duas “partes” iguais, conhecidas como **hemisférios** ou **semiesferas**.



hemisférios

Ilustrações: Banco de imagens/
Arquivo da editora

Volume da esfera

O volume **V** de uma esfera de raio **r** é dado por:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Área da superfície esférica

$$A = 4\pi r^2$$

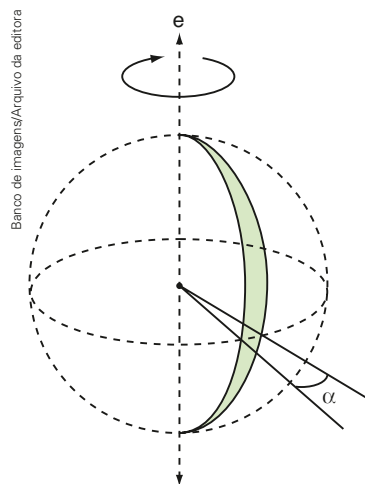
Partes da esfera

Fuso esférico

Fuso esférico é a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência, a qual gira α graus ($0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$) em torno do eixo que contém seu diâmetro.

A área do fuso é proporcional a α e, portanto, pode ser calculada por uma regra de três simples, comparando-a com a área da superfície esférica.

Se aproximarmos uma laranja a uma esfera, o fuso esférico nos remete à casca de um gomo.



Para α em graus:

$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \text{ — } 4\pi r^2 \\ \alpha \text{ — } A_{\text{fuso}} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\text{fuso}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90^\circ}$$

Para α em radianos:

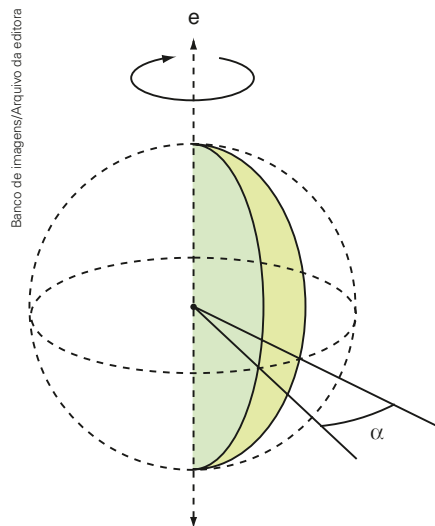
$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \text{ rad — } 4\pi r^2 \\ \alpha \text{ — } A_{\text{fuso}} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\text{fuso}} = 2r^2 \alpha$$

Cunha esférica

Dá-se o nome de **cunha esférica** ao sólido gerado pela rotação de um semicírculo que gira α graus ($0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$) em torno de um eixo que contém seu diâmetro.

Aproximando uma laranja a uma esfera, a cunha esférica nos remete a um gomo.

O volume da cunha esférica é proporcional a α e, portanto, pode ser calculado por uma regra de três simples.



Para α em graus:

$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \text{ — } \frac{4}{3} \pi r^3 \\ \alpha \text{ — } V_{\text{cunha}} \end{array} \right\} \Rightarrow V_{\text{cunha}} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270^\circ}$$

Para α em radianos:

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \text{ rad — } \frac{4}{3} \pi r^3 \\ \alpha \text{ — } V_{\text{cunha}} \end{array} \right\} \Rightarrow V_{\text{cunha}} = \frac{2r^3 \alpha}{3}$$

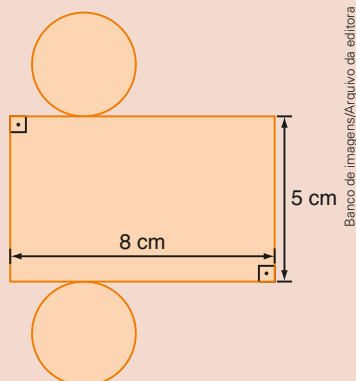
A superfície de uma cunha esférica contida em uma esfera de raio r é a reunião de um fuso esférico com dois semicírculos de raio r .

Assim, a área total da cunha esférica é igual à soma da área do fuso esférico com a área de um círculo de raio r .

Aplique o que aprendeu

Exercícios resolvidos

1. A figura mostra a planificação da superfície de um cilindro.



Determine a área total, o volume e a área da seção meridiana do cilindro correspondente.

Solução:

$$\text{Temos: } \begin{cases} 2\pi r & \text{--- } 8 \\ h & \text{--- } 5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi} \text{ cm}$$

$$A_b = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = \pi \cdot \frac{16}{\pi^2} = \frac{16}{\pi} \text{ cm}^2$$

$$A_\ell = A_{\text{retângulo}} = 8 \cdot 5 = 40 \text{ cm}^2$$

$$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell$$

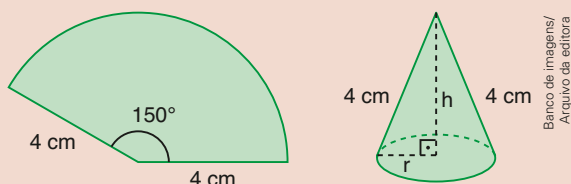
$$A_t = 2 \cdot \frac{16}{\pi} + 40 = 8 \left(\frac{4}{\pi} + 5 \right) \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = \frac{16}{\pi} \cdot 5 = \frac{80}{\pi} \text{ cm}^3$$

Área da seção meridiana:

$$2r \cdot h = 2 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot 5 = \frac{40}{\pi} \text{ cm}^2$$

2. A figura a seguir mostra a planificação da superfície lateral de um cone. Determine a área total e o volume do cone, bem como o perímetro de sua seção meridiana.



Solução:

Observe que $g = 4 \text{ cm}$.

área \times ângulo

$$\begin{cases} \pi \cdot 4^2 & \text{--- } 360^\circ \\ A_\ell & \text{--- } 150^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{16\pi}{A_\ell} = \frac{360^\circ}{150^\circ} \Rightarrow A_\ell = \frac{20\pi}{3} \text{ cm}^2$$

Como $A_\ell = \pi \cdot r \cdot g$, vem:

$$\frac{20\pi}{3} = \pi \cdot r \cdot 4 \Rightarrow r = \frac{5}{3} \text{ cm}$$

$$4^2 = h^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{119}}{3} \text{ cm}$$

Daí:

$$A_t = A_\ell + A_b = \frac{20\pi}{3} + \pi \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{85\pi}{9} \text{ cm}^2$$

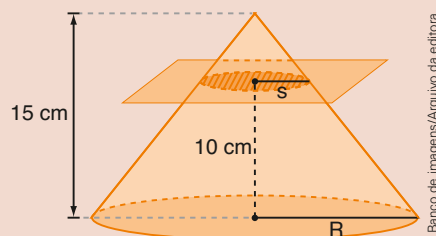
$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{25\pi}{9} \cdot \frac{\sqrt{119}}{3}}{3} = \frac{25\pi\sqrt{119}}{81} \text{ cm}^3$$

Perímetro da seção meridiana $= 2r + g + g =$

$$= \frac{10}{3} + 4 + 4 = \frac{34}{3} \text{ cm}$$

3. Um cone de 15 cm de altura é intersectado por um plano paralelo à base e distante 10 cm dela, determinando uma seção de área $64\pi \text{ cm}^2$. Determine o volume e a área lateral do tronco obtido.

Solução:



Observe que a altura do cone obtido pela seção mede $15 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$.

Se a área da seção (círculo hachurado) é 64π , então $\pi \cdot s^2 = 64\pi \Rightarrow s = 8 \text{ cm}$.

A razão de semelhança entre os dois cones é:

$$\frac{H}{h} = \frac{15}{5} = 3$$

Daí:

$$\frac{R}{s} = 3 \Rightarrow R = 3 \cdot s \Rightarrow R = 3 \cdot 8 = 24 \text{ cm}$$

$$V_{\text{cone menor}} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 5}{3} = \frac{320\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Como $k = 3$, então $k^3 = 3^3 = 27$ e o volume do cone maior é $27 \cdot V_{\text{menor}} = 27 \cdot \frac{320\pi}{3} = 2880\pi \text{ cm}^3$

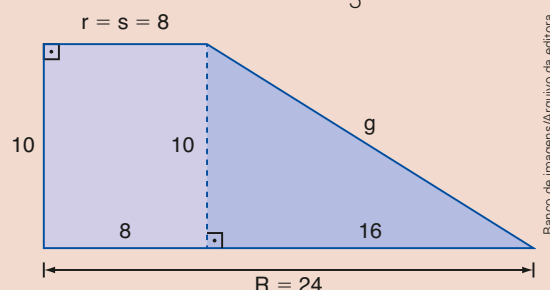
$$\text{Daí: } V_{\text{tronco}} = V_{\text{maior}} - V_{\text{menor}} =$$

$$= 2880\pi - \frac{320\pi}{3} = \frac{8320\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$A_{\ell}(\text{tronco}) = \pi \cdot g \cdot (R + r)$$

$$g^2 = 10^2 + 16^2 \Rightarrow g = 2\sqrt{89} \text{ cm}$$

$$A_{\ell} = \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{89} \cdot (24 + 8) = 64\pi\sqrt{89} \text{ cm}^2$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

4. Uma esfera de volume $36\pi \text{ cm}^3$ é intersectada por um plano, determinando uma seção de área $2\pi \text{ cm}^2$. Determine:

- a distância do centro da esfera ao plano;
- a área da superfície;
- a área do círculo máximo da esfera.

Solução:

- a) Como $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, vem:

$$36\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = 3 \text{ cm}$$

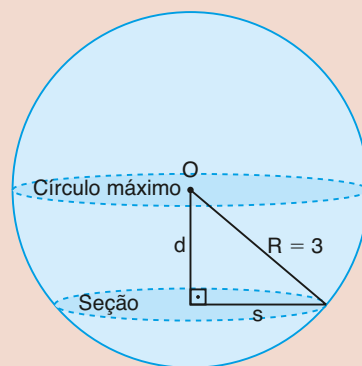
Como a área da seção é 2π , temos:

$$\pi \cdot s^2 = 2\pi \Rightarrow s^2 = 2 \Rightarrow s = \sqrt{2}$$

$$d^2 + s^2 = R^2 \Rightarrow d^2 + 2 = 3^2 \Rightarrow d = \sqrt{7} \text{ cm}$$

- b) $A = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi \text{ cm}^2$

- c) $A_{\text{círc. máximo}} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$



Banco de imagens/Arquivo da editora

5. O volume de uma cunha de 30° , contida em uma esfera de raio R , é $24\pi \text{ cm}^3$. Determine a área dessa cunha.

Solução:

Se o ângulo de rotação é 30° , o volume da esfera é 12 vezes o volume da cunha, isto é, $12 \cdot 24\pi = 288\pi \text{ cm}^3$.

Daí:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi \Rightarrow R^3 = 216 \Rightarrow R = 6 \text{ cm}$$

A área da superfície esférica é $4\pi \cdot R^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi \text{ cm}^2$; logo, a área do fuso é $\frac{1}{12} \cdot 144\pi = 12\pi \text{ cm}^2$ e a área da cunha é: $12\pi + \pi \cdot 6^2 = 48\pi \text{ cm}^2$.

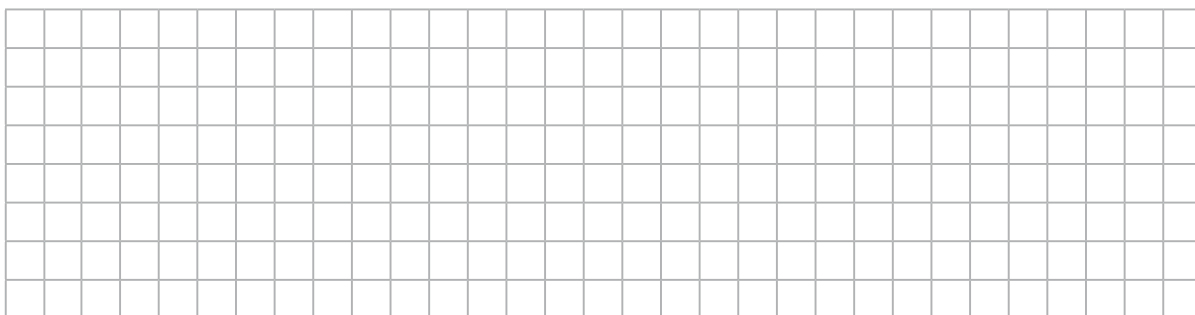
Questões

1. (IFPE)

Milena é aluna do curso de Saneamento no campus Afogados da Ingazeira e convenceu seu pai a construir um tanque de tratamento da água do esgoto no quintal de sua casa. Como o espaço disponível não é tão grande, o tanque tem por base um setor circular de um quarto de volta com 1 metro de raio e 2,5 metros de profundidade.

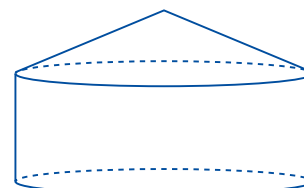
Se o tratamento utilizado por Milena consegue reaproveitar 80% da água, estando o tanque completamente cheio, quantos litros de água poderão ser reaproveitados? ($\pi = 3,14$).

- a) 6 289 litros. b) 7 850 litros. c) 2 000 litros. d) 2 512 litros. e) 1 570 litros.



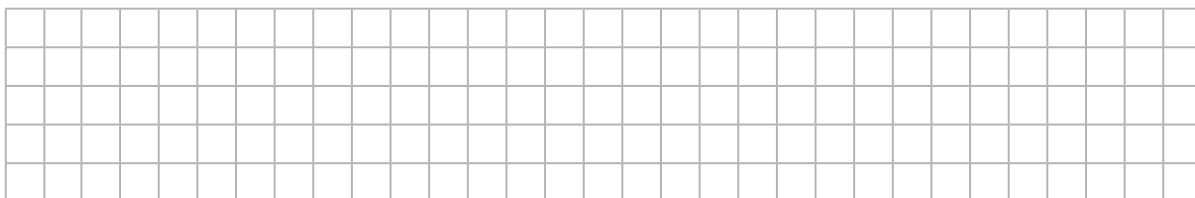
2. (UFPR)

Um dos maiores silos do mundo para armazenamento de grãos está localizado na cidade de Primavera do Leste, no Mato Grosso. Suponha que esse silo é constituído por um cilindro circular reto com 24 m de raio e 22 m de altura, no qual está acoplado um cone circular reto com altura de 8 m, conforme indicado na figura ao lado.



Reprodução/Arquivo da editora

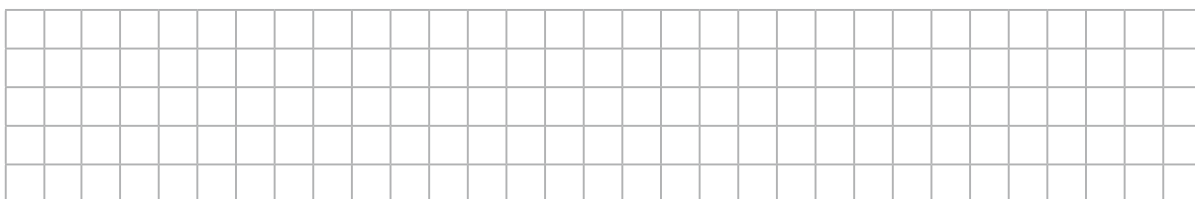
- a) Calcule o perímetro, em metros, da base do cilindro. Use $\pi = 3,1$.
b) Calcule o volume, em metros cúbicos, desse silo. Use $\pi = 3,1$.



3. (Ifal)

Certo tanque de combustível tem o formato de um cone invertido com profundidade de 5 metros e com raio máximo de 4 metros. Quantos litros de combustível cabem, aproximadamente, nesse tanque? Considere $\pi = 3,14$.

- a) 20 000 ℓ. b) 50 240 ℓ. c) 83 733,33 ℓ. d) 104 666,67 ℓ. e) 150 000 ℓ.

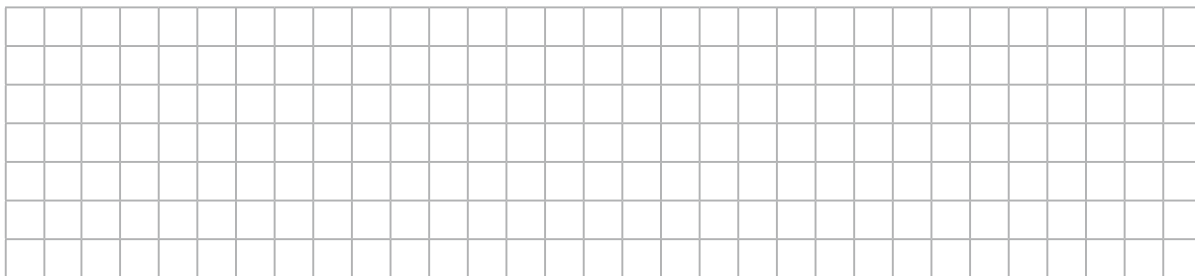


6. (UEG-GO)

Deseja-se construir um reservatório cilíndrico circular reto com 8 metros de diâmetro e teto no formato de hemisfério. Sabendo-se que a empresa responsável por construir o teto cobra R\$ 300,00 por m^2 , o valor para construir esse teto esférico será de

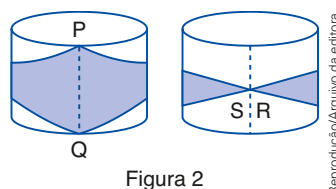
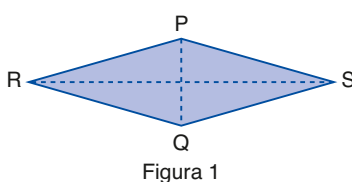
Use $\pi = 3,1$.

- a) R\$ 22 150,00 b) R\$ 32 190,00 c) R\$ 38 600,00 d) R\$ 40 100,00 e) R\$ 29 760,00



7. (Enem)

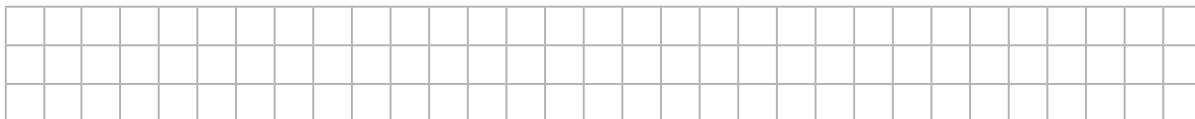
Com o objetivo de reformar os tambores cilíndricos de uma escola de samba, um alegorista decidiu colar adereços plásticos na forma de losango, como ilustrado na Figura 1, nas faces laterais dos tambores. Nesta colagem, os vértices opostos **P** e **Q** do adereço deverão pertencer às circunferências do topo e da base do tambor cilíndrico, respectivamente, e os vértices opostos **R** e **S** deverão coincidir após a colagem do adereço no tambor, conforme ilustra a Figura 2. Considere que o diâmetro do cilindro correspondente ao tambor meça 0,4 metro. Utilize 3,1 como aproximação para π .



Reprodução/Arquivo da editora

A diagonal RS do adereço a ser confeccionado pelo alegorista deve medir, em metro,

- a) 0,124. b) 0,400. c) 0,496. d) 1,240. e) 2,480.

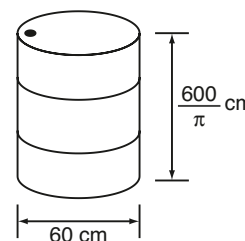


8. (UPF-RS)

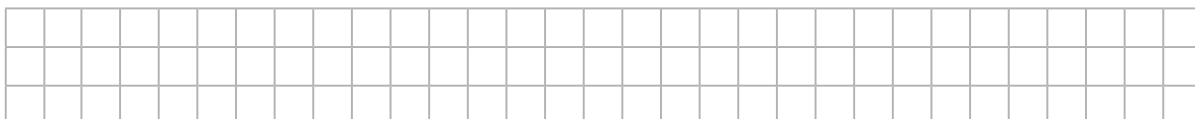
Um tonel está com 30% da sua capacidade preenchida por um certo combustível.

Sabendo que esse tonel tem diâmetro de 60 cm e altura de $\frac{600}{\pi}$ cm, a quantidade de combustível contida nesse tonel, em litros, é

- a) 1,62 b) 16,2 c) 162 d) 180 e) 162 000



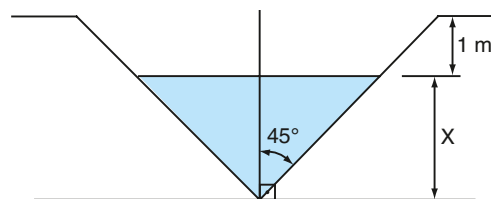
Reprodução/Arquivo da editora



9. (Uerj)

Um depósito de óleo tem a forma de um cone circular reto cujo eixo vertical forma com suas geratrizes o ângulo de 45° . Foram retirados desse depósito 19 m^3 de óleo. Com isso, a altura do nível de óleo foi reduzida em 1 m e passou a ter **X** metros de altura.

Considerando $\pi = 3$, calcule a altura **X** do nível de óleo.



Reprodução/Arquivo da editora

[illegible]

10. (IFBA)

Um metalúrgico utilizou, num determinado trabalho, uma folha de metal retangular de dimensões 20 cm e 30 cm, com o intuito de formar um cilindro, unindo os lados da folha de metal de mesma dimensão, e verificou que existiam duas possibilidades:

A: Utilizar o lado de 20 cm como altura do cilindro:

B: Utilizar o lado de 30 cm como altura do cilindro.

Considerando $\pi = 3$, e chamando de V_A o volume da possibilidade **A**, e V_B o volume da possibilidade **B**. Podemos afirmar que:

a) $V_A = V_B = 1\,000$

c) $V_A = 1\,000$ e $V_B = 1\,500$

e) $V_A = 1500$ e $V_B = 1000$

$$\text{b) } V_A = V_B = 1500$$

$$d) V_A = 2000 \text{ e } V_B = 3000$$

[illegible]

11. (Ifal)

Um garoto pega uma folha retangular de dimensões 21 cm e 30 cm e une os lados menores formando um cilindro. Qual o volume do cilindro obtido? Considere $\pi = 3$.

a) 630 cm^3 .

c) $14\,175\text{ cm}^3$.

e) 1890 cm^3 .

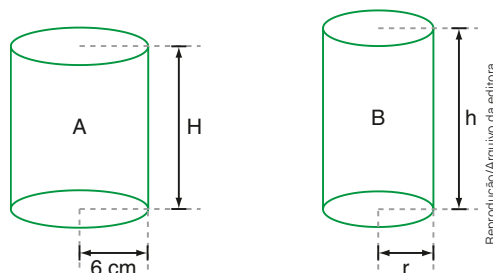
b) $1\,102,5\text{ cm}^3$.

d) $1\,575\text{ cm}^3$.

[illegible]

12. (Famema-SP)

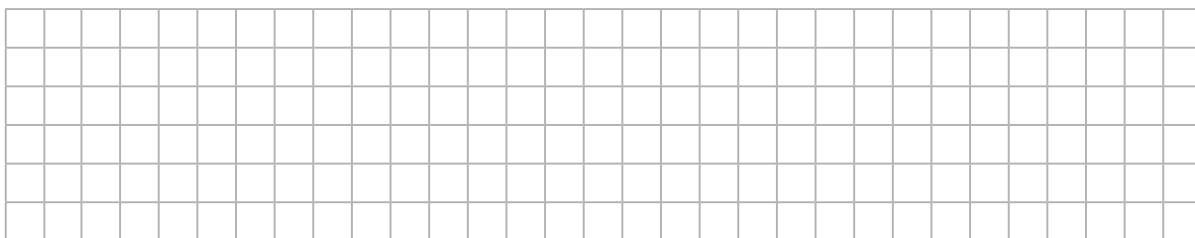
Um cilindro circular reto **A**, com raio da base igual a 6 cm e altura **H**, possui a mesma área lateral que um cilindro circular reto **B**, com raio da base **r** e altura **h**, conforme mostram as figuras.



fora de escala

Sabendo que $\frac{h}{H} = 1,2$ e que o volume do cilindro **B** é $240\pi \text{ cm}^3$, é correto afirmar que a diferença entre os volumes dos cilindros é

- a) $50\pi \text{ cm}^3$. b) $42\pi \text{ cm}^3$. c) $45\pi \text{ cm}^3$. d) $48\pi \text{ cm}^3$. e) $37\pi \text{ cm}^3$.

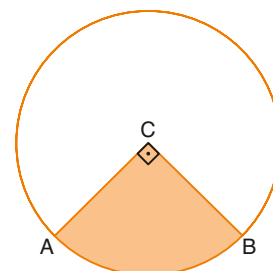


13. (EsPCEEx-SP)

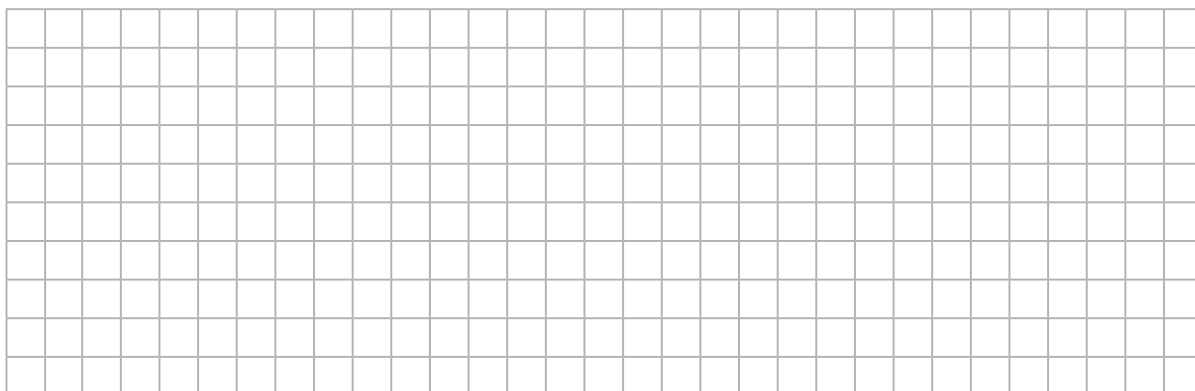
Corta-se de uma circunferência de raio 4 cm, um setor circular de ângulo $\frac{\pi}{2}$ rad (ver desenho ilustrativo), onde o ponto **C** é o centro da circunferência. Um cone circular reto é construído a partir desse setor circular ao se juntar os raios CA e CB.

O volume desse cone, em cm^3 , é igual a

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ c) $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$ e) $\frac{\sqrt{5}}{5}\pi$
b) $\frac{\sqrt{3}}{5}\pi$ d) $\frac{\sqrt{15}}{5}\pi$



desenho ilustrativo – fora de escala



14. (Acafe-SC)

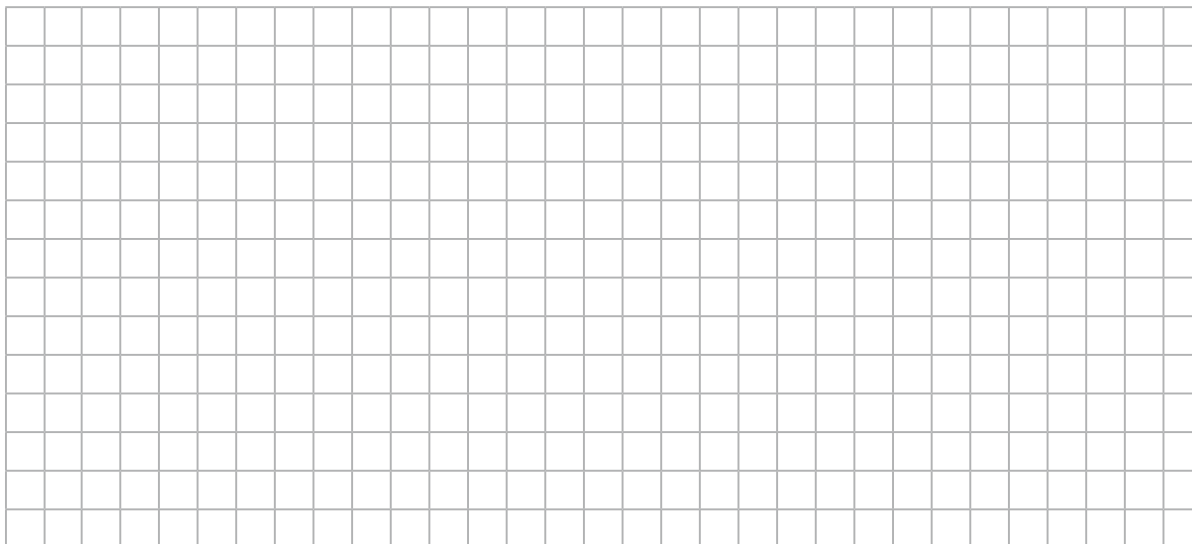
Um cone de revolução tem altura 8 cm e está circunscrito a uma esfera de raio igual a 2 cm. A razão entre o volume da esfera e o volume do cone é igual a

a) $\frac{1}{4}$.

b) $\frac{1}{8}$.

c) $\frac{1}{2}$.

d) 2.



15. (UEM-PR)

Considere um plano α que contém o eixo de um cilindro circular reto, cujo raio mede 2 cm e a altura, 4 cm. Então, é **correto** afirmar que:

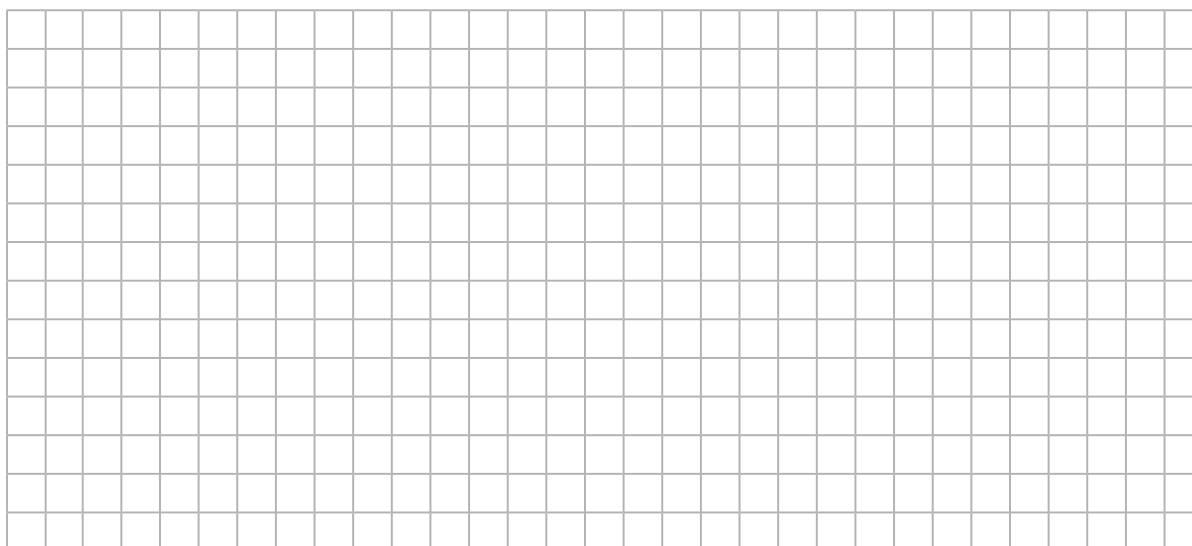
01) A interseção do cilindro com α é um quadrado, cujo lado mede 4 cm.

02) O plano α divide o cilindro em dois sólidos, e o volume de cada um é $16\pi \text{ cm}^3$.

04) O plano α divide o cilindro em dois sólidos, e a área lateral de cada um é $8\pi \text{ cm}^3$.

08) A reta que contém o eixo do cilindro está inteiramente contida no plano.

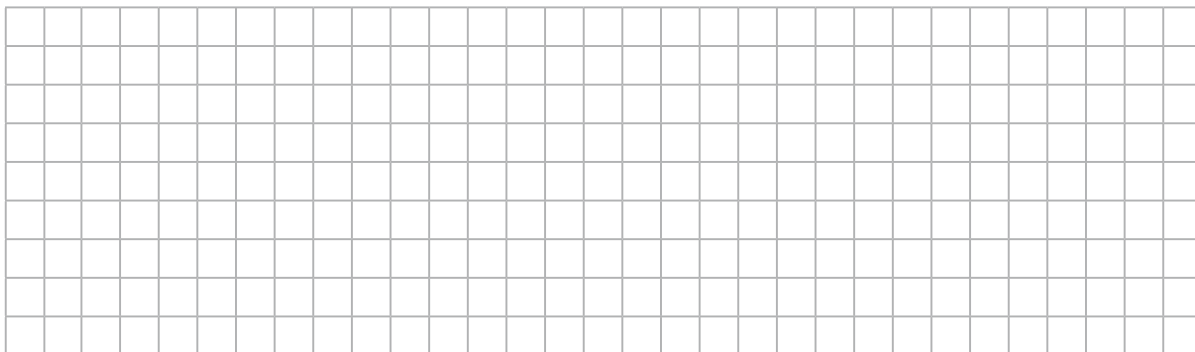
16) Qualquer reta perpendicular ao plano α é paralela aos planos que contêm as bases do cilindro, ou está contida em um deles.



16. (UEFS-BA)

Se um cone circular reto tem altura igual a 4 cm e base circunscrita a um hexágono regular de lado medindo 2 cm, então a sua área lateral, em cm^2 , mede, aproximadamente,

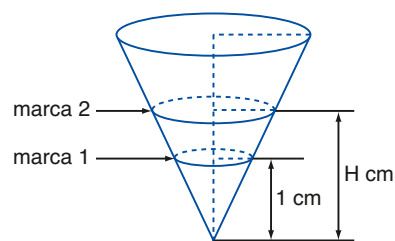
- a) $4\pi\sqrt{6}$ b) $4\pi\sqrt{5}$ c) 4π d) $\pi\sqrt{3}$ e) $\pi\sqrt{2}$



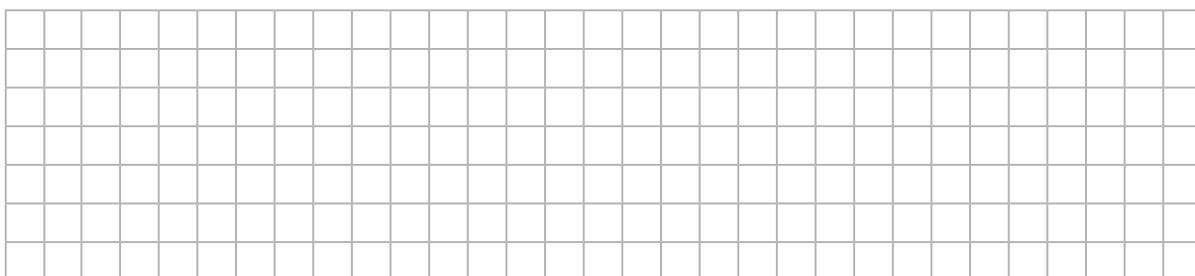
17. (UFU-MG)

Um recipiente cônico utilizado em experiências de química deve ter duas marcas horizontais circulares, uma situada a 1 centímetro do vértice do cone, marcando um certo volume \mathbf{v} , e outra marcando o dobro deste volume, situada a \mathbf{H} centímetros do vértice, conforme figura. Nestas condições, a distância \mathbf{H} , em centímetros, é igual a:

- a) $\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{2}$



Reprodução/Arquivo de editora

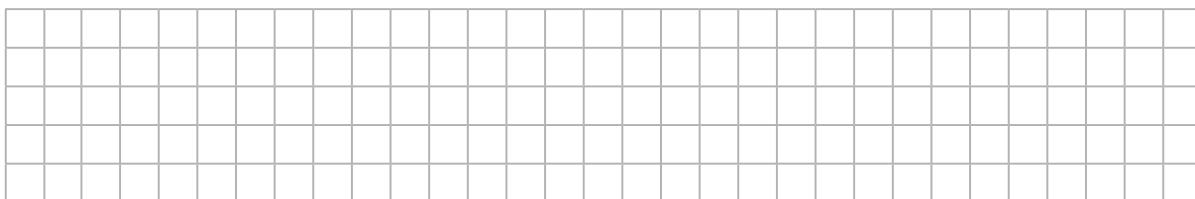


18. (FMP-RJ)

Um recipiente cilíndrico possui raio da base medindo 4 cm e altura medindo 20 cm. Um segundo recipiente tem a forma de um cone, e as medidas do raio de sua base e de sua altura são iguais às respectivas medidas do recipiente cilíndrico.

Qual é a razão entre o volume do recipiente cilíndrico e o volume do recipiente cônico?

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{5}$ c) 3 d) 4 e) 5



19. (EEAR-SP)

Um escultor irá pintar completamente a superfície de uma esfera de 6 m de diâmetro, utilizando uma tinta que, para essa superfície, rende 3 m^2 por litro. Para essa tarefa, o escultor gastará, no mínimo, _____ litros de tinta. (Considere $\pi \approx 3$.)

- a) 18 b) 24 c) 36 d) 48

[illegible]

20. (IFPE)

Maria Carolina resolveu sair um pouco do seu regime e foi saborear uma deliciosa sobremesa composta por três bolas de sorvete e 27 uvas, conforme a imagem abaixo. Suponha que as bolas de sorvete e as uvas tenham formatos esféricos e que Maria Carolina comeu toda a sua sobremesa.



Disponível em: <http://s1.1zoom.me/big3/144/Ice_cream_Blueberries_440624.jpg>. Acesso em 20 maio 2017.

Usando $\pi = 3$, sabendo que os raios de cada bola de sorvete têm 4 cm e, de cada uva, 1 cm, podemos afirmar que ela consumiu, nessa sobremesa, em centímetros cúbicos, um total de

- a) 108. b) 768. c) 876. d) 260. e) 900.

[illegible]

21. (PUC-SP)

O volume de um cilindro de 8 cm de altura equivale a 75% do volume de uma esfera com 8 cm de diâmetro. A área lateral do cilindro, em cm^2 , é

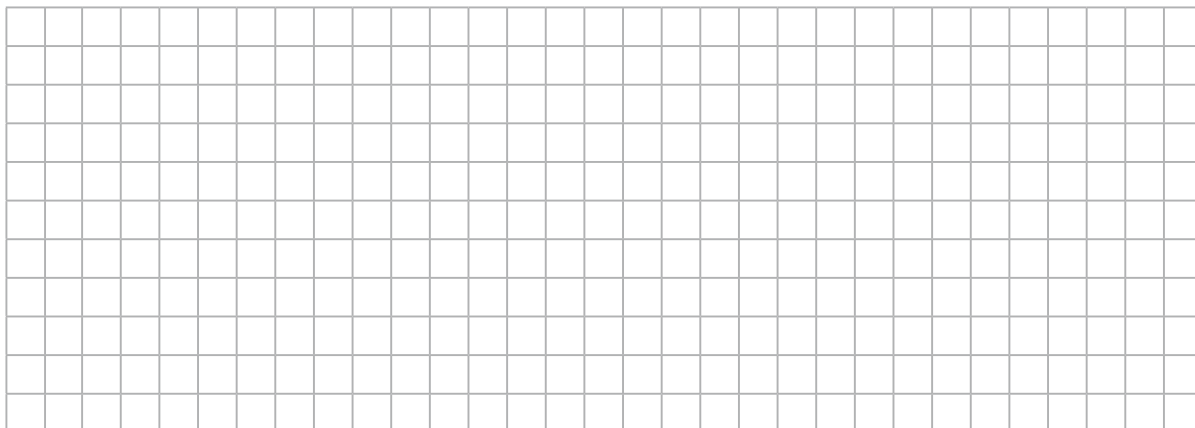
- a) $42\sqrt{2} \pi$ b) $36\sqrt{3} \pi$ c) $32\sqrt{2} \pi$ d) $24\sqrt{3} \pi$

[illegible]

22. (UEG-GO)

Ao triplicarmos o raio e tomarmos a terça parte de uma esfera, ela possuirá, em relação à esfera original, um volume

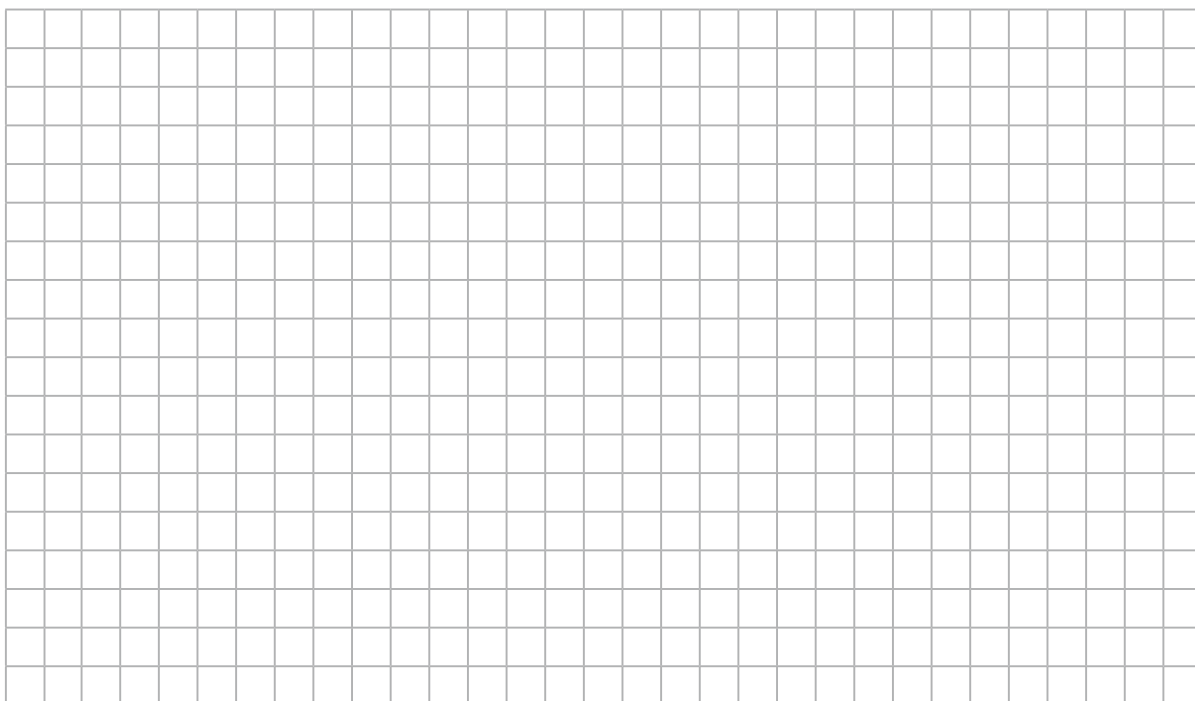
- a) 2 vezes maior
- b) 3 vezes maior
- c) 9 vezes maior
- d) 12 vezes maior
- e) 20 vezes maior



23. (IFCE)

Dentre todos os retângulos de perímetro $P = 40$ cm, iremos rotacionar o de área máxima em torno de um de seus lados, gerando um cilindro. O volume deste cilindro, em cm^3 , é

- a) 500π .
- b) 25π .
- c) 50π .
- d) 100π .
- e) 1000π .



Matrizes, determinantes e sistemas lineares

Reveja o que aprendeu

Você deve ser capaz de:

- ▶ Identificar os elementos de uma matriz através de sua representação genérica.
- ▶ Realizar operações com matrizes.
- ▶ Determinar a inversa de uma matriz, quando existir.
- ▶ Calcular o determinante de uma matriz.
- ▶ Aplicar as propriedades dos determinantes.
- ▶ Representar geometricamente uma equação linear de duas variáveis.
- ▶ Resolver sistemas lineares por escalonamento.
- ▶ Discutir um sistema em função de um ou mais parâmetros.
- ▶ Identificar quando um sistema é determinado, indeterminado ou impossível.
- ▶ Reconhecer, resolver e classificar sistemas homogêneos.

Matrizes

Uma matriz do tipo (ou formato) $m \times n$, ou simplesmente matriz $m \times n$, é uma tabela de $m \cdot n$ números reais dispostos em **m** linhas (filas horizontais) e **n** colunas (filas verticais).

Representação genérica

Consideremos uma matriz **A** do tipo $m \times n$. Um elemento qualquer dessa matriz pode ser representado pelo símbolo a_{ij} , no qual o índice **i** refere-se à linha e o índice **j** refere-se à coluna em que se encontra tal elemento.

Para conhecermos os elementos de $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ tal que $a_{ij} = 2 \cdot i - j$, representamos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$; $a_{12} = 2 \cdot 1 - 2 = 0$; $a_{21} = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ e assim por diante;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

- **Matriz quadrada:** é uma matriz que possui número de linhas igual ao número de colunas.
Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

é uma matriz quadrada 2×2 . Dizemos que **A** é matriz quadrada de ordem 2.

- **Matriz transposta:** trocam-se, ordenadamente, linhas por colunas. Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**.

A é denominada **matriz identidade de ordem n** (indica-se por **I_n**) se os elementos de sua diagonal principal são todos iguais a 1 e os demais elementos são iguais a zero. Assim:

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.

Operações entre matrizes

Adição e subtração

Para realizar essas operações, as matrizes envolvidas devem ser do mesmo tipo. Basta somar (ou subtrair) os elementos correspondentes:

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & \frac{5}{2} \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \bullet \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Basta multiplicar esse número por cada um dos elementos da matriz.

Exemplo:

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ então } [-2] \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -2\sqrt{2} \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicação de matrizes

Para que exista o produto de duas matrizes **A** e **B** é preciso que o número de colunas de **A** seja igual ao número de linhas de **B**.

A matriz produto **C** é do tipo $m \times p$ (**m** é o n° de linhas de **A** e **p** é o n° de colunas de **B**).

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Exemplo:

$$\text{Dadas as matrizes } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ vamos determinar, se existirem, } A \cdot B$$

e $B \cdot A$.

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

- **c₁₁** (linha 1 de **A** e coluna 1 de **B**):

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

$$c_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 6$$

- **c₁₂** (linha 1 de **A** e coluna 2 de **B**):

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$$c_{12} = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 12$$

- c_{21} (linha 2 de **A** e coluna 1 de **B**):

-1	0	2
----	---	---

1
0
4

$$c_{21} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 7$$

- c_{22} (linha 2 de **A** e coluna 2 de **B**):

-1	0	2
----	---	---

-2
5
1

$$c_{22} = (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 4$$

$$\text{Logo, } C = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observações:

- A multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, em geral, $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- Valem as seguintes propriedades:
 - I. Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
 - II. Distributiva à direita em relação à adição: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
 - III. Distributiva à esquerda em relação à adição: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$

Matriz inversa

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**. A matriz **A** é dita **inversível** (ou **invertível**) se existe uma matriz **B** (quadrada de ordem **n**), tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Nesse caso, **B** é dita inversa de **A** e é indicada por A^{-1} .

Exemplo: Determine, se existir, a inversa de $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5a + 7c & 5b + 7d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos definir o valor das incógnitas pelos sistemas:

$$\begin{cases} 5a + 7c = 1 \\ 2a + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } c = -2 \text{ e } \begin{cases} 5b + 7d = 0 \\ 2b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -7 \text{ e } d = 5$$

Assim, concluímos que **A** é invertível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Determinantes

O determinante de uma matriz quadrada é o número real obtido a partir de operações entre os elementos da matriz.

Caso 2×2

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } \det M = a \cdot d - b \cdot c$$

Indicaremos esse número por: $\det M$ ou $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Exemplos:

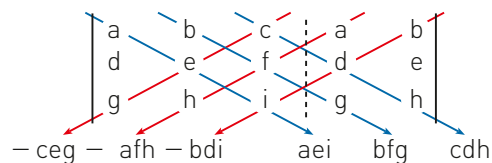
$$\bullet \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -6$$

$$\bullet \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1) = -2$$

Caso 3×3

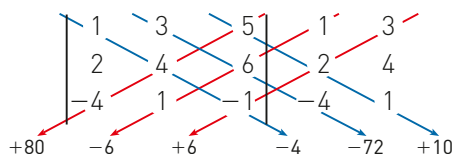
O determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ é o número real: $aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

que pode ser obtido pela **regra prática de Sarrus**:



Exemplo:

Vamos calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$



$$\det A = +80 - 6 + 6 - 4 - 72 + 10 = 14$$

Propriedades dos determinantes

Multiplicação de uma fila por um número real

Quando os elementos de uma fila (linha ou coluna) de \mathbf{A} são multiplicados por um número real \mathbf{k} , $k \neq 0$, obtemos a nova matriz \mathbf{A}' e vale a relação:

$$\det A' = k \cdot \det A$$

Exemplo:

Se \mathbf{R} é uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $\det R = -5$, qual é o valor de $\det(4 \cdot R)$?

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow 4 \cdot R = \begin{pmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{pmatrix}$$

Observe que a 1ª linha de \mathbf{R} é multiplicada por 4, o mesmo ocorrendo com a 2ª linha.

Daí, $\det(4 \cdot R) = 4 \cdot 4 \cdot \det R = 4^2 \cdot (-5) = -80$.

Teorema de Binet

Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes quadradas de mesma ordem, vale a relação:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B})$$

Matriz inversa e determinante

\mathbf{M} é inversível se, e somente se, $\det M \neq 0$.

Além disso, vale a relação: $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det M}$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & x \end{bmatrix}$ é inversível se $\det A \neq 0$, isto é,

$$3 \cdot x - (-4) \neq 0 \Rightarrow 3x + 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{4}{3}$$

Sistemas lineares

Equação linear

Equação linear nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n é toda equação do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

em que a_1, a_2, \dots, a_n e b são coeficientes reais.

Chamamos **b** de **coeficiente** (ou **termo**) **independente** da equação.

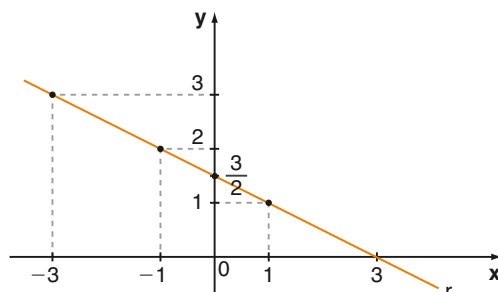
Exemplos:

- $2x + 3y - z = 5$
- $x + y = 2$
- $-x_1 + x_2 - x_3 = 0$

Sistemas lineares 2×2

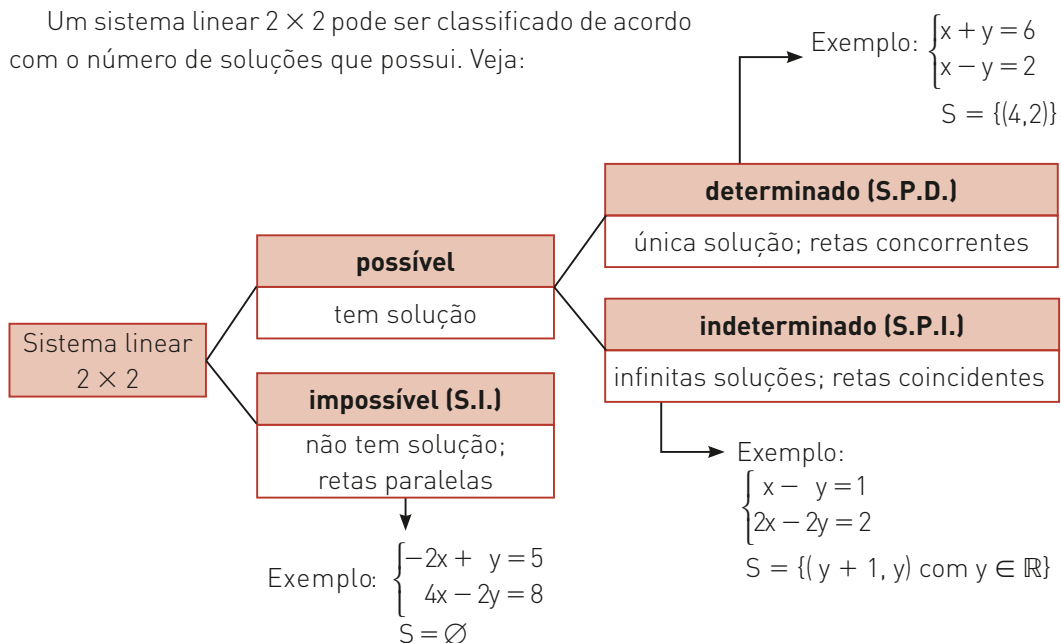
Um **sistema linear** 2×2 , nas incógnitas **x** e **y**, é um conjunto de duas equações lineares em que **x** e **y** são as incógnitas de cada uma dessas equações.

Uma equação linear com duas incógnitas (**x** e **y**) é representada, no plano cartesiano, por uma reta. Por exemplo, $x + 2y = 3$ é representada pela reta **r** abaixo:



x	y
-3	3
-1	2
0	$\frac{3}{2}$
1	1
3	0

Um sistema linear 2×2 pode ser classificado de acordo com o número de soluções que possui. Veja:



Sistemas escalonados

Observe os sistemas lineares a seguir:

$$\bullet \begin{cases} 4x - y + 2z = 5 \\ y - 3z = 7 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} 3x - y + 2z = -4 \\ 3y - z = 7 \end{cases}$$

Eles apresentam as seguintes características comuns:

- Em cada equação existe pelo menos um coeficiente (de alguma incógnita) não nulo.
- Considerando a ordem “de cima para baixo”, o número de coeficientes nulos, antes do 1º coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Os sistemas que apresentam tais características são chamados **sistemas escalonados**.

Escalonamento e resolução de um sistema

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ -3y - 3z = -15 \leftarrow (-2) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ -7y - 5z = -31 \leftarrow (-3) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$
$$\sim \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ -7y - 5z = -31 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ 2z = 4 \leftarrow 7 \cdot (2^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Daí: $z = 2 \Rightarrow y = 3$ e $x = 1$; $S = \{(1, 3, 2)\}$; S.P.D. (solução única).

Discussão de um sistema

Se o número de equações for igual ao número de incógnitas, vale a seguinte regra:

- $D \neq 0 \Rightarrow$ S.P.D.
- $D = 0 \Rightarrow$ S.P.I. ou S.I.

em que **D** é o determinante da matriz dos coeficientes do sistema.

Sistema homogêneo

Dizemos que um sistema linear é homogêneo se o termo (ou coeficiente) independente de cada uma de suas equações é igual a zero.

Exemplo:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 0 \\ -2x + 7y = 0 \end{cases}$$

Um sistema homogêneo com **n** incógnitas sempre admite a sequência $\underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ zeros}}$ como solução.

Essa solução é chamada **nula**, **trivial** ou **imprópria**. Desse modo, um sistema homogêneo é sempre possível, pois possui, ao menos, a solução nula.

Se o sistema só possui a solução nula, ele é possível e determinado.

Havendo outras soluções, além da solução nula, ele é possível e indeterminado. Essas soluções recebem o nome de **soluções próprias** ou **não triviais**.

Aplique o que aprendeu

Exercícios resolvidos

1. Resolva a equação matricial $A \cdot X = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solução:

Precisamos, inicialmente, determinar a ordem da matriz X .

Temos:

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & X & = & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (2 \times 2) & & (n \times p) & & (2 \times 1) \end{array}$$

$$n = 2 \text{ e } p = 1; \text{ assim: } x = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

$$\text{Daí, } \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ de onde resulta o sistema } \begin{cases} 5r + 7s = 4 \\ 2r + 3s = 1 \end{cases}$$

cujas soluções são $r = 5$ e $s = -3$.

$$\text{Assim, } X = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Para que valores de m o sistema a seguir é determinado, indeterminado e impossível?

$$\begin{cases} 2x + my = 3 \\ -4x + 6y = -6 \end{cases}$$

Solução:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & m \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 4m$$

Se $D \neq 0$, isto é, $12 + 4m \neq 0 \Rightarrow m \neq -3$, o sistema é determinado.

Se $D = 0$, isto é, $m = -3$, podemos ter S.P.I. ou S.I.

$$\text{Substituindo no sistema, vem: } \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 6y = -6 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ é indeterminado.}$$

Determinado: $m \neq -3$; indeterminado $m = -3$.

3. Determine $p \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema $\begin{cases} 4x - y + z = 0 \\ x + y + pz = 0 \\ 2x - 3y + 7z = 0 \end{cases}$ admita soluções próprias.

Solução:

Devemos ter S.P.I. Como o sistema é homogêneo, a condição $D = 0$ é suficiente, isto é:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & p \\ 2 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 28 - 2p - 3 - 2 + 12p + 7 = 0 \Rightarrow p = -3$$

 Questões

1. (Epcar-MG)

Considere **A**, **B**, **C** e **X** matrizes quadradas de ordem **n** e inversíveis. Assinale a alternativa FALSA.

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$c) A \cdot X \cdot C = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C^{-1} \cdot B$$

$$\text{d) } \det(2 \cdot A \cdot B^{-1}) = 2^n \cdot \frac{\det A}{\det B}$$

[illegible]

2. (Epcar-MG)

Carlos, Paulo e José resolveram fazer um lanche na praça de alimentação de um *shopping center*.

Ao observarem o cardápio disponível, perceberam que teriam que pedir o que era denominado de “Combo”, ou seja, um combinado de vários itens por um preço já especificado.

Assim, os Combos solicitados foram:

- **Combo 1: R\$ 15,00** → 2 hambúrgueres, 1 suco e 1 sobremesa
- **Combo 2: R\$ 24,00** → 4 hambúrgueres e 3 sucos
- **Combo 3: R\$ 35,00** → 5 sucos e 3 sobremesas

O valor individual dos hambúrgueres é o mesmo, bem como o valor individual dos sucos e o valor individual das sobremesas, não importando qual combo foi escolhido.

O quadro a seguir mostra a quantidade de cada um dos itens dos Combos que Carlos, Paulo e José consumiram:

	Hamburgüeres	Sucos	Sobremesas
Carlos	2	4	2
Paulo	3	3	0
José	1	2	2

Se Carlos, Paulo e José se organizaram para descobrir o valor individual de cada item e pagaram individualmente apenas pelo que cada um consumiu, então é correto afirmar que

- a) Carlos pagou R\$ 9,00 a mais que Paulo.
b) a diferença entre o que Carlos e José pagaram foi de R\$ 3,00.
c) Paulo e José pagaram o mesmo valor.
d) Carlos pagou mais que José, que pagou mais que Paulo.

[illegible]

3. (PUC-SP)

Uma matriz quadrada de ordem n é chamada triangular superior se $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Os elementos de uma matriz triangular superior T , de ordem 3, onde $i \leq j$, são obtidos a partir da lei de formação $t_{ij} = 2i^2 - j$. Sendo $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem 1×3 e A^t sua transposta, o produto $A \cdot T \cdot A^t$ é a matriz 1×1 cujo único elemento vale

- a) 0
b) 4
c) 7
d) 28

[illegible]

4. (ITA-SP)

Sejam $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Considere $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$. O valor de $\det(A^2 + A)$ é

- a) 144
b) 180
c) 240
- d) 324
e) 360

[illegible]

5. (Unicamp-SP)

Sendo **a** um número real, considere a matriz $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Então, A^{2017} é igual a

b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & a^{2017} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

[illegible]

6. (UPM-SP)

(UPM-SP)

Para a matriz quadrada $M = \begin{bmatrix} \cos 17^\circ & 0 & \sin 17^\circ \\ 1 & 1 & 1 \\ \sin 28^\circ & 0 & \cos 28^\circ \end{bmatrix}$ o valor do determinante de M^{10} é

a) $\frac{1}{16}$

b) $\frac{1}{32}$

c) $\frac{1}{64}$

d) $\frac{1}{128}$

e) $\frac{1}{256}$

[illegible]

7. (ITA-SP)

Considere o sistema de equações

$$S \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{27}{y^2} + \frac{8}{z^3} = 3 \\ \frac{4}{x} + \frac{81}{y^2} + \frac{40}{z^3} = 10 \\ \frac{2}{x} + \frac{54}{y^2} + \frac{24}{z^3} = 7 \end{cases}$$

Se (x, y, z) é uma solução real de **S**, então $|x| + |y| + |z|$ é igual a

a) 0

b) 3

c) 6

d) 9

e) 12

[illegible]

8. (UEPG-PR)

Uma empresa vai distribuir a quantia de R\$ 6 100,00 de gratificação para seus 30 funcionários. Cada funcionário de nível **A** vai receber R\$ 300,00; de nível **B**, R\$ 250,00 e de nível **C**, R\$ 100,00. Sabendo que os funcionários de nível **A** receberam, no total, o dobro dos de nível **C**, assinale o que for correto.

- 01) O número de funcionários de nível **C** é maior que 10.
02) Os funcionários de nível **A** receberam, no total, R\$ 2400,00.
04) Os funcionários de nível **B** receberam, no total, R\$ 3000,00.
08) O número de funcionários de nível **A** é 10.

[illegible]

9. (ESPM-SP)

Bia é 6 anos mais velha que Carla. Há 2 anos, a idade de Bia era o triplo da idade de Ana e daqui a 1 ano será igual à soma das idades de Ana e Carla. Podemos afirmar que:

- Ana tem 7 anos.
- Bia tem 12 anos.
- Ana é mais velha que Carla.
- Carla tem 6 anos.
- Ana e Carla têm a mesma idade.

[illegible]

Leia o texto para responder à questão a seguir.

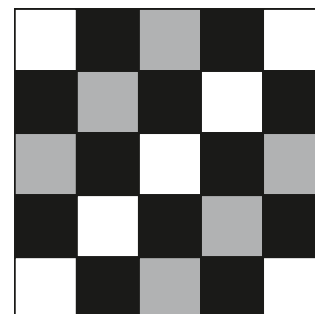
Uma tela de computador pode ser representada por uma matriz de cores, de forma que cada elemento da matriz corresponda a um *pixel*¹ na tela. Numa tela em escala de cinza, por exemplo, podemos atribuir 256 cores diferentes para cada *pixel*, do preto absoluto (código da cor: 0) passando pelo cinza intermediário (código da cor: 127) ao branco absoluto (código da cor: 255).

¹Menor elemento em uma tela ao qual é possível atribuir-se uma cor.

Suponha que na figura estejam representados 25 *pixels* de uma tela.

A matriz numérica correspondente às cores da figura apresentada é dada por

$$\begin{bmatrix} 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \\ 0 & 127 & 0 & 255 & 0 \\ 127 & 0 & 255 & 0 & 127 \\ 0 & 255 & 0 & 127 & 0 \\ 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \end{bmatrix}$$



10. (Fatec-SP)

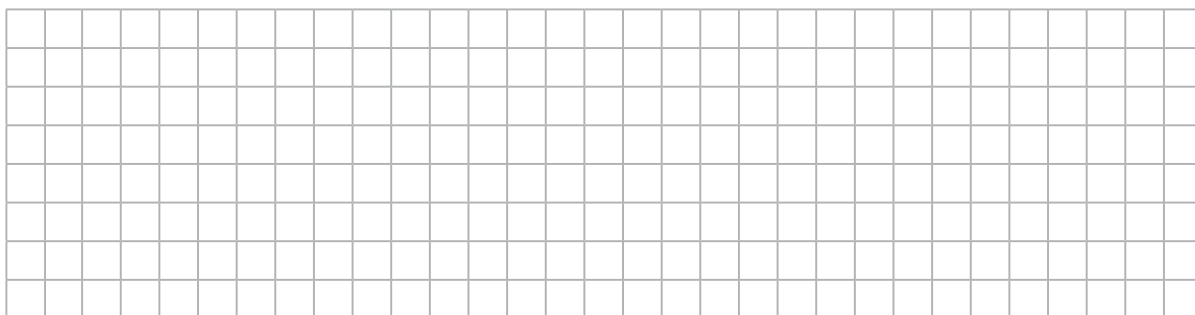
Uma matriz $M = (a_{ij})$, quadrada de ordem 5, em que i representa o número da linha e j representa o número da coluna, é definida da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ 127, & \text{se } i > j \\ 255, & \text{se } i < j \end{cases}$$

A matriz M corresponde a uma matriz de cores em escala de cinza, descrita pelo texto, em uma tela.

Sobre essa matriz de cores, pode-se afirmar que ela

- a) terá o mesmo número de *pixels* brancos e cinzas.
- b) terá o mesmo número de *pixels* brancos e pretos.
- c) terá o mesmo número de *pixels* pretos e cinzas.
- d) terá uma diagonal com cinco *pixels* brancos.
- e) terá uma diagonal com cinco *pixels* cinzas.



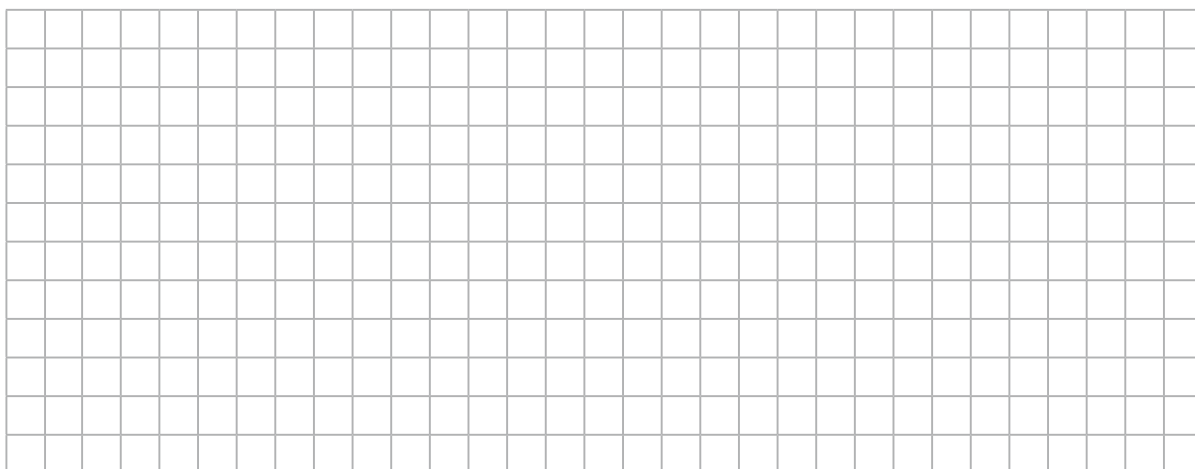
11. (Unicamp-SP)

Sejam a e b números reais. Considere, então, os dois sistemas lineares abaixo, nas variáveis x , y e z :

$$\begin{cases} x - y = a \\ z - y = 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = b \end{cases}$$

Sabendo que esses dois sistemas possuem uma solução em comum, podemos afirmar corretamente que

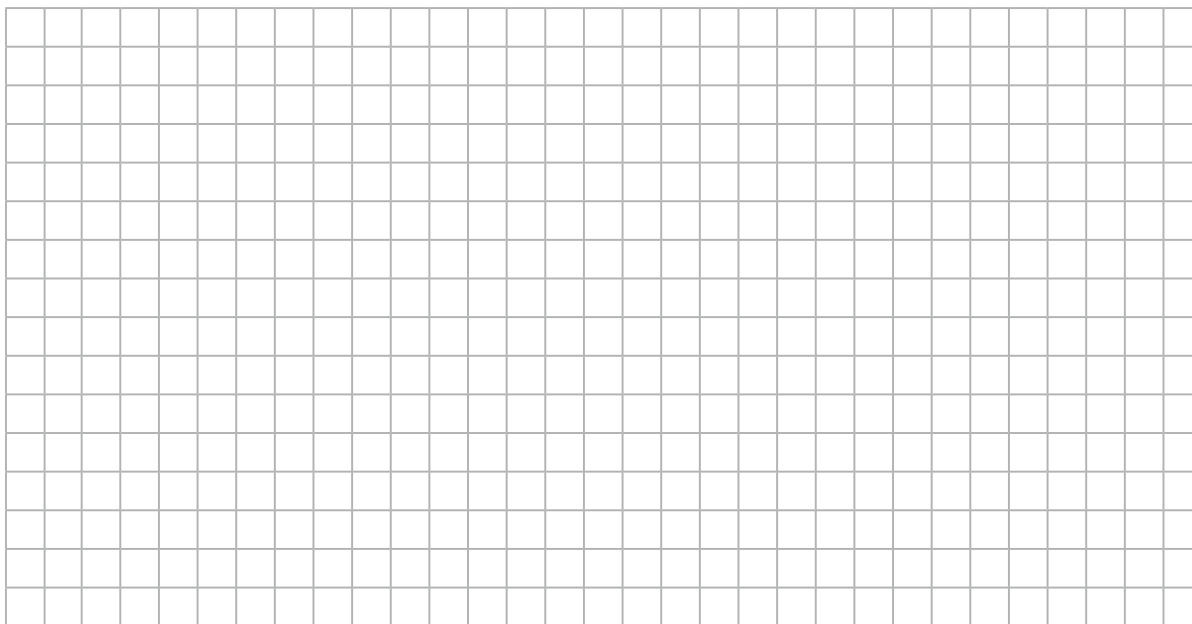
- a) $a - b = 0$.
- b) $a + b = 1$.
- c) $a - b = 2$.
- d) $a + b = 3$.



12. (ITA-SP)

Determine todos os valores reais de **a** para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

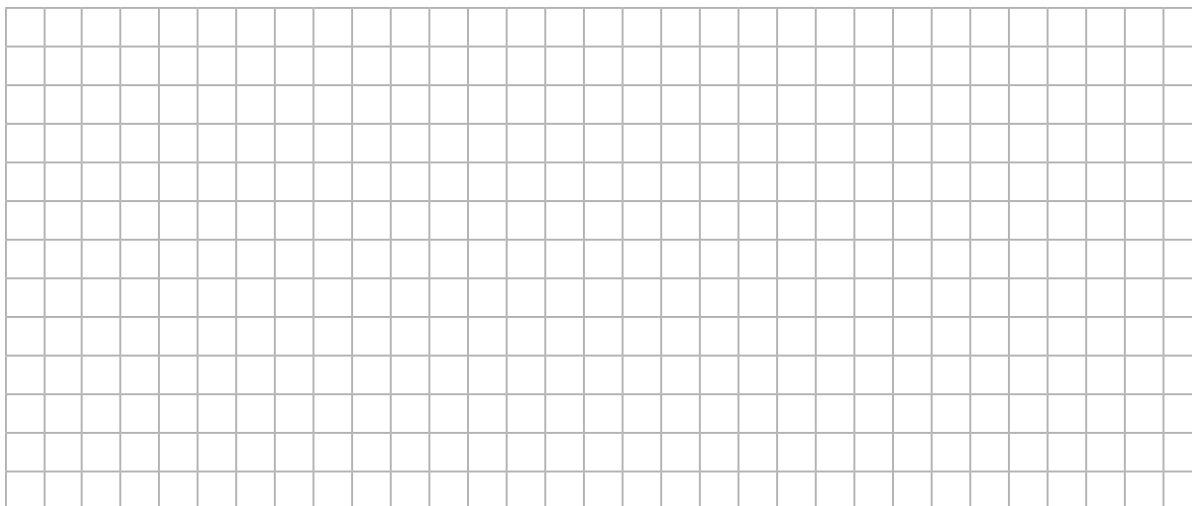
$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + az = 5 \end{cases}$$



13. (Unicamp-SP)

Sejam **a** e **b** números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $A^2 = aA + bI$, em que **I** é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto **ab** é igual a

- a) -2.
- b) -1.
- c) 1.
- d) 2.



16. (EFOMM-RJ)

Para descrever um código que permite transformar uma palavra **P** de três letras em um vetor $w \in \mathbb{R}^3$, inicialmente, escolhe-se uma matriz 3×3 . Por exemplo, a nossa “matriz código” será:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir da correspondência:

$A \rightarrow 1/B \rightarrow 2/C \rightarrow 3/D \rightarrow 4/E \rightarrow 5/F \rightarrow 6/G \rightarrow 7/H \rightarrow 8/I \rightarrow 9/J \rightarrow 10/L \rightarrow 11/M \rightarrow 12/N \rightarrow 13/O \rightarrow 14/P \rightarrow 15/Q \rightarrow 16/R \rightarrow 17/S \rightarrow 18/T \rightarrow 19/U \rightarrow 20/V \rightarrow 21/X \rightarrow 22/Z \rightarrow 23$

a palavra **P** é transformada em vetor **v** do \mathbb{R}^3 . Em seguida, o código da palavra **P** é obtido pela operação $w = Av$. Por exemplo, a palavra MAR corresponde ao vetor $(12, 1, 17) = v$, a qual é codificada com $w = Av = (26, 56, 29)$.

Usando o processo acima para decodificar $w = (64, 107, 29)$, teremos

- a) $x = 18, y = 14, z = 11$ / SOL
b) $x = 12, y = 5, z = 11$ / MEL
c) $x = 12, y = 1, z = 20$ / MAU
d) $x = 11, y = 20, z = 1$ / LUA
e) $x = 20, y = 21, z = 1$ / UVA

[illegible]

17. (ITA-SP)

Sejam **A** e **B** matrizes quadradas $n \times n$ tais que $A + B = A \cdot B$ e **I**_n a matriz identidade $n \times n$. Das afirmações:

- I. $I_n - B$ é inversível;
- II. $I_n - A$ é inversível;
- III. $A \cdot B = B \cdot A$.

é (são) verdadeira(s)

- a) Somente I.
b) Somente II.
c) Somente III.
d) Somente I e II.
e) Todas.

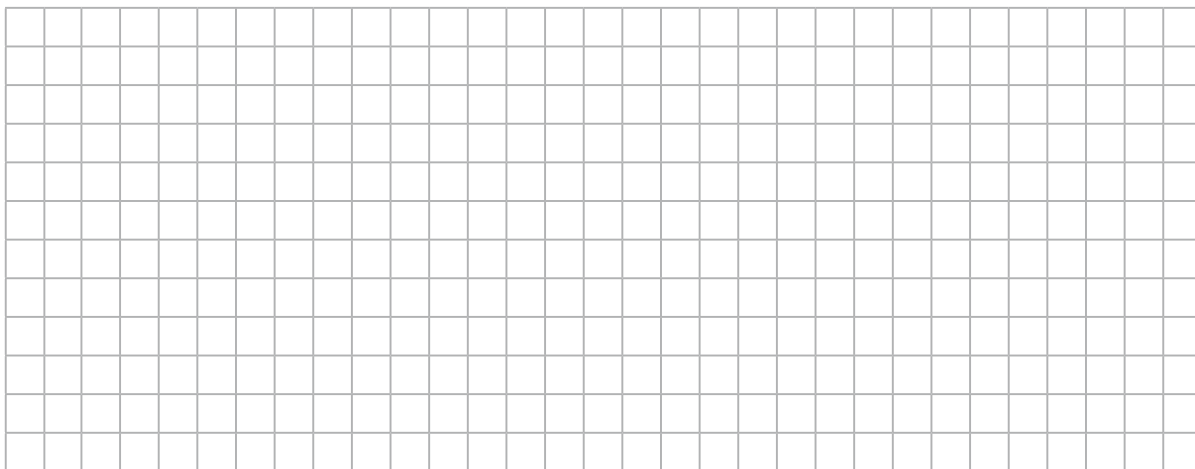
A blank sheet of graph paper featuring a uniform grid of small squares. The grid consists of 20 columns and 10 rows, providing a structured space for drawing or writing.

18. (EsPCEEx-SP)

Uma matriz quadrada **A**, de ordem 3, é definida por $a_{ij} = \begin{cases} i-j, & \text{se } i > j \\ (-1)^{i+j}, & \text{se } i \leq j \end{cases}$

Então $\det(A^{-1})$ é igual a

- a) 4
- b) 1
- c) 0
- d) $\frac{1}{4}$
- e) $\frac{1}{2}$



19. (Epcar-MG)

Sejam **a** e **b** números positivos tais que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ vale 24.

Dessa forma o determinante da matriz $\begin{bmatrix} \sqrt{b} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{a} \end{bmatrix}$ é igual a

- a) 0
- b) 6
- c) -6
- d) $\sqrt{6}$



20. (Epcar-MG)

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ \cos x & 1 & 0 \\ \sin x & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \det A$.

Sobre a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot |f(x)|$, em que $|f(x)|$ é o módulo de $f(x)$, é correto afirmar que

- a) possui período π .
- b) seu conjunto imagem é $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.
- c) é par.
- d) é crescente no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.



21. (UFPR)

Faça o que se pede.

a) Seja $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Sabendo que $\sin \alpha = 0,6$, calcule $\cos \alpha$ e o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Encontre todos os valores de $\theta \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz $B = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 1 & \cos \theta & \sin \theta \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ tem determinante $\det(B) = 1$.



22. (IFPE)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Anselmo e Pedro.
b) Eloi e Wagner.
c) Anselmo e Wagner.
d) Pedro e Eloi.
e) Wagner e Pedro.

[illegible]

23. (EsPCE_x-SP)

Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} a & a^3 - b^3 & b \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. Se **a** e **b** são números reais não nulos e $\det(M) = 0$, então o valor

de $14a^2 - 21b^2$ é igual a

- a) 15
b) 28
c) 35
d) 49
e) 70

A blank sheet of graph paper featuring a uniform grid of small squares. The grid consists of 20 columns and 15 rows, providing a structured space for drawing or writing.

Análise combinatória e probabilidade

Reveja o que aprendeu

Você deve ser capaz de:

- ▶ Resolver problemas de contagem usando o princípio multiplicativo (ou PFC).
- ▶ Resolver problemas envolvendo os agrupamentos simples com ou sem o uso de fórmulas.
- ▶ Resolver problemas envolvendo permutações com elementos repetidos.
- ▶ Definir espaço amostral e eventos em experimentos aleatórios.
- ▶ Calcular probabilidade em espaços equiprováveis ou não equiprováveis.
- ▶ Calcular a probabilidade da união e da interseção de dois eventos.
- ▶ Calcular probabilidades condicionais.
- ▶ Reconhecer eventos independentes.
- ▶ Usar a lei binomial da probabilidade.
- ▶ Expandir expressões do tipo $(a + b)^n$ usando o teorema binomial.
- ▶ Determinar o termo geral do Binômio de Newton.

Análise combinatória

Princípio multiplicativo (ou Princípio fundamental da contagem)

Suponha que uma sequência seja formada por k elementos $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$, em que:

- a_1 pode ser escolhido de n_1 maneiras distintas;
- a_2 pode ser escolhido de n_2 maneiras diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;
- a_3 pode ser escolhido de n_3 modos diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;
- \vdots
- a_k pode ser escolhido de n_k maneiras distintas, a partir das escolhas anteriores.

Então, o número de possibilidades para construir a sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ é:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$$

Fatorial

Dado um número natural n , definimos o **fatorial de n** (indicado por $n!$) por meio das relações:

$$\text{Se } n = 0, \text{ então } 0! = 1 \text{ (I)}$$

$$\text{Se } n = 1, \text{ então } 1! = 1 \text{ (II)}$$

$$\text{Se } n \geq 2, \text{ então } n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ (III)}$$

Por exemplo:

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Observe que:

$$n! = n \cdot (n - 1)!, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Exemplos:

- $\frac{7!}{9!} = \frac{7!}{9 \cdot 8 \cdot 7!} = \frac{1}{72}$
- $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n(n-1) = n^2 - n$

Agrupamentos simples: permutações, arranjos e combinações

São grupos de **k** elementos distintos escolhidos entre os **n** elementos de um conjunto, com $k \leq n$.

Permutações

Dados **n** elementos distintos, chama-se **permutação simples** ou simplesmente **permutação** todo **agrupamento ordenado** (sequência) formado por esses **n** elementos.

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \text{ isto é, } P_n = n!$$

↓

nª de permutações de **n** elementos

Arranjos

Dado um conjunto com **n** elementos distintos, chama-se **arranjo** desses **n** elementos, tomados **k** a **k** (com $k \leq n$), qualquer agrupamento ordenado de **k** elementos distintos escolhidos entre os **n** existentes.

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinações

Dados **n** elementos distintos, chama-se **combinação** desses **n** elementos tomados **k** a **k** (com $k \leq n$) qualquer **subconjunto** formado por **k** elementos distintos, escolhidos entre os **n**.

A combinação é um agrupamento **não ordenado**.

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{k!} \quad \text{ou} \quad C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Permutações com elementos repetidos

Dados **n** elementos, dos quais **n₁** são iguais a **a₁**, **n₂** são iguais a **a₂**, **n₃** são iguais a **a₃**, ..., **n_r** são iguais a **a_r**: (em que $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$), o número de permutações desses **n** elementos é dado por:

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

Exemplos:

- O número de anagramas da palavra PARAGUAI é:

$$P_8^{[3]} = \frac{8!}{3!} = 6720$$

- Já o número de anagramas de ITAPETININGA é:

$$P_{12}^{3, 2, 2, 2, 2} = \frac{12!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 9979200$$

3 letras I
 2 letras T
 2 letras N
 2 letras A

Binômio de Newton

Teorema binomial

Se $n \in \mathbb{N}$ e **a** e **b** números reais, temos:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

Por exemplo:

$$(3x + 2)^4 = \binom{4}{0} \cdot (3x)^4 + \binom{4}{1} \cdot (3x)^3 \cdot 2^1 + \binom{4}{2} \cdot (3x)^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3} \cdot (3x)^1 \cdot 2^3 + \binom{4}{4} \cdot 2^4$$

Isto é: $(3x + 2)^4 = 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$.

Observe que, no desenvolvimento de $(a - b)^n$ os termos são, alternadamente, positivos e negativos.

Termo geral

O termo $\binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ é chamado **termo geral** do binômio, pois, atribuindo valores para **k** ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), obtemos todos os termos do desenvolvimento de $(a + b)^n$.

Triângulo aritmético

$$\begin{array}{l}
 \text{linha 0} \quad \binom{0}{0} \\
 \text{linha 1} \quad \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
 \text{linha 2} \quad \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
 \text{linha 3} \quad \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
 \text{linha 4} \quad \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
 \dots \\
 \vdots \\
 \text{linha } \mathbf{k} \quad \binom{k}{0} \quad \binom{k}{1} \quad \binom{k}{2} \quad \binom{k}{3} \quad \binom{k}{4} \quad \dots \quad \binom{k}{k}
 \end{array}$$

Notemos que a expressão “linha **k**” significa a linha de “numerador” **k**.

Calculando cada coeficiente, obtemos:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Note que os elementos da linha n desse triângulo correspondem, ordenadamente, aos coeficientes obtidos no desenvolvimento binomial de $(a + b)^n$:

Coeficientes binomiais complementares

Dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são chamados **coeficientes binomiais complementares**.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{k} \Rightarrow p = k \text{ ou } p + k = n$$

Soma dos elementos da linha k

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k$$

Probabilidade

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado **espaço amostral** e é indicado pela letra grega Ω (lê-se “ômega”).

- No lançamento de uma moeda, o espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{K, C\}$, em que **K** representa a face cara e **C** representa a face coroa. Observe que $n(\Omega) = 2$, isto é, o número de elementos do conjunto Ω é igual a 2.
- No lançamento de um dado, o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Ao lançar um dado duas vezes, sucessivamente, considerando a sequência de números obtidos, temos:
 $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (2, 1), \dots, (3, 1), \dots, (4, 1), \dots, (5, 1), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$; $n(\Omega) = 36$.

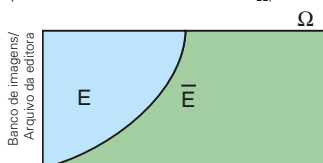
Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral (Ω) de um experimento aleatório.

Considerando o lançamento de um dado duas vezes, temos os seguintes eventos:

- E_1 : a soma dos pontos obtidos é 10.
 $E_1 = \{(5, 5); (4, 6); (6, 4)\}$
- E_2 : o produto dos números obtidos é menor que 7.
 $E_2 = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (3, 1); (3, 2); (4, 1); (5, 1); (6, 1)\}$

Evento complementar (\bar{E})

Seja **E** um evento de um espaço amostral Ω . Chamamos **evento complementar de E**, em relação a Ω (indica-se por \bar{E} ou \complement_{Ω}^E), o evento que ocorre quando **E** não ocorre.



Note que:

$$\begin{cases} E \cup \bar{E} = \Omega \\ E \cap \bar{E} = \emptyset \end{cases}$$

\bar{E} ocorre quando **E** não ocorre.

Frequência relativa e probabilidade

Considere uma moeda honesta. À medida que se aumenta o número de lançamentos dessa moeda, verifica-se, experimentalmente, que as frequências relativas correspondentes às ocorrências de cara $\left(\frac{\text{número de caras}}{\text{número total de lançamentos}}\right)$ e coroa ficam cada vez mais próximas entre si, tendendo à igualdade, dada pelo valor 0,50. Quando isso ocorre, dizemos que o espaço amostral relativo ao lançamento da moeda é **equiprovável**.

Seja $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ o espaço amostral finito de um experimento aleatório.

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, consideremos o evento elementar ou unitário $\{a_i\}$. Vamos associar a cada um desses eventos um número real, indicado por $p(\{a_i\})$ ou simplesmente p_i , chamado **probabilidade** de ocorrência do evento $\{a_i\}$, tal que:

- $0 \leq p_i \leq 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$
- $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$

Essa associação é feita de modo que p_i ($i = 1, 2, \dots, k$) seja suficientemente próximo da frequência relativa do evento $\{a_i\}$, quando o experimento é repetido um grande número de vezes.

Veja um exemplo em que uma moeda é viciada:

Imagine que ela foi lançada um número muito grande de vezes e observou-se que a frequência da face cara (**K**) é o dobro da frequência da face coroa (**C**).

Nesse caso, podemos supor a seguinte distribuição de probabilidades para $\Omega = \{K, C\}$:

$$p(\{K\}) = \frac{2}{3} \text{ e } p(\{C\}) = \frac{1}{3}. \text{ Note, no entanto, que } p(\{K\}) + p(\{C\}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

O espaço amostral relativo ao lançamento dessa moeda, nesse caso, é **não equiprovável**.

Probabilidades em espaços amostrais equiprováveis

Seja **E** um evento de Ω .

$$p(E) = \frac{\text{número de elementos de } E}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

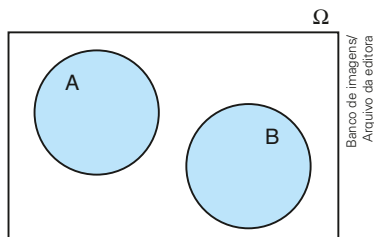
Informalmente, podemos interpretar a razão acima como: “a probabilidade de ocorrer um determinado evento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis (casos que nos interessam) e o número de casos possíveis (total de casos)”.

Probabilidade da união de dois eventos

É a probabilidade de ocorrer o evento **A** ou o evento **B**.

Consideremos dois casos:

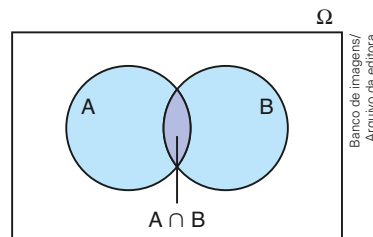
- $A \cap B = \emptyset$



$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Nesse caso, **A** e **B** são chamados **eventos mutuamente exclusivos**.

- $A \cap B \neq \emptyset$



$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Probabilidade condicional

É a probabilidade de ocorrer um certo evento, quando já temos um conhecimento parcial do resultado do experimento. Nesse caso, reduz-se o espaço amostral e se calculam probabilidades nesse novo espaço.

Sejam **A** e **B** eventos de Ω finito e não vazio. A probabilidade condicional do evento **A**, sabendo que ocorreu o evento **B**, é indicada por $p(A|B)$ e é dada por:

$$p(A|B) = p \frac{[A \cap B]}{p(B)}$$

Por exemplo: um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Sabendo que a soma dos números obtidos é maior que 9, qual é a probabilidade de terem ocorrido números iguais?

Com a informação dada, o número de casos **possíveis** passa a ser 6: $\Omega = \{(4, 6); (5, 5); (5, 6); (6, 4); (6, 5); (6, 6)\}$ e o número de casos favoráveis é 2: $\{(5, 5); (6, 6)\}$. A probabilidade pedida é $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Probabilidade da interseção de dois eventos

É a probabilidade da ocorrência simultânea (ou sucessiva) de dois eventos **A** e **B**.

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

Por exemplo: um lote com 40 lâmpadas idênticas contém 3 com defeitos de fabricação. Duas lâmpadas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Qual é a probabilidade de saírem duas lâmpadas sem defeito?

$$p = \frac{37}{40} \cdot \frac{36}{39} = \frac{111}{130}$$

prob. de a 1ª não ter defeito prob. de a 2ª não ter defeito sabendo que a 1ª não tem

Eventos independentes

Se $p(A|B) = p(A)$, ou seja, se o fato de ter ocorrido o evento **B** não altera a probabilidade de ocorrer o evento **A**, dizemos que **A** e **B** são **eventos independentes** e vale a relação:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Exemplo: A probabilidade de um despertador **A** não tocar na hora programada é de 10% e de um despertador **B** não tocar é de 15%. Uma certa noite, os dois foram programados para tocar na manhã seguinte. Qual é a probabilidade de que apenas um toque?

Há dois casos a considerar:

$$\mathbf{A \text{ toca e } B \text{ não toca}} \Rightarrow p = 0,9 \cdot 0,15 = 0,135$$

ou

$$\mathbf{B \text{ toca e } A \text{ não toca}} \Rightarrow p = 0,85 \cdot 0,10 = 0,085$$

Logo, a probabilidade pedida é $0,135 + 0,085 = 0,22 = 22\%$

Lei binomial da probabilidade

Se um experimento aleatório é repetido **n** vezes, em condições idênticas, com todas as repetições independentes entre si, a probabilidade de o evento **E** ocorrer **k** vezes ($0 \leq k \leq n$) é dada por:

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

em que **p** é a probabilidade de **E** ocorrer em qualquer repetição e $(1 - p)$ é a probabilidade de **E** não ocorrer em qualquer repetição desse experimento.

Aplique o que aprendeu

Exercícios resolvidos

1. Uma prova contém 8 testes, com cinco alternativas em cada. De quantas maneiras distintas podem ser respondidos todos os testes da prova?

Solução:

Cada maneira de responder à questão consta de uma sequência de oito elementos (x_1, x_2, \dots, x_8) , em que cada $x_i (1 \leq i \leq 8)$ pode ser escolhido de 5 modos distintos.

Assim, o número de respostas possíveis é:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^8 = 390625$$

2. Considerando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, responda:
- quantos números de quatro algarismos podemos formar?
 - quantos números pares de quatro algarismos distintos podemos formar?

Solução:

- a) É preciso construir uma sequência (x, y, z, w) de modo que:

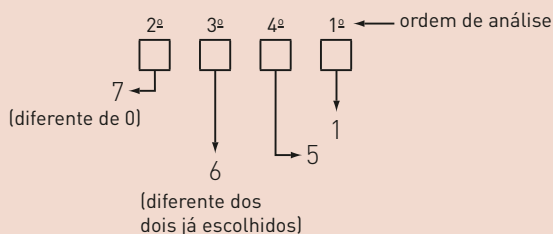
- x possa ser escolhido de 7 modos distintos, pois o número formado não pode começar por zero; observe que $0347 = 347$;
- y possa ser escolhido de 8 modos distintos, pois pode haver repetição de algarismos.

Para z e w , o raciocínio é análogo: há 8 opções de escolha para cada.

Assim, a quantidade de números é: $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 3584$.

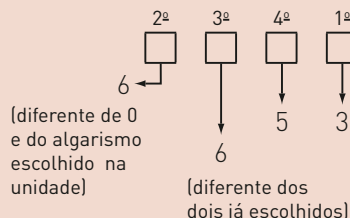
- b) Um número é par se o algarismo da unidade for par. Vamos iniciar a resolução pela "última casa", separando em dois casos:

1ª caso: o número termina por 0



$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1 = 210 \text{ números}$$

2ª caso: o número termina por 2, 4 ou 6



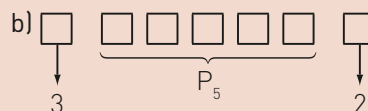
$$6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 = 540 \text{ números}$$

Ao todo são $210 + 540 = 750$ números.

3. Considere os anagramas formados com as letras da palavra JANEIRO.
- Quantos são?
 - Quantos começam e terminam por consoante?
 - Quantos têm as letras JAN juntas?

Solução:

- a) 7 letras; $P_7 = 7! = 5040$



$$3 \cdot 2 \cdot P_5 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

- c) [JAN] [E] [I] [R] [O]

5 blocos $\rightarrow P_5 = 5! = 120$

Dentro do bloco [JAN] $\rightarrow 3$ letras $\rightarrow P_3 = 3! = 6$

O total é $120 \cdot 6 = 720$

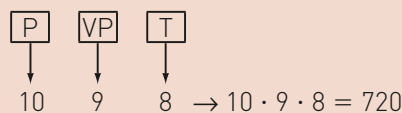
4. Para as eleições de um grêmio universitário, 10 alunos candidatam-se aos cargos de: presidente, vice e tesoureiro. De quantos modos distintos poderá ser feita essa escolha?

Solução:

Cada escolha consiste em um agrupamento ordenado do tipo (P, V, T) , isto é, um arranjo de 3 elementos escolhidos entre os 10 existentes. Temos:

$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$$

Poderíamos ter feito diretamente:



5. Em um colégio há 25 professores de Ensino Médio. Três deles serão escolhidos para participar de uma viagem pedagógica. De quantos modos distintos poderá ser feita a escolha?

Solução:

Cada escolha corresponde a uma combinação dos 25 professores, tomados 3 a 3, pois **não importa** a ordem de escolha dos professores.

$$\text{Temos: } C_{25,3} = \frac{25!}{3! \cdot 22!} = 2300$$

Podemos também resolver sem usar fórmula:

Primeiro, estipulamos o número de maneiras possíveis para escolher 3 determinados professores:

$$3 \cdot 2 \cdot 1$$

Como **não** importa a ordem, o resultado procurado é:

$$\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2300$$

6. Suponha que no grupo de professores do exercício 5 haja 10 homens e 15 mulheres. Quantas comissões de 2 homens e 3 mulheres poderão ser formadas?

Solução:

Para escolher os 2 homens, há $C_{10,2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$ opções.

Para cada uma das 45 opções, existem $C_{15,3} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = 455$ maneiras de escolher as 3 mulheres.

Logo, pelo PFC, o resultado é $45 \cdot 455 = 20475$.

7. Determine, se existir, o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$.

Solução:

O termo geral é $\binom{12}{k} \cdot (x^2)^{12-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k =$
 $= \binom{12}{k} \cdot x^{24-2k} \cdot \frac{(-1)^k}{x^k} = \binom{12}{k} \cdot x^{24-3k} \cdot (-1)^k$, para
 $k = 0, 1, \dots, 12$

Devemos ter:

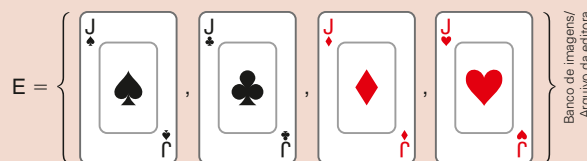
$24 - 3k = 0 \Rightarrow k = 8$, e o termo pedido é

$$\binom{12}{8} \cdot x^0 \cdot (-1)^8 = 495.$$

8. Considere um baralho comum (52 cartas), do qual extraímos uma ao acaso. Qual é a probabilidade de sair um Valete (J)?

Solução:

O evento **E** é formado por 4 elementos:



$$\text{Daí, } p(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

9. Um dado não viciado é lançado duas vezes sucessivamente. Qual é a probabilidade de ocorrer números diferentes?

Solução:

Há 36 resultados possíveis:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

Dentre eles, 6 apresentam números iguais:

$$\bar{E} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$p(\bar{E}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Logo, a probabilidade de ocorrer números diferentes é $p(E) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

10. Em uma escola lecionam 6 professores de Matemática, 4 de Física e 3 de Química. Deseja-se formar uma comissão de 3 professores representantes. Qual é a probabilidade de a comissão ser formada apenas por professores de Matemática?

Solução:

Há, ao todo, $6 + 4 + 3 = 13$ professores;

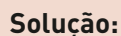
$n(\Omega) = C_{13,3} = 286$ (comissões com 3 professores quaisquer);

$n(E) = C_{6,3} = 20$ (comissões com 3 professores de Matemática).

Daí:

$$p(E) = \frac{20}{286} = \frac{10}{143}$$

11. Um dado não viciado é lançado. Qual é a probabilidade de ocorrer um número par ou um número maior que 4?


$$p(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

12. A probabilidade de que um componente eletrônico fabricado por certa empresa apresente alguma

falha é de 10%. Se forem analisados 8 desses componentes, qual é a probabilidade de que exatamente 2 apresentem falha?

Solução:

A probabilidade pedida é:

$$\binom{8}{2} \cdot 0,10^2 \cdot 0,90^6 \simeq 0,1488 \quad (14,88\%)$$

Questões

1. (EBMSP-BA)

Cada uma das 12 pessoas inscritas para participar de um trabalho voluntário recebeu um crachá com um número de identificação distinto – de 1 a 12 – de acordo com a ordem de inscrição.

Desejando-se organizar grupos formados por três pessoas que não estejam identificadas por três números consecutivos, o número máximo possível de grupos distintos que se pode formar é

- a) 230 c) 220 e) 210
b) 225 d) 215

[illegible]

2. (UEFS-BA)

Uma estudante ainda tem dúvidas quanto aos quatro últimos dígitos do número do celular de seu novo colega, pois não anotou quando ele lhe informou, apesar de saber quais são não se lembra da ordem em que eles aparecem.

Nessas condições, pode-se afirmar que o número de possibilidades para a ordem desses quatro dígitos é

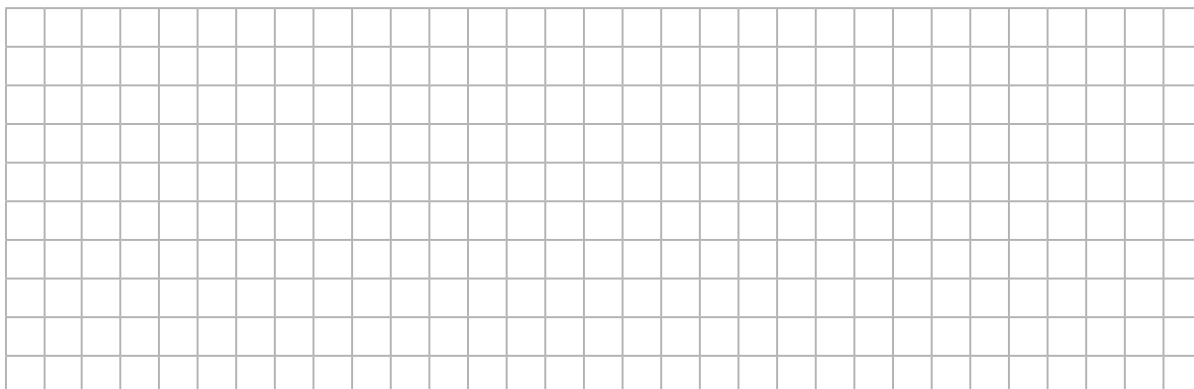
- a) 240 c) 96 e) 16
b) 160 d) 24

[illegible]

3. (Uece)

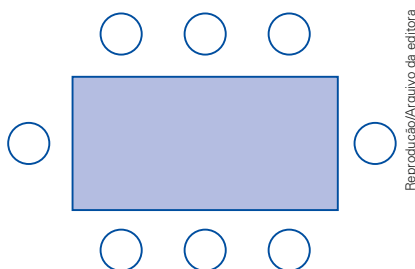
A turma **K** do Curso de Administração da UECE é formada por 36 alunos, sendo 22 mulheres e 14 homens. O número de comissões que podem ser formadas com alunos desta turma, tendo cada comissão três componentes e sendo assegurada a participação de representantes dos dois sexos em cada comissão, é

- a) 5 236
- b) 6 532
- c) 3 562
- d) 2 635



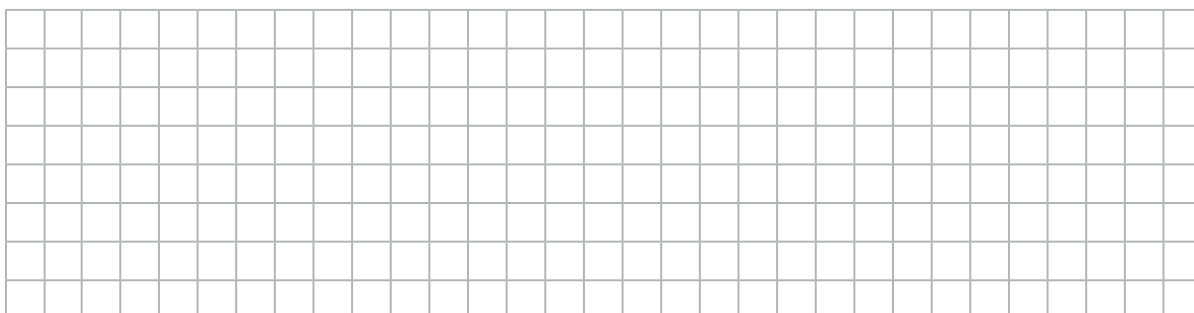
4. (UPE)

Oito amigos entraram em um restaurante para jantar e sentaram-se numa mesa retangular, com oito lugares, como mostra a figura a seguir:



Dentre todas as configurações possíveis, quantas são as possibilidades de dois desses amigos, Amaro e Danilo, ficarem sentados em frente um do outro?

- a) 1 440
- b) 1 920
- c) 2 016
- d) 4 032
- e) 5 760



5. (Uneb-BA)

DANOS DE ALIMENTOS ÁCIDOS

O esmalte dos dentes dissolve-se prontamente em contato com substâncias cujo pH (medida da acidez) seja menor do que 5,5. Uma vez dissolvido, o esmalte não é repostado, e as partes mais moles e internas do dente logo apodrecem. A acidez de vários alimentos e bebidas comuns é surpreendentemente alta; as substâncias listadas a seguir, por exemplo, podem causar danos aos seus dentes com contato prolongado.

(BREWER. 2013, p. 64).

Comida/bebida	pH
Suco de limão/lima	1,8 – 2,4
Café preto	2,4 – 3,2
Vinagre	2,4 – 3,4
Refrigerantes de cola	2,7
Suco de laranja	2,8 – 4,0
Maçã	2,9 – 3,5
Uva	3,3 – 4,5
Tomate	3,7 – 4,7
Maionese/ molho de salada	3,8 – 4,0
Chá preto	4,0 – 4,2

Considere que em um laboratório foram verificadas, por um técnico, duas amostras de alimentos que constam na tabela e que o pH dessas substâncias era, respectivamente, 3,2 e 4,2.

Nessas condições, de posse dessa tabela, pode-se afirmar que o número de maneiras distintas que esse técnico tem para tentar identificar, de maneira correta, quais foram os dois alimentos examinados é igual a

a) 9 b) 10 c) 12 d) 14 e) 15

[illegible]

6. (Uespi)

Um polígono convexo com 15 lados tem todos os seus vértices em uma circunferência. Se não existem três diagonais do polígono que se interceptam no mesmo ponto, quantas são as interseções das diagonais do polígono?

a) 1360 b) 1365 c) 1370 d) 1375 e) 1380

[illegible]

7. (Uern)

Uma família do interior, composta por 10 pessoas, necessita fazer uma viagem de retorno à cidade de origem após passar férias no litoral. A viagem será feita de ônibus, no domingo, e apenas dois horários estão disponíveis. De quantas maneiras poderão viajar essas pessoas de forma que a metade da família viaje num ônibus e a outra metade no outro?

- a) 45 b) 252 c) 136 d) 90

[illegible]

8. (Cefet-MG)

Como prêmio pela vitória em uma competição, serão distribuídas 12 moedas de ouro idênticas entre as três pessoas da equipe vencedora, e cada uma deverá receber, pelo menos, duas moedas. O número de maneiras distintas de efetuarmos essa distribuição é

- a) 12 b) 28 c) 38 d) 40 e) 120

[illegible]

9. (UFPB)

A prefeitura de certo município solicitou ao Governo Federal uma verba para a execução das seguintes obras:

- saneamento básico;
- calçamento de ruas;
- construção de uma escola;
- construção de uma creche;
- construção de casas populares.

O Governo Federal aprovou a concessão da verba solicitada, na condição de que fosse estabelecida uma ordem na execução das obras, de modo que, tendo sido liberada a verba para a primeira obra, a verba para a segunda só seria liberada após a conclusão da primeira, e assim sucessivamente até a execução da última obra. Nesse contexto, considere o planejamento feito pela prefeitura:

- a primeira obra escolhida foi a construção das casas populares;
- o calçamento das ruas só poderá ser executado com o saneamento básico concluído.

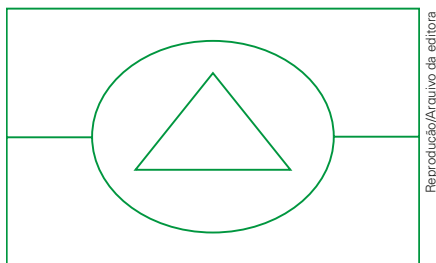
Atendendo às condições estabelecidas pelo Governo Federal e ao planejamento da prefeitura, é correto afirmar que o número de maneiras possíveis e distintas para a realização dessas 5 obras é:

- a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16

[illegible]

12. (Unisinos-RS)

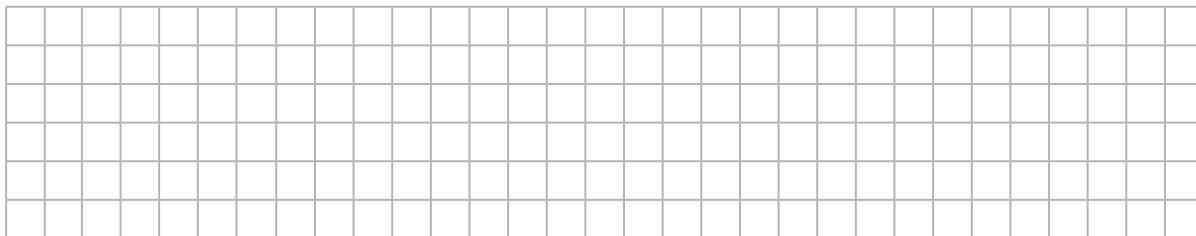
A bandeira a seguir está dividida em 4 regiões. Cada região deverá ser pintada com uma cor, e regiões que fazem fronteira devem ser pintadas com cores diferentes.



Reprodução/Arquivo da editora

Sabendo que dispomos de 6 cores, de quantas maneiras distintas podemos pintar essa bandeira?

- a) 20
- b) 24
- c) 120
- d) 600
- e) 720



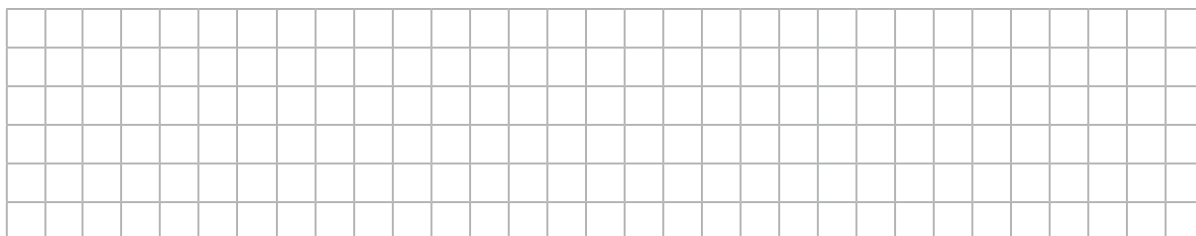
13. (UPE)



Reprodução/UPE, 2016

Se dois dados idênticos e não viciados são lançados, a probabilidade de a soma dos pontos obtidos ser um múltiplo de 2 ou um múltiplo de 3 é de aproximadamente

- a) 66,6%
- b) 60,0%
- c) 55,2%
- d) 35,3%
- e) 33,0%



14 (Uespi)

Júnior já leu três livros de sua coleção de 12 livros. Escolhendo ao acaso três livros da coleção, qual a probabilidade de Júnior não ter lido nenhum dos três?

- a) $\frac{31}{55}$
b) $\frac{29}{55}$
c) $\frac{27}{55}$
d) $\frac{23}{55}$
e) $\frac{21}{55}$

[illegible]

15. (UEG-GO)

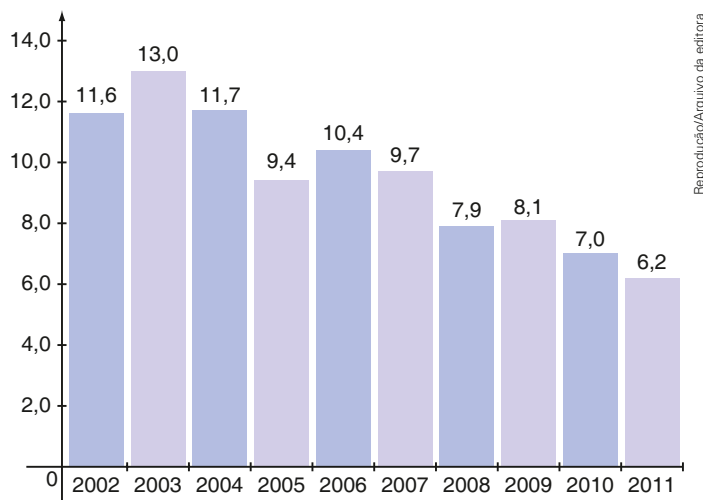
Renata está grávida e realizará um exame que detecta o sexo do bebê. Se o exame detectar que é um menino, a probabilidade de ela pintar o quarto do bebê de azul é de 70%, ao passo que de branco é de 30%. Mas, se o exame detectar que é uma menina, a probabilidade de ela pintar o quarto do bebê de rosa é de 60% contra 40% de pintar de branco. Sabendo-se que a probabilidade de o exame detectar um menino é de 50%, a probabilidade da Renata pintar o quarto do bebê de branco é de

- a) 70%
- b) 50%
- c) 35%
- d) 30%
- e) 20%

[illegible]

18. (UEG-GO)

O gráfico abaixo mostra a evolução da taxa de desemprego nos meses de junho de 2002 a 2011, para o conjunto das seis regiões metropolitanas brasileiras abrangidas pela pesquisa.



Escolhendo aleatoriamente um dos anos descritos no gráfico utilizado, a probabilidade de que no ano escolhido a taxa de desemprego, no mês de junho, seja superior a 9,3% é igual a

- a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{4}{6}$

[illegible]

19. (Уера)

Os números alarmantes relativos à violência doméstica levaram a Organização Mundial de Saúde (OMS) a reconhecer a gravidade que o fenômeno representa para a saúde pública e recomendar a necessidade de efetivação de campanhas nacionais de alerta e prevenção. No Brasil, apesar de não haver estatísticas oficiais, algumas organizações não governamentais de apoio às mulheres e crianças vítimas de maus-tratos apresentam números assustadores da violência doméstica. Estima-se que, a cada 4 (quatro) minutos uma mulher seja vítima de violência doméstica. Dos 850 inquéritos policiais instaurados na 1ª e 3ª Delegacia de Defesa da Mulher de São Paulo, 82% se referem a lesões corporais dolosas.

(Fonte: <http://jus.com.br/revista/texto/7753/a-violenciadomestica-como-violacao-dos-direitos-humanos>).

Acesso em 9 de setembro de 2011 – Texto Adaptado)

A probabilidade de ser escolhido aleatoriamente um desses inquéritos policiais e de ele *não se referir a lesões corporais dolosas* é de:

- a) 0,18 b) 0,19 c) 0,20 d) 0,21 e) 0,22

[illegible]

20. (Acafe-SC)

Um candidato em um concurso realiza uma prova de múltipla escolha, em que cada questão apresenta 4 alternativas, sendo uma, e apenas uma, correta. Esse candidato sabe 68% das questões da prova; as demais questões ele marca aleatoriamente uma das alternativas. Então, a probabilidade de ele acertar uma questão qualquer da prova (isto é, de uma questão escolhida ao acaso) é igual a:

- a) 92% b) 76% c) 93% d) 85%

[illegible]

21. (PUC-RS)

Dois dados são jogados simultaneamente. A probabilidade de se obter soma igual a 10 nas faces de cima é

- a) $\frac{1}{18}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{5}$

[illegible]

22. (UCS-RS)

Numa cidade com 60 000 domicílios, 35 000 deles têm acesso à internet, 25 000 têm assinatura de TV a cabo, e um terço do número de domicílios não tem acesso a nenhum dos dois recursos.

Qual é a probabilidade de um domicílio da cidade, escolhido ao acaso, ter acesso à internet e não ter assinatura de TV a cabo?

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{7}{12}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{7}{8}$

A blank sheet of graph paper with a grid of squares. The grid consists of 20 columns and 10 rows of small squares. There are no margins or additional markings on the page.

25. (UFRGS-RS)

Para a disputa da Copa do Mundo de 2014, as 32 seleções que se classificarem serão divididas em 8 grupos, os quais serão constituídos de 4 seleções cada um. Nos jogos da primeira fase, cada seleção jogará com todas as outras seleções do seu grupo. Uma empresa adquiriu um ingresso para cada jogo da primeira fase do mesmo grupo. Ao sortear dois ingressos entre seus funcionários, a probabilidade de que esses ingressos envolvam uma mesma seleção é

- a) 20%. c) 50%. e) 85%.
- b) 25%. d) 80%

[illegible]

26. (UFRGS-RS)

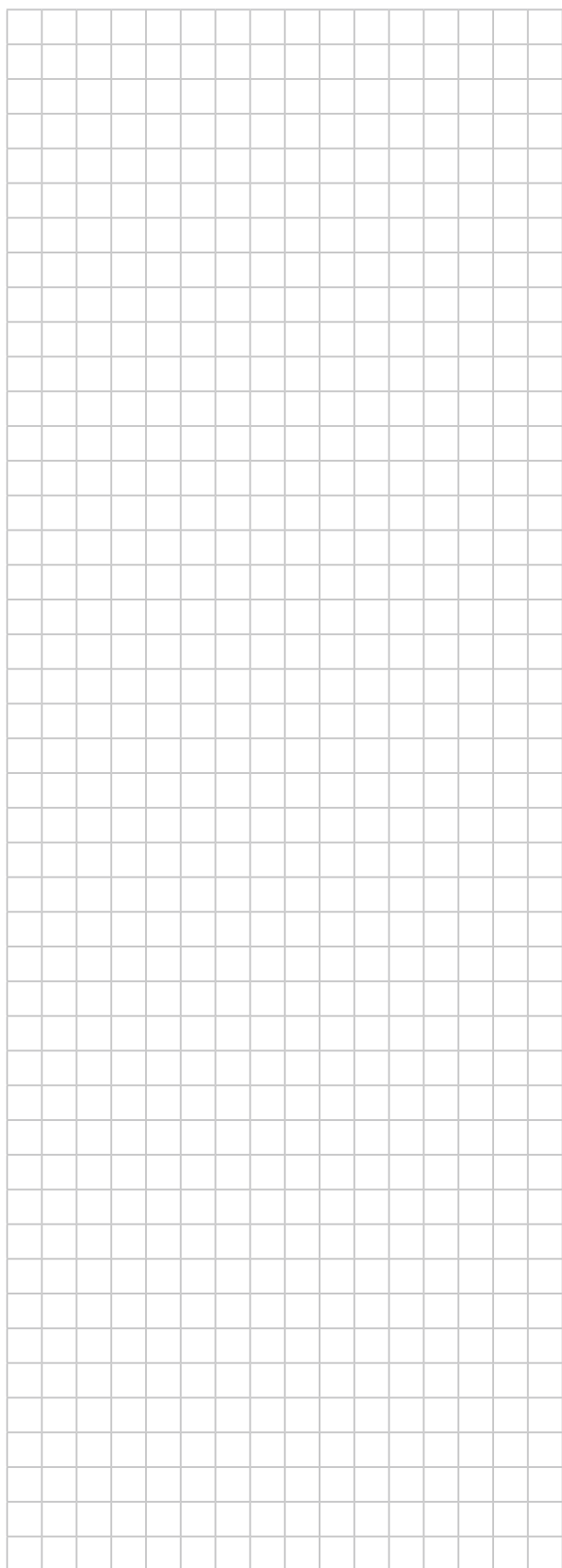
O Google, *site* de buscas na internet criado há onze anos, usa um modelo matemático capaz de entregar resultados de pesquisas de forma muito eficiente. Na rede mundial de computadores, são realizadas, a cada segundo, 30 000 buscas, em média. A tabela a seguir apresenta a distribuição desse total entre os maiores *sites* de busca.

<i>Site</i>	Buscas
Google	21 000
Yahoo	2 700
Microsoft	800
Outros	5 500
Total	30 000

De acordo com esses dados, se duas pessoas fazem simultaneamente uma busca na internet, a probabilidade de que pelo menos uma delas tenha usado o Google é

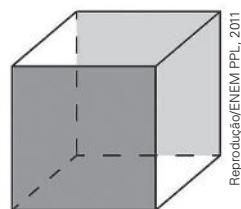
- a) 67%. c) 83%. e) 99%.
b) 75%. d) 91%.

[illegible]



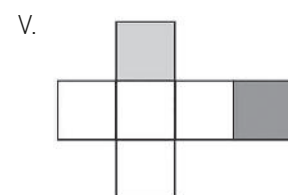
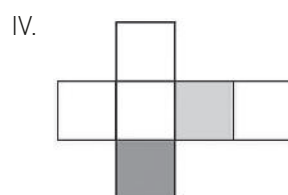
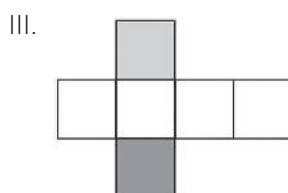
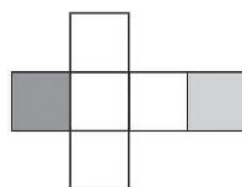
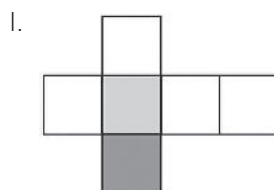
1. (Enem)

Uma empresa que embala seus produtos em caixas de papelão, na forma de hexaedro regular, deseja que seu logotipo seja impresso nas faces opostas pintadas de cinza, conforme a figura:



Reprodução/ENEM PPL, 2011

A gráfica que fará as impressões dos logotipos apresentou as seguintes sugestões planificadas:



Ilustrações: Reprodução/ENEM PPL, 2011

Que opção sugerida pela gráfica atende ao desejo da empresa?

- a) I b) II c) III d) IV e) V

2. (UEM-PR)

Sabendo que \mathbf{r} , \mathbf{s} e \mathbf{t} são três retas no espaço tridimensional com \mathbf{r} e \mathbf{s} paralelas distintas, assinale o que for correto.

- 01) Se a reta \mathbf{r} é perpendicular a um plano α , então a reta \mathbf{s} também é perpendicular ao plano α .
- 02) Se a reta \mathbf{t} é concorrente com a reta \mathbf{s} , então \mathbf{t} também é concorrente com a reta \mathbf{r} .
- 04) Se um plano β contém a reta \mathbf{s} , então o plano β também contém a reta \mathbf{r} .
- 08) Se a reta \mathbf{t} é perpendicular à reta \mathbf{r} , então \mathbf{t} é perpendicular ou ortogonal à reta \mathbf{s} .
- 16) Se as três retas \mathbf{r} , \mathbf{s} e \mathbf{t} são paralelas distintas, então existe um plano α que contém as três retas.

3. (EBMSP-BA)

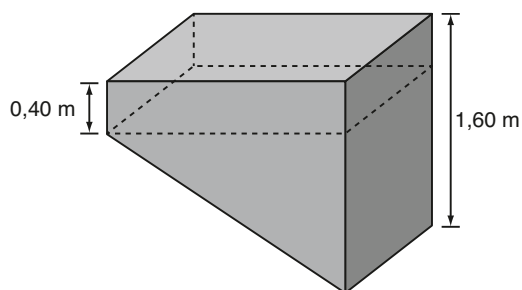


Figura 1

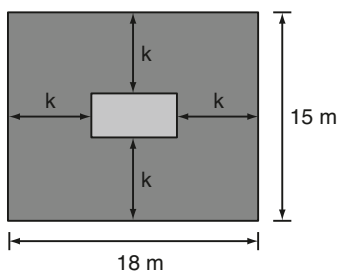
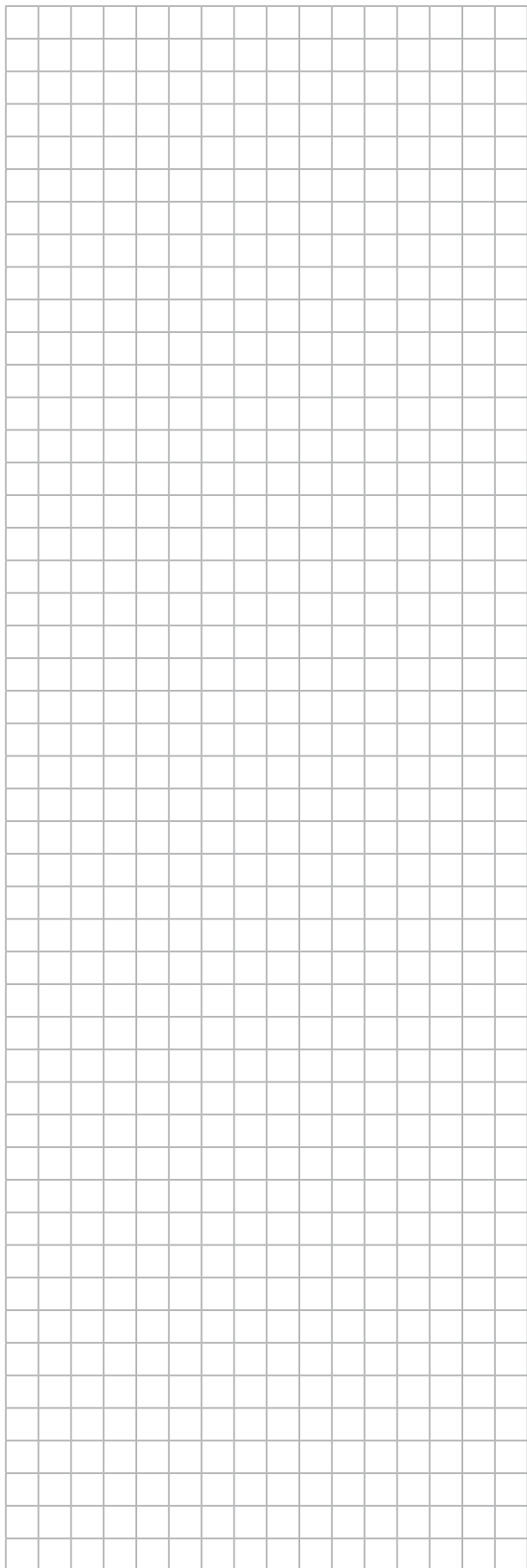


Figura 2

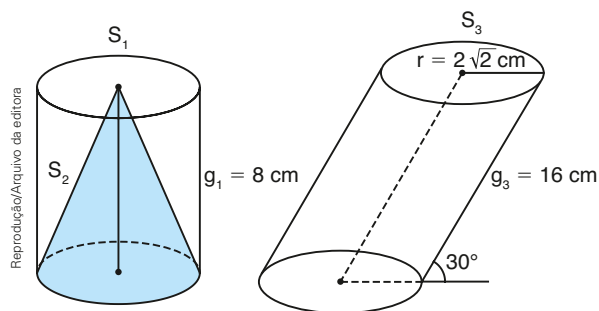
Uma piscina deve ser construída, como representada na figura 1, em um terreno retangular de dimensões 18,0 m por 15,0 m.

Sabendo que a piscina foi projetada tendo cada um dos lados paralelo aos lados do terreno, como indicado na figura 2, calcule o valor de k – distância do lado do terreno à borda da piscina – para que a capacidade máxima da piscina seja igual a $18,0 \text{ m}^3$.



4. (UEMG)

Observe as figuras.



Nas figuras acima, tem-se um cilindro circular equilátero (S_1), circunscrevendo um cone (S_2), e um cilindro circular oblíquo (S_3). A razão determinada pelo volume de S_3 com a superfície total de S_2 é

- a) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ cm.
- b) $\sqrt{5}-1$ cm.
- c) $\frac{\sqrt{5}+16}{4}$ cm.
- d) $\sqrt{5}+16$ cm.

5. (IME-RJ)

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ com $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se

que $\det(A^2 - 2A + I) = 16$. A soma dos valores de a que satisfazem essa condição é:

Obs.: $\det(X)$ denota o determinante da matriz X .

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

6. (IME-RJ)

Classifique o sistema abaixo como determinado, possível indeterminado e impossível, de acordo com os valores reais de m .

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = m + 1 \\ 2x + my + 2z = m^2 + 2 \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = m^3 + 3 \end{cases}$$

7. (EFOMM-RJ)

Determine uma matriz invertível **P** que satisfaça

a equação $P^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) $P = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{10}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix}$

d) $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{9} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 6 & -15 \end{bmatrix}$

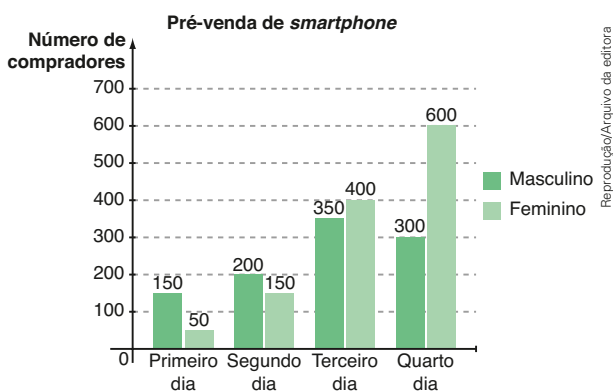
e) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

c) $P = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

8. (UFU-MG)

Uma loja que comercializa celulares registrou, em uma campanha de lançamento, o número de compradores, femininos e masculinos, de um novo modelo de *smartphone*.

O gráfico a seguir descreve o ocorrido nos quatro dias de pré-venda desse modelo.



Com o sucesso de vendas, a loja decidiu sortear um acessório para este modelo de *smartphone* entre os compradores femininos e outro acessório entre os compradores masculinos.

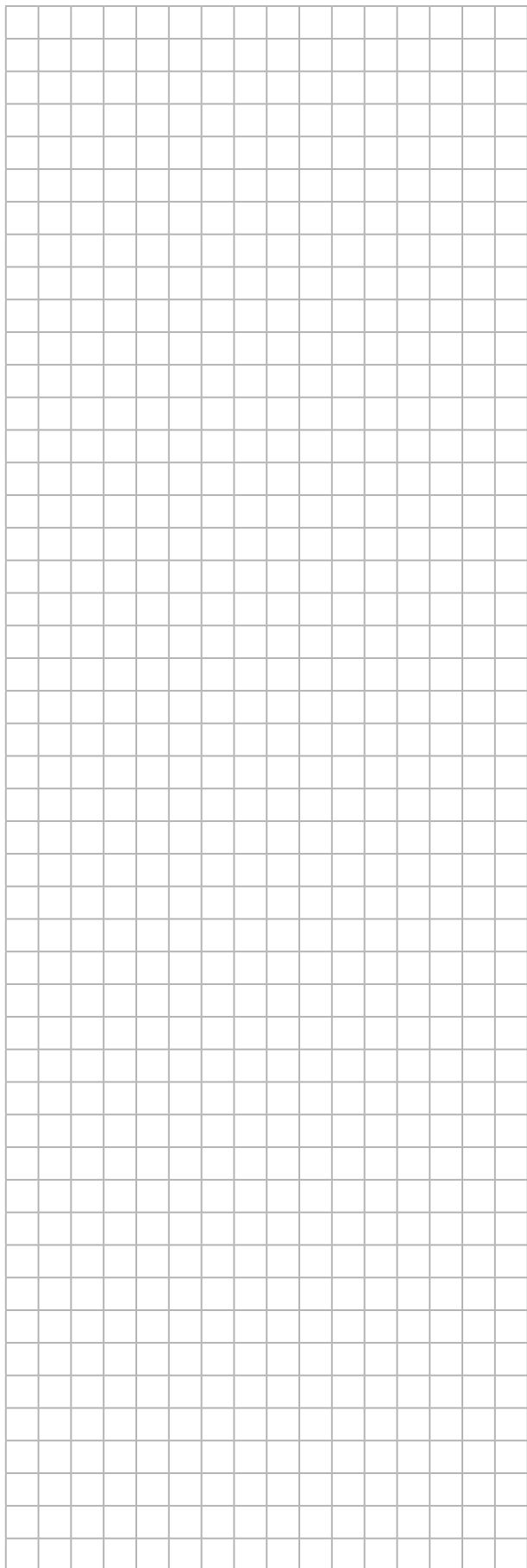
Qual é a probabilidade de que um dos sorteados tenha feito sua compra no primeiro dia de pré-venda e outro no último dia de pré-venda?

a) $\frac{17}{120}$

c) $\frac{7}{80}$

b) $\frac{11}{20}$

d) $\frac{1}{40}$



9. (PUC-SP)

Um bloco maciço de madeira na forma de um prisma reto de base retangular medindo 18 cm por 24 cm e com 30 cm de altura, foi totalmente dividido em cubinhos iguais e de maior aresta possível. Supondo que não tenha ocorrido perda alguma no corte do bloco, o volume de um cubinho é

- a) 64 cm^3 .
- b) 125 cm^3 .
- c) 216 cm^3 .
- d) 343 cm^3 .

10. (Udesc)

No dia primeiro de janeiro de 2011, ocorrerá a cerimônia de posse do(a) novo(a) Presidente(a) da República. Um dos atos solenes desta cerimônia é a subida da rampa do Palácio do Planalto, sede do governo brasileiro que pode ser vista na Figura.



Palácio do Planalto

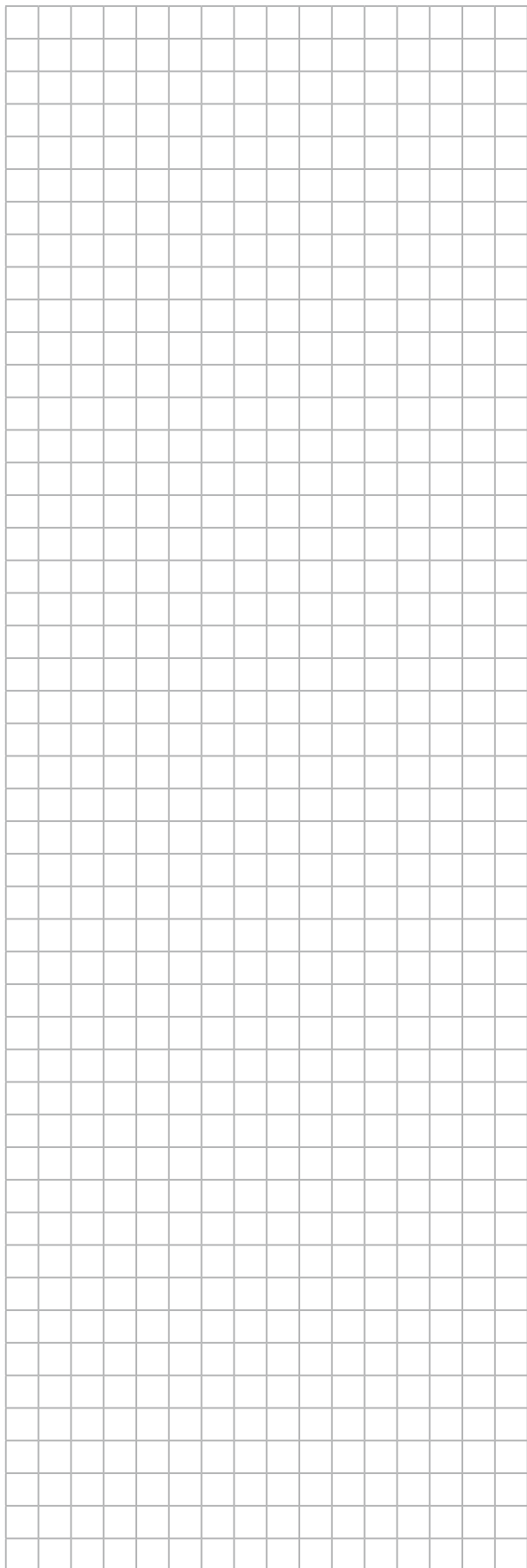
Suponha que essa rampa possua uma elevação de 15° em relação à sua base e uma altura de $3\sqrt{2}$ m. Então o(a) novo(a) Chefe de Estado, ao subir toda a rampa presidencial, percorrerá uma distância de:

- a) $6\sqrt{3} - 1$ m
- d) $6\sqrt{3} + 6$ m
- b) $8\sqrt{3} + 8$ m
- e) $4\sqrt{3} - 2$ m
- c) $6\sqrt{3} - 2$ m

11. (IFCE)

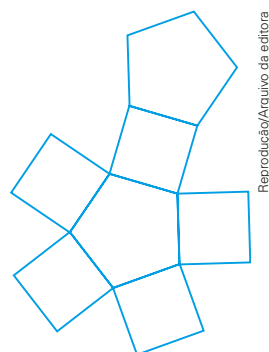
Foram construídos dois cubos de madeira. Um deles tem 343 cm^3 de volume e o outro tem aresta medindo 2 cm a mais que o primeiro. A área total do maior cubo, em centímetros quadrados, é

- a) 538.
- d) 729.
- b) 486.
- e) 4374.
- c) 678.



15. (IFSP)

A figura abaixo representa a planificação de um poliedro **P**:



Avalie as afirmações **I**, **II** e **III** sobre o poliedro representado pela planificação:

- I. O número de arestas do poliedro **P** corresponde a uma vez e meia o número de vértices.
- II. O poliedro **P** tem, pelo menos, duas faces paralelas.
- III. O poliedro **P** pode ser classificado como pentágono.

Contém uma afirmação verdadeira:

- a) apenas II.
- b) apenas I e II.
- c) apenas I e III.
- d) apenas II e III.
- e) I, II e III.

16. (UEG-GO)

Érika resolve passear com a cachorrinha Kika e, antes de sair do apartamento, escolhe colocar uma roupa e uma coleira na cachorrinha. Se Kika tem 7 roupas e 3 coleiras, todas distintas, de quantas maneiras Érika pode escolher uma roupa e uma coleira para passear com a Kika?

- a) 10
- b) 21
- c) 35
- d) 42

17. (Epcar-MG)

Se uma pirâmide hexagonal regular está inscrita num cone equilátero cujo volume é igual a $\frac{10\sqrt{3}}{7}\pi \text{ cm}^3$, então o volume dessa pirâmide, em cm^3 , é igual a

- a) $\frac{45}{7}$
- b) $\frac{15\sqrt{3}}{7}$
- c) $\frac{30\sqrt{3}}{7}$
- d) $\frac{135}{7}$

18. (Acafe-SC)

Uma pirâmide de base triangular regular reta e um cone reto estão inscritos num cilindro reto, cujo raio da base é r e altura h . A relação entre a altura e o raio do cilindro, para que a diferença entre o volume do cone e da pirâmide seja

equivalente a $\left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right)$ unidades, é:

a) $r^2h = 1$.

b) $h = \frac{\pi - \sqrt{3}}{r}$.

c) $rh = \frac{\pi - \sqrt{3}}{12}$.

d) $rh = 1$.

19. (UPE)

Dois atiradores, André e Bruno, disparam simultaneamente sobre um alvo.

- A probabilidade de André acertar no alvo é de 80%.
- A probabilidade de Bruno acertar no alvo é de 60%.

Se os eventos “André acerta no alvo” e “Bruno acerta no alvo” são independentes, qual é a probabilidade de o alvo não ser atingido?

- a) 8%
b) 16%
c) 18%
d) 30%
e) 92%

20. (IME-RJ)

Em um prisma oblíquo ABCDEFA'B'C'D'E'F', cuja base ABCDEF é um hexágono regular de lado a , a face lateral EFF'E' está inclinada 45° em relação à base, e a projeção ortogonal da aresta F'E' sobre a base ABCDEF coincide com a aresta BC. O volume do prisma é:

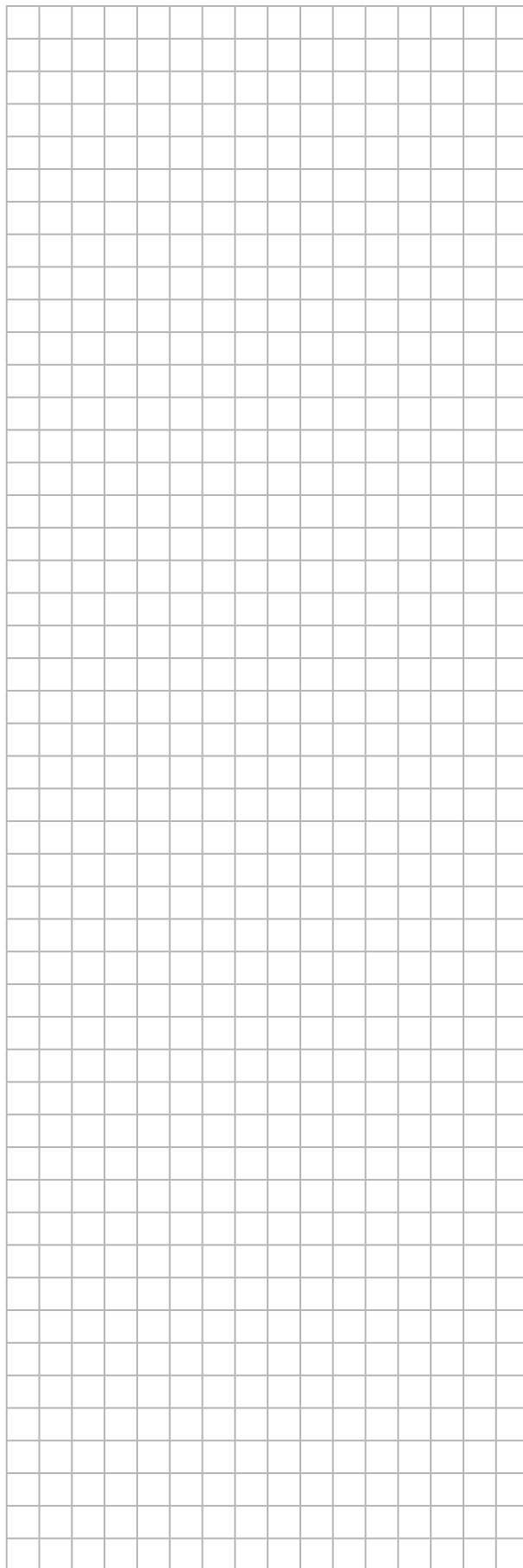
a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$

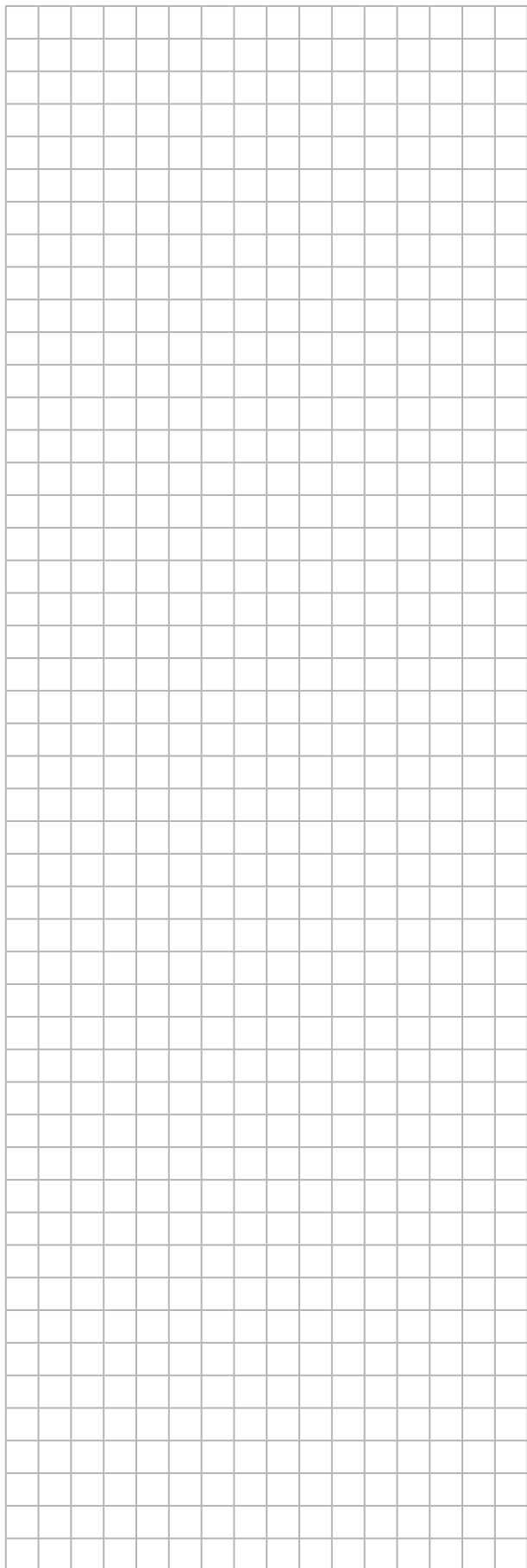
b) $\frac{9}{4}a^3$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{3}a^3$

d) $\frac{9}{2}a^3$

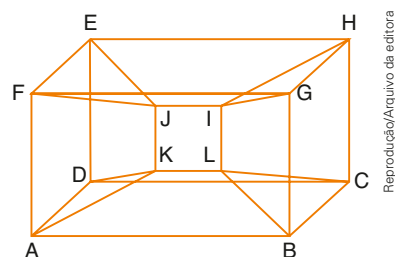
e) $\frac{5}{2}a^3$





21. (UFPB)

A figura a seguir representa uma escultura que se encontra em uma praça de certa cidade.



Essa escultura foi feita com tubos de ferro, soldados uns aos outros, de forma que:

- os pontos **A, B, C, D, E, F, G e H** são os vértices de um paralelepípedo reto retangular;
- os pontos **I, J, K e L** são os vértices de um quadrado;
- os quatro triângulos, ADK, EFJ, GHI e BCL, são isósceles e congruentes dois a dois;
- os oito trapézios, AFJK, DEJK, CDKL, EHIJ, CHIL, BGIL, ABLK e FGIL, são congruentes dois a dois.

Com base nessas informações, identifique as afirmativas corretas:

- () Os lados EJ e HI são coplanares.
- () Os lados BG e DE são congruentes.
- () Os lados AD e EF são paralelos.
- () Os pontos **A, B, E e G** são coplanares.
- () Os trapézios AFJK e EJKD têm um lado em comum.

22. (ITA-SP)

Considere a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

Se o polinômio $p(x)$ é dado por $p(x) = \det A$, então o produto das raízes de $p(x)$ é

- a) $\frac{1}{2}$.
- b) $\frac{1}{3}$.
- c) $\frac{1}{5}$.
- d) $\frac{1}{7}$.
- e) $\frac{1}{11}$.

23. (PUC-MG)

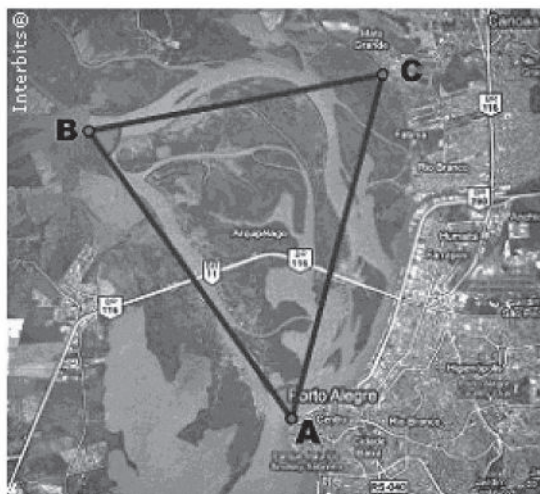
Em certa pesquisa, um grupo de adultos e adolescentes foi solicitado a responder à seguinte pergunta: *Você possui um telefone celular com linha ativa?*

Dos adolescentes entrevistados, seis responderam **sim** e treze, **não**. Já dentre os adultos consultados, dezessete responderam **sim** e os demais, **não**. Apurados os resultados, constatou-se que, escolhendo-se ao acaso uma das pessoas entrevistadas nessa pesquisa, a probabilidade de a mesma ser um adulto que não possui celular com linha ativa era de 52%. Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que o total de pessoas entrevistadas nessa pesquisa é igual a:

a) 72 b) 75 c) 78 d) 81

24. (UFSM-RS)

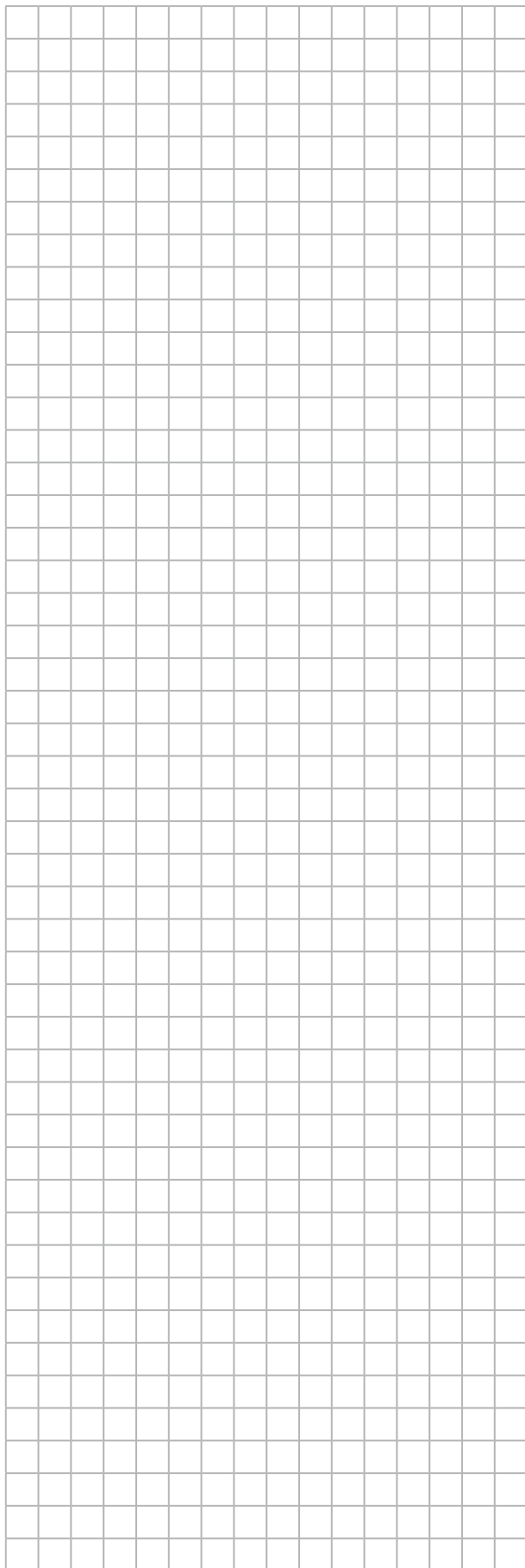
A figura a seguir apresenta o delta do rio Jacuí, situado na região metropolitana de Porto Alegre. Nele se encontra o parque estadual Delta do Jacuí, importante parque de preservação ambiental. Sua proximidade com a região metropolitana torna-o suscetível aos impactos ambientais causados pela atividade humana.



<http://maps.google.com.br>

A distância do ponto **B** ao ponto **C** é de 8 km, o ângulo \hat{A} mede 45° e o ângulo \hat{C} mede 75° . Uma maneira de estimar quanto do Delta do Jacuí está sob influência do meio urbano é dada pela distância do ponto **A** ao ponto **C**. Essa distância, em km, é

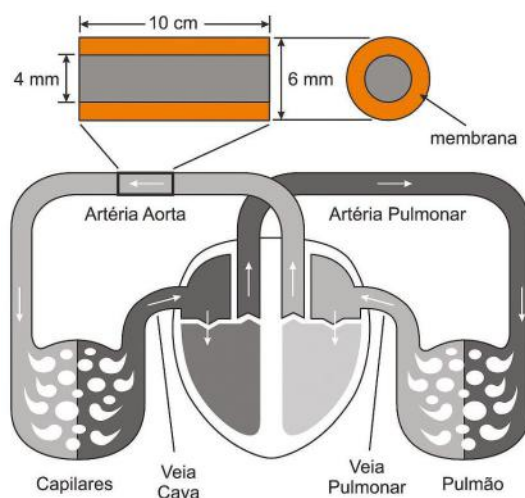
- a) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ c) $8\sqrt{2} + \sqrt{3}$ e) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
 b) $4\sqrt{6}$ d) $8(\sqrt{2} + \sqrt{3})$



25. (Fepar-PR)

O sangue venoso volta ao coração pelas veias cavas e desemboca no átrio direito. Do átrio direito o sangue passa ao ventrículo direito, de onde será bombeado para os pulmões por intermédio das artérias pulmonares.

O coração mantém circulando pelo corpo cerca de 4,5 litros de sangue. Para consegui-lo, o coração bate ao ritmo de 75 vezes por minuto, bombeando 90 mililitros de sangue por batida.



Reprodução/Fepar-PR

Com base nos dados, julgue as afirmativas.

- () O sangue demora 40 segundos para percorrer o corpo.
- () São necessárias 50 batidas para fazer circular todo o sangue uma única vez pelo corpo.
- () A área da espessura da membrana (em laranja) da secção transversal da aorta é de 27 mm^2 .
- () O volume da membrana (em laranja) de 10 cm da artéria aorta é de 150 mm^3 .
- () O coração bombeia 112,5 mililitros de sangue por segundo.

26. (Unicamp-SP)

Sabendo que **p** e **q** são números reais, considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

a) Prove que para quaisquer **p** e **q** teremos $B^T \cdot A \cdot B \geq 0$.

b) Determine os valores de **p** e **q** para os quais o sistema linear nas variáveis reais **x**, **y** e **z**,

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B, \text{ tem infinitas soluções.}$$

27. (UFSM-RS)

A tabela a seguir mostra o número de internações hospitalares da população idosa (60 ou mais anos de idade), numa determinada região, de acordo com as causas da internação.

Causas	Nº de internações
Doenças cardíacas	80
Doenças cerebrovasculares	49
Doenças pulmonares	43
Doenças renais	42
Diabetes melito	35
Fraturas de fêmur e ossos dos membros	26
Hipertensão arterial	24
Infecção de pele e tecido subcutâneo	11
Pneumonia bacteriana	77
Úlcera	13

Considere que hipertensão arterial, doenças renais, doenças cardíacas e osteoporose estão associadas ao consumo excessivo de sódio e que as fraturas de fêmur e ossos dos membros são causadas pela osteoporose.

Assim, a probabilidade de um idoso internado, escolhido ao acaso, ter como diagnóstico principal uma doença associada ao consumo excessivo de sódio, de acordo com a tabela, é igual a

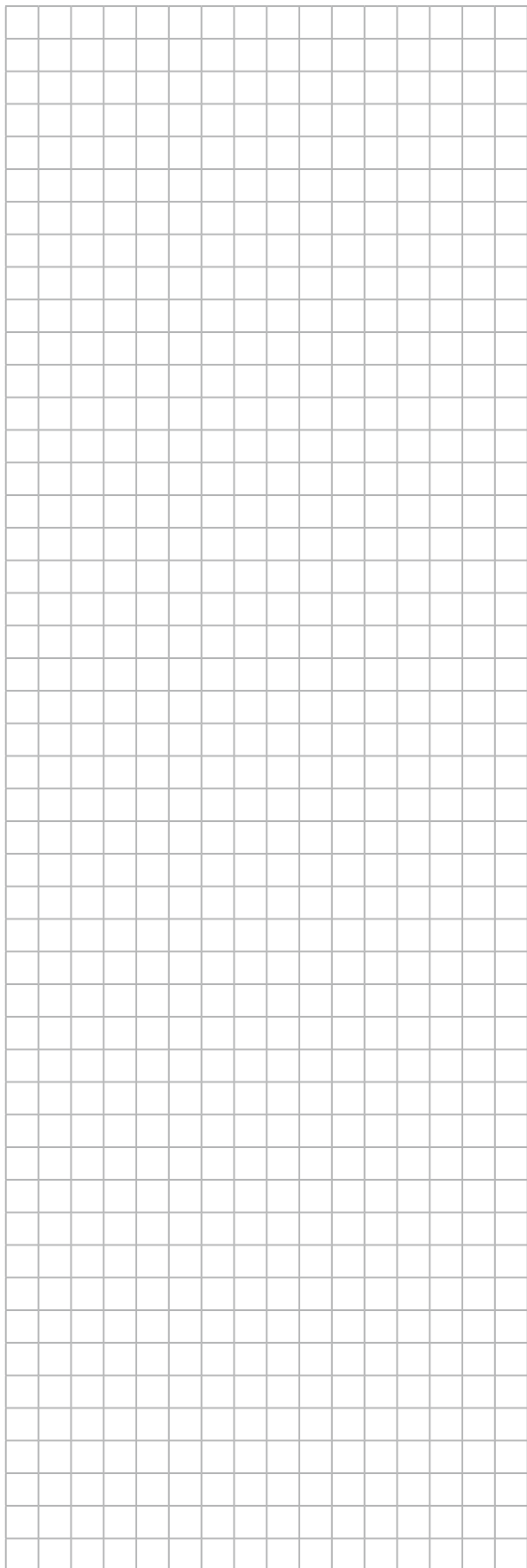
- a) 0,430
- b) 0,370
- c) 0,365
- d) 0,250
- e) 0,230

28. (UFRGS-RS)

Uma caixa com a forma de um paralelepípedo retangular tem as dimensões dadas por x , $x + 4$ e $x - 1$.

Se o volume desse paralelepípedo é 12, então as medidas das dimensões da caixa são

- a) 1, 1 e 12.
- b) 1, 2 e 6.
- c) 1, 3 e 4.
- d) 2, 2 e 3.
- e) 2, 3 e 4.



29. (Ifal)

Resolva o sistema de equações abaixo para x e y reais e determine o valor do produto xy .

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 38 \end{cases}$$

- a) 5.
- b) 9.
- c) 25.
- d) 45.
- e) 81.

30. (Uesc-BA)

A cobrança do pedágio na BR-116, principal rodovia brasileira, foi iniciada na primeira semana de dezembro de 2010, com postos autorizados pela Agência Nacional de Transportes Terrestres (ANTT).

Suponha que entre as cidades **A** e **B** existem cinco postos de abastecimento, além de dois postos de pedágio — o primeiro com quatro cabines e o segundo, com três. É possível fazer o percurso de **A** até **B**, passando pelos dois pedágios e parando três vezes para abastecimento, de n formas distintas (variando as cabines e os postos de abastecimento). O valor de n é

- a) 12
- b) 22
- c) 31
- d) 120
- e) 210

31. (UFRGS-RS)

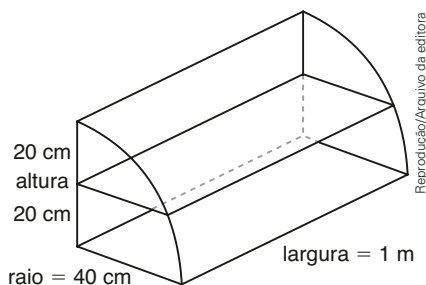
O gráfico da função **f**, definida por $f(x) = \cos x$, e o gráfico da função **g**, quando representados no mesmo sistema de coordenadas, possuem somente dois pontos em comum.

Assim, das alternativas abaixo, a que pode representar a função **g** é

- a) $g(x) = (\sin x)^2 + (\cos x)^2$.
- b) $g(x) = x^2$.
- c) $g(x) = 2^x$.
- d) $g(x) = \log x$.
- e) $g(x) = \sin x$.

32. (UEM-PR)

A figura a seguir representa um expositor de salgados que consiste em $\frac{1}{4}$ de um cilindro. Observe na figura que na metade da altura desse expositor existe uma prateleira que o divide em duas partes.



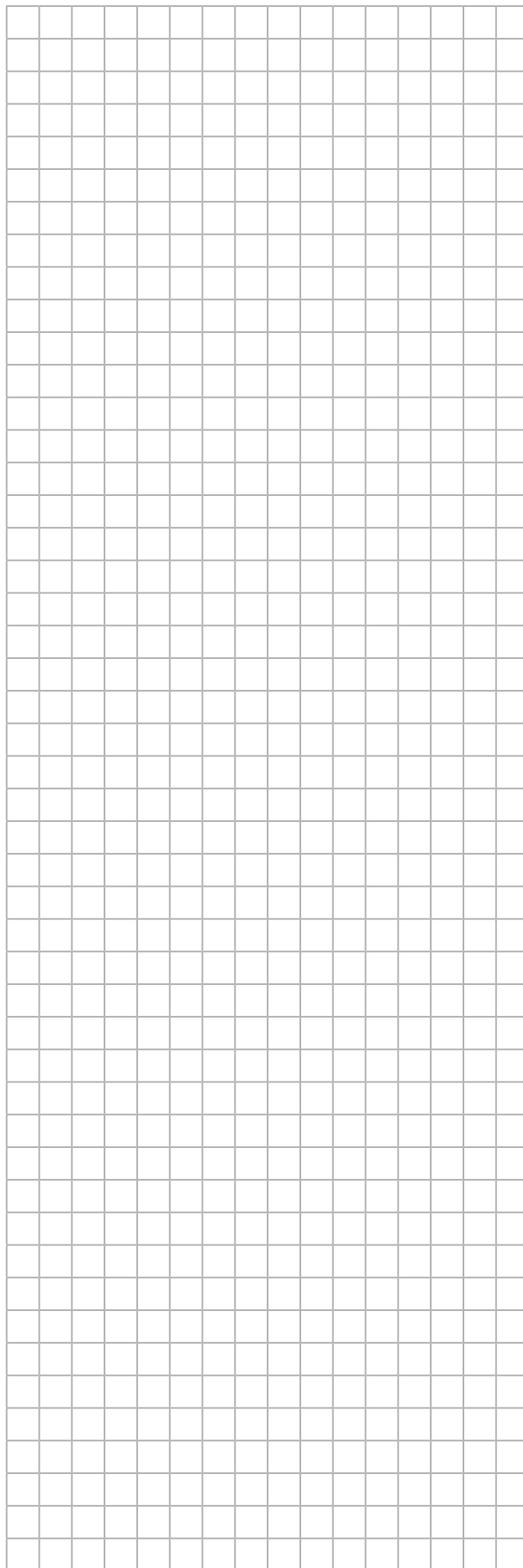
Considerando que a parte frontal do expositor corresponde à lateral do cilindro, assinale o que for **correto**. (Obs.: 1 litro = 1 decímetro cúbico).

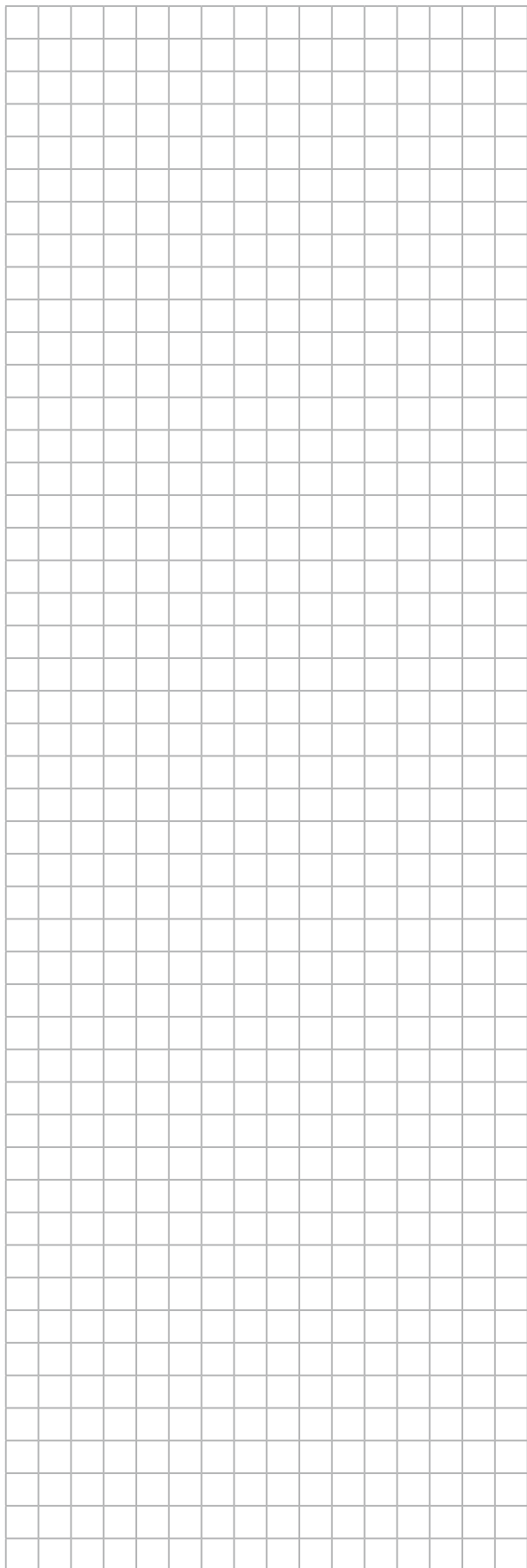
- 01) A área da prateleira do meio é $\frac{\sqrt{3}}{5} \text{ m}^2$.
 02) O volume da parte inferior do expositor (abaixo da prateleira) é $\frac{20}{3}(2\pi + 3\sqrt{3})$ litros.
 04) O volume do expositor é de 40π litros.
 08) O volume da parte superior do expositor (acima da prateleira) é $\frac{20}{3}(2\pi - 3\sqrt{3})$ litros.
 16) A área da região frontal do expositor é $\frac{2\pi}{5} \text{ m}^2$.

33. (UFU-MG)

A densidade (ou densidade volumétrica) de um material mede a quantidade de matéria (massa) que está presente em uma unidade de volume desse material. Embora todo material seja um objeto espacial, é comum considerarmos sendo de "natureza linear". Por exemplo, um fio de cobre tem natureza linear e consideramos sua densidade linear (razão de sua massa pelo seu comprimento). O vergalhão CA - 60 são barras de aço muito resistentes, utilizadas na construção civil e comercializadas em barras padrão de 12 metros. Admitindo que essas barras sejam cilíndricas, seus diâmetros (bitolas) variam de 4,2 a 9,5 mm. De acordo com as especificações da norma NBR 7480, a barra da bitola de 6,0 mm tem densidade linear de 0,222 kg/m (quilograma por metro). Com base nas informações apresentadas, a densidade, em kg/m^3 , de uma barra de bitola 6 mm é igual a

- a) $\frac{222}{36\pi}$ b) $\frac{222}{9\pi}$ c) $\frac{222000}{9\pi}$ d) $\frac{222000}{36\pi}$





34. (UPF-RS)

Alice não se recorda da senha que definiu no computador. Sabe apenas que é constituída por quatro letras seguidas, com pelo menos uma consoante.

Se considerarmos o alfabeto como constituído por 23 letras, bem como que não há diferença para o uso de maiúsculas e minúsculas, quantos códigos dessa forma é possível compor?

- a) 23^4
- b) $23^3 \cdot 18$
- c) $23^3 \cdot 72$
- d) $23^4 - 5^4$
- e) $18^4 + 5^4$

35. (Cefet-MG)

Uma caixa, em forma de paralelepípedo reto retângulo, cujas dimensões são 800 mm de comprimento, 50 cm de largura e 6 dm de altura tem volume igual a

- a) $0,24 \text{ mm}^3$
- b) $0,24 \text{ cm}^3$
- c) $0,24 \text{ dm}^3$
- d) $0,24 \text{ m}^3$

36. (IFBA)

Na Pizzaria “Massa Dez”, verificou-se que o valor financeiro que os amigos Kiko, Bené e Zazá tinham, em reais, dependia de resolver o seguinte problema:

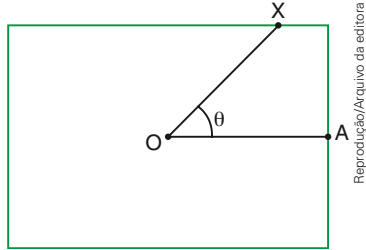
- a média aritmética dos valores financeiros dos amigos citados era R\$ 30,00;
- a média aritmética dos valores financeiros de Bené e Zazá era R\$ 20,00;
- Kiko tinha R\$ 30,00 a mais que Bené.

A partir dessas informações, podemos afirmar que

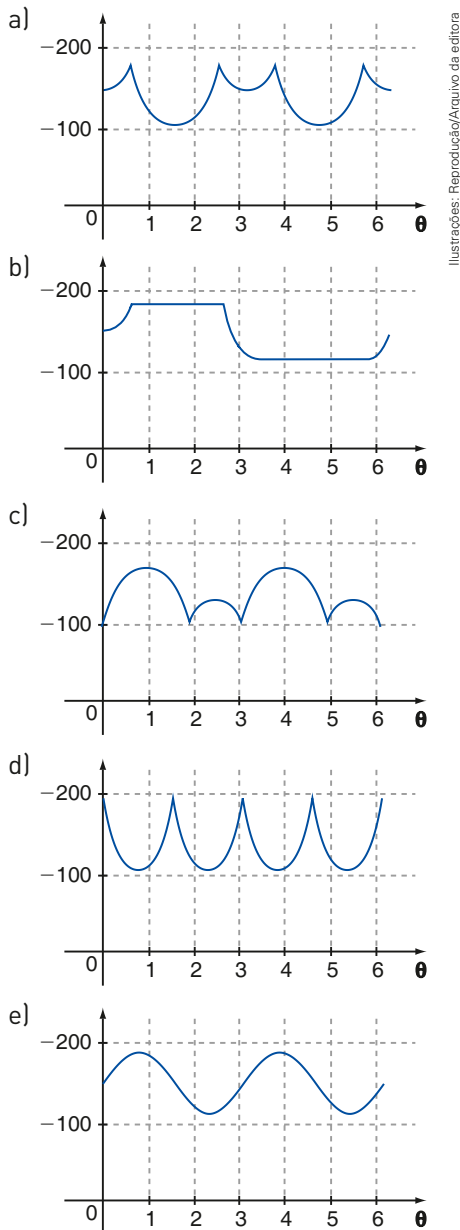
- a) Kiko tem R\$ 40,00 a mais que Zazá.
- b) Bené tem R\$ 10,00 a mais que Zazá.
- c) Zazá tem o mesmo valor financeiro que Kiko.
- d) O valor financeiro de Kiko corresponde à soma dos valores financeiros de Bené e Zazá.
- e) Zazá tem o mesmo valor financeiro que Bené.

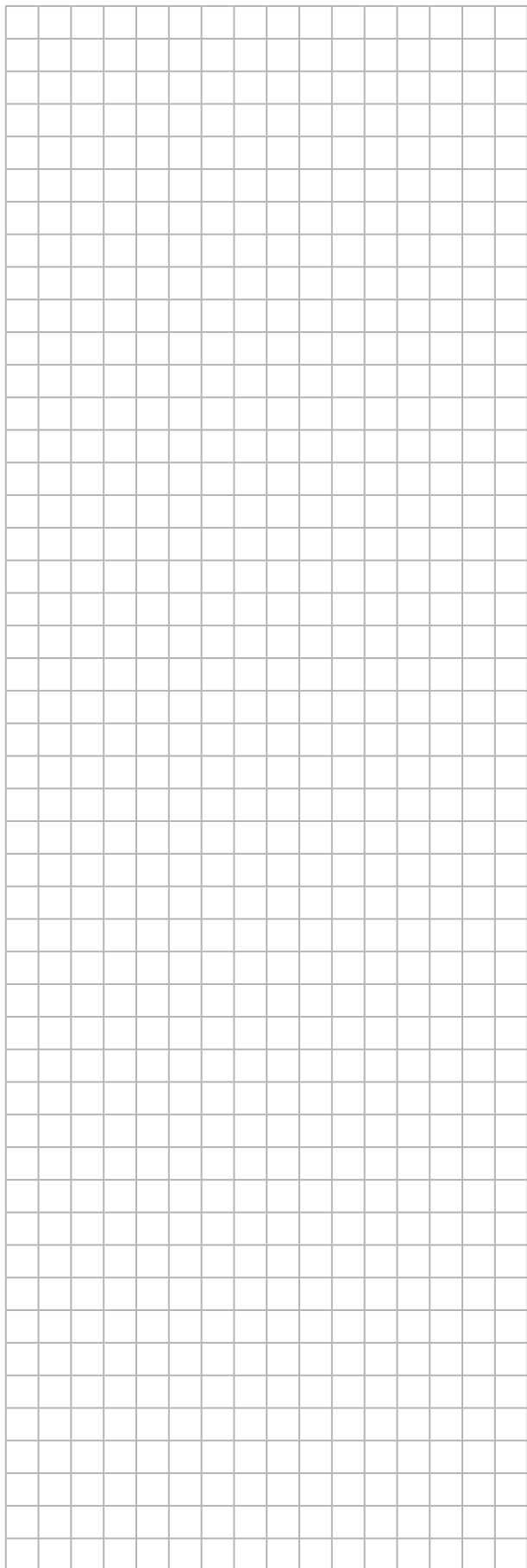
37. (UPF-RS)

Na folha de papel A4 que está representada na figura a seguir, o ponto **O** se localiza no encontro das diagonais e o ponto **A** é o ponto médio da largura da folha. Para cada ponto **X** pertencente aos lados do retângulo, está associado o ângulo \widehat{AOX} com medida θ em radianos, no sentido anti-horário.



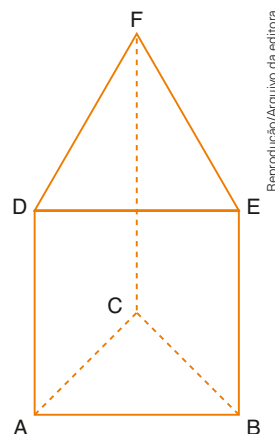
O gráfico que melhor representa a medida OX em função de θ é:





38. (UPE)

Selecionamos ao acaso duas arestas do prisma triangular regular representado abaixo. Qual é a probabilidade de elas não serem paralelas?



- a) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{6}$
b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

39. (UFU-MG)

A senha de acesso ao cofre de um carro-forte é formada por **d** algarismos, em que esses algarismos pertencem ao conjunto de inteiros $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Um dos guardas observa o colega digitar o último algarismo da senha, concluindo que esta corresponde a um número ímpar. Assuma que esse guarda demore 1,8 segundo para realizar cada tentativa de validação da senha, sem realizar repetições, de maneira que, assim procedendo, no máximo em duas horas e meia terá sucesso na obtenção da senha.

Segundo as condições apresentadas, conclui-se que o valor de **d** é um número

- a) quadrado perfeito. c) divisível por 3.
b) primo. d) múltiplo de 5.

40. (UEPG-PR)

Três cubos idênticos foram colados entre si formando um paralelepípedo, cuja área total vale 350 cm^2 . Nesse contexto, assinale o que for correto.

- 01) O volume do paralelepípedo é 474 cm^3 .
02) A área total de cada cubo é 150 cm^2 .
04) O volume de cada cubo é 125 cm^3 .
08) A soma de todas as arestas do paralelepípedo é 80 cm.

41. (UEMG)

O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de 6 números distintos de 1 a 60. Um apostador, depois de vários anos de análise, deduziu que, no próximo sorteio, os 6 números sorteados estariam entre os 10 números que tinha escolhido.

Sendo assim, com a intenção de garantir seu prêmio na Sena, ele resolveu fazer todos os possíveis jogos com 6 números entre os 10 números escolhidos.

Quanto ele gastará para fazê-los, sabendo que cada jogo com 6 números custa R\$ 2,00?

- a) R\$ 540,00. c) R\$ 420,00.
b) R\$ 302.400,00. d) R\$ 5.040,00.

42. (UFRGS-RS)

Um jogo consiste em responder corretamente as perguntas sorteadas, ao girar um ponteiro sobre uma roleta numerada de 1 a 10, no sentido horário. O número no qual o ponteiro parar corresponde à pergunta a ser respondida. A cada número corresponde somente uma pergunta, e cada pergunta só pode ser sorteada uma vez. Caso o ponteiro pare sobre um número que já foi sorteado, o participante deve responder a próxima pergunta não sorteada, no sentido horário.

Em um jogo, já foram sorteadas as perguntas 1, 2, 3, 5, 6, 7 e 10. Assim, a probabilidade de que a pergunta 4 seja a próxima a ser respondida é de

- a) $\frac{1}{4}$. d) $\frac{2}{3}$.
- b) $\frac{1}{3}$. e) $\frac{3}{4}$.
- c) $\frac{1}{2}$.

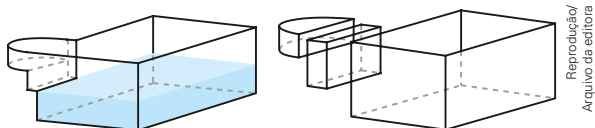
43. (IFMG)

Numa família com 7 filhos, sou o caçula e 14 anos mais novo que o primogênito de minha mãe. Dentre os filhos, o quarto tem a terça parte da idade do irmão mais velho, acrescidos de 7 anos. Se a soma de nossas três idades é 42, então minha idade é um número

- a) divisível por 5. c) primo.
b) divisível por 3. d) par.

47. (UFU-MG)

Um modelo de piscina é formado por três partes, determinando três níveis d'água, conforme mostra o esquema a seguir.



A primeira tem a forma da metade de um cilindro circular de raio 1 m e altura 0,3 m; a segunda tem a forma de um paralelepípedo de 0,3 m de comprimento, 2 m de largura e 0,8 m de altura, e a terceira também tem a forma de um paralelepípedo, com 3 m de comprimento, 4 m de largura e 2 m de altura.

Suponha que a água dessa piscina esteja no nível da base do primeiro paralelepípedo (aquele de 0,8 m de altura). Quantos metros cúbicos de água são necessários para encher de água essa piscina?

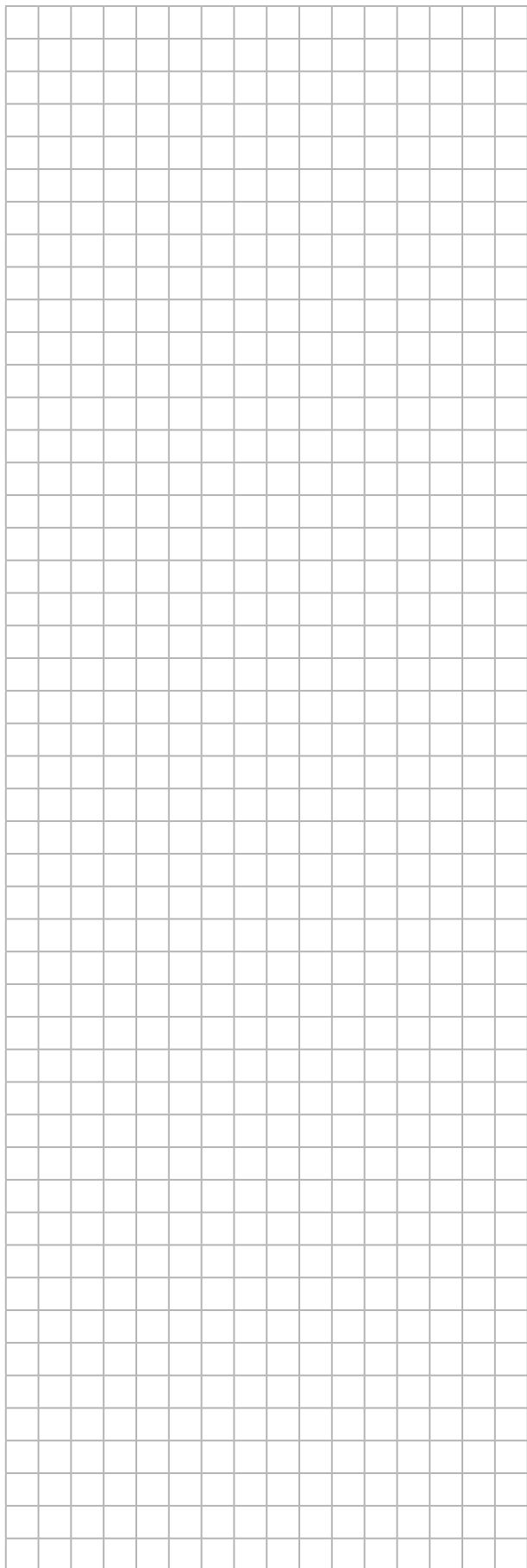
- a) $0,15 \pi + 14,88$
b) $0,15 \pi + 10,08$
c) $0,30 \pi + 10,08$
d) $0,30 \pi + 14,88$

48. (UEM-PR)

Um aluno pretende fazer dois cones de papel utilizando, para fazer a lateral do primeiro cone, um setor circular de ângulo $\frac{\pi}{4}$ rad e 8 cm de raio e, para o segundo, um setor circular também de ângulo $\frac{\pi}{4}$ rad e 4 cm de raio.

Assinale o que for **correto**.

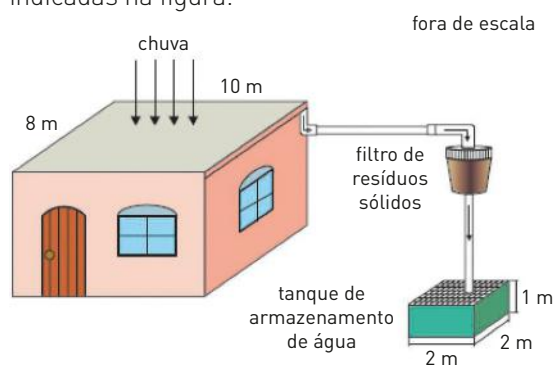
- 01) A área do círculo que forma a base do primeiro cone será o dobro da área do círculo que forma a base do segundo cone.
- 02) A razão entre os comprimentos do raio da base e da geratriz, em ambos os cones, será a mesma.
- 04) A área do setor circular usado para fazer o primeiro cone será o quádruplo da área do setor circular usado para fazer o segundo cone.
- 08) O volume do primeiro cone será o dobro do volume do segundo cone.
- 16) A altura do primeiro cone será de 7 cm.



49. (Unesp-SP)

Quando os meteorologistas dizem que a precipitação da chuva foi de 1 mm, significa que houve uma precipitação suficiente para que a coluna de água contida em um recipiente que não se afunila como, por exemplo, um paralelepípedo reto-retângulo subisse 1 mm. Essa precipitação, se ocorrida sobre uma área de 1 m^2 , corresponde a 1 litro de água.

O esquema representa o sistema de captação de água da chuva que cai perpendicularmente à superfície retangular plana e horizontal da laje de uma casa, com medidas 8 m por 10 m. Nesse sistema, o tanque usado para armazenar apenas a água captada da laje tem a forma de paralelepípedo reto-retângulo, com medidas internas indicadas na figura.



Estando o tanque de armazenamento inicialmente vazio, uma precipitação de 10 mm no local onde se encontra a laje da casa preencherá

- a) 40% da capacidade total do tanque.
- b) 60% da capacidade total do tanque.
- c) 20% da capacidade total do tanque.
- d) 10% da capacidade total do tanque.
- e) 80% da capacidade total do tanque.

50. (Ifal)

Em uma certa turma de 49 alunos, o número de homens corresponde a $\frac{3}{4}$ do número de mulheres. Quantos homens tem essa turma?

- a) 14
- b) 21
- c) 28
- d) 35
- e) 42

51. (Imed-RS)

O total de anagramas da palavra LÓGICA é exatamente igual à medida, em graus, da soma dos ângulos internos de um polígono regular. Considerando que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada pela expressão $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$, onde **n** corresponde ao número de lados, pode-se afirmar que esse polígono é um:

- a) Triângulo.
- b) Quadrado.
- c) Pentágono.
- d) Hexágono.
- e) Heptágono.

52. (Ifal)

Em um determinado momento, um estacionamento possui 50 veículos, entre carros, motos e triciclos. Um garoto curioso sai contando o total de rodas em contato com o chão no estacionamento e encontra o valor 165 percebendo também que a quantidade de rodas dos carros era o quádruplo do número de rodas das motos.

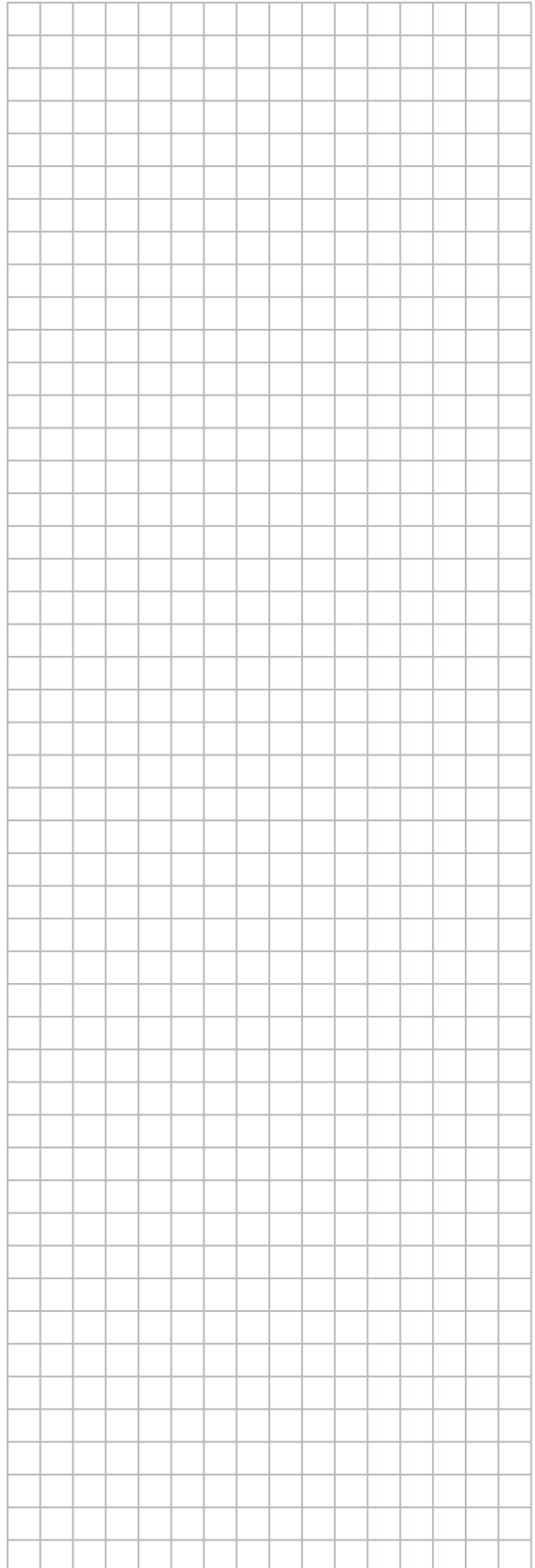
Considerando as informações como corretas, podemos dizer que o estacionamento possui

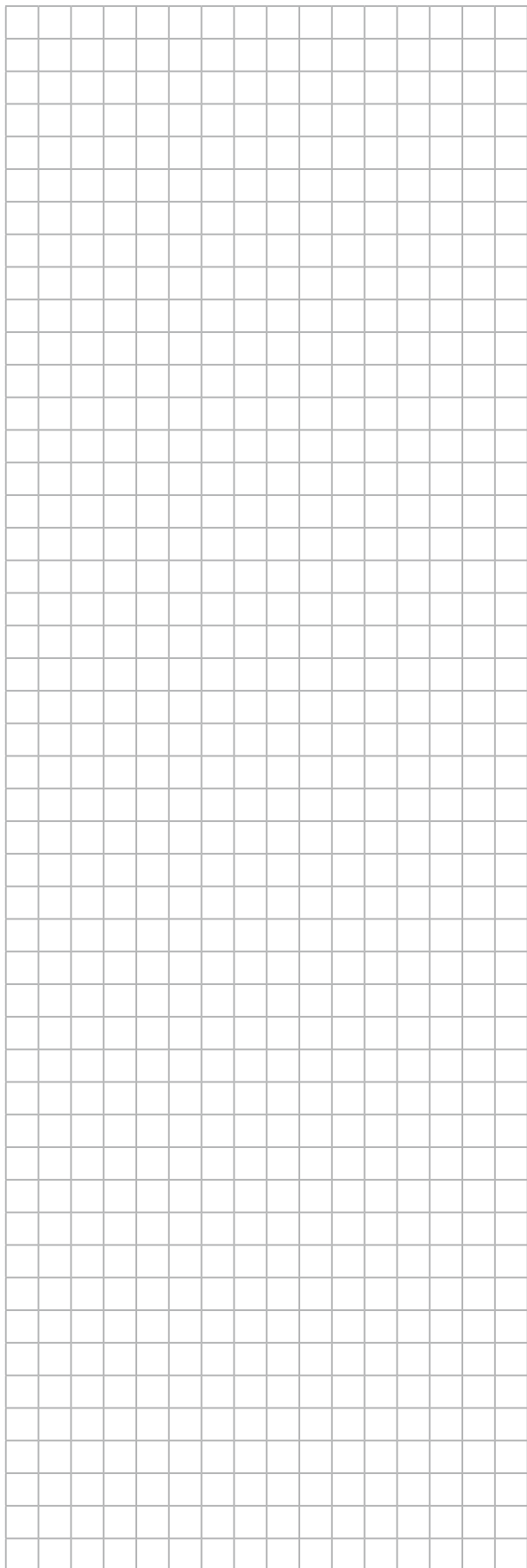
- a) 30 motos.
- b) 15 carros.
- c) 15 triciclos.
- d) o número de carros igual ao dobro de triciclos.
- e) o número de motos igual ao triplo de triciclos.

53. (UFPA)

Uma comissão é formada por 4 participantes de cada um dos municípios, Abaetetuba, Igarapé-Miri, Cametá, Barcarena e Moju, totalizando 20 pessoas. Escolhendo-se aleatoriamente 5 pessoas deste grupo, a probabilidade de que exista um representante de cada município é:

- a) $\frac{64}{969}$
- b) $\frac{8}{14535}$
- c) $\frac{1}{2075}$
- d) $\frac{5}{15504}$
- e) $\frac{1}{15504}$





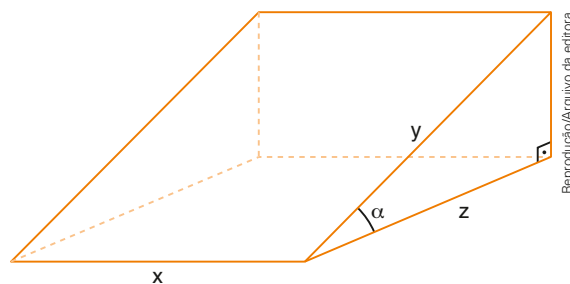
54. (UEM-PR)

Assinale o que for correto.

- 01) O tronco de uma pirâmide de base quadrada, cuja altura é igual à aresta da base, é um poliedro regular.
- 02) Considere dois prismas de bases hexagonais congruentes. Suponha que eles tenham a mesma altura, porém um tem arestas laterais perpendiculares à base e o outro tem arestas que formam um ângulo de 15 graus com a base. Então o prisma inclinado tem volume maior que o prisma reto.
- 04) Considere um cone reto e um tetraedro regular cujas áreas da base são iguais. Se a aresta do tetraedro tiver o mesmo comprimento que a geratriz do cone e o raio da base do cone for menor que $\frac{1}{4}$, então a área da superfície total do cone é maior que a área da superfície do tetraedro.
- 08) A secção meridiana de um cone circular reto é um triângulo isósceles.
- 16) Todo poliedro é convexo.

55. (Unifor-CE)

Uma rampa retangular medindo 10 m^2 faz um ângulo de 25° em relação ao piso horizontal. Exatamente embaixo dessa rampa, foi delimitada uma área retangular **A** para um jardim, conforme figura.

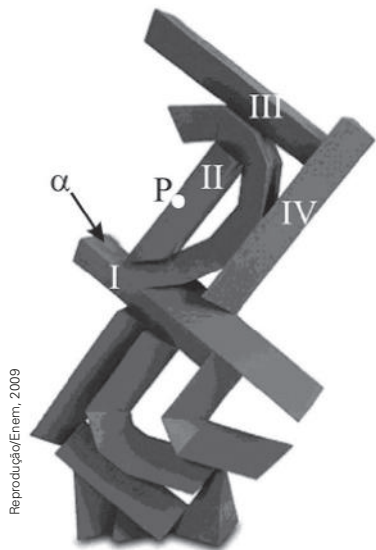


Considerando que $\cos 25^\circ \cong 0,9$, a área **A** tem aproximadamente:

- a) 3 m^2
- b) 4 m^2
- c) 6 m^2
- d) 8 m^2
- e) 9 m^2

56. (Enem)

Suponha que, na escultura do artista Emanoel Araújo, mostrada na figura a seguir, todos os prismas numerados em algarismos romanos são retos, com bases triangulares, e que as faces laterais do poliedro II são perpendiculares à sua própria face superior, que, por sua vez, é um triângulo congruente ao triângulo base dos prismas. Além disso, considere que os prismas I e III são perpendiculares ao prisma IV e ao poliedro II.



Disponível em: www.escritosriodearte.com.br. Acesso em: 28 jul. 2009.

Imagine um plano paralelo à face α do prisma I, mas que passe pelo ponto P pertencente à aresta do poliedro II, indicado na figura. A interseção desse plano imaginário com a escultura contém

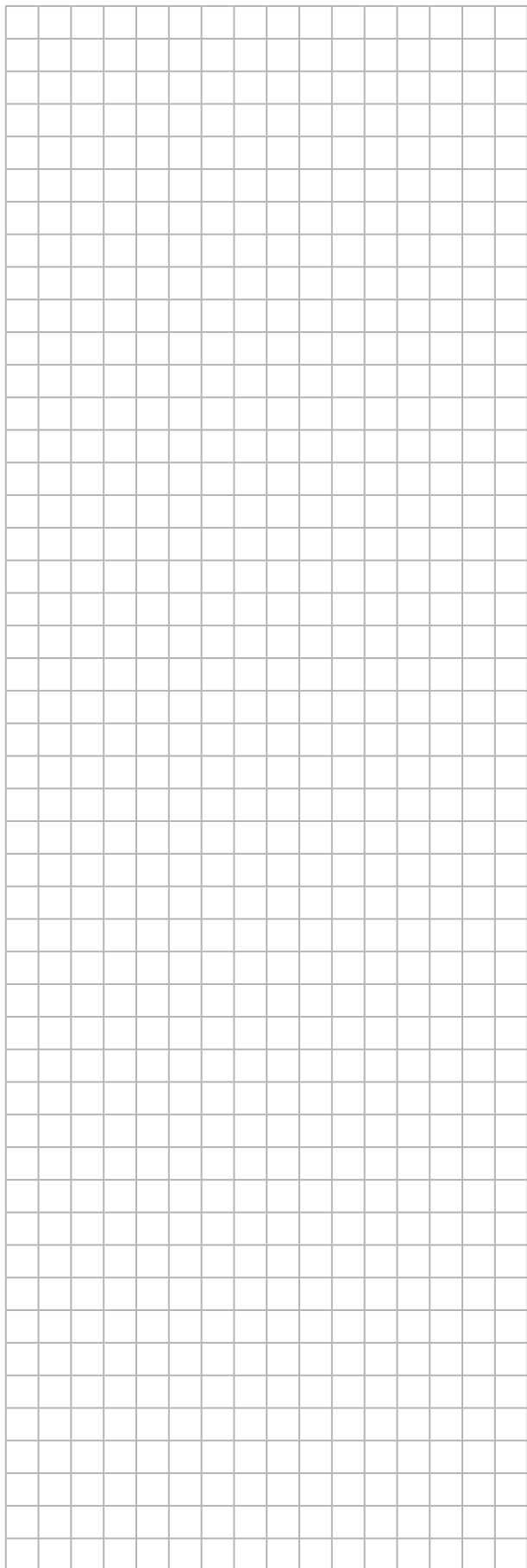
- dois triângulos congruentes com lados correspondentes paralelos.
- dois retângulos congruentes e com lados correspondentes paralelos.
- dois trapézios congruentes com lados correspondentes perpendiculares.
- dois paralelogramos congruentes com lados correspondentes paralelos.
- dois quadriláteros congruentes com lados correspondentes perpendiculares.

57. (Uece)

O volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos X, da região do plano limitada pelo triângulo com vértices nos pontos (6, 0), (8, 0) e (8, 9) é igual a

u.v. \equiv unidade de volume

- 81π u.v.
- 72π u.v.
- 64π u.v.
- 54π u.v.



58. (ITA-SP)

Se o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2a^2y + (2a^4 - a)z = 0 \\ x + ay + (a^3 - 1)z = 0 \end{cases}$$

admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro **a** são

- a) $0, -1, \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.
b) $0, -1, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.
c) $0, -1, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.
d) $0, -1, -1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}$.
e) $0, -1, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$.

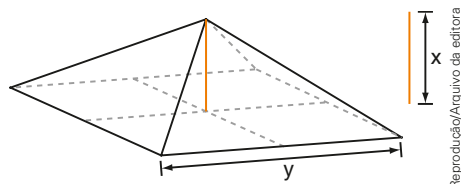
59. (Uern)

Numa lanchonete são vendidos sucos de 8 sabores diferentes, sendo que 3 são de frutas cítricas e os demais, de frutas silvestres. De quantas maneiras pode-se escolher 3 sucos de sabores diferentes, sendo que pelo menos 2 deles sejam de frutas silvestres?

- a) 40 b) 55 c) 72 d) 85

60. (Enem)

A cobertura de uma tenda de lona tem formato de uma pirâmide de base quadrada e é formada usando quatro triângulos isósceles de base **y**. A sustentação da cobertura é feita por uma haste de medida **x**. Para saber quanto de lona deve ser comprado, deve-se calcular a área da superfície da cobertura da tenda.

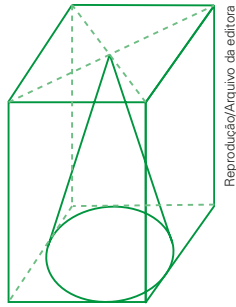


A área da superfície da cobertura da tenda, em função de **y** e **x**, é dada pela expressão

- a) $2y\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$ d) $4\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$
b) $2y\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}$ e) $4\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}$
c) $4y\sqrt{x^2 + y^2}$

61. (PUC-RS)

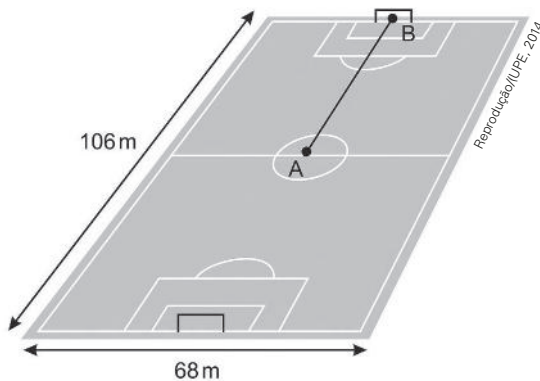
Um cone está inscrito em um paralelepípedo, como na figura. A altura do paralelepípedo é o dobro do lado da base quadrada, de área 400 cm^2 . Então, a razão entre o volume do cone e o do paralelepípedo é



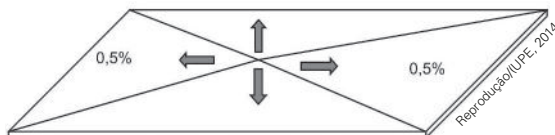
- a) 16 000 c) $\frac{12}{\pi}$ e) $\frac{\pi}{36}$
 b) $\frac{4000}{3\pi}$ d) $\frac{\pi}{12}$

62. (UPE)

A figura a seguir representa o campo de jogo da Arena Pernambuco. O ponto **A** situa-se exatamente no meio do campo, e o ponto **B**, exatamente no meio da linha do gol.

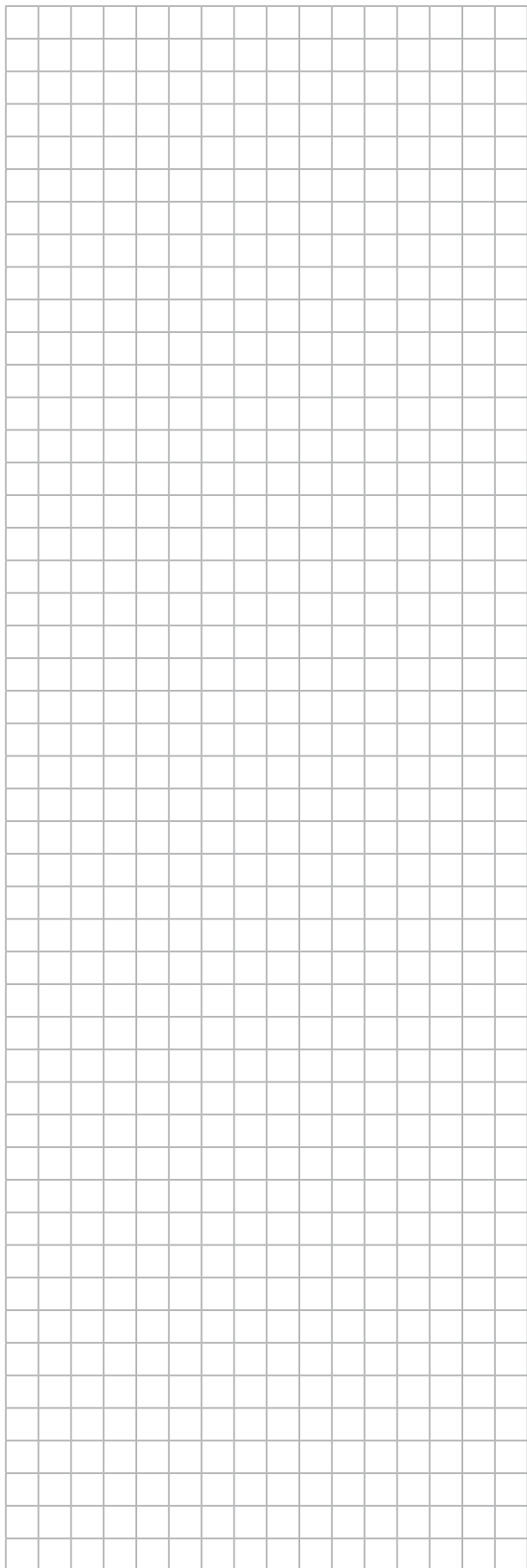


Nivelada a partir de medições a *laser*, a fundação tem inclinações muito suaves que evitam o acúmulo de água nas zonas centrais, conforme o esquema a seguir:



Considerando essas inclinações do campo, qual a diferença de altura entre os pontos **A** e **B**, representados no desenho do campo?

- a) 15,90 cm c) 29,00 cm e) 53,00 cm
 b) 26,50 cm d) 34,00 cm



63. (IFMG)

Uma senhora resolveu vender bombons e trufas na porta de uma escola para complementar a renda familiar. No primeiro dia, ela faturou R\$ 107,50 com a venda de 25 bombons e 15 trufas. No dia seguinte, seu faturamento foi igual a R\$ 185,00 e foram vendidos 20 bombons e 45 trufas. Um aluno que comprou, dessa senhora, 4 bombons e 3 trufas, pagou a quantia de

- a) R\$ 19,00
- b) R\$ 19,50
- c) R\$ 22,50
- d) R\$ 23,00

64. (UEL-PR)

Sobre os conhecimentos de geometria tridimensional, considere as afirmativas:

- I. Se duas retas distintas não são paralelas, então elas são concorrentes.
- II. Três pontos distintos entre si determinam um único plano.
- III. Duas retas paralelas distintas determinam um plano.
- IV. Se duas retas **r** e **s** são reversas, então existe um único plano α que contém **r** e é paralelo a **s**.

A alternativa que contém todas as afirmativas corretas é:

- a) I e II
- b) I e IV
- c) III e IV
- d) I, II e III
- e) II, III e IV

65. (Escola Naval Brasileira-RJ)

Um exame de laboratório tem eficiência de 90% para detectar uma doença quando essa doença existe de fato. Entretanto, o teste aponta um resultado “falso positivo” (o resultado indica doença, mas ela não existe) para 1% das pessoas sadias testadas. Se 1,5% da população tem a doença, qual a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que seu exame foi positivo?

- a) $\frac{95}{294}$
- b) $\frac{160}{433}$
- c) $\frac{270}{467}$
- d) $\frac{75}{204}$
- e) $\frac{73}{255}$

66. (Enem)

Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1 000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.

A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é

- a) 11,25.
- b) 27,00.
- c) 28,80.
- d) 32,25.
- e) 49,50.

67. (Uema)

A bola de futebol evoluiu ao longo do tempo e, atualmente, é um icosaedro truncado, formado por 32 peças, denominadas de gomos e, geometricamente, de faces. Nessa bola, 12 faces são pentágonos regulares, e as outras, hexágonos, também regulares. Os lados dos pentágonos e dos hexágonos são iguais e costurados. Ao unirem-se os dois lados costurados das faces, formam-se as arestas. O encontro das arestas forma os vértices. Quando cheio, o poliedro é similar a uma esfera.

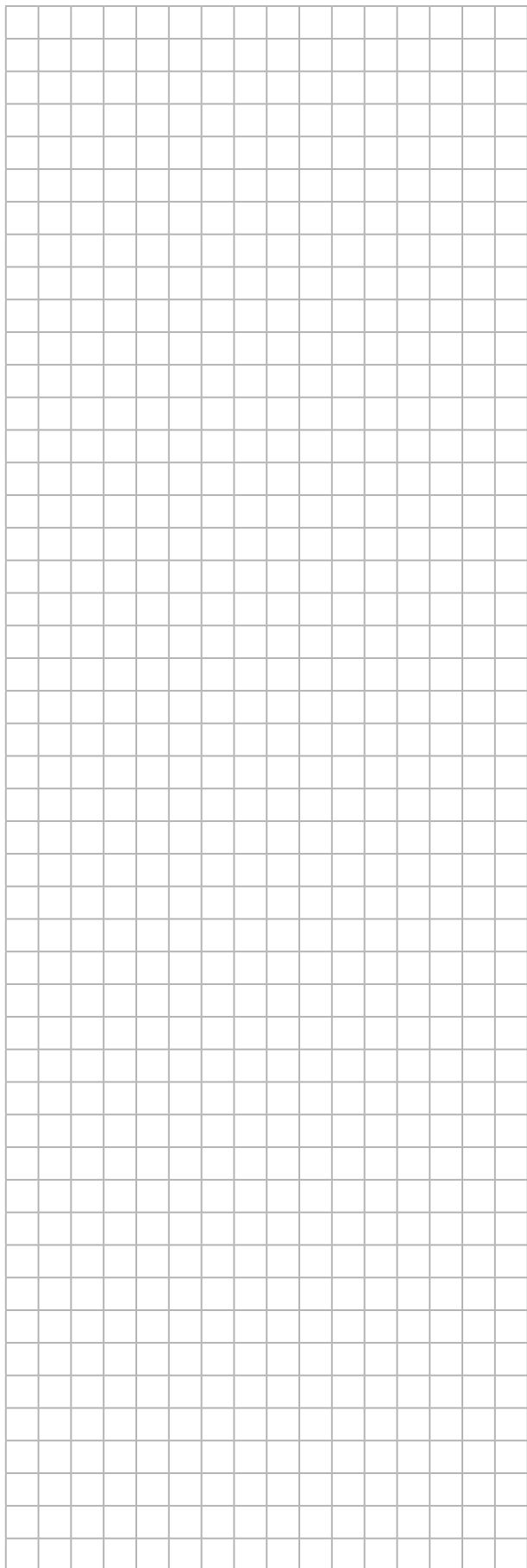


O número de arestas e o número de vértices existentes nessa bola de futebol são, respectivamente,

Pode ser utilizado o teorema de Descartes-Euler,

$$A + 2 = V + F$$

- a) 80 e 60
- b) 80 e 50
- c) 70 e 40
- d) 90 e 60
- e) 90 e 50



68. (PUC-SP)

Em um pote de vidro não transparente, foram colocados mini sabonetes, todos de mesmo tamanho, sendo 16 deles na cor amarela, 6 na cor verde e 4 na cor azul. Retirando-se aleatoriamente 3 desses mini sabonetes, um após o outro, sem reposição, a probabilidade de saírem pelo menos 2 deles na cor amarela, sabendo que o primeiro mini sabonete retirado era na cor amarela, é

a) $\frac{11}{20}$

b) $\frac{13}{20}$

c) $\frac{15}{20}$

d) $\frac{17}{20}$

69. (FGV-RJ)

Um fazendeiro compra semanalmente um saco de farelo de milho, um saco de farelo de soja e um saco de farelo de cevada, mas compra também um saco extra de um desses três produtos. Quando o saco extra é o de milho, o peso total dos quatro sacos é de 110 kg, quando o saco extra é o de soja, o peso total dos quatro sacos é de 106 kg e quando o saco extra é o de cevada, o peso total dos quatro sacos é de 104 kg. Os pesos dos sacos de cada produto são sempre iguais.

Determine o peso de um saco de cada produto.

70. (UEPG-PR)

Os valores de **x**, **y** e **z** formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão **r**.

Se esses valores são a solução única do sistema

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 3 \\ x - 6y - 3z = 0 \\ 2x + z = k \end{cases}$$

assinale o que for correto.

01) $r < 0$.

02) **k** é um número par.

04) $x \cdot y \cdot z < 0$

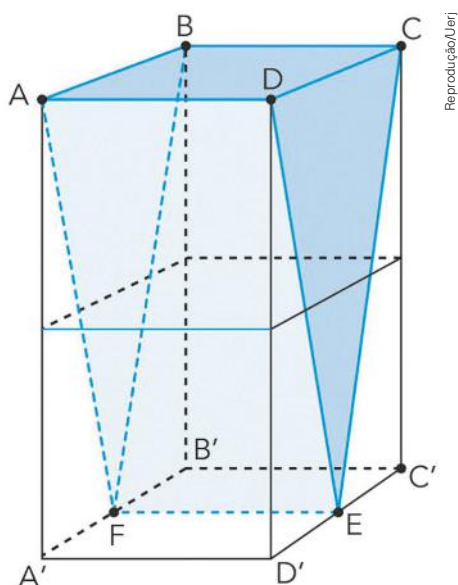
08) $x + y + z = 5$.

16) $2x = y + z$

71. (Uerj)

Dois cubos cujas arestas medem 2 cm são colados de modo a formar o paralelepípedo $ABCD A'B'C'D'$. Esse paralelepípedo é seccionado pelos planos $ADEF$ e $BCEF$, que passam pelos pontos médios F e E das arestas $A'B'$ e $C'D'$, respectivamente.

A parte desse paralelepípedo compreendida entre esses planos define o sólido $ABCDEF$, conforme indica a figura a seguir.



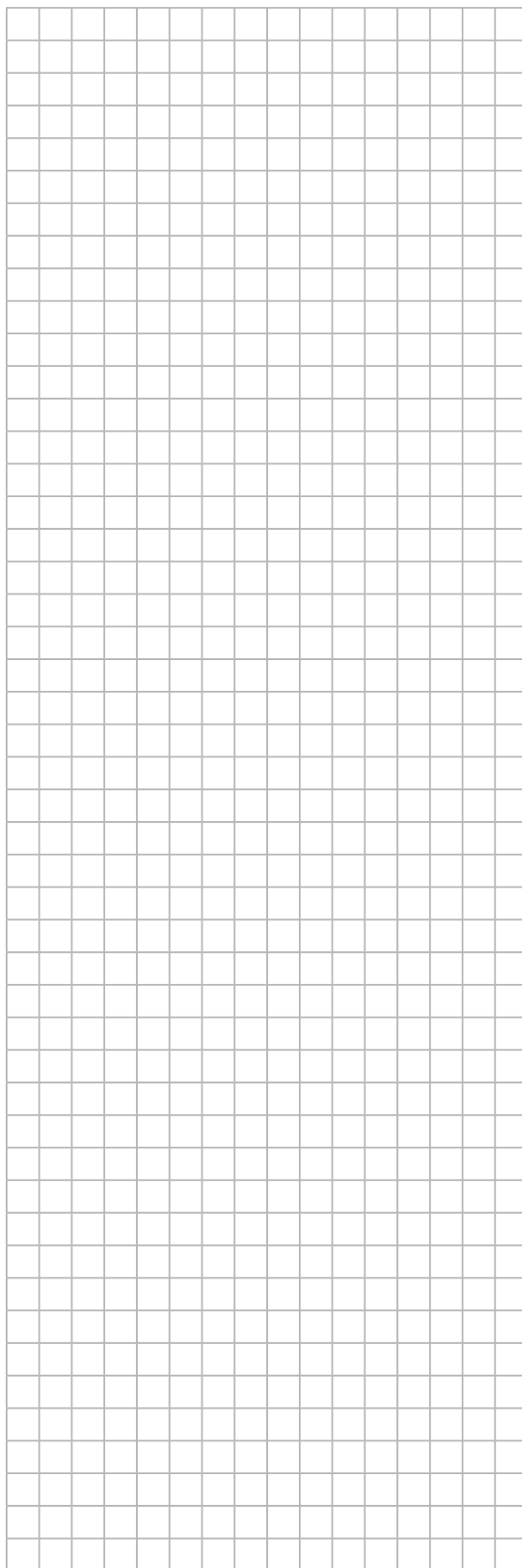
O volume do sólido $ABCDEF$, em cm^3 , é igual a:

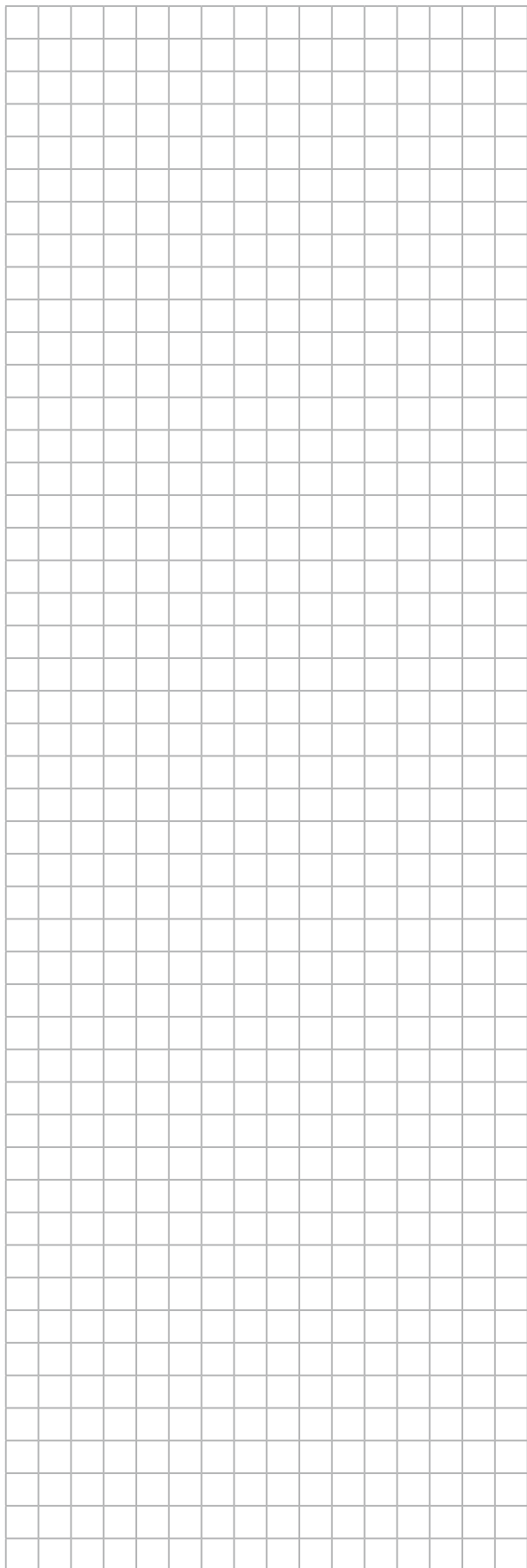
- a) 4
- b) 6
- c) 8
- d) 12

72. (Ifal)

Girando, em uma volta completa, um triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm, em torno de seu cateto maior, teremos o sólido abaixo com suas características:

- a) pirâmide com área lateral 30 cm^2 e volume 10 cm^3 .
- b) cone com área lateral $15\pi \text{ cm}^2$ e volume $12\pi \text{ cm}^3$.
- c) cone com área da base $16\pi \text{ cm}^2$ e volume $12\pi \text{ cm}^3$.
- d) pirâmide com área da base e área lateral iguais a $12\pi \text{ cm}^3$.
- e) cone com área da base e área lateral iguais a $15\pi \text{ cm}^3$.





73. (IME-RJ)

Seja **M** uma matriz real 2×2 . Defina uma função **f** na qual cada elemento da matriz se desloca para a posição seguinte no sentido horário, ou seja, se

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ implica que } f(M) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}.$$

Encontre todas as matrizes simétricas 2×2 reais na qual $M^2 = f(M)$.

74. (Uece)

Uma urna contém 50 cartelas das quais 20 são azuis, numeradas de 1 a 20, e 30 são vermelhas, numeradas de 21 a 50. De quantas formas diferentes é possível retirar três cartelas (por exemplo, duas vermelhas e uma azul, três azuis,...) dessa urna?

- a) 19 600.
- b) 16 060.
- c) 19 900.
- d) 16 090.

75. (Unicamp-SP)

Um paralelepípedo retângulo tem faces de áreas 2 cm^2 , 3 cm^2 e 4 cm^2 . O volume desse paralelepípedo é igual a:

- a) $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$.
- b) $2\sqrt{6} \text{ cm}^3$.
- c) 24 cm^3 .
- d) 12 cm^3 .

76. (UEG-GO)

Na competição de *skate* a rampa em forma de U tem o nome de *vert*, onde os atletas fazem diversas manobras radicais. Cada uma dessas manobras recebe um nome distinto de acordo com o total de giros realizados pelo skatista e pelo *skate*, uma delas é a “180 *allie frontside*”, que consiste num giro de meia volta. Sabendo-se que 540° e 900° são côngruos a 180° , um atleta que faz as manobras 540 *Mc Tuist* e 900 realizou giros completos de

- a) 1,5 e 2,5 voltas respectivamente.
- b) 0,5 e 2,5 voltas respectivamente.
- c) 1,5 e 3,0 voltas respectivamente.
- d) 3,0 e 5,0 voltas respectivamente.
- e) 1,5 e 4,0 voltas respectivamente.

77. (FGV-RJ)

Considere quatro números inteiros positivos. A cada um desses quatro números soma-se a média aritmética dos outros três, obtendo-se como resultados os números 48, 42, 32 e 34.

Um dos números originais é:

- a) 34
- b) 31
- c) 30
- d) 33
- e) 32

78. (Udesc)

Se m é a soma de todas as raízes da equação $\operatorname{tg}(x) - 2\operatorname{sen}(2x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi]$, então

$\cos\left(\frac{m^2}{\pi}\right) - \cos^2(m)$ é igual a:

- a) 1
- b) 2
- c) 0
- d) -2
- e) -1

79. (UPF-RS)

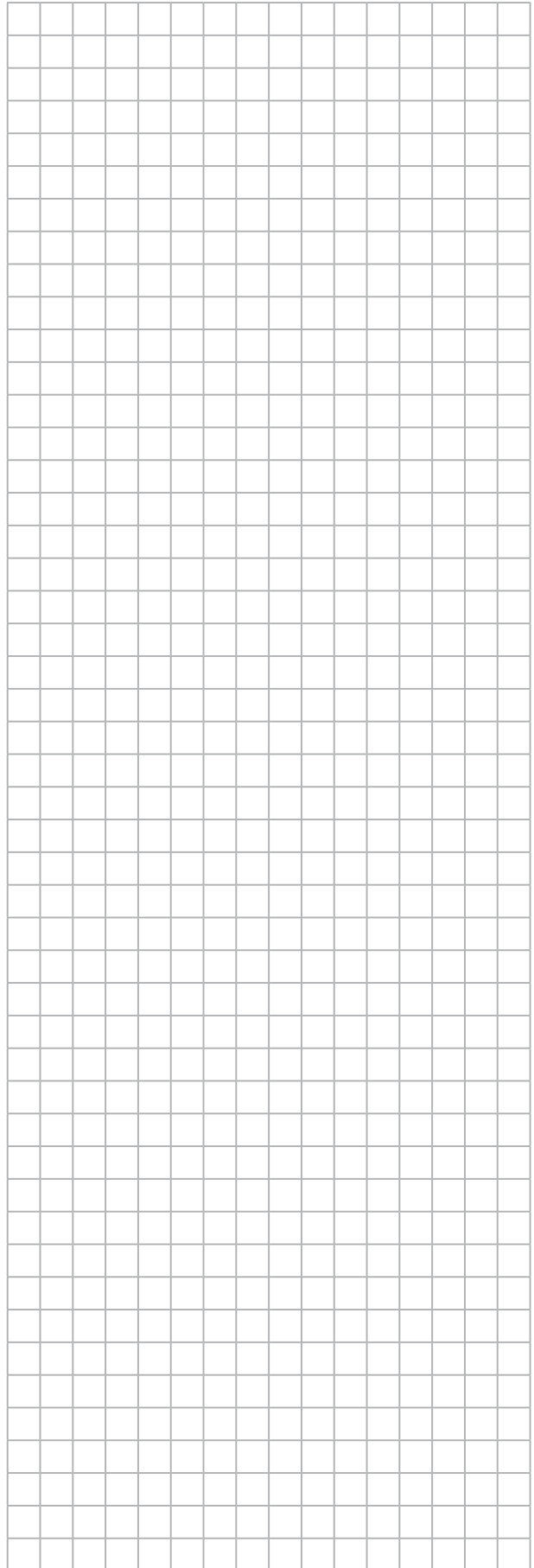
Um jogo consiste em um prisma triangular reto com uma lâmpada em cada vértice e um quadro de interruptores para acender essas lâmpadas. Sabendo que quaisquer três lâmpadas podem ser acesas por um único interruptor e que cada interruptor acende precisamente três lâmpadas, o número de interruptores que existem no quadro é

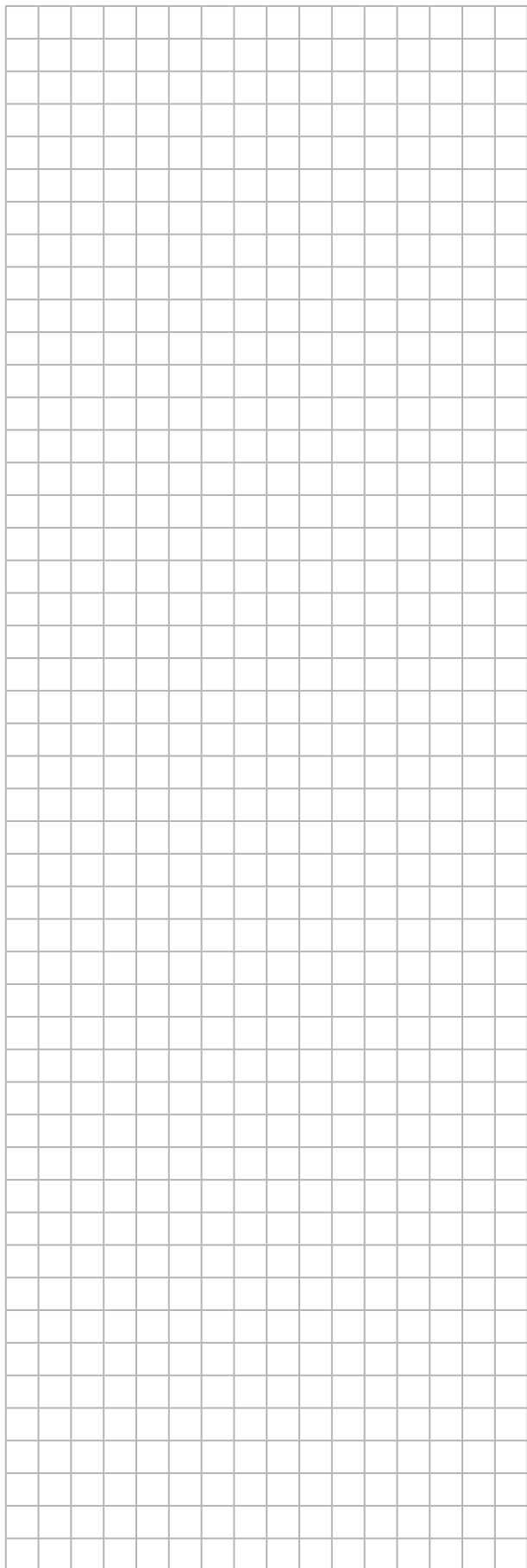
- a) 4
- b) 20
- c) 24
- d) 120
- e) 720

80. (Unigranrio)

Um prisma reto tem como base um hexágono regular, que pode ser inscrito em uma circunferência de raio 2 m. Se a altura desse prisma é igual ao dobro do lado do hexágono regular que forma a sua base, então, pode-se afirmar que seu volume em m^3 , é igual a:

- a) $4\sqrt{3}$
- b) $6\sqrt{3}$
- c) $30\sqrt{3}$
- d) $24\sqrt{3}$
- e) $48\sqrt{3}$





81. (EFOMM-RJ)

Seja uma esfera de raio **R** e um cubo de aresta **A**, ambos com a mesma área de superfície. A razão entre o volume do cubo e o volume da esfera é igual a

a) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

b) $\sqrt{\frac{\pi}{12}}$.

c) $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.

d) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

e) $\sqrt{\frac{\pi}{6}}$.

82. (Uern)

Um tetraedro regular é um tipo particular de pirâmide regular no qual qualquer uma de suas faces pode ser considerada base, haja vista ser formado por quatro regiões triangulares congruentes e equiláteras. Considerando essa informação, a área total de um tetraedro regular cuja aresta mede 6 cm é, em cm^2 :

(Considere $\sqrt{3} = 1,7$.)

a) 27,2.

b) 42,5.

c) 61,2.

d) 83,3.

83. (Epcar-MG)

Um baralho é composto por 52 cartas divididas em 4 naipes distintos (copas, paus, ouros e espadas). Cada naipe é constituído por 13 cartas, das quais 9 são numeradas de 2 a 10, e as outras 4 são 1 valete (J), 1 dama (Q), 1 rei (K) e 1 ás (A).

Ao serem retiradas desse baralho duas cartas, uma a uma e sem reposição, a quantidade de sequências que se pode obter em que a primeira carta seja de ouros e a segunda não seja um ás é igual a

a) 612

b) 613

c) 614

d) 615

84. (Uneb-BA)

A tirolesa é uma técnica utilizada para o transporte de carga de um ponto a outro. Nessa técnica, a carga é presa a uma roldana que desliza por um cabo, cujas extremidades geralmente estão em alturas diferentes. A tirolesa também é utilizada como prática esportiva, sendo considerado um esporte radical.

Em certo ecoparque, aproveitando a geografia do local, a estrutura para a prática da tirolesa foi montada de maneira que as alturas das extremidades do cabo por onde os participantes deslizam estão a cerca de 52 m e 8 m, cada uma, em relação ao nível do solo, e o ângulo de descida formado com a vertical é de 80° .

Nessas condições, considerando-se o cabo esticado e que $\text{tg } 10^\circ = 0,176$, pode-se afirmar que a distância horizontal percorrida, em metros, ao final do percurso, é aproximadamente igual a

- a) 250 c) 254 e) 258
b) 252 d) 256

85. (Cefet-MG)

Uma caixa sem tampa no formato de um cubo, cuja aresta mede 3 metros, está sobre uma superfície plana e com água até uma altura de 2 metros em relação à sua base, conforme mostra a FIG. 1.

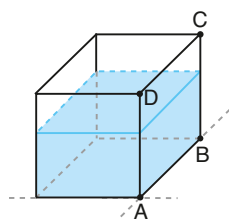


FIG. 1

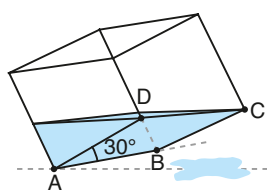


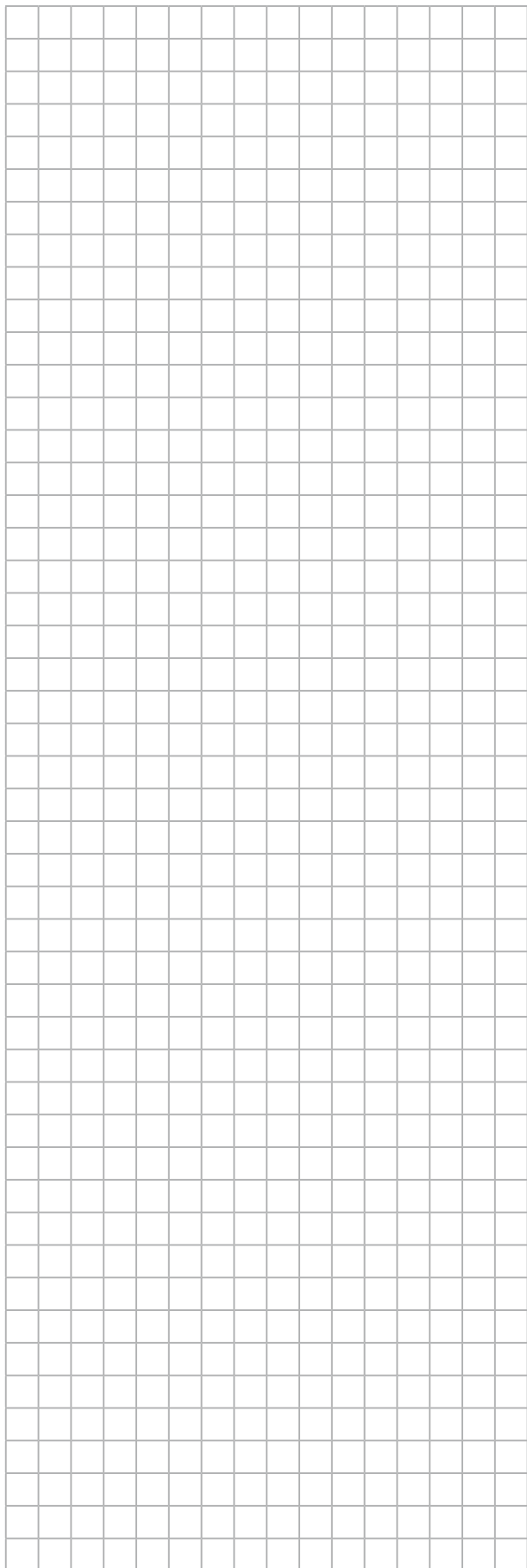
FIG. 2

Reprodução/Arquivo da editora

A caixa será inclinada de tal forma que a aresta AB ficará totalmente em contato com a superfície plana e haverá perda no volume de água, conforme a FIG. 2.

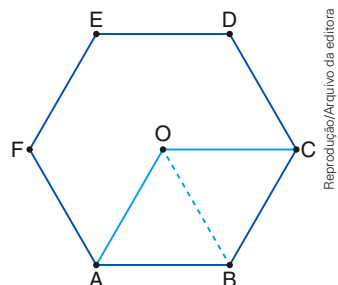
Sabendo-se que o ângulo formado, após a inclinação, entre a face ABCD e a superfície plana é de 30° e, desprezando-se a espessura das faces da caixa, a quantidade de água que sobrar na caixa, em m^3 , é de

- a) 9. c) $4\sqrt{3}$. e) $\frac{17\sqrt{3}}{4}$.
b) 18. d) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.



86. (FGV-SP)

Em uma folha de papel, desenha-se um hexágono regular $ABCDEF$ de lado 3 cm e inscrito em uma circunferência de centro O . O hexágono é recortado, e, em seguida, faz-se um recorte no raio \overline{OB} . A partir do recorte no raio, o pedaço de papel será usado para formar uma pirâmide de base quadrangular e centro O . Tal pirâmide será feita com a sobreposição e a colagem dos triângulos OAB e OCD , e dos triângulos OAF e OBC .



O volume da pirâmide formada após as sobreposições e colagens, em cm^3 , é igual a

- a) $3\sqrt{2}$
- b) $3\sqrt{3}$
- c) $4\sqrt{2}$
- d) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$
- e) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

87. (Cefet-MG)

Considere a função $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2\cos^2 x - \frac{1}{2} + k; k \in \mathbb{R}.$$

O valor de k para que o máximo de $f(x)$ seja igual a 4 é

- a) $\frac{1}{2}$.
- b) 2.
- c) $\frac{5}{2}$.
- d) 3.
- e) $\frac{7}{2}$.

88. (PUC-RJ)

As cartas de um baralho comum (13 de copas, 13 de paus, 13 de ouros e 13 de espadas) são empilhadas.

Qual a probabilidade de a carta de cima ser de copas e a de baixo também?

- a) $\frac{1}{13}$ d) $\frac{1}{17}$
b) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{52}$
c) $\frac{1}{5}$

89. (EsPCEEx-SP)

Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida **R**, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}R$, então o raio da esfera mede

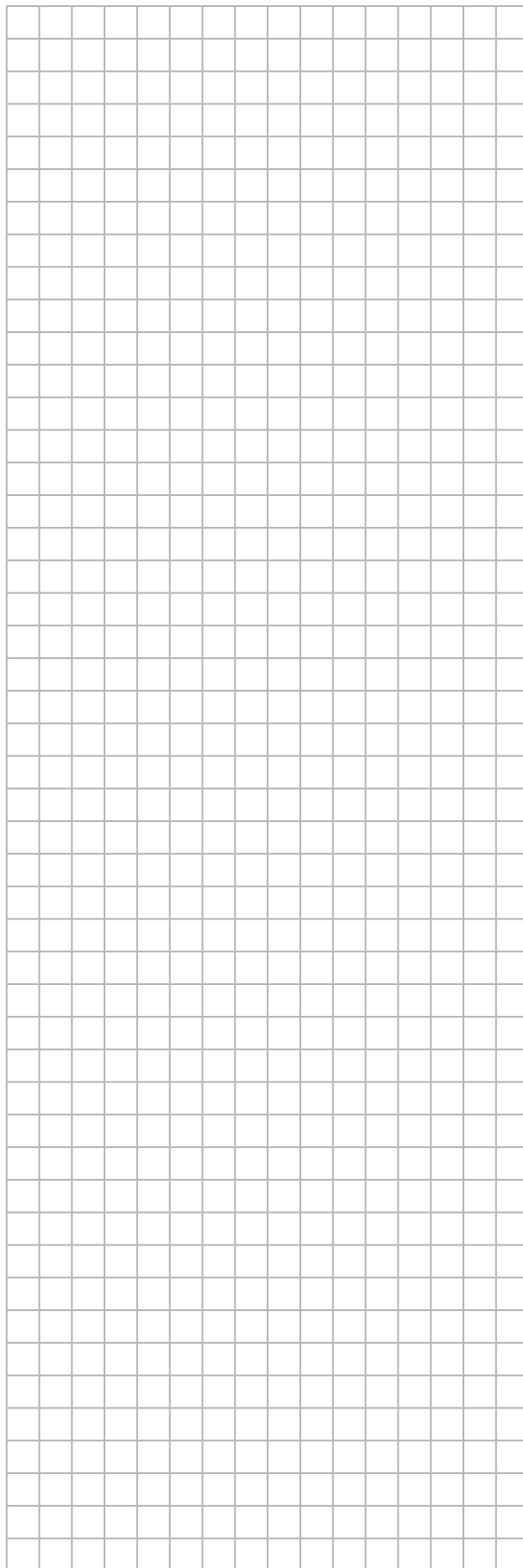
- a) $\frac{2}{3}R$ d) $\frac{1}{3}R$
b) $\frac{3}{4}R$ e) $\frac{9}{16}R$
c) $\frac{4}{9}R$

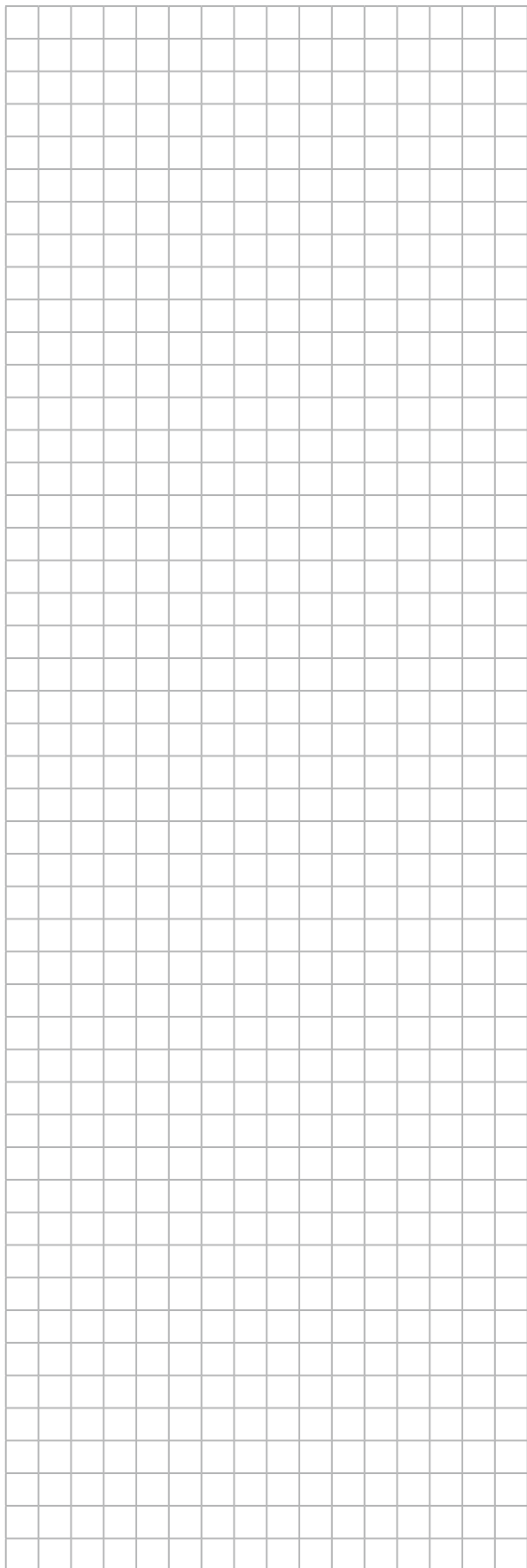
90. (Ufscar-SP)

Considere um plano α e um ponto **P** qualquer do espaço. Se por **P** traçarmos a reta perpendicular a α , a intersecção dessa reta com α é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto **P** sobre α . No caso de uma figura **F** do espaço, a projeção ortogonal de **F** sobre α é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos.

Com relação a um plano α qualquer fixado, pode-se dizer que:

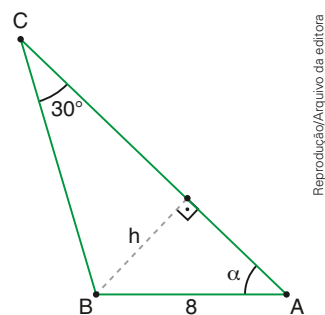
- a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semirreta.
b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.
c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.
d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.
e) a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.





91. (UPF-RS)

Considere o triângulo ABC representado na figura.



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 8$
- $\widehat{ACB} = 30^\circ$

Qual das expressões seguintes representa \overline{BC} , em função de α ?

- a) $16 \operatorname{sen} \alpha$
- b) $8 \operatorname{sen} \alpha$
- c) $4\sqrt{3} \operatorname{sen} \alpha$
- d) $16 \cos \alpha$
- e) $4 \cos \alpha$

92. (UFV-MG)

Se f é a função real dada por $f(x) = 2 - \cos(4x)$, então é CORRETO afirmar que:

- a) $f(x) \leq 3$ e $f(x) \geq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- b) o gráfico de f intercepta o eixo dos x .
- c) $f(x) \leq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- d) $f(2) < 0$.
- e) $f(x) \geq \frac{3}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

93. (FGV-RJ)

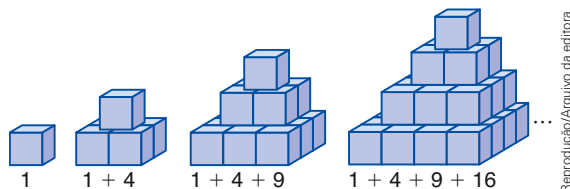
Seis bolas brancas e seis bolas pretas estão distribuídas em três caixas e nenhuma caixa contém bolas de uma só cor. A primeira caixa contém 3 bolas, a segunda 4 bolas e a terceira 5 bolas.

Sabe-se que a segunda caixa é a única em que o número de bolas pretas é maior do que o número de bolas brancas.

Retirando uma bola de cada caixa, determine a probabilidade de que sejam da mesma cor.

94. (Famerp-SP)

As figuras indicam uma sequência de empilhamentos de cubos de 1 cm^3 . Da primeira pilha em diante, os volumes das pilhas, em cm^3 , são iguais a 1, 5, 14, 30, 55, e assim sucessivamente.



Sabe-se que a soma $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + x^2$ é um polinômio do terceiro grau, dado por $P(x) = mx^3 + nx^2 + px$, com **m**, **n** e **p** racionais. Portanto, $P(1) = 1$, $P(2) = 5$, $P(3) = 14$, $P(4) = 30$ e assim por diante. Nas condições dadas, **m** é igual a

- a) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{6}$
 b) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{1}{3}$
 c) $\frac{2}{3}$

95. (EsPCEEx-SP)

A probabilidade de um casal ter um filho de olhos azuis é igual a $\frac{1}{3}$. Se o casal pretende ter 4 filhos, a probabilidade de que no máximo dois tenham olhos azuis é

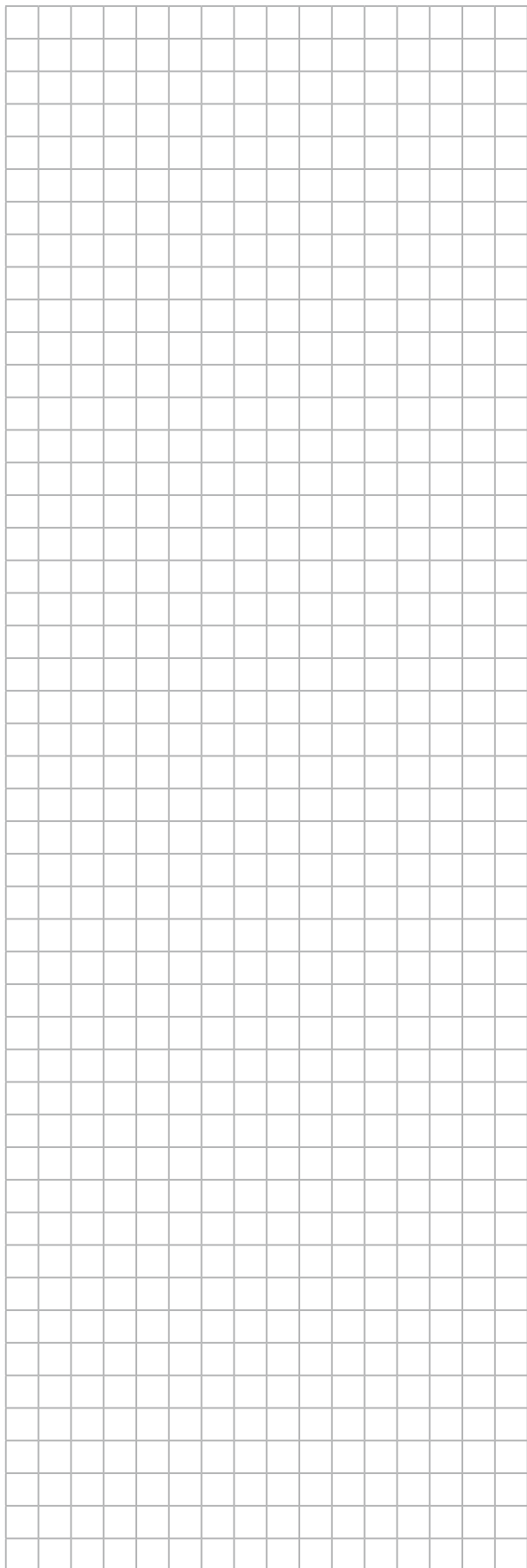
- a) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{8}{9}$ e) $\frac{1}{2}$
 b) $\frac{7}{9}$ d) $\frac{2}{3}$

96. (UPM-SP)

Os valores de **X** ($X \in \mathbb{R}$), para os quais a função

$$f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \text{ não é definida, são}$$

- a) $\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 d) $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 e) $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$



97. (Imed-RS)

Um reservatório de água tem o formato de um cilindro reto de volume igual a $54\pi\text{m}^3$. Supondo que esse cilindro está inscrito em um cubo de aresta igual ao dobro do raio, o volume desse cubo, em m^3 , é igual a:

- a) 108.
- b) 144.
- c) 216.
- d) 225.
- e) 343.

98. (Udesc)

A Câmara de Vereadores de uma cidade é composta por 13 vereadores, sendo que 6 destes são de partidos políticos da *situação* (aliados ao governo municipal) e os 7 restantes são de partidos da *oposição* (contrários ao governo municipal). É necessário compor uma comissão especial a ser formada por exatamente 5 vereadores, de forma que haja pelo menos dois representantes de cada um destes blocos políticos. Além disso, foi definido que o líder da *situação* e o líder da *oposição* não poderão fazer parte da mesma comissão. Sob essas condições, a quantidade de comissões distintas que pode ser constituída é igual a:

- a) 945
- b) 500
- c) 620
- d) 810
- e) 310

99. (IFCE)

Dentre os retângulos de perímetro $P = 40\text{ cm}$, iremos rotacionar o de área máxima em torno de um de seus lados, gerando um cilindro. O volume deste cilindro, em cm^3 , é

- a) 500π .
- b) 25π .
- c) 50π .
- d) 100π .
- e) 1000π .

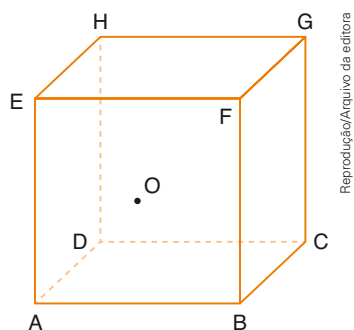
100. (UFJF-MG)

No processo de calcular o ângulo x formado entre duas avenidas transversais, um engenheiro obteve a seguinte equação $\sin x = \sin^3 x$. Sabendo que x não excede 180° , é **CORRETO** afirmar que:

- a) $x = -1$
- b) $x = 0$
- c) $x = 1$
- d) $x = \frac{\pi}{2}$
- e) $x = \frac{3\pi}{2}$

101. (UFRGS-RS)

A figura a seguir representa um cubo de centro O .



Considere as afirmações abaixo.

- I – O ponto O pertence ao plano BDE.
- II – O ponto O pertence ao plano ACG.
- III – Qualquer plano contendo os pontos O e E também contém C .

Quais estão corretas?

- a) Apenas I.
- b) Apenas II.
- c) Apenas I e II.
- d) Apenas I e III.
- e) Apenas II e III.

102. (Uece)

Duas esferas que se tangenciam estão em repouso sobre um plano horizontal. Os volumes das esferas são respectivamente $2304\pi \text{ m}^3$ e $36\pi \text{ m}^3$. A distância, em metros, entre os pontos de contato das esferas com o plano é igual a

- a) 9.
- b) 12.
- c) 15.
- d) 10.

103. (Uerj)

Observe a matriz:

$$\begin{bmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{bmatrix}$$

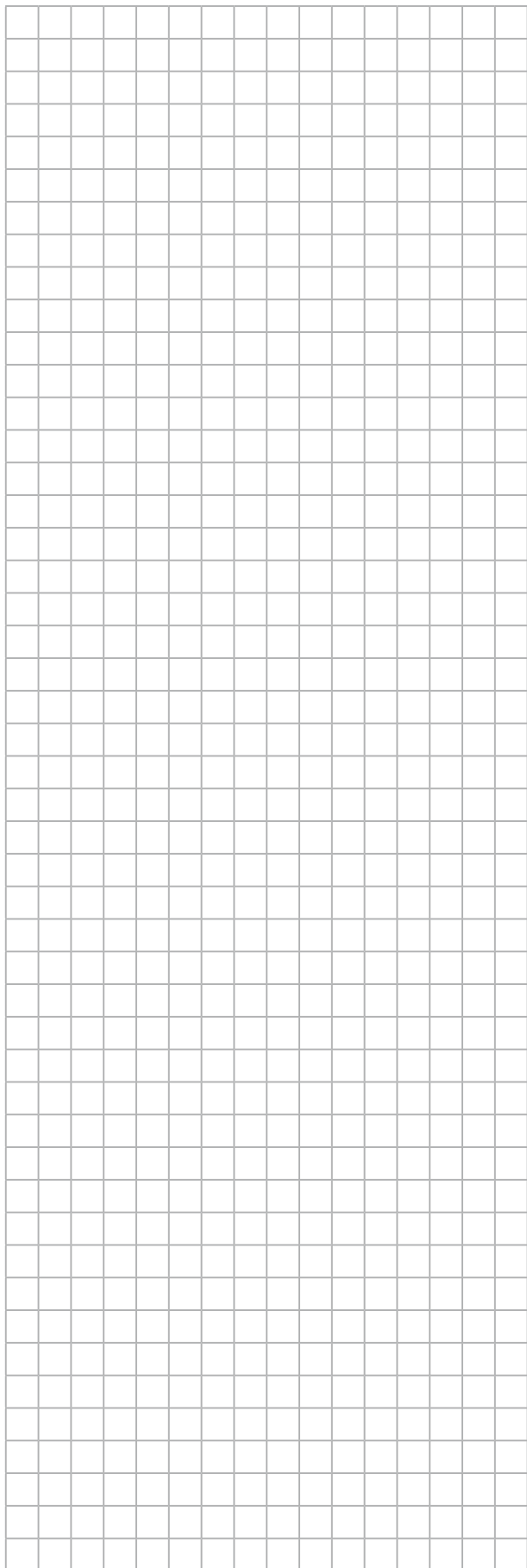
Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de t deve ser igual a:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4

104. (IFSC)

É CORRETO afirmar que o menor ângulo formado pelos ponteiros da hora e dos minutos às 8 h 20 min é:

- a) Entre 80° e 90° .
- b) Maior que 120° .
- c) Entre 100° e 120° .
- d) Menor que 90° .
- e) Entre 90° e 100° .



105. (Faap-SP)

A única proposição FALSA é:

- a) no espaço, duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si
- b) uma reta ortogonal a duas retas de um plano é ortogonal ao plano
- c) dois planos perpendiculares à mesma reta são paralelos entre si
- d) um plano perpendicular a uma reta de outro plano é perpendicular a este plano
- e) um plano perpendicular a dois planos que se interceptam é perpendicular à reta de intersecção destes

106. (Cefet-MG)

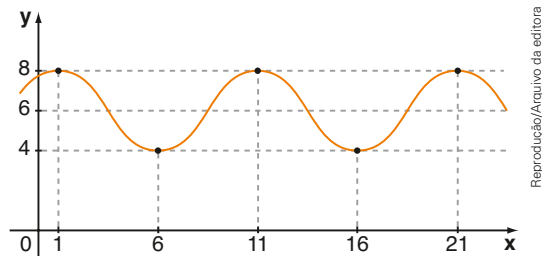
Uma caixa, em forma de paralelepípedo reto retângulo, cujas dimensões são 800 mm de comprimento, 50 cm de largura e 6 dm de altura tem volume igual a

- a) 0,24 mm³
- b) 0,24 cm³
- c) 0,24 dm³
- d) 0,24 m³

107. (FGV-SP)

Uma fórmula que mede a magnitude **M** de um terremoto pode ser escrita como $M = 0,67 \cdot \log E - 3,25$, sendo **E** a energia mecânica liberada pelo abalo, medida em Joules.

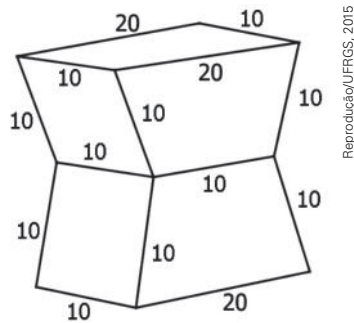
- a) Calcule, por meio da fórmula dada, a energia mecânica liberada por um terremoto de magnitude 2,11.
- b) A figura a seguir mostra um modelo trigonométrico que, por meio da função cosseno $y = A + B \cdot \cos(mx + n)$, ajuda a prever a magnitude de terremotos em uma ilha do Pacífico. Nesse modelo, **y** indica a magnitude do terremoto, e **x** indica o ano de ocorrência, sendo $x = 1$ correspondente ao ano 1980, $x = 6$ correspondente ao ano 1990, $x = 11$ correspondente ao ano 2000, e assim sucessivamente.



Determine domínio, imagem e período da função cujo gráfico está indicado na figura. Em seguida, determine os valores dos parâmetros **A**, **B**, **m** e **n** da lei dessa função.

108. (UFRGS-RS)

O primeiro prêmio de um torneio recebe um troféu sólido confeccionado em metal, com as medidas abaixo.



Reprodução/UFRGS, 2015

Considerando que as bases do troféu são congruentes e paralelas, o volume de metal utilizado na sua confecção é

- a) $100\sqrt{3}$ c) $1000\sqrt{3}$ e) $3000\sqrt{3}$
b) $150\sqrt{3}$ d) $1500\sqrt{3}$

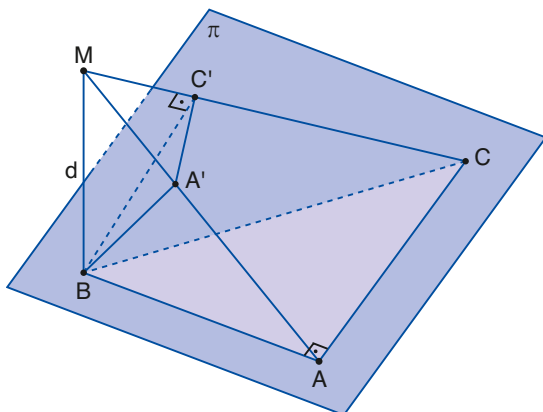
109. (UEL-PR)

Considere três planos que sejam dois a dois perpendiculares entre si e esferas com 10 cm de raio. Quantas dessas esferas poderão tangenciar simultaneamente os três planos?

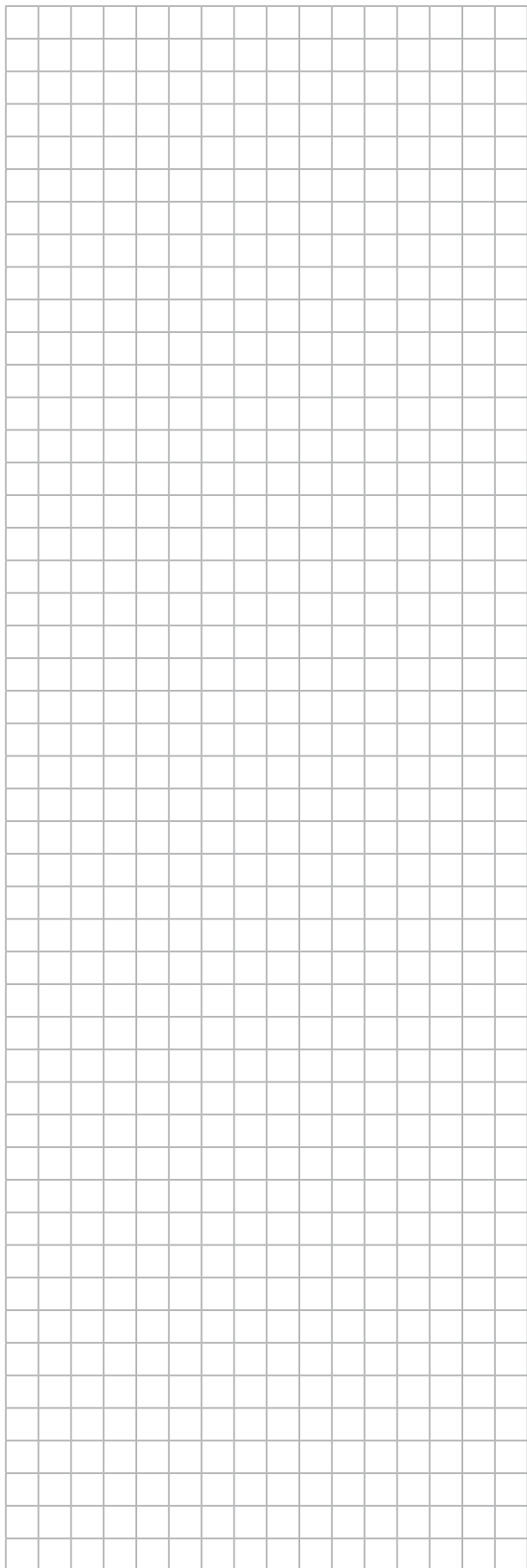
- a) Uma. c) Quatro. e) Infinitas.
b) Duas. d) Oito.

110. (UnB-DF)

Considere um triângulo ABC, retângulo em A, contido em um plano π e a reta d perpendicular a π , passando por B. Denomine M um ponto de d que não pertence ao plano π . O plano que é perpendicular a MC e contém B intercepta MC em C' e MA em A', conforme ilustra a figura a seguir.



Reprodução/Arquivo da editora



Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

- () O segmento AC é perpendicular ao plano definido pelo triângulo MBA.
- () O ângulo AMC é igual ao ângulo ABC.
- () Os pontos **A**, **B**, **C** e **C'** estão sobre uma esfera que tem seu centro no ponto médio do segmento BC.
- () Uma vez que BA' é ortogonal a AC e a MC, conclui-se que BA' é perpendicular a CA'.

111. (Uece)

Se **u**, **v**, **p**, **q** e **s** são números reais não nulos e os números **p**, **q**, **s** formam, nesta ordem, uma progressão geométrica crescente e se, além disso, o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} u & 2u & 4u \\ v & 3v & 9v \\ p & q & s \end{bmatrix}$$

for igual a zero, então a razão da progressão geométrica pode ser

- a) 2 ou 3
- b) 3 ou 4
- c) 1,5 ou 3
- d) 2,5 ou 4

112. (UEL-PR)

As afirmações seguintes podem ser verdadeiras ou falsas.

- I. A projeção ortogonal de uma reta num plano é uma reta.
- II. Distância entre duas retas reversas é a perpendicular comum a essas retas.
- III. A distância entre dois planos só é definida se esses planos são paralelos.

É correto afirmar que SOMENTE

- a) II é verdadeira.
- b) III é verdadeira.
- c) I e II são verdadeiras.
- d) I e III são verdadeiras.
- e) II e III são verdadeiras.

113. (UEFS-BA)

Uma bolha de sabão, esférica, não estouraria se sua área superficial fosse, no máximo, 44% maior. Logo, ela poderia conter um volume de ar em seu interior, sem estourar, até

- a) 32,4% maior.
- b) 44% maior.
- c) 53,6% maior.
- d) 66% maior.
- e) 72,8% maior.

114. (UEM-PR)

Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

A partir delas, é **correto** afirmar que:

- 01) A matriz **A** é uma matriz invertível.
- 02) A primeira e a última linhas de $A \cdot B$ são iguais.
- 04) É possível calcular o determinante da matriz **B**.
- 08) O determinante da inversa de **A** é $-\frac{1}{10}$.
- 16) $A \cdot B = B \cdot A$.

115. (Uece)

Considerando-se um cubo cuja medida de cada aresta é igual a 1 m pode-se afirmar corretamente que a medida do volume do poliedro convexo cujos vértices são os centros das faces desse cubo é

- a) $\frac{2}{3} \text{ m}^3$.
- b) $\frac{2}{7} \text{ m}^3$.
- c) $\frac{1}{6} \text{ m}^3$.
- d) $\frac{4}{7} \text{ m}^3$.

116. (Faap-SP)

Duas retas são reversas quando:

- a) não existe plano que contém ambas
- b) existe um único plano que as contém
- c) não se interceptam
- d) não são paralelas
- e) são paralelas, mas pertencem a planos distintos

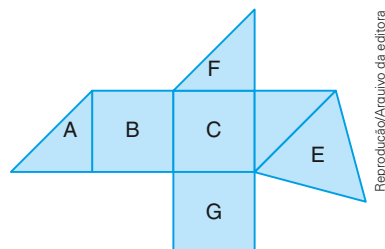
120. (IFMG)

Em um triângulo retângulo ABC, reto em \hat{A} , tem-se que $\text{tg } \hat{B} + \text{tg } \hat{C} = \frac{25}{12}$. O valor de $\text{sen } \hat{B} + \text{sen } \hat{C}$ é

- a) $\frac{25}{12}$. b) $\frac{12}{25}$. c) $\frac{7}{5}$. d) $\frac{5}{7}$.

121. (Uespi)

A ilustração a seguir é a planificação de um sólido: **B**, **C** e **G** são quadrados com lado medindo 3 cm; **A**, **D** e **F** são triângulos retângulos isósceles com catetos medindo 3 cm, e **E** é um triângulo equilátero com lado medindo $3\sqrt{2}$ cm.



Qual o volume do sólido?

- a) $22,5 \text{ cm}^3$ c) $22,3 \text{ cm}^3$ e) $22,1 \text{ cm}^3$
b) $22,4 \text{ cm}^3$ d) $22,2 \text{ cm}^3$

122. (PUCC-SP)

Considere as afirmações a seguir.

- I. Duas retas distintas determinam um plano.
- II. Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
- III. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a alguma reta do outro.

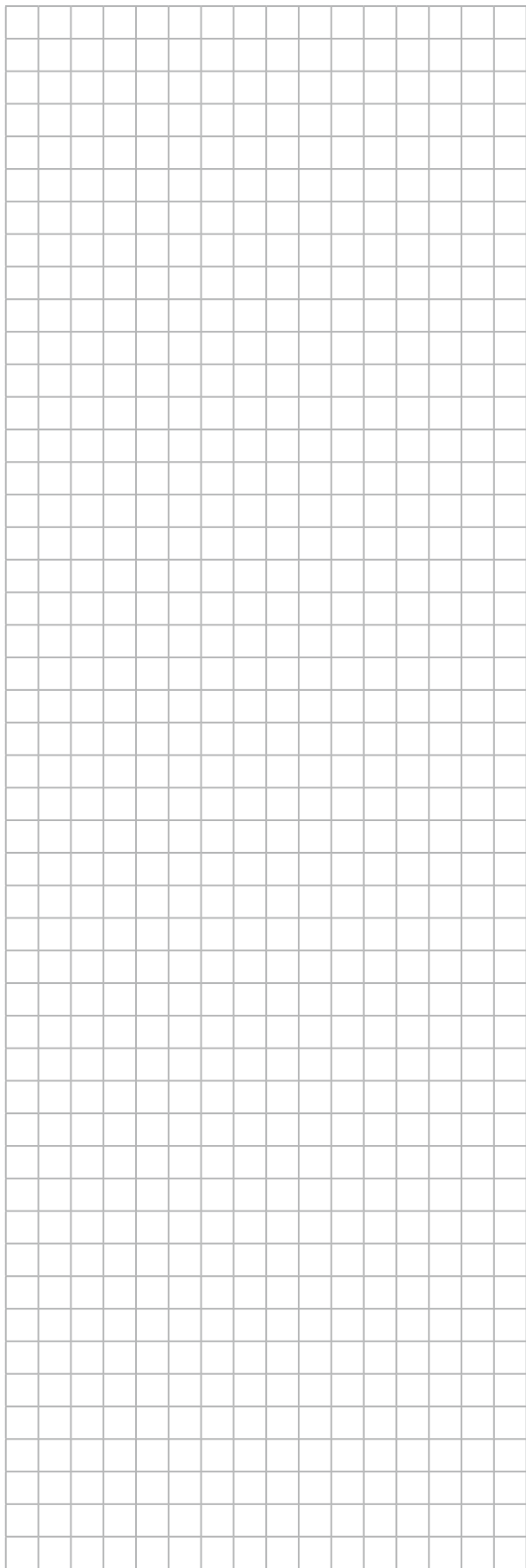
É correto afirmar que

- a) apenas II é verdadeira.
b) apenas III é verdadeira.
c) apenas I e II são verdadeiras.
d) apenas I e III são verdadeiras.
e) I, II e III são verdadeiras.

123. (Famema)

Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 3 & -2 & k \end{pmatrix}$, sendo k um número real, com $k < 2$, $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, com $b_{ij} = (i - j)^2$, e $C = A \cdot B$. Sabendo que $\det C = 12$, o valor de k^2 é

- a) 0 b) 9 c) 4 d) 16 e) 1



124. (UFU-MG)

Em um determinado sistema mecânico, as extremidades de uma haste rígida AB ficam conectadas, de forma articulada, a um motor e a um corpo, conforme ilustra a figura. Quando o motor é ligado, a haste imprime ao corpo um movimento oscilatório, e a distância horizontal $x(t)$ do ponto **B** em cada instante t em relação a um ponto fixo **O** é dada pela expressão

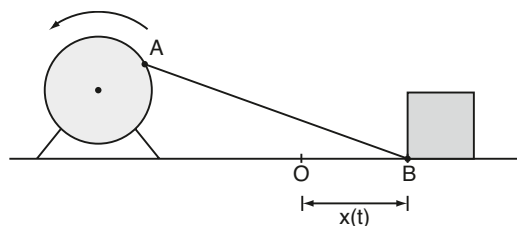
$$x(t) = \left| \frac{1}{2} \cdot \sin(t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(t) \right| \text{ centímetros.}$$

Nestas condições, a maior distância $x(t)$, em centímetros, será igual a:

Dados:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Reprodução/Arquivo da editora

a) $\frac{1}{2}$

c) 1

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

125. (IFPE)

Uma bola maciça, totalmente vedada, em formato de uma esfera perfeita, de diâmetro igual a 6 cm, foi lançada em uma panela cilíndrica cujo raio da base mede 5 cm e altura 10 cm. Sabendo que inicialmente a panela estava com água até a altura de 5 cm e que a bola ficou completamente submersa pela água, quantos centímetros o nível da água se elevará? (Dado: Considere $\pi = 3$)

a) $\frac{36}{25}$

d) $\frac{30}{25}$

b) $\frac{5}{3}$

e) $\frac{25}{15}$

c) $\frac{25}{3}$

126. (UEPG-PR)

A primeira fase de um campeonato de futebol é disputada por 35 times, divididos em 5 grupos, com 7 times em cada grupo, os quais disputam entre si. Dois times de cada grupo são selecionados para a segunda fase desse mesmo campeonato, num total de 10 times, os quais jogam entre si. Se p é o número de jogos a serem realizados na primeira fase e q o número de jogos a serem realizados na segunda fase, assinale o que for correto.

01) $p > 100$.

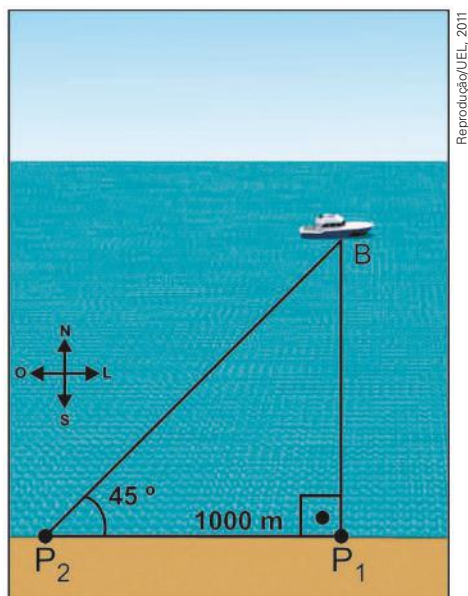
02) $p - q = 60$.

04) q é um múltiplo de 9.

08) $q < 50$.

127. (UEL-PR)

Um indivíduo em férias na praia observa, a partir da posição P_1 , um barco ancorado no horizonte norte na posição B . Nesta posição P_1 , o ângulo de visão do barco, em relação à praia, é de 90° , como mostrado na figura a seguir.



Ele corre aproximadamente 1000 metros na direção oeste e observa novamente o barco a partir da posição P_2 . Neste novo ponto de observação P_2 , o ângulo de visão do barco, em relação à praia, é de 45° .

Qual a distância P_2B aproximadamente?

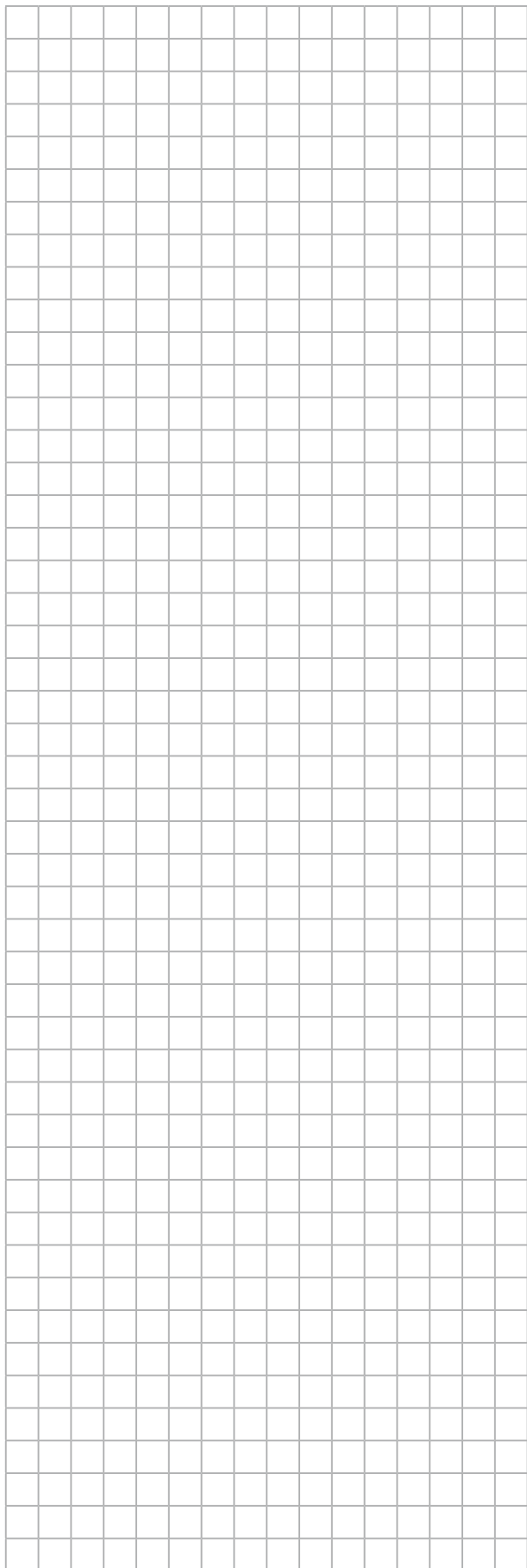
a) 1000 metros

d) 1714 metros

b) 1014 metros

e) 2414 metros

c) 1414 metros



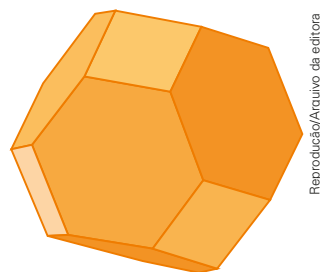
128. (FGV-SP)

Somando todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4, o resultado será igual a

- a) 2 400.
- b) 2 444.
- c) 6 000.
- d) 6 600.
- e) 6 660.

129. (UPF-RS)

O poliedro representado na figura (octaedro truncado) é construído a partir de um octaedro regular, cortando-se, para tal, em cada vértice, uma pirâmide regular de base quadrangular. A soma dos ângulos internos de todas as faces do octaedro truncado é:



- a) 2 160°
- b) 5 760°
- c) 7 920°
- d) 10 080°
- e) 13 680°

130. (UFV-MG)

Considere as afirmações a seguir:

- I. Se dois ângulos \hat{A} e \hat{B} de um triângulo são congruentes aos ângulos \hat{C} e \hat{E} , respectivamente, de outro triângulo, então esses triângulos são congruentes.
- II. Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a toda reta desse plano.
- III. Se duas retas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
- IV. As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Assinalando V para as afirmações verdadeiras e F para as falsas, a alternativa que apresenta a sequência CORRETA é:

- a) V F F V
- b) V V F F
- c) F F F V
- d) F F V V
- e) V V V F

131. (EFOMM-RJ)

Um cubo de lado $2a$ possui uma esfera circunscrita nele. Qual a probabilidade de, ao ser sorteado um ponto interno da esfera, esse ponto ser interno ao cubo?

- a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$ c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{2\pi}{6\sqrt{3}}$ e) $\frac{1}{2}$

132. (Acafe-SC)

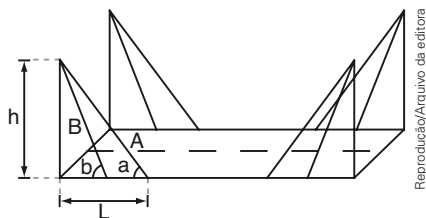
Um tubo cilíndrico reto de volume $128\pi \text{ cm}^3$ contém oito bolinhas de tênis de mesa congruentes entre si e tangentes externamente.

Sabendo que o cilindro está circunscrito à reunião dessas bolinhas, o percentual do volume ocupado pelas bolinhas dentro do tubo é, aproximadamente, de:

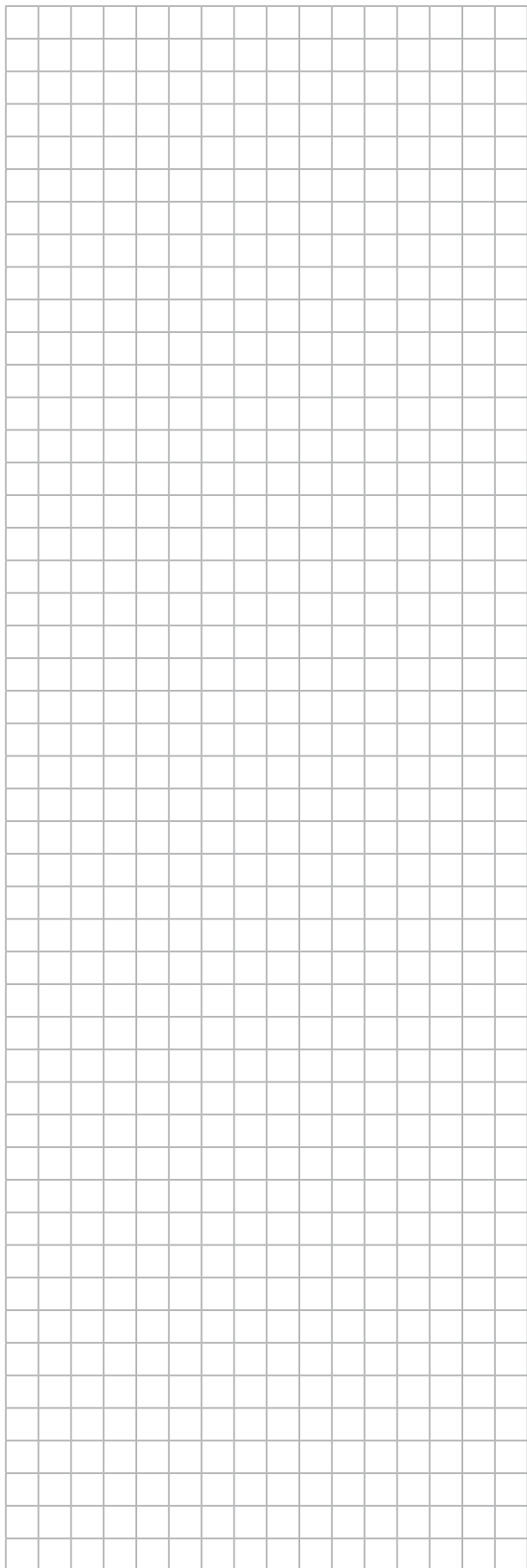
- a) 75. b) 50. c) 33. d) 66.

133. (Unioeste-PR)

Uma construtora foi contratada para construir uma ponte. No projeto está previsto a construção, nas extremidades da ponte, de quatro colunas de concreto, de altura h , que servirão para fixar cabos de aço que sustentarão a ponte. Em cada coluna serão fixados, na extremidade superior, dois cabos de comprimentos A e B . A outra extremidade do cabo de comprimento A será fixada na ponte, a uma distância L da base da coluna, formando um ângulo a com a ponte. A outra extremidade do cabo de comprimento B também será fixada na ponte formando um ângulo b com a ponte, conforme a figura. A ponte será supostamente plana e as colunas de concreto serão construídas de modo a formar um ângulo de 90° com a ponte. É correto afirmar que a quantidade total de cabo a ser utilizado na construção da ponte é:



- a) $4\left(\frac{h}{\text{sen}(b)} + \frac{L}{\text{sen}(a)}\right)$ d) $4\left(\frac{h}{\text{sen}(b)} + \frac{L}{\text{tg}(a)}\right)$
 b) $4\left(\frac{h}{\text{tg}(b)} + \frac{L}{\cos(a)}\right)$ e) $4\left(\frac{h}{\text{tg}(b)} + \frac{L}{\text{tg}(a)}\right)$
 c) $4\left(\frac{h}{\text{sen}(b)} + \frac{L}{\cos(a)}\right)$



134. (Unigranrio)

Considere as funções $f(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e

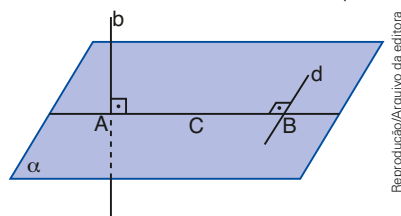
$g(x) = \begin{vmatrix} x & 11 & -4 \\ 10 & 11 & x \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. Desta forma, pode-se afir-

mar que o ponto de interseção das funções $f(x)$ e $g(x)$ é:

- a) (6, 30) c) (9, 72) e) (6, 42)
b) (9, -90) d) (6, -42)

135. (Fatec-SP)

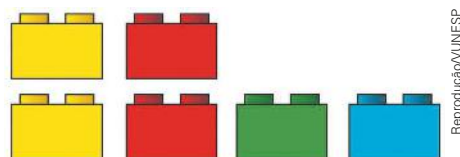
Na figura a seguir tem-se: o plano α definido pelas retas **c** e **d**, perpendiculares entre si; a reta **b**, perpendicular a α em **A**, com $A \in c$; o ponto **B**, intersecção de **c** e **d**. Se **X** é um ponto de **b**, $X \notin \alpha$, então a reta **s**, definida por **X** e **B**,



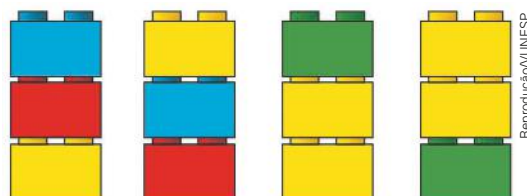
- a) é paralela à reta **c**.
b) é paralela à reta **b**.
c) está contida no plano α .
d) é perpendicular à reta **d**.
e) é perpendicular à reta **b**.

136. (Unesp-SP)

Uma criança possui 6 blocos de encaixe, sendo 2 amarelos, 2 vermelhos, 1 verde e 1 azul.



Usando essas peças, é possível fazer diferentes pilhas de três blocos. A seguir, são exemplificadas quatro das pilhas possíveis.



Utilizando os blocos que possui, o total de pilhas diferentes de três blocos, incluindo as exemplificadas, que a criança pode fazer é igual a

- a) 58. b) 20. c) 42. d) 36. e) 72.

137. (UPE)

Num triângulo retângulo, temos que $\operatorname{tg} x = 3$. Se x é um dos ângulos agudos desse triângulo, qual o valor de $\cos x$?

- a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{10}$
 b) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ d) $\frac{1}{4}$

138. (Acafe-SC)

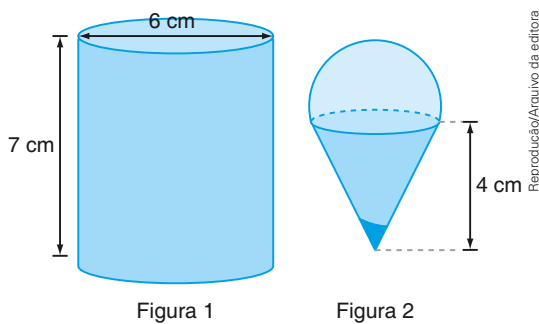
Uma peça de madeira tem a forma de uma pirâmide hexagonal regular com 21 cm de altura. Essa peça é seccionada por um plano paralelo à base, de forma que o volume da pirâmide obtida seja $\frac{8}{27}$ do volume da pirâmide original.

A distância (em cm) da base da pirâmide até essa secção é um número:

- a) fracionário. c) múltiplo de 3.
 b) primo. d) quadrado perfeito.

139. (Enem)

Para fazer um pião, brinquedo muito apreciado pelas crianças, um artesão utilizará o torno mecânico para trabalhar num pedaço de madeira em formato de cilindro reto, cujas medidas do diâmetro e da altura estão ilustradas na Figura 1. A parte de cima desse pião será uma semiesfera, e a parte de baixo, um cone com altura 4 cm, conforme Figura 2. O vértice do cone deverá coincidir com o centro da base do cilindro.

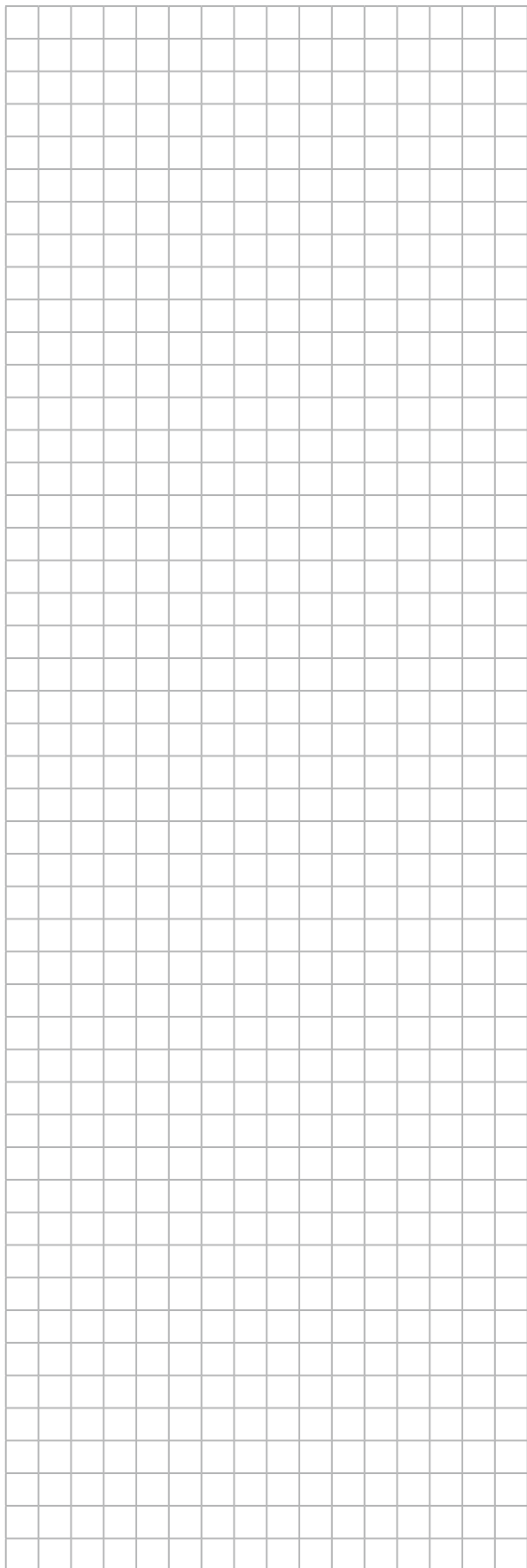


O artesão deseja fazer um pião com a maior altura que esse pedaço de madeira possa proporcionar e de modo a minimizar a quantidade de madeira a ser descartada.

Dados:

O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$;

O volume do cilindro de altura h e área da base S é $S \cdot h$;



O volume do cone de altura **h** e área da base **S** é $\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$;

Por simplicidade, aproxime π para 3.

A quantidade de madeira descartada, em centímetros cúbicos, é

- a) 45. b) 48. c) 72. d) 90. e) 99.

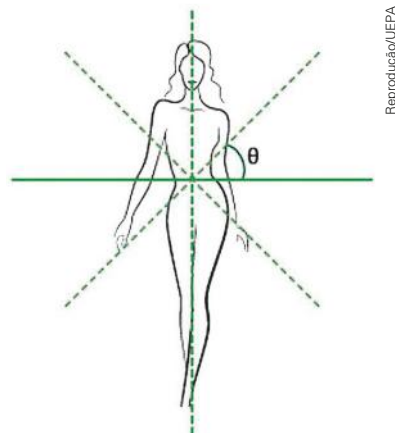
140. (Cesgranrio-RJ)

A é um ponto não pertencente a um plano **P**. O número de retas que contêm **A** e fazem um ângulo de 45° com **P** é igual a:

- a) 0. c) 2. e) infinito.
b) 1. d) 4.

141. (Uepa)

Os desfiles de moda parecem impor implicitamente tanto o “vestir-se bem” quanto o “ser bela” definindo desse modo padrões de perfeição. Nesses desfiles de moda, a rotação pélvica do andar feminino é exagerada quando comparada ao marchar masculino, em passos de igual amplitude. Esse movimento oscilatório do andar feminino pode ser avaliado a partir da variação do ângulo θ conforme ilustrado na figura abaixo, ao caminhar uniformemente no decorrer do tempo (t).



Reprodução/UEPA

(Fonte: <http://www.google.com.br/search?hl=PT>)

Acesso em 9 de setembro de 2011 – Texto adaptado)

Um modelo matemático que pode representar esse movimento oscilatório do andar feminino

é dado por: $\theta(t) = \frac{\pi}{10} \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$. Nestas condi-

ções, o valor de $\theta\left(\frac{3}{2}\right)$ é:

- a) $\frac{\pi}{8}$ c) $\frac{\pi}{12}$ e) $\frac{\pi}{20}$
b) $\frac{\pi}{10}$ d) $\frac{\pi}{18}$

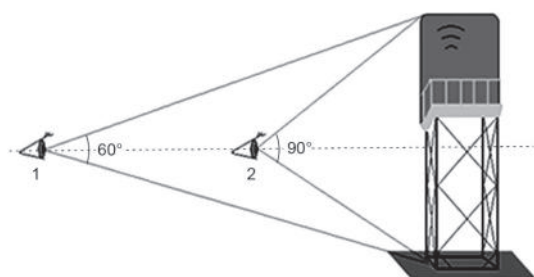
142. (Acafe-SC)

Se $2 + 2 \sin \theta + 2(\sin \theta)^2 + 2(\sin \theta)^3 + 2(\sin \theta)^4 + \dots = 10$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então, $|\cos(2\theta)|$ é igual a:

- a) $\frac{17}{25}$ c) $\frac{9}{5}$
b) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{7}{25}$

143. (PUCC-SP)

A figura mostra o *ângulo de visão* que um mesmo observador tem de uma estrutura de caixa-d'água em dois pontos diferentes. Sabe-se que a altura dos olhos, em relação ao piso plano sobre o qual a estrutura está apoiada perpendicularmente, é exatamente a metade da altura da estrutura da caixa-d'água, e que a distância entre os dois pontos de observação é de 2 metros.



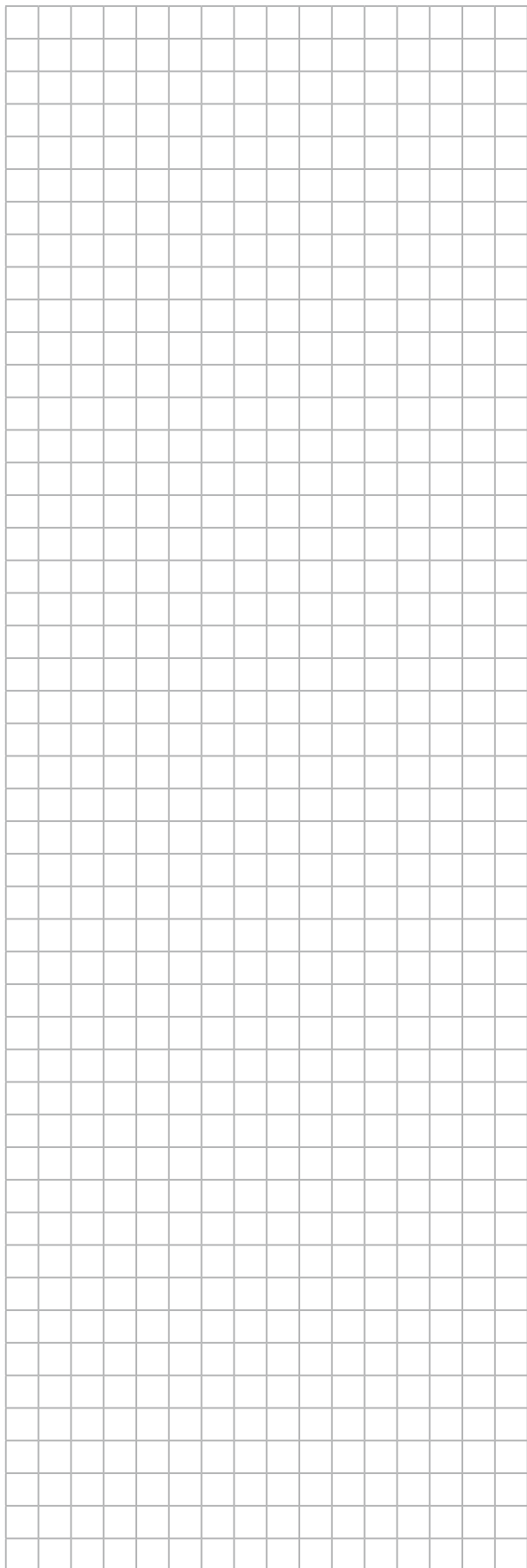
Reprodução/PUCCAMP, 2016

Dados:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

A partir dessas informações, é possível determinar que a altura da estrutura da caixa-d'água, em metros, é igual a

- a) $3\sqrt{3} - 2$.
b) $\frac{\sqrt{3} + 2}{3}$.
c) $2\sqrt{3} + 2$.
d) $\sqrt{3} + 2$.
e) $\sqrt{3} + 1$.



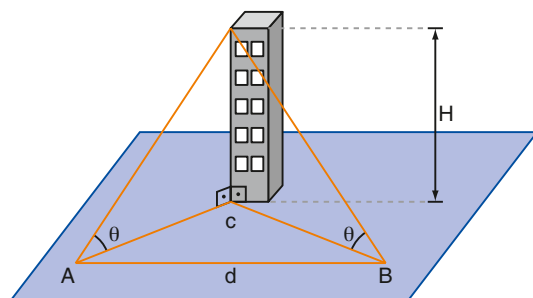
144. (UEL-PR)

A reta r é a intersecção dos planos perpendiculares α e β . Os pontos A e B são tais que $A \in \alpha$, $A \notin \beta$, $B \in \beta$, $B \notin \alpha$. As retas AB e r

- a) são reversas.
- b) são coincidentes.
- c) podem ser concorrentes.
- d) podem ser paralelas entre si.
- e) podem ser perpendiculares entre si.

145. (UFG-GO)

Dois observadores, situados nos pontos A e B , a uma distância d um do outro, como mostra a figura a seguir, avistam um mesmo ponto no topo de um prédio de altura H , sob um mesmo ângulo θ com a horizontal.



Reprodução/Arquivo da editora

Sabendo que o ângulo \widehat{ABC} também mede θ e desconsiderando a altura dos observadores, a altura H do prédio é dada pela expressão:

- a) $H = \frac{d}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \theta$
- b) $H = d \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$
- c) $H = \frac{d}{2} \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \sin \theta$
- d) $H = \frac{d}{2} \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \sec \theta$
- e) $H = d \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sec \theta$

146. (Enem)

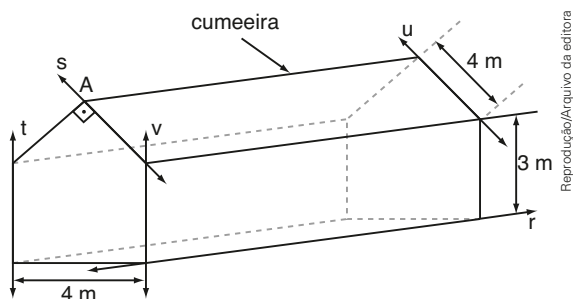
Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é 2,4 metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada.

Qual é a profundidade, em metros, desse poço?

- a) 1,44
- b) 6,00
- c) 7,20
- d) 8,64
- e) 36,00

147. (Faap-SP)

O galpão da figura a seguir está no prumo e a cumeeira está “bem no meio” da parede.

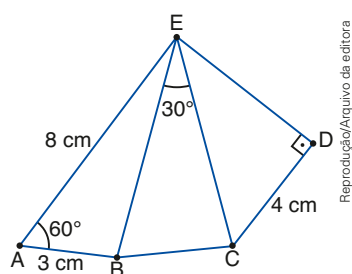


Das retas assinaladas podemos afirmar que:

- a) t e u são reversas.
- b) s e u são reversas.
- c) t e u são concorrentes.
- d) s e r são concorrentes.
- e) t e u são perpendiculares.

148. (PUC-SP)

No pentágono $ABCDE$ da figura, o lado \overline{AB} mede 3 cm; o lado \overline{AE} mede 8 cm; o lado \overline{CD} mede 4 cm e os ângulos \widehat{BEC} , \widehat{A} e \widehat{D} medem 30° , 60° e 90° respectivamente.



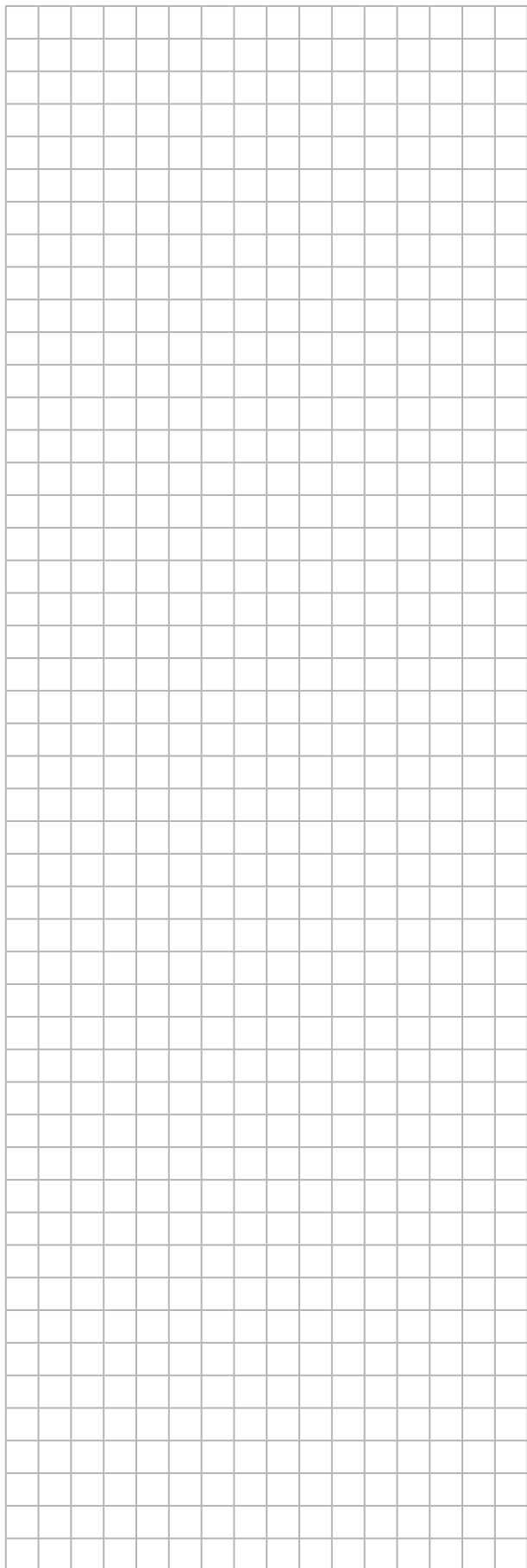
Sendo a área do triângulo BCE igual a $10,5 \text{ cm}^2$, a medida, em cm, do lado \overline{DE} é

- a) $\sqrt{18}$
- b) $\sqrt{20}$
- c) $\sqrt{22}$
- d) $\sqrt{24}$

149. (UEG-GO)

Alterando-se as dimensões de uma caixa retangular de altura h , as dimensões da base serão multiplicadas por k e as da altura somado k , em que k é uma constante positiva e não nula. Logo, verifica-se que o volume da nova caixa será em relação à anterior

- a) k^3 vezes maior.
- b) $k^2 + kh$ vezes maior.
- c) $k^2 + \frac{k^3}{h}$ vezes maior.
- d) $k^3 + \frac{\sqrt{h}}{k}$ vezes maior.



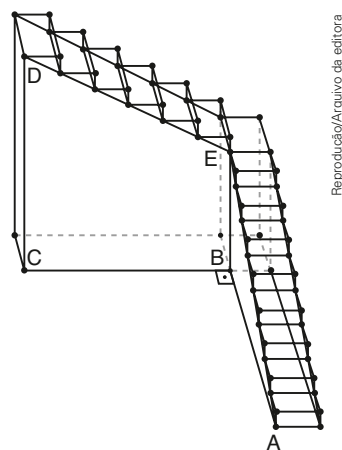
150. (UEPG-PR)

Sendo **M** uma matriz quadrada inversível, de ordem 3, assinale o que for correto.

- 01) Se $\det(M) = 5$ e $\det(2 \cdot M^{-1} \cdot M) = x + 1$, então $x = 7$.
- 02) Se $\det(M) = 4$ e se **k** é um número real tal que $\det(k \cdot M) = 108$, então $k = 9$.
- 04) Se $\det\left(\frac{1}{2} \cdot M\right) = 24$, então $\det(M^t) = 3$.
- 08) Se $\det(M) = 2x + 6$ e $\det(M^t) = x + 10$, então $\det(M \cdot M^t) = 16$.
- 16) Se $\det(M) = x + 2$ e $\det(M^{-1}) = x - 8$, então o produto dos possíveis valores de **x** é -17 .

151. (UFRN)

A escadaria a seguir tem oito batentes no primeiro lance e seis, no segundo lance de escada.

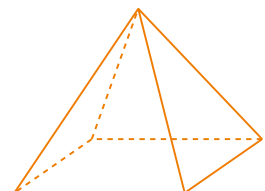


Sabendo que cada batente tem 20 cm de altura e 30 cm de comprimento (profundidade), a tangente do ângulo \widehat{CAD} mede:

- a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{14}{15}$ c) $\frac{29}{30}$ d) 1

152. (FGV-RJ)

As cinco faces de uma pirâmide quadrangular regular serão pintadas e cada face terá uma só cor. Tintas de 5 cores diferentes estão disponíveis e duas faces vizinhas da pirâmide não poderão ter a mesma cor.



De quantas maneiras diferentes a pirâmide poderá ser pintada?

Obs.: pinturas que coincidem por rotação da pirâmide são consideradas iguais.

153. (Uneb-BA)

Sua bexiga é um saco muscular elástico que pode segurar até 500 mL de fluido. A incontinência urinária, no entanto, tende a ficar mais comum à medida que envelhecemos, apesar de poder afetar pessoas de qualquer idade; ela também é mais comum em mulheres que em homens (principalmente por causa do parto, mas também em virtude da anatomia do assoalho pélvico).

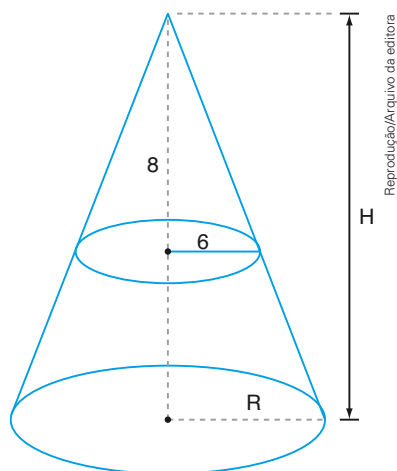
(BREWER. 2013, p. 76).

Considerando-se que a bexiga, completamente cheia, fosse uma esfera e que $\pi = 3$, pode-se afirmar que o círculo máximo dessa esfera seria delimitado por uma circunferência de comprimento, em cm, igual a

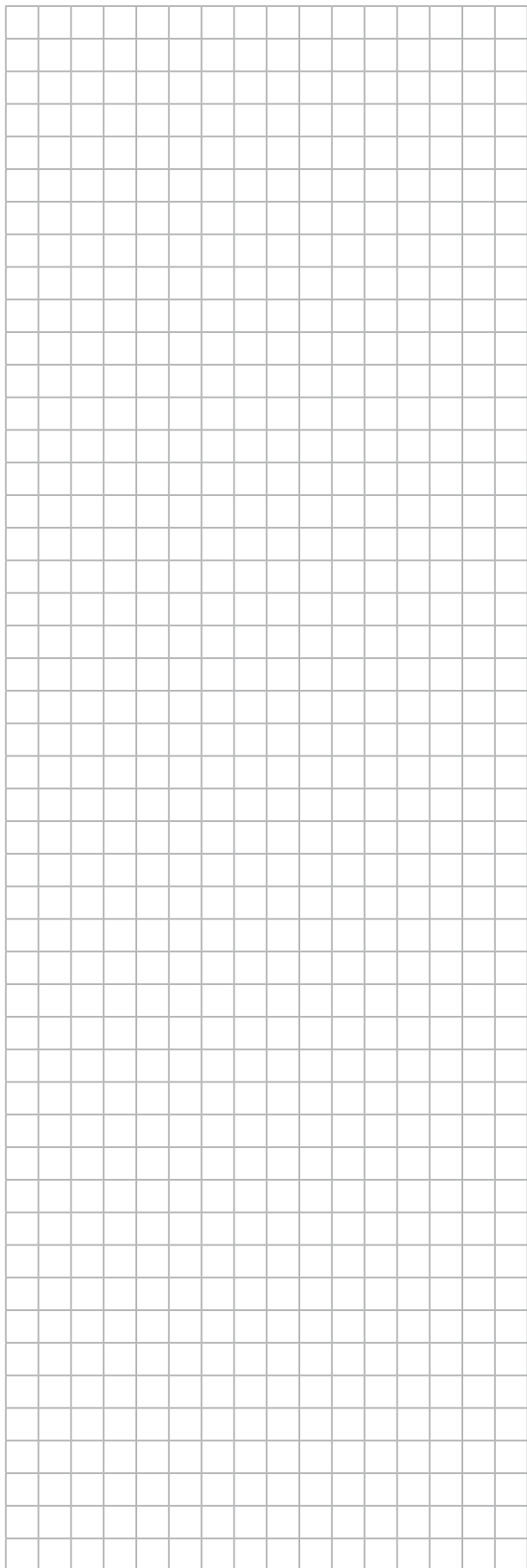
- a) 20
- b) 25
- c) 30
- d) 35
- e) 40

154. (PUC-PR)

Determine o raio da base do cone maior, formada pela seção transversal de um cone menor reto, com raio da base medindo 6 cm e altura 8 cm, sabendo que o seu volume é a metade do cone menor.

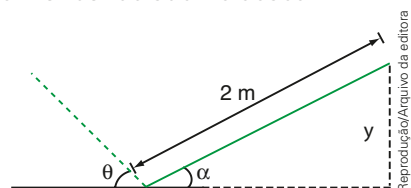


- a) $\sqrt[3]{108}$ cm.
- b) $6\sqrt[3]{2}$ cm.
- c) 12 cm.
- d) $\sqrt{51}$ cm.
- e) $8\sqrt[3]{6}$ cm.



155. (Unifor-CE)

Uma cama de hospital, equipada com um ajustador hidráulico, move-se de acordo com um controle manual de subir e descer.



A altura y que a cama varia em função de θ é de:

- a) $y = 2 \operatorname{sen} \theta$ d) $y = 2 \cos \theta$
b) $y = 2 \operatorname{sen} \theta + 2$ e) $y = 2 \cos \theta + 2$
c) $y = \operatorname{tg} \theta + 2$

156. (PUC-RJ)

Mônica tem uma blusa de cada uma das seguintes cores: branca, vermelha, amarela, preta e verde. Ela também tem uma calça de cada uma das seguintes cores: preta, azul, cinza e branca.

- a) De quantas maneiras Mônica pode escolher uma blusa e uma calça para sair?
b) De quantas maneiras Mônica pode escolher uma blusa e uma calça de cores diferentes uma da outra?
c) Na segunda-feira, Mônica usou calça azul e camisa preta. Na terça-feira, ela quer escolher uma calça e uma camisa de cores diferentes uma da outra. Sabendo que as roupas que ela usou na segunda-feira estão lavando (e apenas estas), de quantas maneiras ela pode escolher suas roupas?

157. (Unesp-SP)

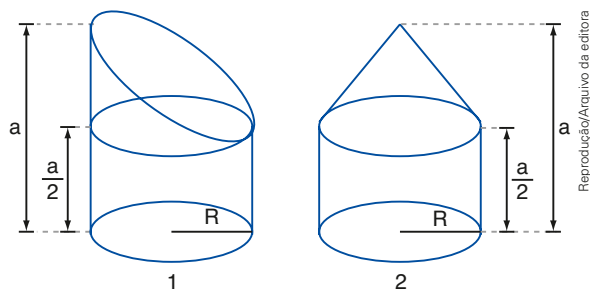
Um ponto P , de coordenadas (x, y) do plano cartesiano ortogonal, é representado pela matriz coluna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, assim como a matriz coluna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ representa, no plano cartesiano ortogonal, o ponto P de coordenadas (x, y) .

Sendo assim, o resultado da multiplicação matricial $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna que, no plano cartesiano ortogonal, necessariamente representa um ponto que é

- a) uma rotação de P em 180° no sentido horário, e com centro em $(0, 0)$.
b) uma rotação de P em 90° no sentido anti-horário, e com centro em $(0, 0)$.
c) simétrico de P em relação ao eixo horizontal x .
d) simétrico de P em relação ao eixo vertical y .
e) uma rotação de P em 90° no sentido horário, e com centro em $(0, 0)$.

158. (EsPCEEx-SP)

O valor da altura de um cilindro reto de raio **R**, cujo volume é a soma dos volumes dos sólidos 1 e 2 é



Desenho ilustrativo fora de escala.

- a) $\frac{13}{12}a$. d) $\frac{4}{3}a$.
- b) $\frac{7}{6}a$. e) $\frac{17}{12}a$.
- c) $\frac{5}{4}a$.

159. (Uema)

Um clube de futebol, para agradar a sua torcida e a seus jogadores, resolveu homenagear os jogadores que mais se destacaram no clube na última temporada. Para isso, confeccionaram-se dezesseis troféus do mesmo tamanho, em formato de bola de futebol, com raio igual a 6.

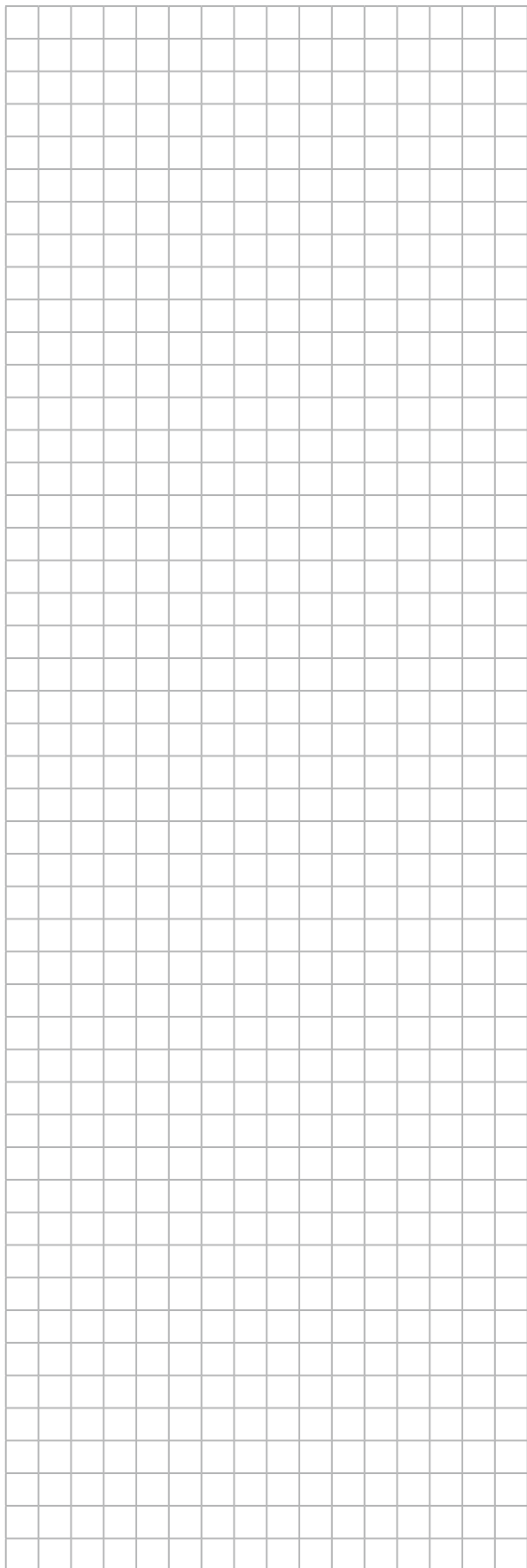
Determine (use $\pi = 3,14$)

- a) a área total das superfícies consideradas.
- b) o volume total dos troféus.

160. (UFPE)

Analise as seguintes afirmações:

- () Existem dois planos distintos, passando ambos por um mesmo ponto e perpendiculares a uma mesma reta.
- () Se dois planos forem perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.
- () Duas retas paralelas a um plano são paralelas.
- () Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.
- () Uma reta paralela a duas retas concorrentes de um plano é perpendicular a esse plano.



161. (Faap-SP)

A única proposição FALSA é:

- a) no espaço, duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.
- b) uma reta ortogonal a duas retas de um plano é ortogonal ao plano.
- c) dois planos perpendiculares à mesma reta são paralelos entre si.
- d) um plano perpendicular a uma reta de outro plano é perpendicular a este plano.
- e) um plano perpendicular a dois planos que se interceptam é perpendicular à reta de intersecção destes.

162. (Enem)

A figura mostra a pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide. Esse é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem da Antiguidade. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média 2,5 toneladas. Considere que a pirâmide de Quéops seja regular, sua base seja um quadrado com lados medindo 214 m, as faces laterais sejam triângulos isósceles congruentes e suas arestas laterais meçam 204 m.



Reprodução/ENEM, 2016

Disponível em: www.mauroweigel.blogspot.com.
Acesso em: 23 nov. 2011.

O valor mais aproximado para a altura da pirâmide de Quéops, em metro, é

- a) 97,0.
- b) 136,8.
- c) 173,7.
- d) 189,3.
- e) 240,0.

163. (Uece)

Um círculo de raio **R** gira em torno de seu diâmetro, gerando uma esfera de volume **V**. Se o raio do círculo é aumentado em 50%, então o volume da esfera é aumentado em

- a) 100,0%.
- b) 125,0%.
- c) 215,0%.
- d) 237,5%.

164. (Insper-SP)

Em uma pirâmide quadrangular regular, a área lateral é o dobro da área da base. Nesse caso, cada face lateral forma com o plano da base um ângulo que mede

- a) 15°.
- b) 30°.
- c) 45°.
- d) 60°.
- e) 75°.

165. (UEPG-PR)

As medidas dos lados de um triângulo ABC são três números pares consecutivos, sendo \hat{A} o maior ângulo e \hat{C} o menor ângulo desse triângulo.

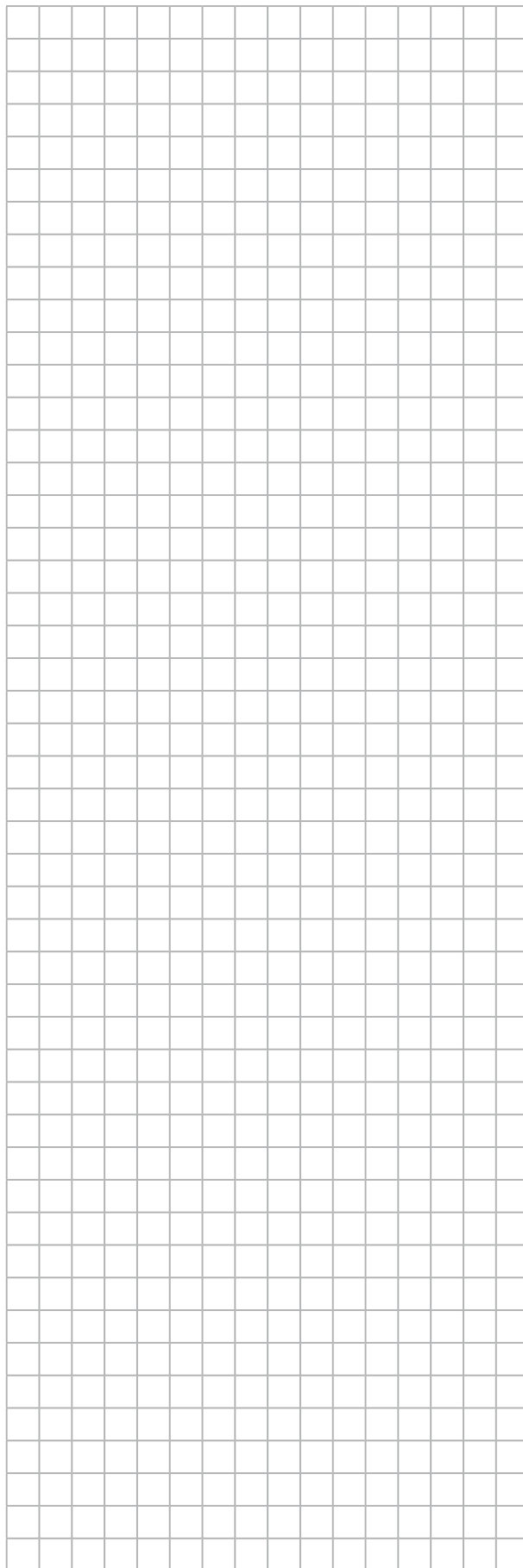
Sabendo que $\cos \hat{A} = \frac{1}{8}$, assinale o que for correto.

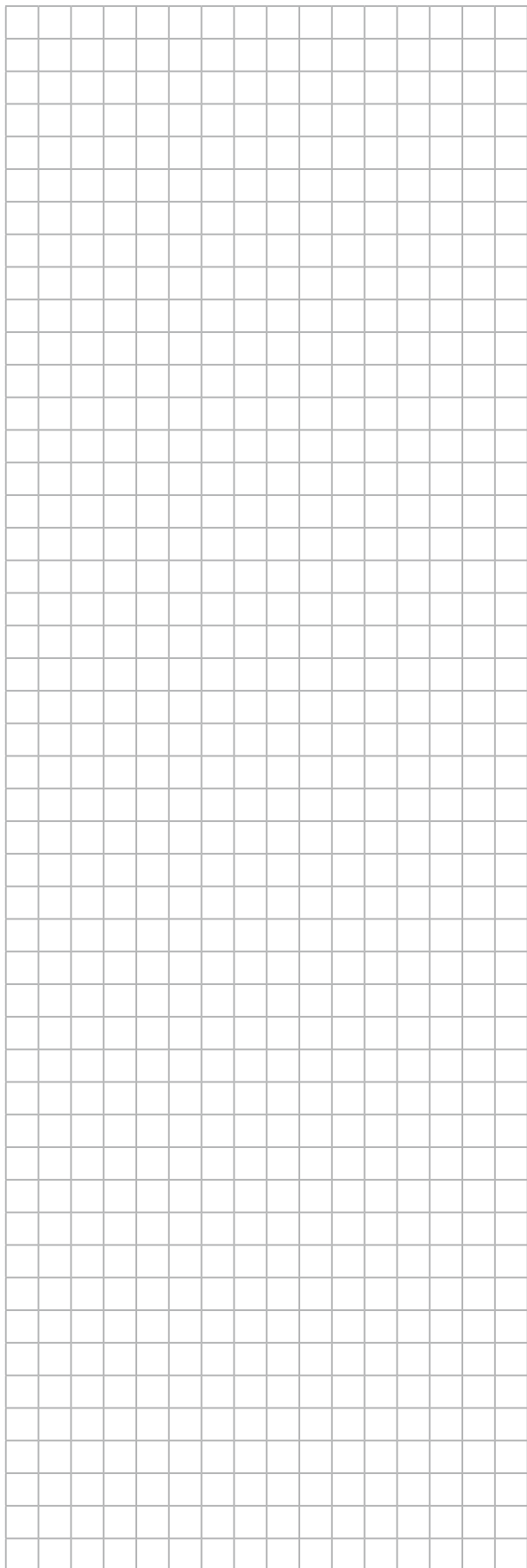
- 01) O perímetro do triângulo é 30 u.c.
- 02) A área do triângulo é $15\sqrt{7}$ u.a.
- 04) O triângulo é obtusângulo.
- 08) $\operatorname{tg} \hat{A} = 3\sqrt{7}$.
- 16) $\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

166. (Unesp-SP)

Dado um paralelepípedo retângulo, indiquemos por **A** o conjunto das retas que contêm as arestas desse paralelepípedo e por **B** o conjunto dos planos que contêm suas faces. Isso posto, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- a) Quaisquer que sejam os planos α e β de **B**, a distância de α a β é maior que zero.
- b) Se **r** e **s** pertencem a **A** e são reversas, a distância de **r** a **s** é maior que a medida da maior das arestas do paralelepípedo.
- c) Todo plano perpendicular a um plano de **B** é perpendicular a exatamente dois planos de **B**.
- d) Toda reta perpendicular a um plano de **B** é perpendicular a exatamente dois planos de **B**.
- e) A intersecção de três planos quaisquer de **B** é sempre um conjunto vazio.





167. (UFRN)

Numa escola, o acesso entre dois pisos desnivelados é feito por uma escada que tem quatro degraus, cada um medindo 24 cm de comprimento por 12 cm de altura. Para atender à política de acessibilidade do Governo Federal, foi construída uma rampa, ao lado da escada, com mesma inclinação, conforme mostra a foto a seguir.



Reprodução/UFRN, 2012

Com o objetivo de verificar se a inclinação está de acordo com as normas recomendadas, um fiscal da Prefeitura fez a medição do ângulo que a rampa faz com o solo.

O valor encontrado pelo fiscal

- a) estava entre 30° e 45°
- b) era menor que 30°
- c) foi exatamente 45°
- d) era maior que 45°

168. (UEM-PR)

Considere as matrizes

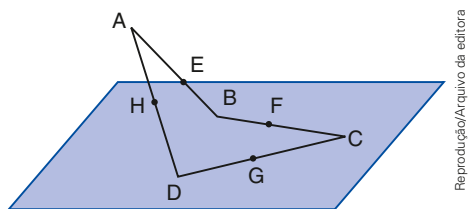
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

De acordo com conhecimentos sobre matrizes e determinantes, é **correto** afirmar que

- 01) $\det(M \cdot N) = \det(N \cdot M)$, onde **M** e **N** são matrizes quadradas de mesma ordem.
- 02) $\det M^t = -\det M$, onde **M** é matriz quadrada de ordem ímpar.
- 04) $\det(C) = 4$.
- 08) a matriz $A \cdot B$ possui três linhas e três colunas.
- 16) $\det(A \cdot B) = 96$.

169. (UFRJ)

Na figura a seguir, **A** não pertence ao plano determinado pelos pontos **B**, **C** e **D**. Os pontos **E**, **F**, **G** e **H** são os pontos médios dos segmentos **AB**, **BC**, **CD** e **DA**, respectivamente.



Reprodução/Arquivo da editora

Prove que **EFGH** é um paralelogramo.

170. (UEMG)

Dadas as equações de reta **r**: $x + y - 6 = 0$ e **s**: $2x - y = 0$ em um dado plano cartesiano de centro **O**. As retas **r** e **s** são concorrentes no ponto **P** e a reta **r** intercepta o eixo das abscissas no ponto **Q**. O volume do sólido formado pela rotação da figura plana formada pelos pontos **OPQ** em torno do lado **OQ** é: (use $\pi \approx 3$)

- a) 32 cm^3 .
- b) 64 cm^3 .
- c) 96 cm^3 .
- d) 88 cm^3 .

171. (EsPCEX-SP)

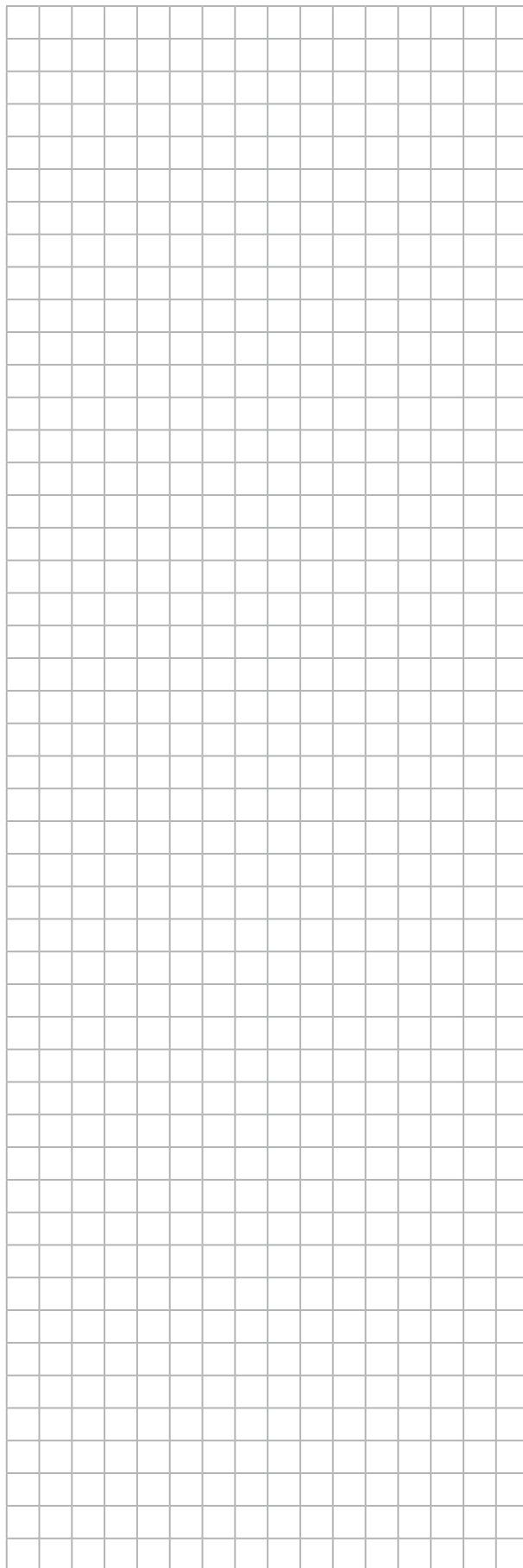
As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais a 3, 4 e 5 e a soma dessas medidas é igual a 48 cm. Então a medida da sua área total, em cm^2 , é

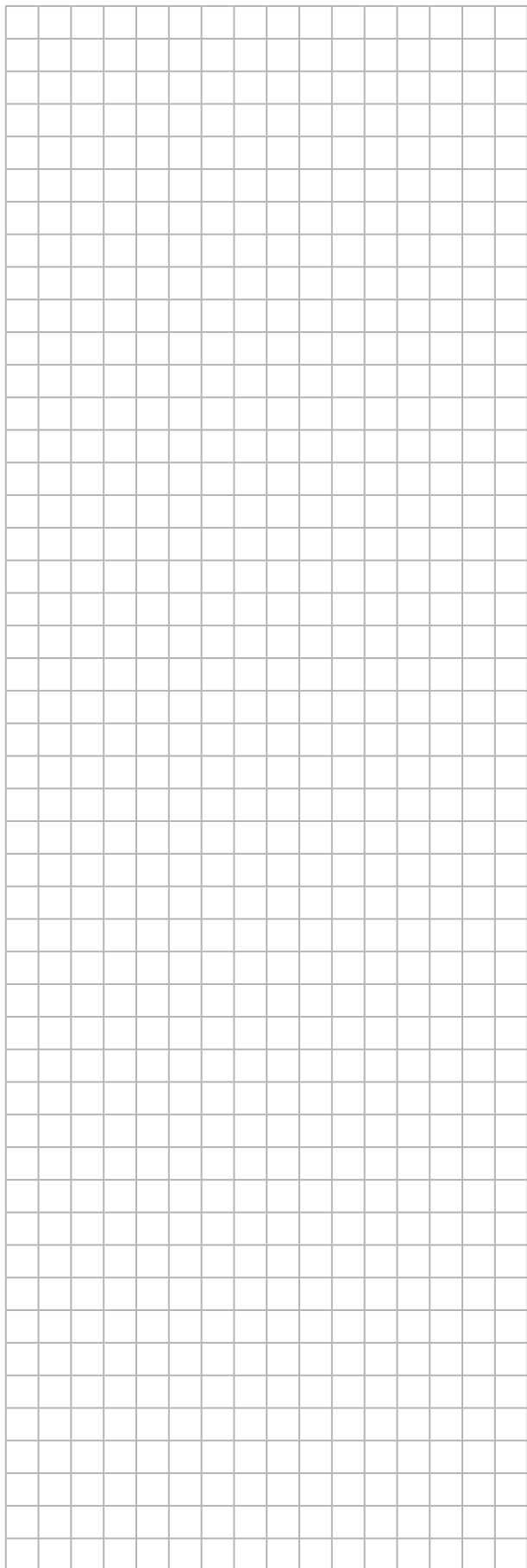
- a) 752
- b) 820
- c) 1024
- d) 1302
- e) 1504

172. (UEG-GO)

Uma laranja com formato esférico e com 6 cm de diâmetro foi descascada até a sua metade. Considerando-se esses dados, verifica-se que a área total da casca retirada da laranja é de aproximadamente (use $\pi \approx 3,14$)

- a) 48 cm^2
- b) 57 cm^2
- c) 74 cm^2
- d) 95 cm^2





173. (IFBA)

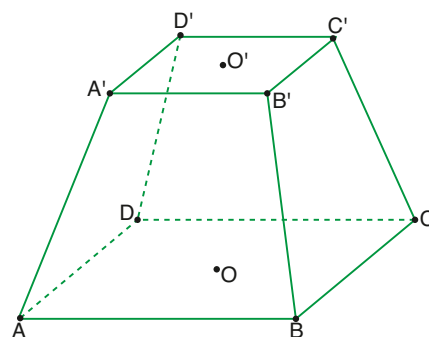
Seja o valor de p o triplo do valor de r e q o dobro do valor de r ; sendo a soma do valor de p com o valor de q o mesmo valor correspondente a 20% do valor 75; sendo $M = \frac{2 \cdot p(3 + r)}{q^2}$,

então podemos afirmar que o valor de M é?

- a) 4 c) 6 e) 3
b) 2 d) 5

174. (FGV-RJ)

A figura abaixo mostra um tronco de pirâmide regular formado por dois quadrados ABCD e A'B'C'D' de centros O e O' contidos em planos paralelos e quatro trapézios congruentes. Os quadrados são as bases do tronco e a sua altura é a distância $OO' = h$ entre os planos paralelos.



Reprodução/Arquivo da editora

Se S e S' são as áreas das bases de um tronco de pirâmide de altura h , o volume desse tronco é dado pela fórmula $V = \frac{h}{3}(S + S' + \sqrt{SS'})$.

São dadas, em decímetros, as medidas das arestas:

$AB = 12$, $A'B' = 6$, $AA' = 9$.

Calcule o volume desse poliedro em decímetros cúbicos e dê um valor aproximado usando algum dos dados abaixo.

Dados: $\sqrt{2} \approx 1,41$, $\sqrt{3} \approx 1,73$, $\sqrt{5} \approx 2,24$,

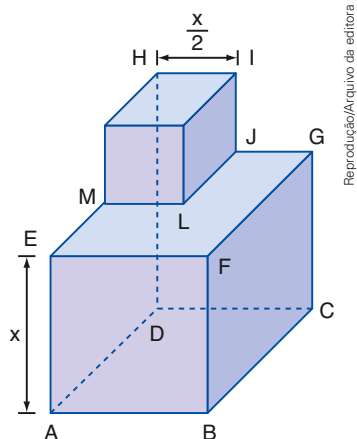
$\sqrt{7} \approx 2,65$.

175. (UFPE)

Em quantas regiões quatro retas distintas dividem o plano, sabendo-se que não há duas retas paralelas nem três concorrentes no mesmo ponto?

176. (UEL-PR)

O sólido representado na figura a seguir é formado por um cubo de aresta de medida $\frac{x}{2}$ que se apoia sobre um cubo de aresta de medida x .

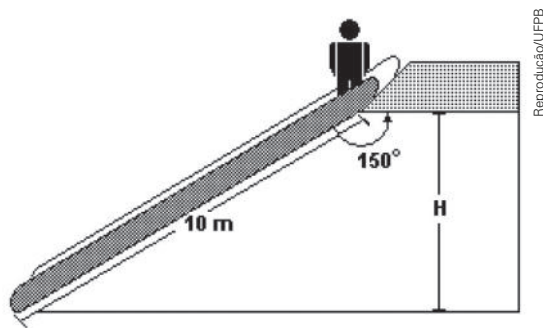


A intersecção do plano EGC com o plano ABC é

- a) vazia. _____
b) a reta \overleftrightarrow{AC} . _____
c) o segmento de reta \overline{AC} . _____
d) o ponto **C**. _____
e) o triângulo AGC. _____

177. (UFPB)

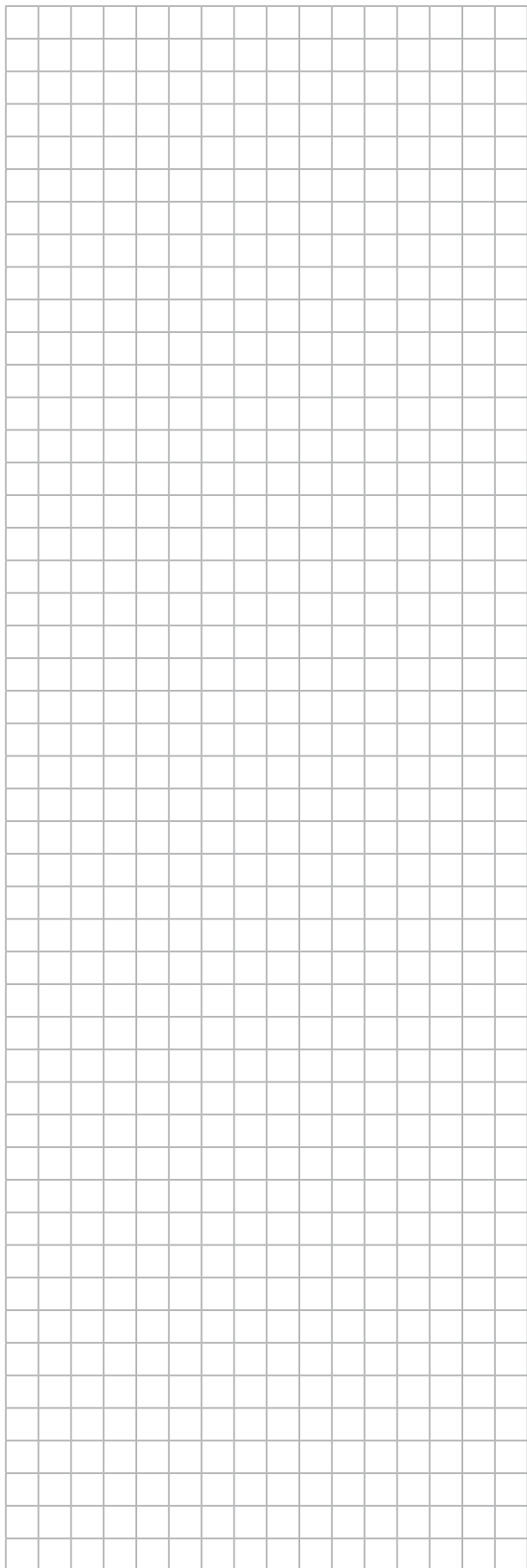
Em um *shopping*, uma pessoa sai do primeiro pavimento para o segundo através de uma escada rolante, conforme a figura a seguir.



A altura H , em metros, atingida pela pessoa, ao chegar ao segundo pavimento, é:

- a) 15
- b) 10
- c) 5
- d) 3
- e) 2





178. (UFU-MG)

Para realizar uma venda, uma loja virtual solicita de seus clientes o cadastramento de uma senha pessoal que permitirá acompanhar a entrega de sua compra. Essa senha anteriormente era composta por quatro algarismos e uma letra (minúscula), sem quaisquer restrições de posicionamentos entre letra e algarismos. Com o grande aumento no número de vendas, houve a necessidade de ampliação no número de senhas, as quais passaram a ser compostas por cinco algarismos e uma letra (minúscula). Sabe-se que existem 26 letras no alfabeto e 10 algarismos disponíveis.

Se denotarmos por **N** e **M**, respectivamente, o número total de senhas possíveis, antes e após a mudança, então, a relação entre **N** e **M** é dada por:

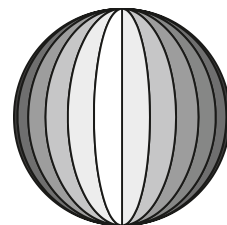
- a) $M = 10 \cdot N$ c) $M = 6! \cdot N$
b) $M = 5! \cdot N$ d) $M = 12 \cdot N$

179. (Udesc)

Uma bola esférica é composta por 24 faixas iguais, como indica a figura.

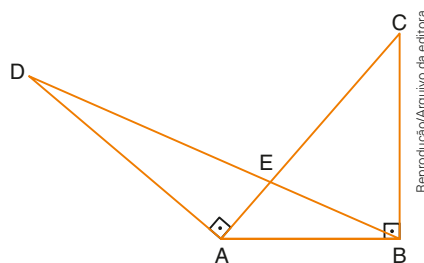
Sabendo-se que o volume da bola é $2\,304\pi \text{ cm}^3$, então a área da superfície de cada faixa é de:

- a) $20\pi \text{ cm}^2$ c) $28\pi \text{ cm}^2$ e) $25\pi \text{ cm}^2$
b) $24\pi \text{ cm}^2$ d) $27\pi \text{ cm}^2$



Reprodução/Arquivo da editora

180. (UPM-SP)



Reprodução/Arquivo da editora

Na figura acima, $\triangle ABC$ e $\triangle AED$ são triângulos retângulos. Se $m(\widehat{AC}) = \ell$, $m(\widehat{BAC}) = \alpha$, $m(\widehat{ADE}) = \beta$ e $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DÂE}) = 90^\circ$, então $m(\widehat{BD})$ é

- a) $\ell \cdot \cos \alpha$ d) $\ell \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \beta}$
b) $\ell \cdot \sin^2 \alpha$ e) $\ell \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \beta}$
c) $\ell \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta$

181. (Uece)

Um poliedro convexo com 32 vértices possui apenas faces triangulares. O número de arestas deste poliedro é

- a) 100. b) 120. c) 90. d) 80.

182. (EsPCEX-SP)

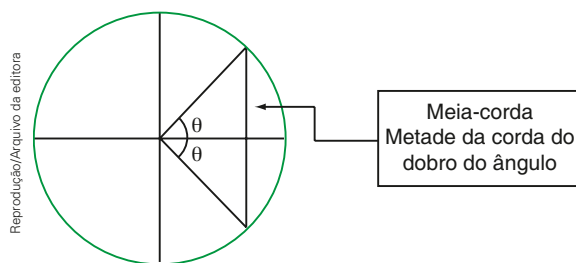
A angioplastia é um procedimento médico caracterizado pela inserção de um cateter em uma veia ou artéria com o enchimento de um pequeno balão esférico localizado na ponta desse cateter. Considerando que, num procedimento de angioplastia, o raio inicial do balão seja desprezível e aumente a uma taxa constante de 0,5 mm/s até que o volume seja igual a 500 mm^3 , então o tempo, em segundos, que o balão leva para atingir esse volume é

- a) 10. c) $10^3 \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. e) $10^3 \sqrt{\frac{3}{\pi}}$.
b) $10^3 \sqrt{\frac{5}{\pi}}$. d) $10^3 \sqrt{\pi}$.

183. (Uepa)

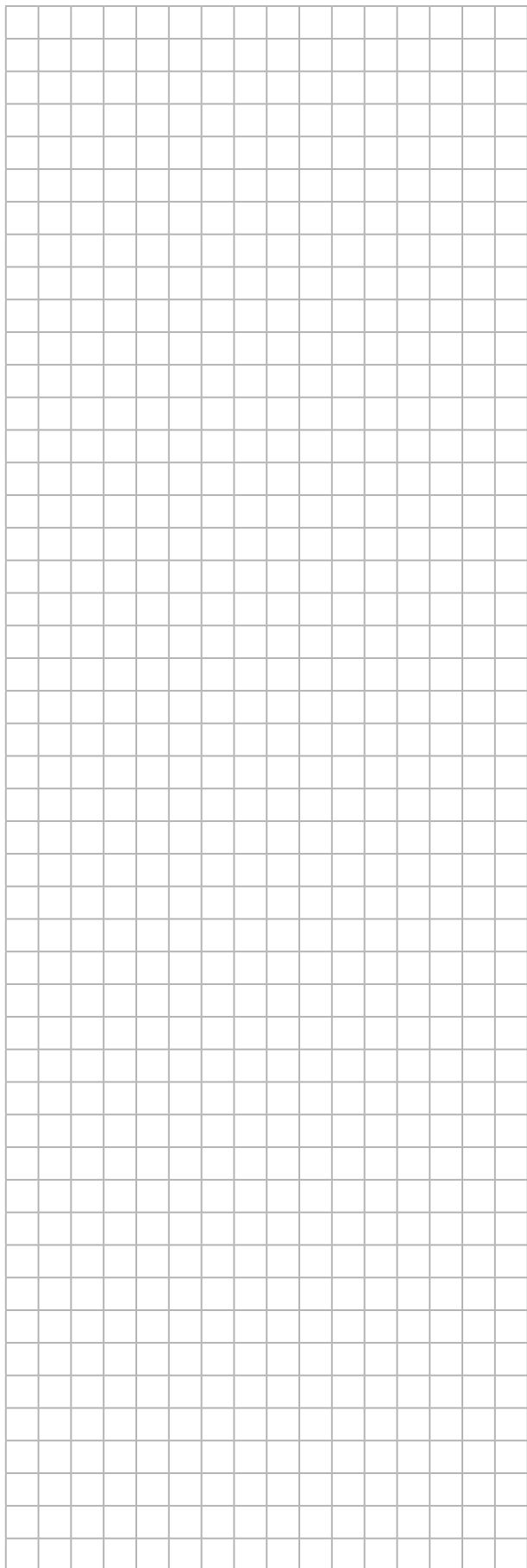
Num dos trabalhos escritos no começo do século V d.C. na Índia, encontramos uma tabela “meias-cordas”, representado na figura abaixo. Essas “meias-cordas” representam os nossos atuais senos. Os indianos pensavam na meia-corda como o real segmento em um círculo com raio particular, como, por exemplo, ocorre no livro *Almagest* de Claudius Ptolomeu (85 – 165), que utilizou um círculo de raio 60.

Texto adaptado do livro *A Matemática através dos tempos*, Editora Edgard Blücher, 2008.



Utilizando o mesmo raio considerado por Ptolomeu, o valor da meia-corda indicado na figura para um ângulo de $\theta = 45^\circ$ é:

- a) $30\sqrt{2}$. c) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$. e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
b) $15\sqrt{2}$. d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



184. (PUCC-SP)

Para desbloquear a tela de um aparelho celular, o usuário deve digitar uma senha de três algarismos quaisquer. Note que também são válidas senhas, por exemplo, 088 ou 000. Se a pessoa digita duas vezes a senha errada, o mecanismo de segurança do aparelho trava a tela por uma hora.

Rafael esqueceu sua senha, mas lembra que ela formava um número que era: quadrado perfeito, menor do que 900 e múltiplo de 3. Usando corretamente suas três lembranças, as chances de Rafael conseguir desbloquear a tela do seu celular, sem que ela trave por uma hora, são iguais a

- a) $\frac{2}{9}$. c) $\frac{3}{11}$. e) $\frac{1}{5}$.
- b) $\frac{2}{11}$. d) $\frac{1}{3}$.

185. (UCS-RS)

O volume de um prisma reto, cuja base é um retângulo com lados de medidas 4 m e 6 m, é igual a 120 m³.

Qual será o volume, em m³, do prisma reto que tem como base o polígono com vértices nos pontos médios da base do prisma anterior e que tem o triplo da altura do prisma anterior?

- a) 30
b) 60
c) 120
d) 180
e) 300

186. (UEMG)

Os números 258 e 179 têm seus algarismos escritos em ordem crescente. Os números 558 e 496 não têm seus algarismos escritos em ordem crescente. Quantos são os números de três algarismos no qual esses algarismos aparecem em ordem crescente?

- a) 84
b) 120
c) 504
d) 720

Aplique o que aprendeu

Tópico 1 – Trigonometria na circunferência, trigonometria em um triângulo qualquer, funções trigonométricas e transformações trigonométricas

- | | |
|-------|-------|
| 1. C | 12. D |
| 2. D | 13. A |
| 3. A | 14. D |
| 4. D | 15. A |
| 5. D | 16. D |
| 6. D | 17. B |
| 7. E | 18. B |
| 8. D | 19. A |
| 9. C | 20. B |
| 10. C | 21. A |
| 11. A | |

Tópico 2 – Geometria espacial e de posição

1. D
2. B
3. $01 + 02 + 08 + 16 = 27$
4. D
5. B
6. E
7. F – F – V – F – V
8. E
10. A
11. $04 + 08 + 16 = 28$
12. B
13. B
14. C
15. C
16. C
17. E
18. $01 + 02 + 08 + 16 = 27$

19. B
20. $04 + 08 = 12$
21. C
22. $01 + 04 = 05$
23. $01 + 04 + 08 + 16 = 29$
24. $01 + 04 + 08 + 16 = 29$
25. C

Tópico 3 – Poliedros

1. C
2. D
3. D
4. a) $\overline{EG} = \overline{DG'} = 5\sqrt{7} \text{ m}$
b) $7,1^\circ$
5. B
6. B
7. B
8. 134 cm
9. A
10. A
11. D
12. B
13. D
14. $01 + 02 + 08 + 16 = 27$
15. A
16. $16\sqrt{3} \text{ m}^2$
17. $01 + 02 = 03$
18. C
19. D
20. A
21. B
22. B
23. $02 + 04 = 06$
24. E
25. D
26. $01 + 04 + 08 + 16 = 29$
27. A
28. D

Tópico 4 – Corpos redondos

1. E
2. a) 148,8 m
b) $44\,044,8 \text{ m}^3$
3. C
4. E
5. B
6. E
7. D
8. C
9. 2 m
10. E
11. D
12. D
13. C
14. C
15. $01 + 08 + 16 = 25$
16. B
17. A
18. C
19. C
20. C
21. C
22. C
23. E

Tópico 5 – Matrizes, determinantes e sistemas lineares

1. C
2. C
3. D
4. A
5. B
6. B
7. C
8. $01 + 02 = 03$

9. E
10. A
11. D
12. -6
13. A
14. E
21. a) -1,6
b) $\theta = k\pi$ ou $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
22. A
23. C

Tópico 6 – Análise combinatória e probabilidade

1. E
2. D
3. A
4. E
5. C
6. B
7. B
8. B
9. C
10. A
11. D
12. D
13. A
14. E
15. C
16. B
17. A
18. A
19. A
20. B
21. B
22. A
23. D
24. C
25. D
26. D

Rumo ao Ensino Superior

1. C
2. $01 + 08 = 09$
3. $k = 6$ m
4. B
5. D
6. $m = 0$ é possível e indeterminado; $m = 1$ e $m = 2$ é impossível

7. E
8. C
9. C
10. D
11. B
12. D
13. A
21. V - V - V - F - V
22. D
23. B
24. B
25. V - V - F - F - V
26. a) Demonstração
b) $\left\{ (0, 0), \left(1, \frac{1}{2}\right) \right\}$
27. A
28. B
29. D
32. $01 + 02 + 04 = 07$
33. C
34. D
35. D
36. E
40. $02 + 04 = 06$
41. C
42. C
43. C
44. B
48. $02 + 04 = 06$
49. C
50. B
51. D
52. E
14. D
15. B
16. B
17. A
18. A
19. A
20. D
30. D
31. B
37. A
38. E
39. A
45. C
46. C
47. A
53. A
54. 08
55. E
56. A

57. D 63. A
 58. B 64. C
 59. A 65. C
 60. A 66. B
 61. D 67. D
 62. B 68. D
 69. $c = 24$; $s = 26$; $m = 30$
 70. $01 + 04 = 05$
 71. C
 72. B
 73. $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ou
 $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
 74. A
 75. B 90. E
 76. A 91. D
 77. D 92. A
 78. D 93. $\frac{1}{5}$
 79. B 94. E
 80. D 95. C
 81. E 96. E
 82. C 97. C
 83. A 98. D
 84. A 99. E
 85. D 100. D
 86. D 101. E
 87. C 102. B
 88. D 103. A
 89. B

104. B 106. D
 105. B
 107. a) 10^8 joules
 b) $A = 6$; $B = 2$; $D = R +$
 $+ Im = [4, 8]$; Período 10;
 $m = \frac{\pi}{5}$; $\frac{-\pi}{5}$
 108. D 109. D
 110. V - F - V - V
 111. A 112. B
 113. E
 114. $01 + 02 = 03$
 115. C 116. A
 117. $01 + 02 = 03$
 118. B 122. B
 119. B 123. E
 120. C 124. C
 121. A 125. A
 126. $01 + 02 + 04 + 08 = 15$
 127. C 139. E
 128. E 140. E
 129. C 141. B
 130. C 142. D
 131. B 143. C
 132. D 144. A
 133. C 145. D
 134. D 146. B
 135. D 147. A
 136. C 148. B
 137. E 149. C
 138. B
 150. $01 + 16 = 17$
 151. B 153. C
 152. 120 154. B

155. D
 156. a) 20 b) 18 c) 11
 157. B
 158. E
 159. a) 7 234,56 u.a.
 b) 14 469,12 u.v.
 160. F - F - F - F - F
 161. B 163. D
 162. B 164. D
 165. $01 + 02 + 08 + 16 = 27$
 166. D
 167. B
 168. $01 + 16 = 17$.
 169. Demonstração
 170. C 172. B
 171. E 173. E
 174. $667,8 \text{ dm}^3$
 175. 11
 176. B
 177. C
 178. D
 179. B
 180. D
 181. C
 182. E
 183. A
 184. A
 185. D
 186. A

Significado das siglas dos vestibulares

Acafe-SC: Associação Catarinense das Fundações Educacionais (Santa Catarina)
Cefet-MG: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
CPS-SP: Centro Paula Souza (São Paulo)
EBMSP-BA: Escola Bahiana de Medicina e Saúde Pública (Bahia)
EEAR-SP: Escola de Especialistas de Aeronáutica (São Paulo)
EFOMM-RJ: Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante (Rio de Janeiro)
Enem: Exame Nacional do Ensino Médio
Epcar-MG: Escola Preparatória de Cadetes do Ar (Minas Gerais)
Escola Naval Brasileira-RJ: Escola Naval Brasileira (Rio de Janeiro)
EsPCEX-SP: Escola Preparatória de Cadetes do Exército (São Paulo)
ESPM-SP: Escola Superior de Propaganda e Marketing (São Paulo)
Famema: Faculdade de Medicina de Marília (São Paulo)
Famerp-SP: Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto (São Paulo)
Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia (São Paulo)
FCMMG: Faculdade de Ciências Médicas de Minas Gerais
FEI-SP: Centro Universitário da Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)
Fepar-PR: Faculdade Evangélica do Paraná
FGV-RJ: Fundação Getúlio Vargas (Rio de Janeiro)
FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)
FMP-RJ: Faculdade de Medicina de Petrópolis (Rio de Janeiro)
Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)
IFCE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
IFPE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco
IFSC: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina
IFSP: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Ifsul-RS: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-Grandense (Rio Grande do Sul)
Imed-RS: Faculdade Meridional (Rio Grande do Sul)
IME-RJ: Instituto Militar de Engenharia (Rio de Janeiro)
Inspere-SP: Instituto de Ensino e Pesquisa (São Paulo)
ITA-SP: Instituto Tecnológico de Aeronáutica (São Paulo)
PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica de Campinas (São Paulo)
PUC-PR: Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Ucpel-RS: Universidade Católica de Pelotas (Rio Grande do Sul)
UCS-RS: Universidade de Caxias do Sul (Rio Grande do Sul)
Udesc: Universidade do Estado de Santa Catarina
Uece: Universidade Estadual do Ceará
UEFS-BA: Universidade Estadual de Feira de Santana (Bahia)
UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina (Paraná)
Uema: Universidade Estadual do Maranhão
UEM-PR: Universidade Estadual de Maringá (Paraná)
Uepa: Universidade do Estado do Pará
UEPG-PR: Universidade Estadual de Ponta Grossa (Paraná)
Uerj: Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Uespi: Universidade Estadual do Piauí
Ufal: Universidade Federal de Alagoas
UFBA: Universidade Federal da Bahia
Ufes: Universidade Federal do Espírito Santo
UFF-RJ: Universidade Federal Fluminense (Rio de Janeiro)
UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora (Minas Gerais)
UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais
UFPB: Universidade Federal da Paraíba
UFPE: Universidade Federal de Pernambuco
UFPI: Universidade Federal do Piauí
UFPR: Universidade Federal do Paraná
UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Ufscar-SP: Universidade Federal de São Carlos (São Paulo)
UFSM-RS: Universidade Federal de Santa Maria (Rio Grande do Sul)
UFTM-MG: Universidade Federal do Triângulo Mineiro (Minas Gerais)
UFU-MG: Universidade Federal de Uberlândia (Minas Gerais)
UFV-MG: Universidade Federal de Viçosa (Minas Gerais)
UnB-DF: Universidade de Brasília (Distrito Federal)
Uneb-BA: Universidade do Estado da Bahia
Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (São Paulo)
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)
Unifesp: Universidade Federal de São Paulo
Unifor-CE: Fundação Edson Queiroz Universidade de Fortaleza (Ceará)
Unigranrio: Universidade do Grande Rio (Rio de Janeiro)
Unioeste-PR: Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Unisc-RS: Universidade de Santa Cruz do Sul (Rio Grande do Sul)
Unisinós-RS: Universidade do Vale do Rio dos Sinos (Rio Grande do Sul)
UPE: Universidade de Pernambuco
UPF-RS: Universidade de Passo Fundo (Rio Grande do Sul)
UPM-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie (São Paulo)



O CONECTE agora é CONECTE LIVE!

O CONECTE, coleção voltada para o Ensino Médio que alia Tecnologia à Educação, apresenta uma novidade nesta reformulação: o CONECTE LIVE!

O CONECTE LIVE integra conteúdos digitais exclusivos às obras de autores renomados. Além disso, promove maior interação entre alunos, professores e autores. Livros digitais, objetos educacionais digitais, entre outros conteúdos interativos, compõem a coleção.

Outra novidade! As atualizações no material didático não se encerram no momento em que os livros são impressos. Ofertas complementares e atividades diferenciadas são disponibilizadas na plataforma digital ao longo de todo o ano escolar, garantindo novidades frequentes a professores e alunos!

Para conhecer todos os materiais e os serviços do CONECTE LIVE, acesse: <http://conecte.plurall.net/>