

## TD N°5 avec Solution

### LOGIQUE DES PREDICATS ASPECT SEMANTIQUE : INTERPRETATION

#### REMARQUE :

Par manque de temps, SEULS des cas de l'Exercice 1 et l'Exercice 3 vont être résolus en TD

#### Exercice1 : PRIORITE 1

Soit le langage prédicatif suivant :  $\{a, b, c, d, e, x, y\}$ , Ville(unaire), Personne(unaire), Habite(binaire) (où  $a, b, c, d, e$  sont des constantes,  $x, y$  des variables, Ville, Personne, Habite des prédicats). Et l'interprétation définie par :  $D = \{ 'Amina', 'Ali', 'Batna', 'Guelma', 'Alger' \}$  et  $I(a) = 'Ali'$ ,  $I(b) = 'Amina'$ ,  $I(c) = 'Batna'$ ,  $I(d) = 'Alger'$ ,  $I(e) = 'Guelma'$ ,  $I(Ville) = \{ 'Batna', 'Guelma', 'Alger' \}$ ,  $I(Personne) = \{ 'Amina', 'Ali' \}$ ,  $I(Habite) = \{ \langle Amina, Guelma \rangle, \langle Ali, Batna \rangle \}$ .

Interpréter les termes et les formules suivants :

$b$ ,  $y[y \leftarrow Alger]$ ,  $Ville(d)$ ,  $Habite(a, d)$ ,  $\exists x Habite(x, d)$ ,  $\exists y Habite(x, y)_{x \leftarrow Amina}$ ,  $\forall x \exists y Habite(x, y)$ ,  $\exists y \forall x Habite(x, y)$ ,  $\exists x \exists y Habite(x, y)$ ,  $(\forall x Personne(x) \rightarrow \forall x \exists y habite(x, y))$ ,  $(\forall x Personne(x) \rightarrow \exists y habite(x, y)_{x \leftarrow Amina})$ ,  $\forall x (ville(x) \vee personne(x))$ .

#### Solution Pour quelques cas :

1/  $b$  est un terme, son interprétation c'est sa valeur donnée,  $I(b) = Amina$

2/  $I(Ville(d))$  ? Vrai ou Faux ? car Ville est un Prédicat !

$I(Ville(d)) = I(Ville(I(d))) = I(Ville(Alger))$  et  $Alger \in I(Ville)$ , donc  $I(Ville(d)) = Vrai$

3/  $I(\exists x Habite(x, d))$  ?

$I(\exists x Habite(x, d)) = I(\exists x Habite(x, Alger))$

Est ce qu'il  $\exists x \in D$  Tel que  $(x, Alger) \in I(Habite)$  ???

Non, c'est-à-dire en quelque sorte « personne n'habite à Alger ! »

4/  $I(\forall x \exists y Habite(x, y))$  ?

Est-ce que  $\forall x \in D$ ,  $\exists y \in D$ , tels que  $(x, y) \in I(Habite)$  ???

Pour  $x = 'Amina'$ ,  $\exists y$  ? Oui  $y = Guelma$

Pour  $x = 'Ali'$ ,  $\exists y$  ? Oui  $y = Batna$

Pour  $x = 'Batna'$ ,  $\exists y$  ? Non

Pour  $x = 'Guelma'$ ,  $\exists y$  ? Non

Pour  $x = 'Alger'$ ,  $\exists y$  ? Non

Donc  $I(\forall x \exists y Habite(x, y)) = FAUX$

5/  $I(\forall x (ville(x) \vee personne(x))) = VRAI$  car :

$\forall x \in D$ ,  $x$  est une ville OU une personne, en détails :

Pour  $x = 'Amina'$ ,  $I(ville(x)) = Faux$  mais  $I(personne(x)) = Vrai$ ,  $Faux \vee Vrai = Vrai$

Pour  $x = 'Ali'$ ,  $(Faux \vee Vrai) = Vrai$

Pour  $x = 'Batna'$ ,  $(Vrai \vee Faux) = Vrai$

Pour  $x = 'Guelma'$ ,  $(Vrai \vee Faux) = Vrai$

Pour  $x = 'Alger'$ ,  $(Vrai \vee Faux) = Vrai$

### Exercice2 :

On considère un langage Prédicatif suivant :

a, b des symboles des constantes, f un symbole de fonction unaire et P un symbole de prédicat binaire.

Soit I une interprétation de ce langage définie par son domaine  $D = \{1, 2\}$  et par :

$I[a]=1, I[b]=2, I[f(1)]=2, I[f(2)]=1, I[P(u,v)]=V$  ou vrai si et seulement si  $u=1$ .

Etablir la valeur de vérité des formules suivantes :

- a)  $P(a, f(a))$                       b)  $P(b, f(b))$                       c)  $\forall x \forall y P(x, y)$   
d)  $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(f(x), f(y)))$                       e)  $\exists x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(f(x), f(y)))$

### Exercice3: PRIORITE 2

Soit P un prédicat d'arité 2, on considère la formule F:

$$F = \forall x \exists y P(x, y)$$

1/ Déterminer la validité de F dans les structures a/ et b/ suivantes (N: ensemble des entiers naturels):

a/  $S1 = (D1, I1) : D1 = N$  et  $I1(p(x, y)) = \text{Vrai}$  ssi  $x < y$

b/  $S2 = (D2, I2) : D2 = N - \{0\}$  et  $I2(P(x, y)) = \text{Vrai}$  ssi  $x=y$  et x divise y.

2/ F est elle valide ?

### Solution :

1/

a/ Vu au Cours, mais refaire...

$I(\forall x \exists y P(x, y)) = \text{VRAI}$  dans S1. **Solution vue dans le Cours !**

b/  $I(\forall x \exists y P(x, y)) = \text{VRAI}$  dans S2 car :

$\forall x \in D2, \exists y \in D2$  tels que

Pour  $x=1, \exists y$  ? Il suffit de prendre  $y=x$ , ici,  $y=1$ , et 1 divise 1

Pour  $x=2, \exists y$  ? Il suffit de prendre  $y=x$ , ici,  $y=2$ , et 2 divise 2

Pour  $x=3, \exists y$  ?  $y=3$

Pour  $x=4, \exists y$  ?  $y=4$

.....etc pour tous les  $x \in D2$

2/ Non F n'est pas valide puisqu'il  $\exists$  une structure S1, où F est Fausse !

### Exercice4:

a/ Soit la formule  $F1 = \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, y)$

Donner l'interprétation de F1 dans les structures suivantes:

$S1 = \{ D = \{\text{hommes}\}, P(x, y) : x \text{ est le père de } y \}$

$S2 = \{ D = \{\text{hommes}\}, P(x, y) : y \text{ est le père de } x \}$

F1 est elle valide?

b/ Soit la formule  $F2 = \forall x \forall y [ (P(x, y) \wedge P(y, x)) \leftrightarrow E(x, y) ]$

Déterminer la consistance de F2 dans la structure  $S = \{ D = N \text{ (entiers)}, P(x, y) \text{ est vrai si } x \leq y, E(x, y) \text{ est vrai si } x=y \}$ . S est elle un modèle pour F2 ? Expliquer?